COPIRELEM

51e Colloque international

sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles



Actes du colloque

Les savoirs mathématiques de l'école :

de la formation des enseignants
aux acquis des élèves

11, 12 & 13 juin | 2025



INSPE **Strasbourg**
Campus de la Meinau
141 avenue de Colmar

INSPÉ Institut national supérieur du **professorat** et de l'**éducation**
&
UFR de **mathématique** et d'**informatique**
Université de Strasbourg

irem
IREM Strasbourg
IRMA

Laboratoire interuniversitaire des **sciences** de l'**éducation** et de la **communication** | LISEC | UR 2310
Université de Strasbourg & Université Haute-Alsace & Université de Lorraine

copirelem

https://copi25.sciencesconf.org

COPIRELEM

51e Colloque international

sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles



Actes du colloque

Les savoirs mathématiques de l'école :

de la formation des enseignants
aux acquis des élèves

11, 12 & 13 juin | 2025



INSPE **Strasbourg**
Campus de la Meinau
141 avenue de Colmar

INSPÉ Institut national supérieur du **professorat** et de l'**éducation**
& UFR de **mathématique** et d'**informatique**
Université de Strasbourg

irem — IREM Strasbourg — IRMA

Laboratoire interuniversitaire des **sciences** de l'**éducation** et de la **communication** | LISEC | UR 2310
Université de Strasbourg & Université de Haute-Alsace & Université de Lorraine

copirelem

https://copi25.sciencesconf.org

SOMMAIRE

Bilan du comité scientifique 5

Arnaud SIMARD, Président du Comité scientifique

Les conférences 11

Conférence 1 : 13

Savoirs en jeu dans des situations de formation des professeurs des écoles : quelle articulation ?

Claire GUILLE-BIEL WINDER

Conférence 2 : 33

L'argumentation sur la base de données statistiques en classe de mathématiques, entre pensée critique et « littératie statistique » Une compétence clé pour affronter un monde de mythes, de faits alternatifs et d'Écoblanchiment ?

Sebastian KUNTZE

Table ronde : 63

Quelles mathématiques pour l'éducation au développement durable et à la transition écologique ?

Sylvie GRAU

Le défi écologique

Jean-Michel ZAKHARTCHOUK

Les ateliers (sommaire) *87*

Résumés 89

Les communications (sommaire) 107

Résumés 109

Les posters (sommaire) 133

Résumés 135

Bilan du Comité Scientifique du 51ème colloque de la COPIRELEM (Strasbourg)

Ce texte a été rédigé par Arnaud SIMARD, maître de conférences à l'INSPE de l'académie de Besançon, membre du laboratoire LMB et de la COPIRELEM, président du comité scientifique du colloque.

1. Thème du colloque

Thème scientifique : Les savoirs mathématiques de l'école : de la formation des enseignants aux acquis des élèves.

Thème transversal : L'éducation au changement climatique.

2. Cadrage scientifique du colloque

Les « savoirs mathématiques des élèves » sont souvent scrutés, disséqués et commentés tant par les acteurs de l'éducation que par les politiques et les médias. En témoignent l'effervescence lors de la publication des résultats des évaluations internationales (PISA, CEDRE…) et les annonces ministérielles successives. Par ailleurs le renouvellement récurrent des programmes officiels témoigne d'un questionnement autour des savoirs à acquérir, de leur hiérarchisation, du moment de leur apparition dans la scolarité de l'élève et de la chronologie de leur exposition.

Une première interrogation concerne le choix des savoirs mathématiques à enseigner, qui est corrélé au projet assigné à l'école de la République. Peut-on circonscrire les savoirs mathématiques utiles au citoyen du XXIème siècle ? S'agit-il de former des adultes responsables, autonomes et éclairés, capables d'esprit critique et d'innovation pour relever les défis qui nous attendent ? Comment articuler des connaissances, des automatismes et des compétences techniques à la réflexivité, à l'analyse critique et à la prise d'initiative ? S'il s'avère essentiel de former nos élèves à la modélisation, à poser des questions, à traiter des données… quelles situations leur proposer ? Il s'agit de réfléchir aux paradigmes dans lesquels nous sommes amenés aujourd'hui à penser mathématiquement notre monde : quelle place donner à la « pensée algorithmique », à la « pensée probabiliste », à la conception de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, à la conception de la covariation et à la complexité ? Nous devons aussi nous interroger sur la place de l'exactitude, du vrai, de la preuve, identifier la place du doute en mathématiques. Ces réflexions nous amènent à repenser les représentations des mathématiques que nous véhiculons dans la société par le choix même des situations, réponses, problèmes que nous posons en classe. Si les mathématiques sont considérées comme fondamentales, il s'agit de mieux définir ce que sont ces mathématiques. Sans renier les savoirs d'hier, il s'agit de regarder les mathématiques de demain et de préparer les jeunes générations à les fréquenter pour mieux les inventer.

Par ailleurs, ces savoirs peuvent-ils avoir un sens en dehors des autres disciplines ? Il semble indispensable de rendre disponibles ces savoirs pour résoudre des problèmes dans différents contextes. L'élève est un citoyen en devenir qui devra prendre part à la société de manière éclairée. Comment penser les savoirs mathématiques dans leurs relations avec les grandes questions sociétales et enjeux à venir ? En particulier, comment prendre en compte la sensibilisation aux enjeux climatiques dans une formation mathématique actuelle ?

Entre savoirs institutionnels et savoirs des élèves, l'action de l'enseignant se révèle cruciale et le rôle des ressources, en particulier des manuels, prépondérant. Les colloques COPIRELEM de Marseille et de Bonneuil ont questionné et montré que les élèves ne fréquentent pas tous également les mêmes savoirs. Ces écarts peuvent être liés à l'origine sociale, culturelle, au genre, mais partir du principe d'une égalité d'intelligence entre les élèves devrait nous préserver de stéréotypes qui empêchent l'accès de certains enfants à des problèmes consistants et des apprentissages ambitieux.

Au-delà des questions des savoirs mathématiques auxquels les élèves peuvent ou doivent être exposés, nous pouvons interroger les savoirs relatifs aux mathématiques (disciplinaires, didactiques et pédagogiques) en formation des enseignants ainsi que, plus généralement, les savoirs relatifs à la formation des enseignants en mathématiques (formation de formateurs). La formation initiale, la formation continue (notamment en constellation) et la formation de formateurs partagent-elles des savoirs communs ? Quels sont les savoirs indispensables aux enseignants pour enseigner les mathématiques à l'école ?

3. Engagement au changement climatique

Les organisateurs ont souhaité placer ce colloque sous la préoccupation au changement climatique.

Les participants ont été encouragés à apporter gourdes et écocups, les repas étaient végétariens, toute la vaisselle mise à disposition était lavable, les carafes d'eau ont remplacé les bouteilles en plastiques, et la nourriture, y compris celle des pauses, était confectionnée localement. Les retours d'évaluation montrent que ces choix ont été fortement appréciés.

La troisième conférence, à trois voix, avait vocation à encourager la recherche en didactique des mathématiques à s'emparer de cet engagement.

4. Bilan scientifique du colloque

Les **190** participants venaient de France, mais aussi d'autres pays francophones (Suisse, Belgique, Québec) ou non (Allemagne). Le colloque a été un lieu de rencontres et d'échanges entre différents acteurs et actrices de la formation des enseignants du premier degré : chercheurs en didactique des mathématiques, formateurs en INSPE, membres des IREM, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, maîtres formateurs ou encore référents mathématiques.

Comme à son habitude, ce colloque de la COPIRELEM a donné lieu à quatre types d'interventions. Des conférences plénières (1h15) suivies de débats (15 minutes). Des ateliers (2h30) concernant une réflexion commune que le (ou les) animateur(s) initialise(nt) à partir, par exemple, d'un exposé de travaux ou d'un questionnement sur un thème annoncé. Des communications (1h comprenant un moment de questions - échanges) de deux types : présentations de pratiques de formation des PE (suivies d'échanges) et recherches universitaires, achevées ou en cours, sur un thème lié à la formation des enseignants ou à l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire. Et enfin, une plage horaire a été consacrée à des discussions autour de posters affichés.

Trois conférences plénières ont été proposées pour approfondir le questionnement.

Claire Guille-Biel Winder (ADEF, Université Aix-Marseille) a ouvert le colloque en présentant un cadre théorique visant à l'analyse a priori de situations de formation. Ce cadre met en évidence l'articulation de différents types de savoirs nécessaires pour enseigner les mathématiques à l'école primaire au sein de ces situations. L'usage de ce cadre d'analyse, fruit d'un travail collectif au sein de la COPIRELEM (Guille-Biel Winder et Tempier, 2017 ; Mangiante et al., 2019), a été revisité à l'occasion du travail relatif à la soutenance d'une habilitation à diriger les recherches (Guille-Biel Winder, 2025).

La seconde conférence ouvrait le colloque à l'international grâce à **Sebastian Kuntze** (Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Allemagne). La conférence a introduit des résultats de recherche et leurs fondements théoriques, dans le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques à l'école primaire. La « pensée scientifique » permet de décrire des aspects clés de la compétence d'élèves dans le domaine d'intersection de la « pensée critique » et la « littératie statistique » et sert de cadre pour une intervention en classe de mathématiques. A l'heure de l'introduction des probabilités et statistiques dans les programmes de l'école en France (2025), l'exemple allemand a permis de se questionner sur le sens à donner à la littératie statistique.

Enfin, la dernière conférence était un pari que le Comité Scientifique avait à cœur de proposer. La Didactique des maths et plus généralement les mathématiques doivent s'engager dans l'éducation au changement climatique. Mais qu'en est-il réellement aujourd'hui ? C'est à cette question que **Sylvie Gros** (CREN, Université de Nantes), **Jean-Michel Zakhartchouk** (Cahiers Pédagoguqes) et **Eric Guyliardi** (CNRS, ISL, président de l'Office for Climate Education) ont répondu lors d'une conférence à trois voix. Cette conférence marque une véritable prise de conscience du travail que la communauté des didacticiens des mathématiques doit investir.

En amont du Colloque, le comité scientifique a examiné, avec rigueur et bienveillance, les propositions des 19 ateliers, 28 communications et 2 posters. Le travail du Comité Scientifique a conduit à la construction d'un programme proposant 17 ateliers, 21 communications et 2 posters. Ceci témoigne de l'importance du travail en amont et de l'exigence scientifique du colloque de la COPIRELEM.

La thématique générale de ce colloque s'est donc déclinée selon différents points de vue complémentaires et imbriqués dans les **dix-sept ateliers** et **vingt et une communications**, organisés dans des sessions en parallèle.

- **Du point de vue des savoirs mathématiques des élèves**

  Que peut-on appeler « savoirs mathématiques fondamentaux » ? Comment peut-on définir, circonscrire et évaluer ce que l'on souhaite que les élèves apprennent ? Comment enrichir les savoirs des élèves ? Vaut-il mieux penser en termes de savoirs, de connaissances, de compétences pour mieux appréhender la complexité du monde ? Plus spécifiquement, de quelles manières les savoirs mathématiques enseignés à l'école peuvent-ils être liés aux enjeux du défi climatique ?

- **Du point de la formation des enseignants**

  Comment peut-on sensibiliser les enseignants du premier degré à l'explicitation des savoirs ? Comment les former au processus d'institutionnalisation des savoirs ? Comment la formation peut-elle articuler les différents types de savoirs (disciplinaires, didactiques et pédagogiques) nécessaires pour enseigner les mathématiques ? A quel(s) moment(s) de la formation et avec quelles modalités

peut-on consolider une maitrise parfois encore fragile des connaissances à enseigner à l'école ? Comment évaluer les connaissances des enseignants et futurs enseignants ?

- **Du point de vue de la formation des professionnels de la formation**

  Les professionnels de la formation ont-ils une culture commune de la formation ? Ont-ils des savoirs et savoir-faire communs ? Quelles sont les pratiques et les dispositifs de formation initiale et continue ? Comment sont élaborés des liens entre les savoirs issus de la recherche en didactique des mathématiques et les connaissances dispensées en formation ?

- **Du point de vue épistémologique**

  Comment penser les savoirs mathématiques dans leurs relations avec les autres disciplines ? Comment la formation mathématique des élèves peut-elle éclairer le futur citoyen sur les grandes questions sociétales et les enjeux majeurs à venir ? Où en est la réflexion sur le lien entre les savoirs mathématiques, leur mode d'acquisition et le défi climatique ?

On notera que parmi les 40 propositions d'ateliers, communications et posters, 8 ont été proposées par des collègues Suisse, Belges ou Canadiens. Ceci prouve la dimension internationale affirmée du Colloque.

5. Comité scientifique du colloque

Que les membres du Comité Scientifique soient remerciés pour le travail d'étude des différentes propositions. Il reste bien entendu à terminer le travail avec l'étude des contributions écrites en vue de la publication des actes.

Cécile BARTHES-GARNIER, Formatrice, LDAR (UR 4434), INSPE, Université de Franche-Comté, IREM de Besançon.

Anne BILGOT, Formatrice, INSPE de Paris, Sorbonne Université, COPIRELEM.

Valentina CELI, Maîtresse de Conférences, Lab-E3D (EA 7441), INSPE, Université de Bordeaux, COPIRELEM.

Sylvia COUTAT, Chargée d'Enseignement, Université de Genève.

Camille DOUKHAN, Maîtresse de Conférences, LISEC (UR 2310), INSPE, Université de Strasbourg.

Claire GUILLE-BIEL WINDER, Maîtresse de Conférences, ADEF (UR 4671), INSPE, Aix-Marseille Université, IRES d'Aix-Marseille, COPIRELEM.

Sylvie GRAU, Maîtresse de Conférences, CREN (EA 2661), INSPE, Nantes Université, COPIRELEM.

Christine MANGIANTE-ORSOLA, Maîtresse de Conférences, LML, INSPE, Université de Lille, IREM de Lille, COPIRELEM.

Nadine MEYER, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg.

Sylvain ROUSSEY, Formateur, INSPE, Université de Franche-Comté, IREM de Besançon.

Catherine THOMAS, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM.

Nathalie WACH, Maîtresse de Conférences, IRMA, UFR de Maths-Info, Université de Strasbourg, directrice IREM de Strasbourg.

6. Comité d'organisation du colloque

Que le comité d'organisation du site de l'INSPE de Strasbourg soit remercié pour la qualité de l'accueil.

Charlotte DEROUET, Maîtresse de Conférences, LISEC (UR 2310), INSPE, Université de Strasbourg

Catherine THOMAS, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM

Tatiana BELIAEVA, Maîtresse de Conférences, IRMA, INSPE, Université de Strasbourg

Camille DOUKHAN, Maîtresse de Conférences, LISEC (UR 2310), INSPE, Université de Strasbourg

Nathalie DURGETTO, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Nicolas GALAND, Formateur, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Corinne JAECK, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Laurent LACROIX, Formateur, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Nadine MEYER, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Karine RUDOLFF-BEYER, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg

Danielle RUETSCH, Référente math de circonscription, conseillère territoriale en formation pour l'EAFC

Pierre RUETSCH, Formateur, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

Nathalie WACH, Maîtresse de Conférences, IRMA, UFR de Mathématique-Informatique, Université de Strasbourg, directrice de l'IREM de Strasbourg

Julien ZAHNER, Formateur, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg

CONFÉRENCES et TABLE RONDE

SAVOIRS EN JEU DANS DES SITUATIONS DE FORMATION DES PROFESSEURS DES ÉCOLES : QUELLE ARTICULATION ?

Claire GUILLE-BIEL WINDER
Maîtresse de conférences, AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
COPIRELEM, ADEF
Claire.winder@univ-amu.fr

Résumé
La question des savoirs « utiles pour enseigner » les mathématiques à l'école primaire, et par suite de ceux à aborder/travailler en formation des maîtres, constitue l'une des focales de ce colloque. L'objectif de cette conférence est de présenter un cadre théorique – dénommé CACOP – visant à l'analyse de situations de formation, et mettant notamment en évidence l'articulation de différents de savoirs nécessaires pour enseigner les mathématiques à l'école primaire au sein de ces situations. L'usage de ce cadre d'analyse, fruit d'un travail collectif au sein de la COPIRELEM a été revisité à l'occasion du travail relatif à la soutenance de notre habilitation à diriger les recherches. Nous prenons alors appui sur différentes situations de formation, certaines issues des travaux de la commission et d'autres développées lors de projets de recherche, afin d'illustrer sa mise en fonctionnement. Ce travail débouche sur des résultats concernant le cadre, son intérêt et son usage.

Au sein d'un collectif de travail issu de la COPIRELEM (Commission permanente des Irem sur l'enseignement élémentaire), nous avons élaboré un cadre théorique visant à l'analyse *a priori* de certaines situations (Brousseau, 1998) de formation, en particulier celles conçues par la commission et diffusées depuis plus de vingt ans notamment *via* les colloques et des ouvrages à destination des formateurs. Ce cadre visait à interroger les potentialités de ces situations, à en clarifier les enjeux sous-jacents, afin d'en faciliter l'appropriation par les formateurs dans un contexte de modification de la formation (initiale et continue) des enseignants (Danos, Masselot, Simard et Winder, 2015 ; De Kocker et Winder, 2016 ; Guille-Biel Winder, Masselot, Petitfour et Girmens, 2015 ; Guille-Biel Winder et Tempier, 2017 ; Mangiante, Masselot, Petitfour, Tempier et Winder, 2016 ; Mangiante et al., 2019 ; Masselot, Petitfour et Winder, 2016 ; Petitfour et Winder, 2017). À cet effet, le cadre d'analyse sert actuellement de point d'appui à la présentation des situations de formation dans les brochures *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des maths à l'école primaire à destination des formateurs des professeurs des écoles en mathématiques* et réalisées par la COPIRELEM (Celi et al., 2022 ; Guille-Biel Winder, 2025b ; Guille-Biel Winder et al., 2017). Ce cadre d'analyse met notamment en évidence l'articulation de différents types de savoirs « utiles pour enseigner » les mathématiques à l'école primaire (Houdement et Kuzniak, 1996) au sein de situations de formation (Guille-Biel Winder et Tempier, 2017 ; Mangiante et al., 2019). À l'occasion de la rédaction d'une note de synthèse en vue d'une habilitation à diriger les recherches (Guille-Biel Winder, 2025a), ce cadre d'analyse ainsi que son usage ont été revisités. Cette nouvelle étude, qui s'appuie sur des travaux collectifs réalisés au sein de la COPIRELEM, constitue l'objet de la conférence.

Ainsi la première partie de cet écrit est consacrée à la présentation du cadre d'analyse. Nous en présentons dans une deuxième partie la mise en fonctionnement sur quatre types différents de situations de formation, en prenant appui sur des situations développées notamment par la commission. Ces analyses nous permettent de revenir, dans la troisième partie sur l'usage et l'intérêt du cadre.

I - PRÉSENTATION DU CADRE D'ANALYSE DE SITUATIONS DE FORMATION

Afin de présenter le cadre d'analyse, nous prenons appui sur une situation de formation particulière développée par la COPIRELEM et intitulée *Le solide caché* (Aubertin et Girmens, 2015 ; Aubertin, Girmens, Maurin et Roye, 2006 ; Masselot et al., 2016 ; Celi et al., 2022). Nous explicitons dans un premier temps ce que nous qualifions de « situation de formation », puis une première analyse de la situation *Le solide caché* nous conduit à la présentation du cadre d'analyse et de ses fondements théoriques.

1 Situation de formation et activité induite

Une « situation de formation » est définie comme une situation – au sens de Brousseau (1998) – qui implique un formateur et des formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue) au sein d'une institution de formation d'enseignants. Par exemple, la situation de formation *Le Solide caché*, est définie comme suit : un solide (comme celui présenté figure 1), est confié à un groupe de formés (appelé groupe R) sans que les autres formés ne le voient. Ces derniers, répartis en groupes (appelés par la suite QN), doivent à terme réaliser un patron afin d'obtenir un solide de même forme et à la même échelle que le solide caché. Pour ce faire ils doivent poser des questions au groupe R dont les réponses doivent être de type « oui », « non » ou bien un nombre associé exclusivement à une mesure de longueur, ou encore « on ne peut pas répondre » si la question appelle une réponse autre.

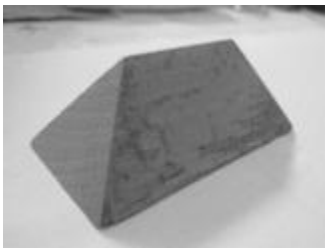


Figure 1. Un exemple de solide à reproduire

Une situation de formation est constituée d'un ensemble de tâches pouvant être proposées par un formateur à des formés. L'ensemble des tâches effectivement proposées aux formés constituent un scénario de formation. Dans l'exemple ci-dessus, les tâches (mathématiques) peuvent différer selon le groupe auquel appartiennent les formés : ceux du groupe R doivent identifier les caractéristiques du solide, anticiper les questions, et répondre aux questions ; ceux des groupes QN doivent formuler des questions en prenant en compte les réponses déjà fournies, et à terme réaliser le patron du solide. Un scénario possible en deux grandes parties est alors le suivant (Masselot et al., 2016) :

Partie I :

- *Phase 1.* Les formés de chaque groupe QN doivent se mettre d'accord et noter les questions qu'ils décideront de poser au groupe R. Les formés du groupe R, de leur côté, doivent imaginer les questions susceptibles de lui être posées ainsi que les réponses qu'il peut apporter.
- *Phase 2.* Les formés des groupes QN posent à tour de rôle une question à ceux du groupe R, pendant que le formateur note ces échanges au tableau.
- *Phase 3.* Lorsque les groupes QN estiment disposer d'informations suffisantes, ils construisent un patron du solide.
- *Phase 4.* Chaque groupe présente le patron élaboré (ou le solide qui en résulte), ce qui suscite des échanges autour des informations utilisées, puis le solide caché est enfin dévoilé afin d'être confronté aux propositions.
- *Phase 5.* Le formateur mène un temps collectif durant lequel les formés sont invités à discuter des choix des questions, des manières d'ajuster le questionnaire, des raisonnements produits, des obstacles rencontrés et des connaissances mathématiques en jeu.

- *Phase 6.* Le formateur réalise une synthèse qui reprend les éléments de savoir mathématique qu'il juge opportuns (portant sur les figures planes, les solides, la notion de patron…).

Partie II :

- *Phase 7.* Les formés sont de nouveau en groupes. Ils doivent identifier les différentes étapes de la situation mathématique qu'il leur a été proposée, et interroger les choix retenus par le formateur pour mettre en œuvre cette situation mathématique (cela peut concerner le solide choisi, la manière d'introduire la situation, de gérer la mise en commun des réponses, de dépasser les obstacles possibles…).
- *Phase 8.* Le formateur réalise une mise en commun.
- *Phase 9.* Le formateur réalise une synthèse / exposition de connaissances, voire présente la situation de classe éponyme – qui a été développée par le groupe *École Primaire* de l'IREM de Lille (Roye, 2000).

Selon la théorie de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), la réalisation de chacune de ces tâches induit une activité de la part du formé, c'est-à-dire « ce [qu'il] développe […] lors de la réalisation de la tâche » (Rogalski, 2003, p. 349). Explicitons ces activités dans le cas du scénario proposé de la situation *Le solide caché*. La partie I concerne la situation d'apprentissage relative au problème mathématique posé, alors que la partie II aborde la situation d'enseignement qui lui est associée. Au cours des phases 1, 2, 3 et 4 (partie I), les formés sont placés, comme des élèves, devant des tâches mathématiques (ils doivent, selon les groupes, identifier la nature des faces d'un solide et/ou en réaliser un patron), et au cours de la phase 5, les connaissances mathématiques en jeu sont relevées et discutées (par exemple certaines propriétés de figures planes comme le carré ou le rectangle, associées à du vocabulaire géométrique) : nous qualifions l'activité induite d'« activité mathématique ». Lors de la phase 6 (partie I), ces connaissances mathématiques – décontextualisées – sont institutionnalisées, ce qui correspond selon nous à une « activité d'analyse mathématique ». Au début de la phase 7 (partie II), les formés « changent de casquette », devenant des enseignants en formation. Ils doivent mettre en lumière les choix didactiques et/ou pédagogiques liés à la tâche mathématique (en identifiant notamment les différentes étapes dans la mise en œuvre en classe) : nous parlons alors d'une « activité didactique et/ou pédagogique ». Par la suite (fin de la phase 7 et phase 8 essentiellement, les formés sont conduits à analyser ces choix didactiques et/ou pédagogiques, ce qui les amène à expliciter certaines connaissances didactiques et/ou pédagogiques, qui sont décontextualisées et institutionnalisées lors de la phase 9 : il s'agit alors pour nous d'une « activité d'analyse didactique et/ou pédagogique ».

Ainsi, une première étude de la situation *Le solide caché* nous permet de distinguer des activités de différentes natures : activité mathématique, activité d'analyse mathématique, activité didactique et/ou pédagogique et activité d'analyse didactique et/ou pédagogique. Nous rajoutons un cinquième type d'activité, appelé une « activité de problématisation », induite par une tâche dans laquelle il s'agirait d'identifier et d'investiguer une question professionnelle, en mobilisant des concepts mathématiques, didactiques et pédagogiques – comme on pourrait le faire lors de la réalisation d'un mémoire professionnel par exemple. Allons plus loin dans la caractérisation de la nature de ces activités.

2 Facteurs caractéristiques d'une activité induite dans une situation de formation

Dans ce qui précède, nous avons défini une situation de formation comme étant une succession de tâches, qui elles-mêmes induisent une activité de la part du formé. Nous avons mis en évidence que durant le déroulement du scénario de la situation de formation *Le solide caché*, les formés peuvent être amenés à résoudre des tâches mathématiques comme des élèves ou des tâches plus ciblées sur leur futur métier d'enseignant. Notons que dans d'autres situations de formation, ils peuvent même endosser le rôle de l'enseignant (on y reviendra), voire celui de chercheur (comme dans le cadre de la réalisation d'un mémoire professionnel).

À travers les différentes tâches prescrites dans le scénario de la situation de formation *Le solide caché*, nous avons également relevé différents types de savoirs à faire acquérir aux formés. Ceci met en évidence que lors d'une activité, les formés développent différents types de connaissances relatives à ces savoirs. Pour une situation de formation donnée, nous considérons donc les différents enjeux d'apprentissage en termes de types de connaissances convoquées.

Or nos travaux révèlent que l'identification de la nature des activités induites découle de la prise en compte de trois facteurs (Mangiante et al., 2019) : le type de connaissances convoquées, le degré de décontextualisation de ces connaissances et la posture du formé dans l'activité (figure 2).

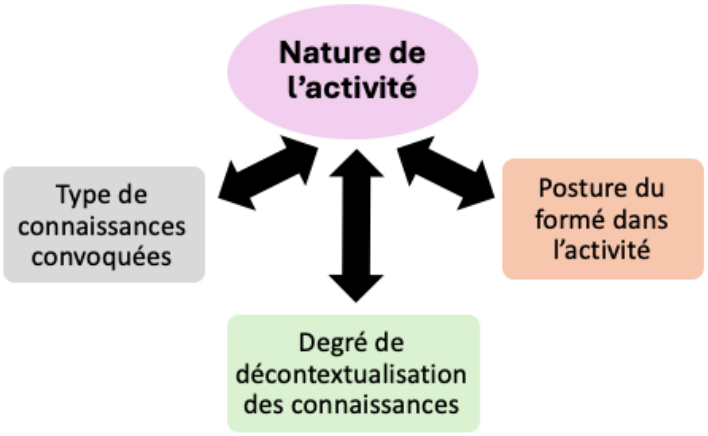


Figure 2. Trois facteurs caractéristiques de la nature d'une activité

Dans ce qui suit, nous revenons sur chacun de ces facteurs, en explicitant les éléments théoriques sur lesquels ils prennent appui.

2.1 Premier facteur : le type de connaissances convoquées

L'identification des différents types de connaissances convoquées s'appuie sur la typologie SM-SD-SP des savoirs utiles pour enseigner les mathématiques à l'école primaire élaborée par Houdement et Kuzniak (1996), reprise par Houdement (2013) et schématisée en figure 3.

Le savoir mathématique (SM) correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves : il englobe donc le savoir mathématique à enseigner mais ne s'y réduit pas.

Le savoir didactique (SD) est spécifique au contenu mathématique enseigné. C'est un savoir transposé pour être rendu accessible en formation et utilisable dans l'enseignement, car il a initialement été conçu puis nourri dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques, et plus particulièrement de celles qui portent sur le primaire. Pour Perrin-Glorian, il permet la « [mise] en relation [de] l'analyse du savoir mathématique, [d']un développement possible de l'élève et [d']une organisation possible du travail de l'élève pour apprendre, [d']une organisation de l'étude » (op. cit., 2010, p. 45).

Le savoir pédagogique (SP) ou « savoir d'expérience » (Portugais, 1995), est à mettre en lien avec les conceptions de l'apprentissage, de l'organisation et de la gestion de la classe. Il est plus indépendant des contenus disciplinaires que le savoir didactique (SD). En pratique, il apparaît souvent que SD et SP sont difficiles à discerner, raison pour laquelle la séparation entre les deux n'est pas présentée comme nette dans la modélisation proposée figure 3.

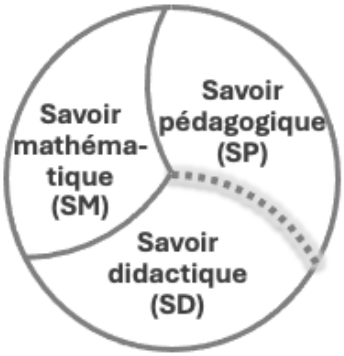


Figure 3. Modélisation de la typologie SM-SD-SP (Guille-Biel Winder, 2015a, p. 79)

En référence aux différents types de « savoirs utiles pour enseigner » que le formateur vise à faire acquérir à travers les différentes tâches prescrites dans une situation de formation, les formés développent différents types de connaissances relatives à ces savoirs : des *connaissances mathématiques*, des *connaissances didactiques*, et des *connaissances pédagogiques*.

2.2 Deuxième facteur : le degré de décontextualisation des connaissances

Concernant le deuxième facteur, nous prenons appui sur les trois degrés de décontextualisation d'une connaissance mathématique (Brousseau, 1988), ainsi que sur la dialectique outil/objet (Douady, 1986).

Une connaissance mathématique peut être :

- *mobilisée en contexte* implicitement (en acte) lorsqu'elle est utilisée comme outil dans l'activité mathématique considérée, c'est-à-dire convoquée lors de la réalisation d'actions sur des objets matériels ou symboliques ;
- *explicitée en contexte* lorsque son utilisation dans l'activité en tant qu'outil est formulée ;
- *décontextualisée* lorsqu'elle est présentée en tant qu'objet (généralement dans une phase d'institutionnalisation), pour devenir mobilisable dans d'autres contextes.

Nous transposons ces trois degrés de décontextualisation aux connaissances didactiques et pédagogiques. Ces connaissances sont :

- *mobilisées en acte* (implicitement) dans l'identification par le formé des choix didactiques ou pédagogiques effectués (par le formateur) dans l'activité mathématique considérée ;
- *explicitées en contexte* dans une analyse des implications de ces choix ;
- *décontextualisées* dans la mise en évidence et l'explicitation des concepts didactiques ou pédagogiques généraux.

2.3 Troisième facteur : la posture du formé attendue par le formateur

En appui sur les travaux de Sayac (2010) qui a identifié différentes manières dont un formateur peut s'adresser à des stagiaires (en FI ou FC), nous distinguons quatre postures spécifiques attendues de la part du formé.

Le formé est placé dans une *posture d'élève* – par rapport aux connaissances mathématiques – lorsqu'il doit réaliser la tâche mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées mobilisées dans la réalisation de cette tâche. Il est placé dans une *posture d'élève-enseignant* (au sens de « élève-ingénieur ») lorsqu'il étudie des tâches à destination des élèves ou des productions d'élèves, ou lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe d'une tâche mathématique donnée. Il est placé dans une *posture d'enseignant* lorsqu'il agit effectivement en tant qu'enseignant, qu'il entre dans un questionnement sur les pratiques de classe ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques. Enfin, il est placé dans une *posture de praticien-chercheur* lorsqu'il s'agit pour lui de problématiser une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

3 Présentation du CACOP

En résumé, dans une situation de formation, nous distinguons des activités de différentes natures, induites par les tâches proposées par le formateur. Ces activités mettent en jeu différents types de connaissances à des degrés de décontextualisation divers, et elles sont associées à des postures spécifiques attendues par le formateur (implicitement ou explicitement) de la part du formé. Le cadre d'analyse présente alors cinq paliers caractérisés par la nature de l'activité du formé, prenant en compte ces trois facteurs caractéristiques. À ce titre, nous parlons de Cadre d'Analyse Connaissances et Postures (CACOP) des situations de formation. Précisons ces paliers.

Le *palier 0* correspond à l'activité mathématique induite (qui peut éventuellement être réalisée en plusieurs phases). Cette activité mathématique peut être vécue ou évoquée (réalisée mentalement), le formé étant placé en posture d'élève par rapport aux connaissances mathématiques. Les connaissances (mathématiques) convoquée sont contextualisées, elles peuvent être implicites en contexte (en acte) ou explicitées en contexte.

Le *palier 1* est associé à l'activité d'analyse mathématique liée à l'activité du palier 0. Celle-ci fait apparaître les connaissances mathématiques décontextualisées – ce qui place les formés en posture d'élève apprenant les mathématiques – ainsi que des connaissances didactiques et/ou pédagogiques en acte, initiant alors le changement de posture des formés vers une posture d'élève-enseignant. Au cours d'une situation de formation, le passage au palier 1 porte donc sur une décontextualisation des savoirs mathématiques et s'accompagne d'un changement de posture des formés.

Le *palier 2* correspond à une activité didactique et pédagogique, toujours en lien avec l'activité mathématique du palier 0. La tâche qui induit cette activité relève d'une analyse des conditions de mise en œuvre – effective ou seulement anticipée – de la tâche mathématique et conduit à la mise en lumière des choix didactiques ou pédagogiques. Des connaissances didactique et/ou pédagogiques sont alors explicitées en contexte. Cette activité requiert une posture d'élève-enseignant de la part des formés.

Au *palier 3*, l'activité d'analyse didactique et/ou pédagogique est relative à l'activité du palier 2. Elle peut être induite par une tâche se présentant sous la forme d'un questionnement plus large portant sur les pratiques de classe (situations d'apprentissage spécifiques, gestes professionnels par exemple), ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques d'un ou de plusieurs contenus (programmes, progressions), ou bien encore sous la forme d'une mise en évidence d'outils d'analyse didactique (identification des phases d'une situation didactique, ou de types de tâches notamment). Dans cette tâche, les formés sont placés dans une posture d'enseignant. Notons que le passage au palier 3 porte sur une décontextualisation des savoirs didactiques et pédagogiques.

Enfin le *palier 4* correspond à une activité de problématisation de questions professionnelles en lien avec les pratiques de classe, les enjeux d'apprentissage et/ou les outils d'analyse didactique. Cette activité requiert une posture de praticien-chercheur notamment lorsqu'il s'agit d'élaborer une méthodologie d'analyse de cette question et d'en inférer des résultats. Le passage au palier 4, c'est-à-dire à la problématisation, s'accompagne quant à lui d'un changement de posture des formés.

La figure 4 présente une vue synthétique du CACOP des situations de formation.

Il est à noter que chaque palier correspond à une mise à distance, mettant en jeu des connaissances mathématiques et/ou didactiques et/ou pédagogiques, à partir de l'étude de l'activité d'un palier précédent. Le passage d'un palier *n* à un palier *n + 1* s'accompagne alors soit d'un changement de posture des formés, soit d'un changement du degré de décontextualisation d'au moins un type de connaissances.

Nous présentons dans la partie suivante des mises en fonctionnement du CACOP dans des situations de formation.

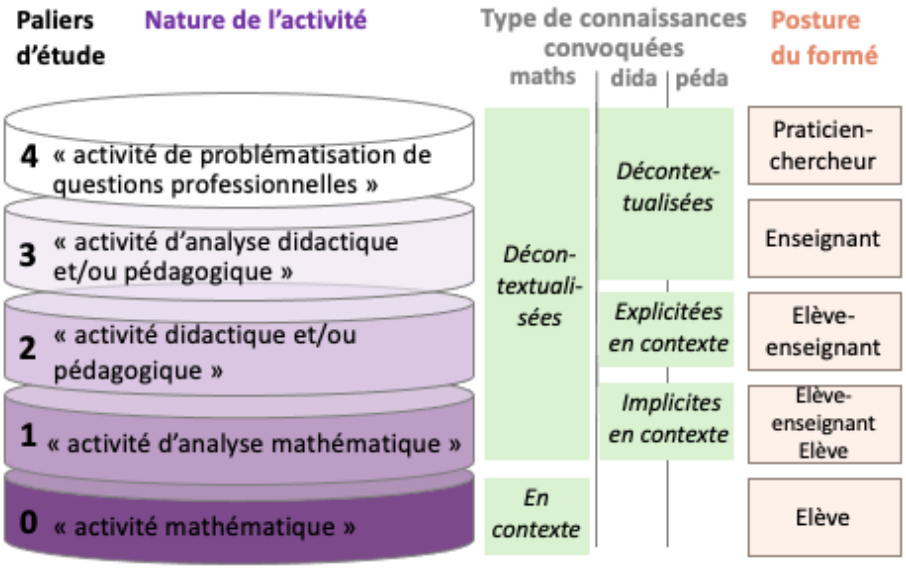


Figure 4. Présentation synthétique du CACOP

II - MISE EN FONCTIONNEMENT DU CACOP

Nous nous intéressons ici à quatre grands types de situations de formation, chacun faisant l'objet d'une partie : celles utilisant la stratégie d'homologie-transposition (Houdement, 2013), des analyses de productions écrites d'élèves, des analyses de manuels ainsi que des jeux de rôles. Nous présentons chacun de ces types de situation dans leur généralité, les illustrons par un (ou plusieurs) exemple(s) puis les analysons à l'aide du CACOP.

1 Situation de formation basée sur la stratégie d'homologie-transposition

La stratégie d'homologie-transposition (Houdement, 2013) a été mise en lumière et étudiée dès la fin des années quatre-vingt-dix par Houdement et Kuzniak (Houdement, 1995 ; Houdement et Kuzniak, 1996 ; Kuzniak, 1994). Ces chercheurs la considèrent comme emblématique des stratégies de formation qui étaient alors en cours dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM). De nombreuses situations de formation basées sur cette stratégie ont d'ailleurs été développées dès ces années-là et diffusées depuis dans des ressources à destination des formateurs notamment par la COPIRELEM[1].

Les situations de formation basées sur la stratégie d'homologie-transposition sont composées de deux grandes parties. Dans la première, le formateur prend le rôle de l'enseignant et fait vivre aux formés une situation mathématique de la manière dont il souhaiterait que ces derniers la mènent en classe. Cette partie « homologie » de la situation de formation, consiste donc en une tâche (ou une succession de tâches) mathématique(s), éventuellement adaptée(s) d'une activité de classe afin de correspondre au niveau des formés. Les formés y sont amenés à prendre le rôle des élèves. Dans une seconde partie (la partie « transposition » de la situation de formation), le formateur conduit les formés à réaliser une analyse – mathématique, didactique et pédagogique – de cette situation ainsi que de son déroulement, dans le but d'aider ces derniers à la mettre en œuvre ultérieurement dans une classe, moyennant des arrangements à décider. La situation de formation *Le solide caché* en est un bon exemple, la partie I (phases 1 à 6) de cette situation correspondant à la partie « homologie », la partie II (phases 7 à 9) à la partie « transposition ». Passons à l'analyse.

[1] On les retrouve dans les actes des colloques COPIRELEM, les *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, les *Cahiers du Formateur*, *Concertum - Les carnets de route de la COPIRELEM* (voir sur le site de l'ARPEME : https://www.arpeme.fr/wordpress/).

Une situation de formation basée sur la stratégie d'homologie-transposition débute par la résolution du problème posé, ce qui correspond à une activité de palier 0 : les formés sont mis en posture d'élève par rapport au problème mathématique ; seules des connaissances mathématiques – d'abord implicites, puis explicitées en contexte – sont en jeu. Dans la situation de formation *Le solide caché,* il s'agit des phases 1 à 4 dans lesquelles les connaissances mathématiques sont implicites, ainsi que de la phase 5, qui correspond à l'identification des aspects mathématiques et dans laquelle ces connaissances mathématiques sont révélées en contexte.

La partie « homologie » de la situation de formation se poursuit par une synthèse du formateur (correspondant à la phase 6 de notre exemple), qui permet de décontextualiser les connaissances mathématiques. Les formés sont donc toujours placés en posture d'élève (par rapport aux mathématiques). Par ailleurs, au cours de cette même synthèse, des connaissances didactiques et pédagogiques en acte, en lien avec les enjeux de la situation mathématique, sont convoquées. L'activité induite relève ainsi du palier 1, et le changement de posture des formés vers une posture d'élève-enseignant s'amorce.

La partie « transposition » de la situation de formation débute par une analyse didactique et pédagogique réalisée par les formés (correspondant aux phases 7 et 8 de notre exemple). Cette analyse place les formés en posture d'élève-enseignant et des connaissances didactiques et pédagogiques sont explicitées en contexte. L'activité induite relève alors du palier 2. Cependant, pour être menée, l'analyse s'appuie sur ce qui a été vécu et dégagé lors des phases précédentes : en réalité il existe des allers-retours permanents entre les trois paliers 0, 1 et 2.

Enfin, la synthèse du formateur (phase 9 de notre exemple) vise à placer les formés en posture d'enseignant et à institutionnaliser des connaissances didactiques et pédagogiques décontextualisées (dans notre exemple, le repérage de certaines variables didactiques, la formulation des consignes…). L'activité induite vise alors le palier 3, même si, comme précédemment, des allers-retours entre les paliers 0, 1, 2 et 3 sont à l'œuvre.

Le schéma présenté figure 5 synthétise l'itinéraire induit par une situation de formation basée sur la stratégie d'homologie-transposition.

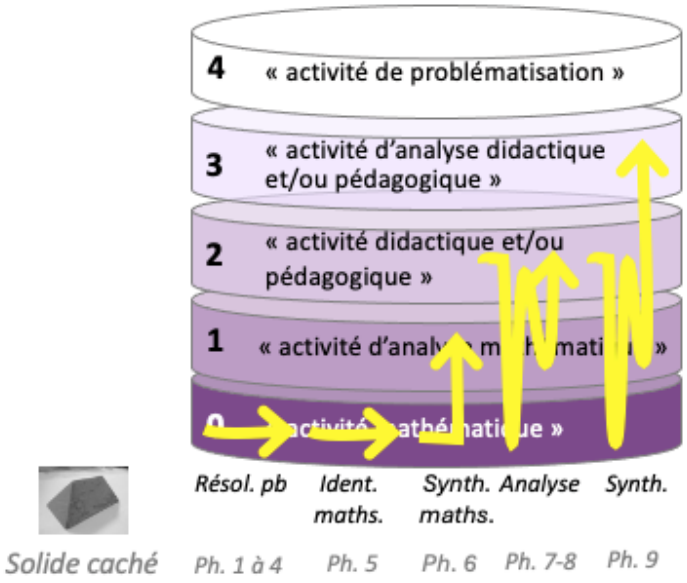


Figure 5. Itinéraire induit par une situation de formation basée sur la stratégie d'homologie-transposition (exemple de la situation Le solide caché*)*

2 Analyse de productions écrites d'élèves

Dans une analyse de productions écrites d'élèves, il s'agit d'étudier ce que produisent des élèves dans une activité mathématique (procédures et/ou ce à quoi elles aboutissent).

Commençons par un exemple. Dans la situation *Le drapeau*, les formés reçoivent un document dans lequel figurent des productions d'élèves (un exemple est donné figure 6). Le scénario se déroule comme suit (Masselot, Petitfour et Winder, 2016)[2] :

- *Phase 1.* Les formés doivent analyser individuellement chacune des productions.
- *Phase 2.* Une mise en commun des analyses produites donne lieu à des échanges collectifs.
- *Phase 3.* La synthèse, réalisée par le formateur, met en évidence le rôle essentiel de certaines variables didactiques dans la tâche de construction du symétrique d'une figure donnée (orientation de l'axe de symétrie, sa position dans la feuille, figure proposée, type de support (papier quadrillé, blanc), matériel à disposition…).

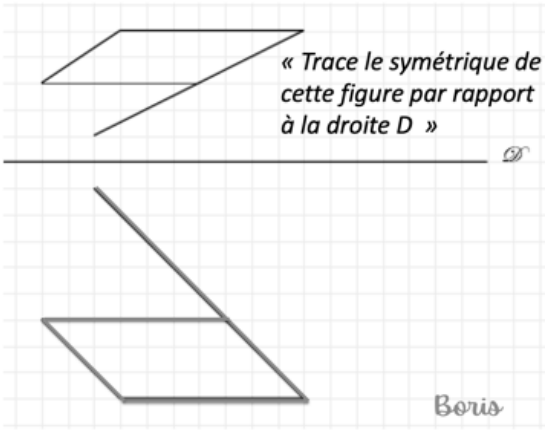


Figure 6. Extrait du document fourni dans la situation de formation Le Drapeau *: la consigne de l'exercice et la production de Boris*

Cet exemple met en évidence les deux volets que comporte une analyse de productions écrites d'élèves : l'un descriptif et l'autre analytique. Selon les cas, le volet descriptif peut concerner les actions de l'élève (la description des gestes et de leur enchainement, la chronologie de l'action), les artefacts utilisés pour les réaliser (la règle graduée ou non, l'équerre, le compas, dans notre exemple), les traces de ses actions (traces écrites), le résultat auquel elles aboutissent. Le volet analytique peut quant à lui concerner la caractérisation et l'évaluation des actions de l'élève ou de ses productions. Il aboutit à l'émission d'hypothèses sur les conceptions des élèves et les obstacles éventuellement rencontrés.

Une analyse de productions écrites d'élèves induit alors une activité d'analyse mathématique (palier 1). Il s'agit en effet de comprendre l'activité mathématique des élèves (dans notre exemple, cela correspond à la phase 1). La situation de formation débute ainsi en plaçant les formés en posture d'élève-enseignant, convoquant en acte des connaissances didactiques et pédagogiques, les connaissances mathématiques associées étant explicites et décontextualisées. Or cette analyse doit se corréler à une analyse préalable de la tâche mathématique proposée – dont l'activité induite relève également du palier 1 – et nécessite en outre la réalisation (effective ou mentale) de la tâche mathématique – pour laquelle l'activité relève du palier 0.

Lors de la mise en commun (correspondant à la phase 2 de notre exemple), les formés sont dans une posture d'élève-enseignant, les connaissances mathématiques convoquées (propriétés de la symétrie dans notre exemple) sont décontextualisées et des connaissances didactiques, par exemple en lien avec

[2] Tous les détails du scénario figurent dans le tome 2 de la brochure *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses* (Celi et al., 2022).

ce qui peut ou non provoquer des erreurs, sont explicitées en contexte (concernant la situation *Le drapeau*, il s'agit notamment de l'orientation et de la position de l'axe de symétrie dans la feuille). L'activité induite relève alors du palier 2. Cependant la mise en commun ne peut être menée sans point d'appui sur les activités des paliers inférieurs (allers-retours entre paliers).

La synthèse (phase 3) vise à terme à placer les formés en posture d'enseignant en dégageant des connaissances didactiques et pédagogiques décontextualisées (dans notre exemple, elles peuvent concerner l'enseignement de symétrie axiale). Une activité de palier 3 est ainsi visée, s'appuyant elle-même sur les activités des paliers inférieurs.

Le schéma présenté en figure 7 synthétise l'itinéraire induit par une telle situation de formation.

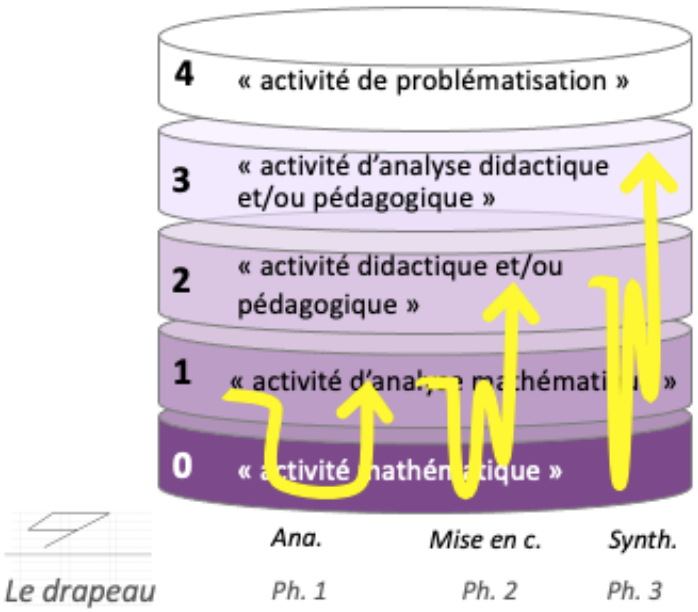


Figure 7. Itinéraire induit par une analyse de productions écrites d'élèves (exemple de la situation Le drapeau*)*

3 Analyse de manuels scolaires

Il existe plusieurs modalités associées à ce type de situation de formation. En effet, l'analyse peut être menée sur un seul manuel, ou bien sur les manuels d'un même niveau ou de niveaux successifs de différentes collections afin de les comparer. Elle peut porter sur différents objets (proposition d'enseignement sur une ou plusieurs notions, activité d'introduction d'une notion, traces écrites, évaluations des connaissances des élèves, choix d'exercices concernant une notion, adaptations envisagées…). Elle peut donc aboutir à une grande diversité d'apports didactiques (par exemple des types de tâches spécifiques à l'enseignement d'une notion, les approches à privilégier, les techniques à travailler). Dans ce qui suit, nous prenons appui sur deux modalités distinctes afin de témoigner de la diversité des possibles.

3.1 Analyse comparée de manuels

Un premier exemple – *Analyse comparée de manuels concernant l'introduction de la notion d'aire* (Mangiante-Orsola et Petitfour, 2015 ; Masselot, Petitfour et Winder, 2016) – illustre ce que peut être une analyse comparée de manuels d'un même niveau et de différentes collections concernant l'introduction d'une notion. Le scénario proposé est le suivant[3] :

[3] Pour plus de détails sur le déroulement, nous référons le lecteur au tome 1 de la brochure *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses* (Guille-Biel Winder et al., 2019b).

- *Phase 1.* Les formés doivent, par binômes, analyser la partie « recherche » ou « découverte » de la séance introductive de la notion d'aire proposée dans une collection donnée. Ils disposent pour cela d'un manuel, du guide de l'enseignant associé, ainsi que d'une grille d'analyse qu'ils doivent compléter. Cette grille les conduit à repérer les objectifs de la séance indiqués par les auteurs, les définitions des termes de surface et d'aire données et les types de tâches proposés. Pour chaque type de tâches, les formés doivent identifier les techniques pouvant être mises en œuvre ainsi que les difficultés et erreurs prévisibles pour les élèves.
- *Phase 2.* Chaque membre d'un binôme fait part de son analyse à un membre d'un autre binôme ayant étudié un manuel d'une autre collection ; les deux nouveaux binômes font alors, chacun de leur côté, une analyse comparée de l'introduction du concept d'aire des deux collections à disposition.
- *Phase 3.* Les deux binômes sont rassemblés (groupes de quatre) afin de mettre en commun leurs comparaisons et de rédiger leurs conclusions.
- *Phase 4.* Le formateur organise la mise en commun des conclusions des différents quadruplets.
- *Phase 5.* Une synthèse est menée par le formateur.

Une analyse comparée de manuel (comme celle présentée ci-dessus) porte sur une question professionnelle correspondant à une activité didactique (dans notre exemple, il s'agit d'analyser les conditions de mise en œuvre en classe d'une activité d'introduction de la notion d'aire). Elle débute en plaçant les formés en posture d'élève-enseignant qui cherche à prendre du recul sur l'enseignement d'une notion donnée (dans l'exemple sur les différents moyens permettant d'aborder la notion d'aire), et en convoquant des connaissances didactiques et pédagogiques contextualisées. L'activité induite relève ainsi du palier 2. Or cette étude (phases 1, 2 et 3 de notre exemple) amène les formés à conduire une analyse de l'activité mathématique proposée dans le manuel, induisant une activité qui relève du palier 1 : en effet les formés sont placés en posture d'élève-enseignant et doivent mobiliser des connaissances didactiques en actes (relatives au repérage des types de tâches, à l'identification de procédures, à l'anticipation d'erreurs ou de difficultés, …) et pédagogiques (associées au questionnement du déroulement pédagogique proposé par le guide de l'enseignant). De plus, cette analyse nécessite de leur part la réalisation (probablement mentale) des tâches mathématiques proposées dans le(s) manuel(s), et donc la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques : cela induit une activité qui relève du palier 0. Il est par ailleurs possible qu'à cette occasion les formés vérifient leurs propres connaissances mathématiques, éventuellement en se référant aux connaissances mathématiques décontextualisées exposées dans le(s) guide(s) de l'enseignant, induisant alors une activité relevant du palier 1.

La mise en commun (correspondant à la phase 4 de notre exemple) place les formés dans une posture d'élève-enseignant, et conduit à expliciter en contexte des connaissances didactiques (le constat de différentes approches retenues par les auteurs des manuels dans notre exemple). L'activité induite relève ainsi du palier 2.

La synthèse (phase 5) vise à dégager certains aspects didactiques. L'activité induite relève alors soit du palier 2 (lors de la mise en évidence de l'existence de différentes approches pour introduire la notion d'aire dans notre exemple), soit du palier 3 lorsqu'elle amène les formés dans une posture d'enseignant (par exemple relativement à l'enseignement de la notion d'aire, lorsqu'elle vise à traiter de la confusion aire-périmètre, ou plus généralement de l'approche à privilégier pour d'autres grandeurs). Notons enfin qu'un formateur peut exploiter cette analyse de manuels dans le cadre de séminaires de recherche, la comparaison des conceptions de différents auteurs sur l'enseignement d'une même notion amenant par exemple à interroger la construction d'une programmation de cette notion. Dans ce cas, l'activité induite relève du palier 4.

La figure 8a synthétise l'itinéraire induit par ce type d'analyse de manuels.

3.2 Évaluation didactique d'une proposition d'enseignement

Le deuxième exemple illustre l'analyse d'un ou plusieurs manuels visant à évaluer didactiquement la proposition d'enseignement d'une (ou de plusieurs notions). L'exemple donné porte sur les relations de perpendicularité et de parallélisme (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2023). Le scénario proposé est le suivant[4] :

- *Phase 1.* Le formateur présente différents critères issus de recherches sur l'enseignement des deux relations dans les manuels (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2022) qui ont déclinés selon quatre points d'attention référant à une organisation mathématique (tâches et types de tâches, techniques, savoirs en jeu, ostensifs) (Chevallard, 1999). Les formés, répartis en groupes, doivent réaliser une analyse préalable de l'enseignement de l'une des deux relations (certains groupes travaillent sur la relation de perpendicularité, les autres sur celle de parallélisme), afin notamment de s'approprier les critères.
- *Phase 2.* Une grille d'analyse reprenant ces critères déclinés selon les points d'attention est utilisée afin d'analyser un manuel donné, sur une seule des deux relations.
- *Phase 3.* Les groupes sont jumelés deux à deux afin de réaliser une synthèse de la proposition d'enseignement des deux relations dans l'un des manuel(s) donné(s).
- *Phase 4.* Le formateur gère une mise en commun des conclusions des quadruplets.
- *Phase 5.* Une synthèse portant sur l'évaluation de l'enseignement des deux relations telle qu'elle est proposée par le(s) manuel(s) est menée par le formateur.

Une évaluation didactique de proposition d'enseignement d'un (ou plusieurs) manuel(s) (comme celle présentée ci-dessus) conduit à une activité d'analyse didactique qui relève du palier 3. En effet, elle débute en plaçant les formés en posture d'enseignant qui cherche à évaluer l'enseignement d'une notion donnée (dans notre exemple celle des relations de perpendicularité et de parallélisme dans un ou plusieurs manuels selon des critères donnés), et convoque des connaissances didactiques et pédagogiques décontextualisées relatives à cette notion. Cependant l'analyse préalable (correspondant à la phase 1 de notre exemple) amène les formés à mettre en lumière les différents éléments d'une organisation mathématique de référence, ce qui les place en posture d'élève-enseignant et convoque des connaissances didactique contextualisées : elle induit donc également une activité de palier 2. Par ailleurs, cette analyse préalable prend appui sur des connaissances mathématiques décontextualisées et induit aussi une activité de palier 1.

L'analyse effective de la proposition d'enseignement du manuel (phase 2 de notre exemple) place les formés en posture d'élève-enseignant conduisant à une activité d'analyse de l'activité mathématique proposée, qui relève du palier 1. Cette étude nécessite en outre de la part des formés la réalisation (probablement mentale) des tâches mathématiques, et donc la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques contextualisées, activité induite relevant alors du palier 0.

La réalisation de la mise en commun (correspondant aux phases 3 et 4 de notre exemple) place les formés dans une posture d'élève-enseignant. Des connaissances didactiques (par exemple relatives aux différentes conceptions des relations de perpendicularité et de parallélisme en jeu dans le ou les manuels données) sont explicitées en contexte. L'activité induite relève ainsi du palier 2.

La synthèse réalisée par le formateur (phase 5) vise à dégager certains aspects didactiques (relatifs à la proposition d'enseignement de manuels concernant les relations de perpendicularité et de parallélisme dans notre exemple), et amène les formés dans une posture d'enseignant. L'activité induite relève alors

[4] Pour plus de détails sur le déroulement, nous référons le lecteur au tome 3 de la brochure *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses* (Guille-Biel Winder, 2025b).

du palier 3. De même que pour la situation précédente, le formateur peut exploiter l'analyse de manuels dans le cadre de séminaires de recherche, induisant une activité qui relève du palier 4.

La figure 8b synthétise l'itinéraire induit par le second type d'analyse de manuels.

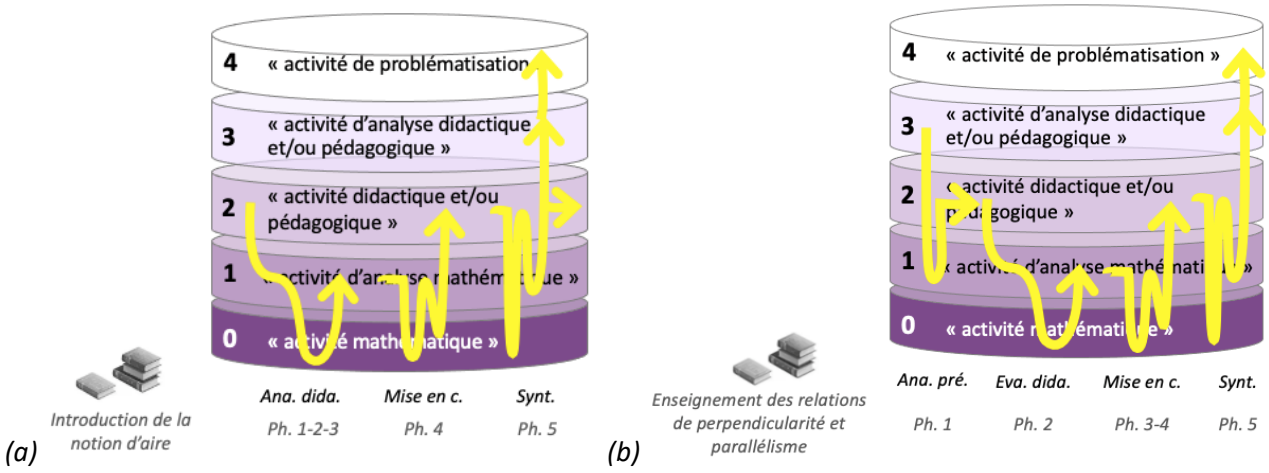


Figure 8.(a) Itinéraire induit par une analyse comparée de manuels (exemple de la situation Analyse comparée de manuels concernant l'introduction de la notion d'aire*) ; (b) Itinéraire induit par une évaluation didactique de manuels (exemple de la situation* Analyse didactique de proposition d'enseignement des relations de perpendicularité et de parallélisme*)*

4 Jeux de rôles

Le jeu de rôles est une situation de formation d'abord développée à l'Université du Québec à Montréal (UQAM) par une équipe de didacticiens des mathématiques intervenant en formation initiale des maitres du primaire (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2020). Ce type de situation place les formés dans un contexte proche de l'exercice de la classe. Il propose en effet de traiter une situation problématique d'enseignement-apprentissage *via* une mise en scène impliquant un ou plusieurs « élèves » et un « enseignant » (rôles joués par des formés). Nous présentons ce type de situation de formation en l'illustrant par un exemple qui prend appui sur un problème géométrique de reproduction de figures ayant été proposé à des élèves de 6-7 ans (Guille-Biel Winder, Mangiante-Orsola, Masselot, Petitfour et Simard, 2019a) : la situation de formation est appelée *Institutionnalisation en géométrie* (Guille-Biel Winder, 2025a).

4.1 Définition d'un jeu de rôles

Selon l'approche développée au Québec (Lajoie, 2020), un jeu de rôles est structuré en plusieurs temps :

- *Phase 1 - Mise en situation.* Il est d'abord annoncé aux formés qu'ils vont avoir à gérer une mise en situation problématique d'enseignement. Dans notre exemple, la situation problématique consiste à résoudre la tâche d'enseignement : « Proposer une institutionnalisation faisant suite à une mise en commun de la résolution du problème géométrique présenté ». Elle est proposée après que le formateur a présenté le problème donné aux élèves, des éléments du contexte de la classe dans lequel le problème a été donné (période de l'année, ressources utilisées habituellement par l'enseignant, etc.), les différentes étapes de la séance réalisées avant la phase de mise en commun des procédures de résolution des élèves. Un montage vidéo montrant différents moments collectifs de l'activité de la classe étudiée qui ont lieu avant et après une phase d'action (passation de la consigne, analyse de la figure, mise en commun) complète la présentation.
- *Phase 2 - Préparation.* Les formés sont placés en équipes. Ils doivent se préparer à jouer la scène. Pour ce faire, ils peuvent examiner les contenus mathématiques en jeu, envisager les

raisonnements sous-jacents possibles, imaginer des moyens d'intervention de l'« enseignant », anticiper les réactions de(s) « élève(s) »…

- *Phase 3 - Mise en scène.* La mise en scène se déroule avec des acteurs provenant d'équipes différentes afin d'éviter toute entente préalable sur le déroulement. Les formés qui ne jouent pas observent et prennent des notes selon différentes pistes d'observation données par le formateur (le discours de l'« enseignant », ses actions et leurs effets sur les « élèves » ; ce que disent et/ou font les « élèves » ; les interactions « élèves »/« enseignant »).
- *Phase 4 - Retour collectif.* Une discussion, animée par le formateur qui participe aussi aux échanges, s'appuie sur une « analyse à chaud » du jeu, par les acteurs et les observateurs. Il s'agit de faire émerger les choix réalisés par l'« enseignant » et de les discuter, en lien avec les objectifs de formation privilégiés par le formateur. Cette discussion peut porter sur tout aspect pertinent ayant retenu l'attention des formés comme du formateur (identification de moments clés dans l'intervention, clarification sur les concepts mathématiques impliqués, mise au jour de gestes professionnels). Dans notre exemple, les échanges peuvent en particulier porter sur la façon dont les connaissances en jeu dans la résolution du problème ont été exposées ainsi que sur le contenu et la forme de l'institutionnalisation réalisée par l'« enseignant ».
- *Phase 5 – Synthèse.* Le formateur propose une synthèse qui permet de revenir, en prenant du recul, sur certains outils ou concepts abordés et dans laquelle il institutionnalise des savoirs didactiques (relatifs, dans notre exemple, à l'organisation d'une mise en commun ainsi qu'à la formulation en géométrie avec la nécessité de se détacher du langage courant lié à la manipulation pour proposer un discours portant sur les objets géométriques).

Passons alors à l'analyse.

4.2 Analyse

Un jeu de rôles porte sur un problème professionnel à résoudre : il débute en plaçant les formés en posture d'enseignant qui cherche à prendre du recul sur un problème professionnel (dans l'exemple donné, sur l'institutionnalisation de savoirs géométriques), et vise le développement de connaissances didactiques et pédagogiques décontextualisées. L'activité induite visée relève donc du palier 3. Mais la mise en situation (phase 1) confronte les formés à un problème professionnel contextualisé et les place dans une posture d'élève-enseignant convoquant des connaissances didactiques et pédagogiques en contexte, ce qui induit une activité relevant du palier 2.

Durant la préparation (phase 2), les formés sont amenés à se placer dans différentes postures :

- en posture d'élève lorsqu'ils cherchent à résoudre le problème, mentalement ou de façon effective avec le matériel, convoquant en contexte des connaissances mathématiques ; l'activité induite relève alors du palier 0 ;
- en posture d'élève-enseignant lorsqu'ils analysent le problème du point de vue mathématique afin de dégager les connaissances (mathématiques) en jeu à institutionnaliser – ces connaissances mathématiques sont alors décontextualisées – mais aussi lorsqu'ils identifient des procédures pour résoudre le problème, ainsi que des erreurs commises et des difficultés rencontrées (dans notre exemple par le biais du visionnement de la vidéo) – des connaissances didactiques et pédagogiques sont alors utilisées en contexte ; l'activité induite relève alors du palier 1 ;
- en posture d'élève-enseignant lorsqu'ils analysent des productions des élèves – procédures et mises en mots – ainsi que la nature de leurs difficultés – manipulatoires, techniques, langagières ; l'activité induite relève alors du palier 2 ;
- en posture d'enseignant lorsqu'ils envisagent l'intervention (activité induite de palier 3).

Lors de la mise en scène (phase 3), nous distinguons les différents statuts. Le formé jouant le rôle de l'enseignant est mis dans une posture d'enseignant. Il doit, à partir des productions des élèves, s'essayer

à des formulations orales et/ou écrites des connaissances en lien avec les objectifs d'apprentissage identifiés : l'activité induite relève du palier 3. Pour ce faire, il revient sur les mathématiques en jeu pour comprendre ce que disent et font les élèves et y réagir : nous constatons ici des allers-retours entre les paliers 2, 1 et éventuellement 0. Les formés jouant le rôle des élèves sont mis dans une posture d'élève (relevant d'une activité de palier 0) : ils agissent et réagissent conformément aux difficultés ou facilités des élèves du niveau concerné qui ont été analysées lors de la préparation du jeu, mais également selon leur propre analyse de la pertinence des gestes professionnels. De nombreux va-et-vient entre les différents paliers 0, 1, 2 et 3 sont alors réalisés. Les autres formés, par leur activité d'observation, sont amenés à se positionner dans une posture d'élève-enseignant (activité relevant du palier 2). Cependant, ils doivent, pour ce faire, s'appuyer sur les analyses réalisées précédemment : des va-et-vient entre les paliers sont également réalisés.

Les questions posées lors du retour collectif (phase 4) afin d'analyser la mise en situation proposée génèrent une activité des formés positionnée au palier 2. Il peut aussi être nécessaire de discuter des procédures, des difficultés, des erreurs et de leur exploitation dans la mise en commun, amenant à une activité située aux paliers inférieurs. D'autre part, la discussion peut conduire à la mise en exergue d'éléments plus généraux portant sur la gestion des mises en commun et de l'institutionnalisation : l'activité relève alors du palier 3.

Enfin, lors de la synthèse (phase 5), l'institutionnalisation de savoirs didactiques relatifs à l'objectif annoncé du jeu de rôles induit une activité de palier 3. D'autres apports sur des connaissances mathématiques (activité de palier 1) et didactiques (palier 2) en lien avec le domaine considéré sont possibles (comme une proposition de formulation des savoirs géométriques dans notre exemple).

Le schéma présenté en figure 9 synthétise l'itinéraire induit par une telle situation de formation.

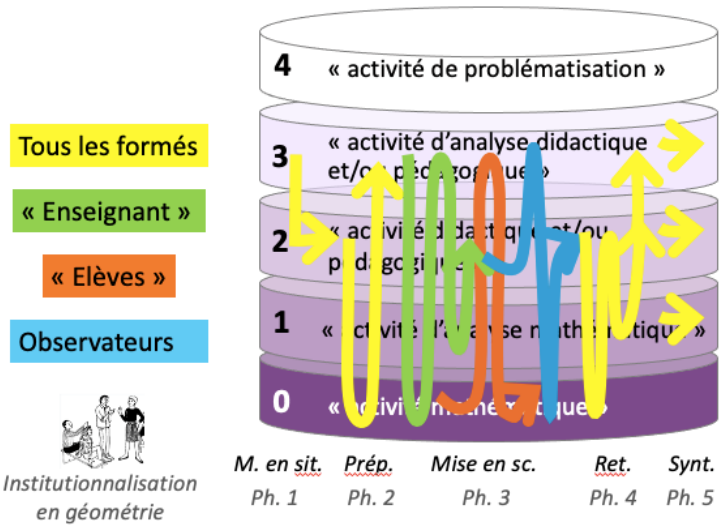


Figure 9. Itinéraire induit par un jeu de rôles (exemple de la situation Institutionnalisation en géométrie*)*

5 Synthèse des analyses

Les différentes analyses réalisées avec le CACOP nous conduisent au premier constat (figure 10) d'une grande diversité de cheminements possibles à travers les paliers, en fonction des situations proposées, voire plusieurs itinéraires envisageables au cours d'une même situation de formation, selon les objectifs du formateur.

Nous allons un peu plus loin dans la partie suivante.

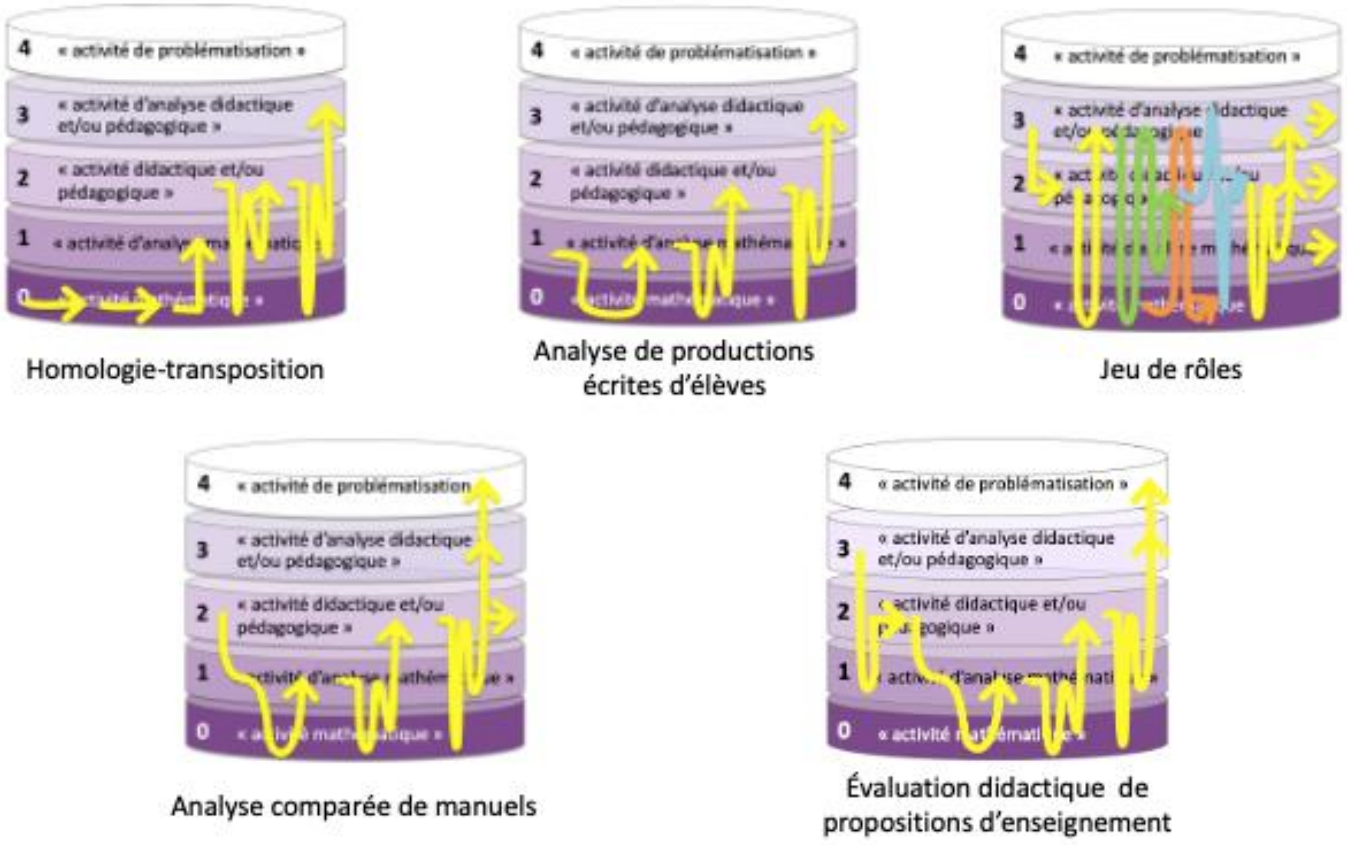


Figure 10. Synthèse des analyses de plusieurs types de situation de formation

III - CONSTATS, INTERET ET USAGE DU CACOP

La mise en fonctionnement du cadre d'analyse sur différents types de situation de formation conduit en effet à plusieurs constats concernant le cadre lui-même, son intérêt et son usage. C'est ce que nous examinons dans ce qui suit.

1 Éléments de compréhension du CACOP

Nous constatons tout d'abord que le palier 0 ne correspond pas toujours à une activité induite par l'entrée dans une situation de formation. En effet, selon le type de situation, l'entrée dans le travail induit une activité qui peut se situer à l'un ou l'autre des paliers d'étude, comme l'illustrent les exemples présentés figure 10 : palier 0 pour une situation d'homologie-transposition, palier 1 pour une analyse de productions écrites d'élèves, palier 2 pour l'analyse comparée de manuels, palier 3 pour l'évaluation didactique de proposition d'enseignement ainsi que pour les jeux de rôles.

De plus, certaines régularités observées dans les situations analysées ne suggèrent pas une organisation chronologique des différents paliers. En effet, on ne commence pas toujours par une activité induite relevant du palier 0. Par ailleurs, si l'entrée dans une situation induit une activité relevant d'un palier n, la suite du scénario de formation n'induit pas forcément d'activité relevant du palier $n + 1$.

En revanche les régularités suggèrent une *hiérarchisation des paliers*. En effet pour réaliser une tâche induisant une activité à un palier n (avec $n \geq 1$), des passages par des activités relevant de paliers inférieurs, voire des allers-retours entre différents paliers, se révèlent le plus souvent nécessaires.

Enfin, la mise au jour des allers-retours entre différents paliers révèle par voie de conséquence, la mise en lien des différents types de connaissances.

2 Caractérisation de certains types de situations de formation

Ce cadre constitue aussi un outil pour décrire certains « passages obligés » de situations de formation permettant d'en mettre au jour certaines caractéristiques. Ainsi dans les situations de formation basées sur la stratégie d'homologie-transposition, les formés, mis d'abord dans une posture d'élève (palier 0), sont, par un enchaînement de tâches successives, progressivement amenés à « monter » dans les paliers supérieurs en prenant appui sur les activités des paliers déjà atteints. Des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques sont utilisées puis dévoilées et décontextualisées, leur mise en lien résultant de la chronologie des tâches. Dans un jeu de rôles en revanche, les formés sont mis d'entrée dans une posture d'enseignant (palier 3) et le problème auquel ils sont confrontés les amène à « redescendre » dans les paliers inférieurs pour analyser les conditions de mise en œuvre de la tâche mathématique, mais aussi pour analyser la tâche mathématique elle-même. Ceci se déroule *via* des allers retours fréquents dans les différents paliers : à tout moment le passage d'un palier à l'autre est nécessaire. L'usage du CACOP conduit alors à une mise en regard de ces deux types de situations de formation.

La mise en parallèle des analyses par le CACOP des différents types de situation de formation (figure 10) souligne en outre le fait que *certains types de situation de formation sont associés à un premier palier d'étude* (celui correspondant à la mise au travail) *bien défini* : l'entrée dans une situation de formation par homologie-transposition induit une activité relevant toujours du palier 0, alors que celle d'un jeu de rôles relève du palier 3. *A contrario,* d'autres types de situation de formation *ne sont pas caractérisées par ce premier palier* : c'est le cas notamment pour les analyses de manuels. En effet l'entrée dans une analyse comparée de manuels induit une activité relevant du palier 2, alors que celle correspondant à une évaluation didactique d'une proposition d'enseignement relève du palier 3.

Enfin la synthèse des analyses (figure 10) révèle que le *premier palier d'étude n'est pas caractéristique d'un type particulier de situation de formation.* Ceci est illustré par la mise en perspective d'une évaluation didactique d'une proposition d'enseignement et d'un jeu de rôles, dont les entrées induisent toutes des activités relevant du palier3.

3 Retour sur les objectifs visés par le développement du CACOP

Revenons maintenant sur les objectifs visés par le développement du CACOP. Initialement, ce cadre visait à interroger les potentialités de situations de formation en *clarifiant les enjeux* – liés à des objectifs de formation en termes de connaissances mathématiques, didactiques ou pédagogiques – dans les différentes phases, afin que les formateurs utilisateurs de ces ressources puissent « mieux appréhender et s'approprier de manière plus fidèle les enjeux sous-jacents ainsi que les intentions des concepteurs, et qu'ils puissent adapter les situations à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées » (Guille-Biel Winder et al., 2015, p. 2).

Par rapport au premier objectif, les analyses précédemment menées mettent en évidence que le CACOP réalise *un focus sur les connaissances en jeu et leur type* dans une situation de formation, connaissances qu'il permet effectivement de clarifier *a priori*. Cela va même plus loin, puisque le CACOP permet de *rendre compte de la manière dont ces connaissances s'articulent, au sein d'une situation de formation*. De plus, la hiérarchisation relevée souligne *l'importance des connaissances mathématiques comme supports à la construction des autres types de connaissances*. D'autre part, la variété des paliers concernés par l'entrée dans le travail, ainsi que la nécessité d'allers-retours entre les différents paliers suggèrent que la (re)construction de ces connaissances mathématiques peut être favorisée par des questions d'ordre didactiques et pédagogiques – ces questions soulignant en effet l'intérêt d'une meilleure compréhension des savoirs mathématiques, voire la justifiant. Nous en concluons que *les connaissances mathématiques ne constituent pas un préalable (de l'ordre de la chronologie) à la formation des enseignants*, même si leur maîtrise constitue un passage obligé de cette formation.

Concernant le second objectif, c'est-à-dire l'appropriation des situations par les formateurs, nous pouvons dire que le CACOP renseigne le travail conjoint du formateur et des formés *via* notamment la description de l'évolution des attentes du premier et des postures occupées *a priori* par les seconds. Il fournit ainsi des éléments d'analyse *a priori* d'une situation de formation favorisant une prise de recul sur les mises en œuvre en formation d'un double point de vue : tout d'abord relativement aux postures attendues des formés – point de vue que l'on pourrait qualifier de topogénétique (Sensevy et Mercier, 2007) ; mais aussi pour ce qui concerne l'appropriation et la mise en lien des savoirs (disciplinaires, didactiques ou pédagogiques) favorisée par des allers-retours entre les différents paliers – point de vue mésogénétique (ibid.). De ce fait, le CACOP contribue à approfondir les résultats de l'étude réalisée par Sayac (2012) à propos des postures dans lesquelles le formateur engage les formés selon la stratégie de formation adoptée.

Enfin concernant le troisième objectif, associé à l'adaptation aux conditions de formation, nous avons relevé dans nos analyses que le CACOP met en évidence différents possibles lors des mises en œuvre : une même mise en activité (liée à la tâche d'entrée dans la situation) peut en effet donner lieu à différentes exploitations, dont nous rendons compte *via* les différents paliers d'étude (cela est par exemple pour la phase de synthèse d'une situation de formation de type jeu de rôles). Nous avons d'ailleurs montré que ce cadre constitue un outil pour expliciter des choix et décrire des alternatives quant à l'usage par le formateur de ces situations (Bueno-Ravel et al., 2017). D'autres perspectives d'utilisation sont alors envisageables, comme la conception de nouvelles situations de formation.

À la lumière de ces éléments se pose alors naturellement la question de la manière dont les formateurs s'emparent de ce cadre d'analyse en tant qu'outil professionnel. C'est l'objet de notre conclusion.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Non concepteurs du CACOP, Mounier et Pelay (2020) se sont emparés de ce cadre d'analyse et l'ont utilisé au cours d'un atelier de formation de formateurs. Ils dressent le constat d'une appropriation « assez aisée » par les formateurs, qu'ils soient conseillers pédagogiques de circonscription (CPC), professeurs des écoles maîtres formateurs (PEMF), formateurs INSPE ou formateurs chercheurs en didactique des mathématiques. Ils constatent également une certaine homogénéité des analyses réalisées par les différents groupes de formateurs pourtant hétérogènes.

Enfin ces chercheurs soulignent l'intérêt du CACOP en ce qu'il permet « de constituer et d'utiliser un langage commun pour discuter de certains aspects des dispositifs de formation » (op. cit., p. 197). Mais d'autres expérimentations sont à mener pour confirmer ou infirmer ces premiers constats.

Une première perspective de travail réside donc dans l'étude de l'appropriation du cadre par les formateurs. Interroger la potentialité de son usage en tant que ressource de formation de formateurs constitue une autre perspective de travail. Enfin une troisième piste consisterait à interroger la robustesse de ce cadre dans d'autres contextes et cultures de formation (notamment dans d'autres pays).

V - BIBLIOGRAPHIE

Aubertin, J.-C. et Girmens, Y. (2015). Une situation d'homologie-transposition : le solide caché. Dans *Actes du 41e colloque COPIRELEM*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Aubertin, J.-C., Girmens, Y., Maurin, C. et Roye, L. (2006). À propos de l'enseignement des solides : quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour la formation des maîtres ?. Dans *Actes du 32e colloque COPIRELEM*. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q.*, 14 – 24.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bueno-Ravel, L., Mangiante, C., Masselot, M., Petitfour, É., Tempier, F. et Winder, C. (2017). Usage d'un cadre d'analyse pour s'approprier, concevoir et enrichir des situations de formation. Dans R. Cabassut (éd.), *Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ? Actes du 43e colloque COPIRELEM*. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand. hal-02052853

Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2022). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Situations – Ressources – Analyses. Tome 2.* Paris : ARPEME.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (éd.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (91 – 118). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Danos, P., Masselot, M., Simard, A. et Winder, C. (2015). Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires ». Dans R. Cabassut (éd.), *Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ? Actes du 41e colloque COPIRELEM*. Bordeaux : IREM d'Aquitaine.

De Kocker, N. et Guille-Biel Winder, C. (2016). Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des napperons ». Dans A. Simard (éd.), *Former et se former… quelles ressources pour enseigner les mathématiques à l'école ? Actes du 42e colloque COPIRELEM*. Besançon : IREM Franche-Comté. hal-02066503

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques, 7*(2), 5 – 31.

Guille-Biel Winder, C. (2025a). *Point de vue systémique sur l'enseignement et la formation des professeurs des écoles en mathématiques : modélisations, analyses, développement de ressources*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Marseille : Aix-Marseille Université.

Guille-Biel Winder, C. (éd.) (2025b). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Tome 3.* Paris : ARPEME.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E. et Simard, A. (2019a). Identification des potentialités d'un jeu de rôles dans le cadre d'une formation de professeurs des écoles. Dans Abboud-Blanchard M. (éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines, Actes du colloque EMF* (171 – 179). Paris : IREM de Paris.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2019b). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Tome 1.* Paris : ARPEME.

Guille-Biel Winder, C., Masselot, M., Petitfour, É. et Girmens, Y. (2015). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. Dans L. Theis (éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage, colloque de l'Espace Mathématique Francophone*. hal-02052822

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, É. (2022). Outiller l'analyse de l'enseignement d'un thème géométrique dans un manuel scolaire : une grille et son utilisation. *Grand N, 110,* 19 – 45. hal-04063606

Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, É. (2023). Analyse didactique de l'enseignement de la géométrie dans les manuels scolaires : mise en fonctionnement d'une grille dans le cas du manuel Maths explicites CM1. Dans F. Wozniak (éd.), *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles, Actes du 48e colloque COPIRELEM* (297 – 325). Paris : ARPEME.

Guille-Biel Winder, C. et Tempier, F. (2017). A theoretical framework for analyzing training situations in mathematics teacher education. Dans *Proceedings of 10th Congress of European Research in Mathematical Education*. https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0056.pdf

Houdement, C. (1995). *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. Thèse de doctorat. Paris: Université Paris 7.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris : Université Paris 7.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 16*(3), 289 – 322.

Kuzniak, A. (1994). *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré.* Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 7.

Lajoie, C. (2020). Le jeu de rôles pour former à enseigner les mathématiques : potentialités et limites selon différents points de vue. Dans T. Dias (éd.), *Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXIe siècle* (35 – 46). Paris : ARPEME.

Lajoie, C. et Pallascio, R. (2001). Role-play by pre-service elementary teachers as a means to develop professional competencies in teaching mathematics. Dans *Proceedings of SEMT '01 - International Symposium Elementary Mathematics Teaching*. Prague : Université Charles.

Mangiante, C., Masselot, M., Petitfour, É., Simard, A., Tempier, F. et Winder, C. (2019). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. Dans I. Verscheure, M. Ducrey Monnier, M. Pelissier (éd.). *Enseignement et formation : éclairages de la didactique comparée* (131 – 142). Toulouse : Presses Universitaires du Midi. hal-03170004

Mangiante, C., Masselot, M., Petitfour, É., Tempier, F. et Winder, C. (2016). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des Écoles. Dans *Actes du colloque 2006-2016, scénarios de formation, 10 ans après*. http://www.espe-versailles.fr/Colloque-scenarios-2016

Mangiante-Orsola C. et Petitfour, E. (2015). L'analyse de manuels en formation : pour quoi faire ? Dans *Actes du 41e Colloque de la COPIRELEM*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Masselot, M., Petitfour, É. et Winder, C. (2016). Présentation d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des Écoles. Dans A. Simard (éd.), *Former et se former… quelles ressources pour enseigner les mathématiques à l'école ? Actes du 42e colloque COPIRELEM*. Besançon : IREM Franche-Comté. hal-02066517

Mounier, E. et Pelay, N. (2020). Quel bilan d'une action de formation continue sur les fractions pour les enseignants de l'école élémentaire ? *Rmé, 233*, 192 – 201.

Perrin-Glorian, M.-J. (2010). Des savoirs disciplinaires à construire pour une formation professionnelle universitaire des maîtres ? *Spirale – Revue de recherche en éducation, 46*, 43 – 61.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Peter Lang.

Robert, A., et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies / Canadian journal of science, mathematics, and technology education, 2*(4), 505 – 528.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en didactique des mathématiques, 23*(3), 343 – 388.

Roye, L. (éd.) (2000). *Travaux géométriques. Apprendre à résoudre des problèmes au Cycle 3*. Lille : CRDP Nord-Pas de Calais.

Sayac, N. (2010). Appréhender la formation des professeurs des écoles en France à travers la pratique des formateurs en mathématiques. Dans *Actes du congrès de l'AREF, Université de Genève* (1 – 9).

Sayac, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. *Recherche et formation, 71*, 115-130. doi.org/10.4000/rechercheformation.1991

Sensevy, G. et Mercier, A. (éd.) (2007). *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

L'ARGUMENTATION SUR LA BASE DE DONNÉES STATISTIQUES EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES, ENTRE PENSÉE CRITIQUE ET « LITTÉRATIE STATISTIQUE » UNE COMPÉTENCE CLÉ POUR AFFRONTER UN MONDE DE MYTHES, DE FAITS ALTERNATIFS ET D'ÉCOBLANCHIMENT ?

Sebastian KUNTZE
Professeur, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
kuntze@ph-ludwigsburg.de

Résumé
À l'ère du numérique, les intox trouvent de nouvelles possibilités de diffusion, sous forme de *fake news*, de complosphères, de pseudo-sciences ou autres. Un remède souvent évoqué est de cultiver la pensée critique – *Critical Thinking* (Ennis, 1989 ; McPeck, 1981) – d'un côté, et la « littératie statistique » – *Statistical Literacy* (Ben-Zvi et Garfield, 2004 ; Gal, 2002) – de l'autre, notamment en classe de mathématiques. Or ces termes restent souvent vagues, surtout pour ce qui est du domaine d'intersection entre les deux. Il faut donc éviter le danger que la pensée critique et la « littératie statistique » soient utilisées comme tournures creuses, ce qui ne serait pas d'une grande aide pour promouvoir des compétences afin de faire face aux faits alternatifs, aux pseudo-sciences, aux intox, à l'écoblanchiment (*greenwashing*) etc., surtout à une époque où les contenus de statistique et probabilité se développent dans le curriculum. L'article introduit des résultats de recherche et leurs fondements théoriques dans le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques à l'école primaire. La « pensée scientifique » – *Scientific Reasoning* (Dunbar et Klahr, 2012 ; Zimmermann, 2007) – permet de décrire des aspects clés des compétences des élèves dans le domaine d'intersection de la pensée critique et la « littératie statistique » et sert de cadre pour une intervention en classe de mathématiques. Des résultats de plusieurs études montrent où en sont les élèves allemands, la manière dont il est possible de décrire par un modèle hiérarchique leurs compétences dans ce domaine, et l'aide à leur apporter pour qu'ils progressent en argumentation sur la base de données statistiques. Ces résultats de recherche demandent des changements potentiels dans la formation universitaire des futur(e)s enseignant(e)s de l'école primaire, pour les rendre plus attentifs, dans la pratique d'enseignement, aux possibilités d'argumentation sur la base de données statistiques.

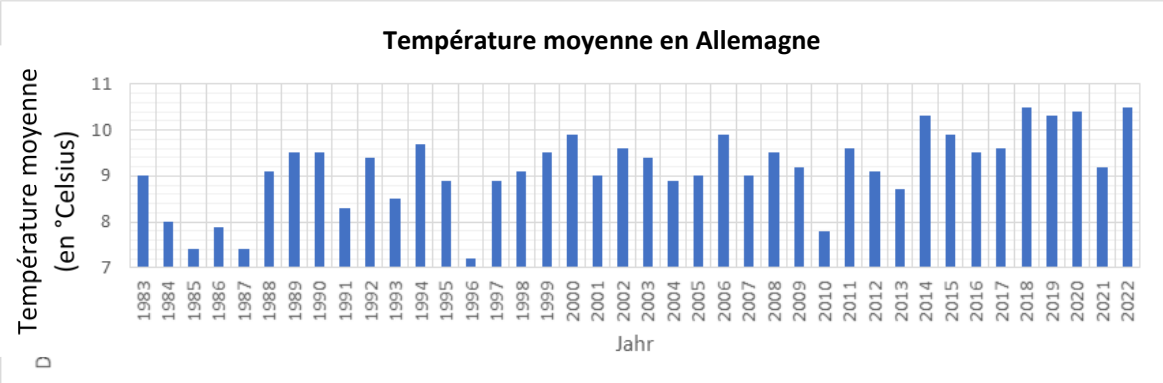
I - UN EXEMPLE INTRODUCTIF

On peut rencontrer l'argumentation sur la base de données statistiques dans les médias, par exemple, mais qu'est-ce que cela pourrait signifier pour l'enseignement en classe des mathématiques ? Et est-ce que c'est réaliste à partir du niveau de l'école primaire ? Pour plonger directement dans le sujet, voici un exemple introductif basé sur une tâche (figure 1). Ce problème a été présenté à des élèves de 4ème année de l'école primaire (élèves de 9 à 11 ans) dans le cadre d'un travail de master (Knöbel, Krummenauer et Kuntze, 2025).

Dans nos études antérieures (Krummenauer et Kuntze, 2020, 2018 ; Krummenauer, Stark, Schwaderer et Kuntze, 2022 ; Krummenauer, Gutensohn, Aichele, Emhart et Kuntze, 2022, 2023), nous avons relevé la difficulté du problème, notamment parce que sa résolution nécessite une prise de recul par rapport aux données statistiques mais aussi par rapport à l'argumentation donnée.

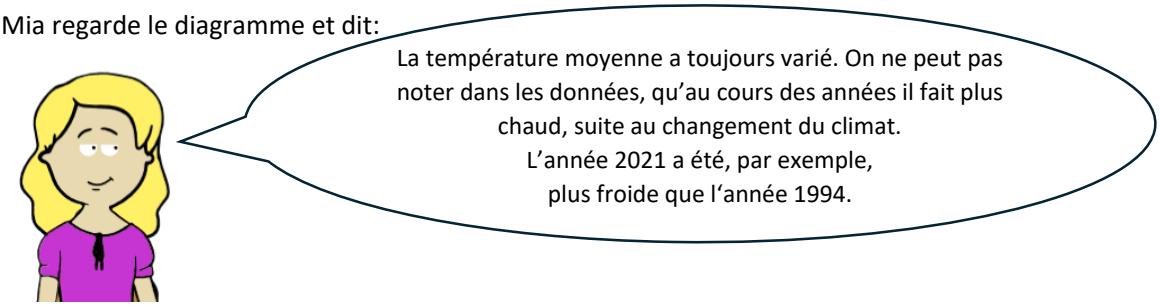
Regarde les diagrammes qui suivent et lis ce que disent les enfants.
Juge s'ils ont raison et justifie ta décision.

Problème 1 B:



Source: DWD – Deutscher Wetterdienst (o. J.): Zeitreihen und Trends, verfügbar unter: https://www.dwd.de/DE/leistungen/zeitreihen/zeitreihen.html#buehneTop (Stand: 09.05.2024)

Mia regarde le diagramme et dit:



Mia, a-t-elle raison? Justifie ta réponse.

_____

_____

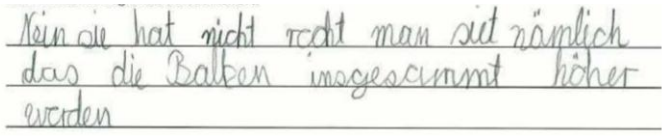
Figure 1. Exemple de problème d'argumentation sur la base de données statistiques (Knöbel, Krummenauer et Kuntze, 2025, traduit)

Plus spécifiquement, l'affirmation de l'élève fictive Mia donnée dans le problème contient déjà une argumentation sur la base de données statistiques, à savoir la référence à la comparaison entre les températures moyennes des années 2021 et 1994. Mia en déduit que l'on ne peut pas noter qu'« au cours des années, il fait plus chaud ». Même si la comparaison des deux données est correcte, la déduction peut être contestée et même réfutée, avec référence au même ensemble de données, en indiquant le plus grand nombre des années avec une température moyenne plus élevée à droite dans le diagramme (avec plusieurs possibilités d'exprimer la tendance vers le haut mathématiquement, par exemple « les cinq années les plus chaudes se situent après 2013, les cinq années les moins chaudes avant 2011 »).

L'exemple proposé en figure 1 possède des traits communs avec des messages qui tentent de propager des faits alternatifs : une affirmation ou une interprétation de données statistiques sèment le doute face à la perspective scientifique d'une manière relativement générale (« on ne peut pas noter que … »), en appui sur une vue partielle des données mais relativement facile à suivre. Le destinataire voit que la comparaison entre 2021 et 1994 est correcte, et il est tenté de ne pas vérifier si la conclusion est suffisamment justifiée en sa généralité par cette référence aux données sélectionnées. Certes l'attribution au changement du climat ne peut pas être établie en se basant seulement sur les données statistiques présentées. Il y a donc là un potentiel à une discussion approfondie, à condition que les interrogés aient les savoirs nécessaires à une telle considération de causalité.

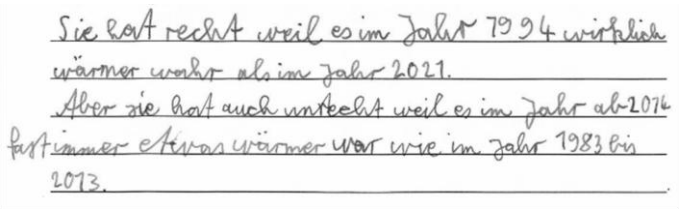
La figure 2 montre deux exemples de réponses par élèves de 4ème année d'école primaire allemands.

(a)



Non, elle n'a pas [raison], car on voit que les barres deviennent plus hautes globalement.

(b)



Elle a raison, parce qu'en 1994, il a vraiment fait plus chaud qu'en 2021. Mais aussi, elle n'a pas raison, parce qu'à partir de 2014 il a fait presque toujours un peu plus chaud que de 1983 à 2013.

Figure 2. Réponses de deux élèves d'école primaire et leur traduction (Knöbel, Krummenauer et Kuntze, 2025)

Dans le cas de ces réponses, l'argumentation de Mia est réfutée ou contestée, et des arguments contre l'affirmation de Mia sont apportés. Les assertions de Mia peuvent être considérées comme des faits affirmatifs : si elles étaient considérées comme des faits alternatifs (et pas comme affirmation d'élève), les réponses (a) et (b) présentées dans la figure 2 montreraient comment les élèves peuvent les critiquer et donc comment ils peuvent faire face à de telles affirmations sur la base des données statistiques dont ils disposent dans le diagramme.

II - INTRODUCTION ET CADRE THÉORIQUE : PENSÉE CRITIQUE, LITTÉRATIE STATISTIQUE ET RAISONNEMENT SCIENTIFIQUE

L'enseignement en classe de mathématiques (comme aussi dans beaucoup d'autres matières) se trouve de plus en plus confronté au défi de répondre aux faits alternatifs, aux complosphères, aux pseudo-sciences, à l'écoblanchiment, aux *fakes news* et à d'autres tentatives de désinformation. Un élément commun à ces phénomènes réside dans les défauts dans le fondement de faits (Williamson, 2016). Heureusement, pour traiter avec ces tentatives de désinformation, comme d'ailleurs avec de l'information plus généralement, des stratégies utiles existent. Un premier exemple de stratégie réside dans la possibilité de structurer l'information donnée, à savoir *identifier les affirmations/interprétations et leurs justificatifs* (si on peut en trouver). Un second exemple de stratégie consiste à *chercher des contre-exemples*.

Dans les discours autour des faits alternatifs et l'enseignement scolaire, on rencontre des « solutions » fréquemment évoquées : la « pensée critique » et (en cas de rapport à des données statistiques) la « littératie statistique » sont présentés comme compétences clés pour affronter les faits alternatifs. Pour regarder de plus près ces termes et explorer comment – surtout en combinaison – ils peuvent servir de boussole pour préparer les élèves à faire face aux faits alternatifs de manière argumentée en classe des mathématiques, nous examinons dans ce qui suit les définitions et significations de la « pensée critique » et de la « littératie statistique ».

1 Pensée critique (*Critical Thinking*)

Autour de la pensée critique, il y a une longue tradition scientifique avec un grand nombre de définitions différentes (Dewey, 1933 ; Ennis, 2002, 1989 ; Ennis et Millman, 2005 ; Innabi et Sheikh, 2007 ; Lipman, 1991 ; McPeck, 1981 ; Siegel, 1988 ; Willingham, 2007).

Pour en introduire quelques exemples, la pensée critique a été définie comme :

- un ensemble de « capacités et dispositions », qui sont nécessaires à « l'emploi d'un scepticisme réfléchi » (McPeck, 1981, p. 24, traduit) ;
- une « pensée, qui rend possible de juger, qui est basée sur des critères, qui se corrige soi-même et qui est sensible aux différents contextes » (Lipman, 1991, p. 124, traduit) ;

- la « perception des deux côtés d'un propos, l'attitude d'être ouvert envers l'évidence nouvelle qui ne correspond pas aux idées initiales, la réflexion sans émotions, l'exigence pour les affirmations d'être supportées par de l'évidence, la déduction de conclusions à partir de faits, la résolution de problèmes, etc. » (Willingham, 2007, p. 8, traduit) ;
- une pensée « raisonnable et réflective qui se focalise sur la décision à quoi croire et quoi faire » (Ennis, 1987, p. 10, traduit).

Pour Ennis (2002, 1989), il existe une taxonomie de sous-aspects de la pensée critique, qui distingue deux composantes, à savoir : les « capacités » et les « dispositions ». Les « capacités » couvrent les aspects cognitifs de la pensée critique (par exemple « identifier clairement le sujet traité », « définir des notions », « identifier ce qu'on assume tacitement », « juger sur la fiabilité de sources », etc.). Les « dispositions » sont liées à un « esprit critique » – une notion qui devrait définir « si quelque chose doit être regardé avec critique ». Les autres dispositions correspondent à « la tendance à ce que les décisions doivent être justifiées » et le point de vue que « les affirmations doivent être articulées de manière précise et claire » (Ennis, 2002, 1989). Dans le cadre de cette approche, le *Cornell Critical Thinking Test Level Z* a été développé par Ennis et ses collègues (Ennis et Millman, 2005). Cet instrument inclut des sous-tests sur la pensée inductive, la pensée déductive, le jugement de valeurs, l'observation, la fiabilité, les hypothèses et la signification (ce qui implique aussi les définitions, ainsi que la capacité de traiter avec de l'ambigüité). Ennis et Millman (2005) retiennent eux-mêmes que ce test capture des capacités générales, qui couvrent beaucoup d'aspects de la pensée critique.

Cet aperçu de différentes conceptualisations de la pensée critique – surtout si on veut améliorer la pensée critique dans le cadre d'interventions à l'école – amène au questionnement suivant : quels sont les aspects centraux de la pensée critique ? Existe-t-il une idée focale commune ? Quelles formes de pensée ou de capacités cognitives *ne seraient pas* de la pensée critique selon ces définitions ? Répondre à ces questions d'une façon unanime sur la base des différentes approches à la pensée critique ne parait guère possible à cause de la divergence des approches. Les divergences déjà en matière de définitions, comme la multitude de notions et de leur signification, rendent donc difficiles de potentielles mesures d'amélioration de la pensée critique.

2 Littératie statistique (*Statistical Literacy*)

Dans les caractérisations de la littératie statistique, la capacité de participation en tant que citoyen et citoyenne responsable en traitant avec les données statistiques joue souvent un rôle primordial. Ainsi la littératie statistique a été décrite comme la « capacité de comprendre les résultats statistiques, qui sont présents dans notre vie quotidienne et les évaluer de manière critique – jumelée avec la capacité de valoriser les contributions que la pensée statistique peut faire dans les décisions publiques, privées, professionnelles et personnelles » (Wallman, 1993, p. 1 ; traduit). Dans cette définition, on peut noter que la pensée critique apparaît sous la forme d'une évaluation « de manière critique » des résultats statistiques. On peut donc en déduire que certains aspects de la pensée critique sont nécessaires pour caractériser la littératie statistique dans le cadre de cette approche.

Watson (1997, voir aussi Watson et Callingham, 2003) a conceptualisé la littératie statistique comme une compétence relevant de trois niveaux hiérarchisés : (1) compréhension de base de définitions et de procédures (par exemple la lecture de diagrammes et de tableaux) ; (2) « intégration des concepts et du langage statistiques dans un contexte élargi » ; (3) « capacités de 'pensée critique' permettant de questionner des affirmations sans justification statistique suffisante » (Watson, 1997, p. 110, traduit). Dans cette définition, la pensée critique joue de nouveau un rôle important, mais elle est utilisée cette fois-ci comme élément de distinction entre les niveaux de compétence : le « critique » est nécessaire au niveau le plus haut de la littératie statistique. Dans l'approche de Gal (2002), on peut observer le « critique » dans des rôles encore différents. Ce chercheur présente en effet une liste d'éléments de connaissances et d'attitudes (figure 3), en tant que « facteurs nécessaires » à la littératie statistique.

Parmi les éléments de connaissances nécessaires à la littératie statistique, on trouve les « connaissances critiques ». Dans les dispositions et attitudes nécessaires, on retrouve une « attitude critique ».

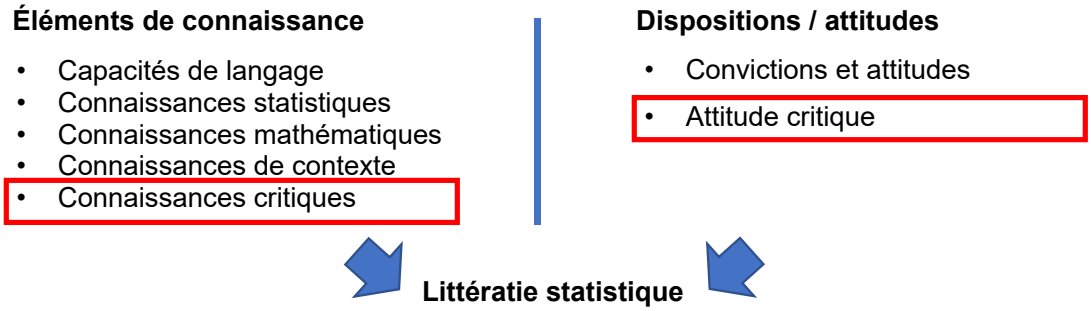


Figure 3. Modèle de « facteurs nécessaires » à la littératie statistique selon Gal (2002, p. 4, traduit)

En conclusion et sur la base de ces exemples de conceptualisations de la littératie statistique, on peut surtout retenir qu'il existe un domaine d'intersection entre littératie statistique et pensée critique, car des aspects de la pensée critique apparaissent comme éléments nécessaires aux définitions de la littératie statistique introduites ci-dessus.

En même temps, le domaine d'intersection entre pensée critique et littératie statistique paraît être un point faible dans les caractérisations de la littératie statistique. Une explication potentielle de ce phénomène réside dans le fait que les traditions de recherche de littératie statistique et de pensée critique se sont plutôt développés séparément. En conséquence de quoi, nous constatons une absence de fondement théorique commun pour pourvoir décrire le domaine d'intersection.

Pour améliorer cette situation, le projet CCTST (*Connecting Critical Thinking and Statistical Thinking*) en coopération avec Einav Aizikovitsh-Udi (Israël) a exploré le domaine d'intersection entre la pensée critique et la littératie statistique à travers des études théoriques et empiriques (Kuntze, Aizikovitsh-Udi et Clarke, 2017, 2013 ; Kuntze, Aizikovitsh-Udi et Krummenauer, 2022). Dans la sous-partie suivante nous esquissons ce fondement théorique en prenant appui sur une troisième théorie, celle portant sur le raisonnement scientifique.

3 Une solution pour décrire le domaine d'intersection entre la pensée critique et la littératie statistique : la théorie sur le raisonnement scientifique

Le raisonnement scientifique correspond à une approche avec une base de résultats souvent répliqués empiriquement (Bullock et Ziegler, 1994 ; Klahr et Dunbar, 1989 ; Kuhn, 1989 ; Kuhn, Amsel et O'Loughlin, 1988 ; Zimmerman, 2007), qui peut servir de fondement théorique pour décrire des éléments clés dans le domaine d'intersection entre la pensée critique et la littératie statistique.

D'une part, le raisonnement scientifique implique la séparation entre théorie et hypothèse(s) d'un côté et évidence de l'autre. La sphère de la théorie et des hypothèses contient des affirmations, alors que la sphère de l'évidence contient des données mesurées, des résultats d'expérimentations, des observations directes, c'est-à-dire la base de faits qui est disponible. Dans le domaine de la pensée critique, cela signifie une séparation entre affirmations ou suppositions d'un côté et faits (propos, qui, en quelque sorte, peuvent être considérés comme établis) de l'autre. Dans le domaine de la littératie statistique, les interprétations de données statistiques jouent le rôle de la théorie, alors que les données statistiques jouent le rôle de l'évidence, comparable à une base de faits.

Du point de vue du raisonnement scientifique, la coordination entre théorie et évidence (Zimmerman, 2007) revêt un aspect primordial : l'existence d'une contre-évidence (évidence qui contredit la théorie), doit mener à la réfutation de la théorie. Or plusieurs études montrent des faiblesses et des limitations dans le raisonnement scientifique (Bullock et Ziegler, 1994 ; Chinn et Brewer, 1998 ; Klahr et Dunbar, 1989 ; Koerber, Sodian, Thoermer et Nett, 2005 ; Kuhn, Amsel et O'Loughlin, 1988 ; Kuntze et Reiss, 2004 ;

Reiss et Thomas, 2000 ; Thomas, 1997 ; Tschirigi, 1980). Par exemple une absence de réfutation de la théorie malgré l'existence d'une contre-évidence a été observée : souvent dans ces cas, au lieu de réfuter la théorie, l'évidence est modifiée jusqu'à ce qu'elle soit conforme à la théorie (Chinn et Brewer, 1998). Un autre exemple de limitations dans le raisonnement scientifique consiste en l'observation que, pour une hypothèse donnée, seule l'évidence confirmative est recherchée, la contre-évidence restant ignorée ou n'étant pas prise en considération (Dunbar et Klahr, 2012).

Ces limitations dans le raisonnement scientifique peuvent aussi être regardées comme un manque de stratégies de raisonnement scientifique, voire comme un déficit dans leur emploi. La figure 4 met en évidence des exemples de stratégies de raisonnement scientifique (numérotées de (1) à (4), côté gauche de la figure), présentées avec le domaine d'intersection entre pensée critique et littératie statistique (côté droit de la figure). Leurs éléments correspondant à la théorie et à l'évidence en termes de raisonnement scientifique y figurent également.

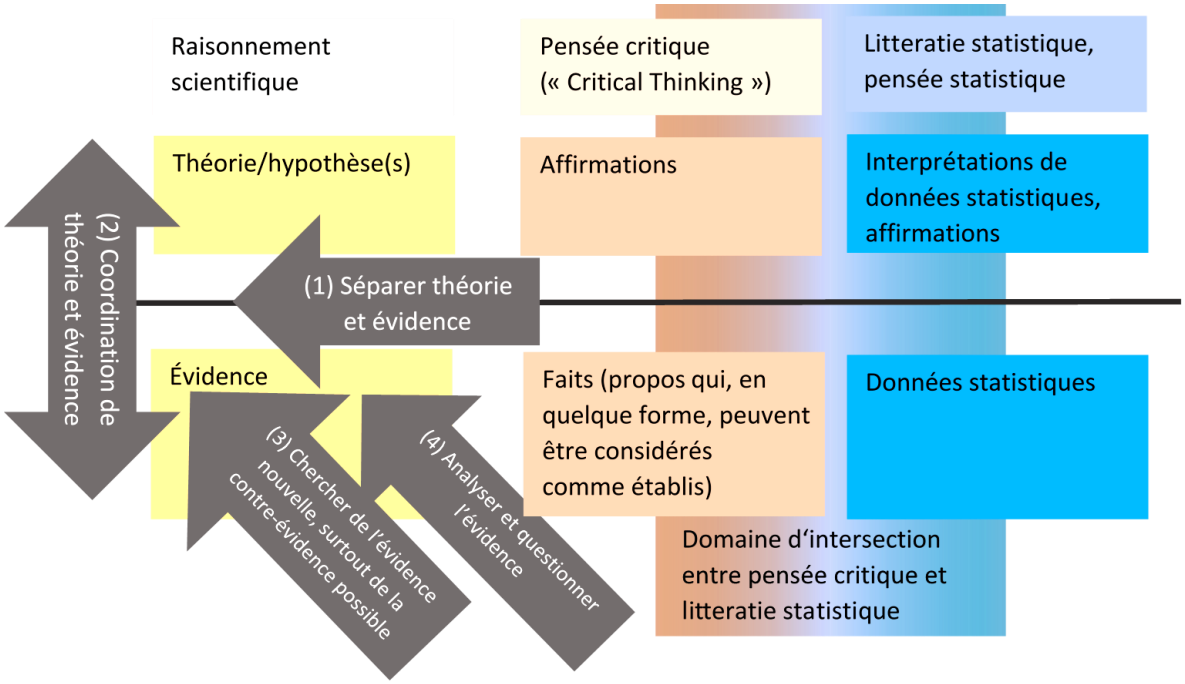


Figure 4. Exemples de stratégies en raisonnement scientifique et le domaine d'intersection entre pensée critique et littératie statistique (Kuntze, Aizikovitsh-Udi et Krummenauer, 2022, p. 184, traduit)

Dans le domaine d'intersection entre pensée critique et littératie statistique, des stratégies en raisonnement scientifique peuvent être identifiées :

- séparer (activement) théorie et évidence : il s'agit d'analyser dans un propos les éléments appartenant à la sphère de la théorie/des hypothèses et ceux pouvant servir d'évidence ;
- coordonner théorie et évidence : il s'agit de rejeter la théorie en cas d'évidence qui la contredit ;
- chercher de l'évidence nouvelle, surtout de la contre-évidence (si on en peut trouver) ;
- analyser et questionner l'évidence : cette stratégie est nécessaire surtout en présence de variabilité statistique qui, pour déduire des conclusions des données statistiques, peut réduire la fiabilité en valeurs exactes dans les données.

En résumé, on peut conclure que la perspective théorique du raisonnement scientifique permet d'établir la consistance avec les éléments-clés de la théorie provenant de la recherche sur la pensée critique d'un côté et sur la littératie statistique de l'autre (ainsi que parmi les deux) (Kuntze, Aizikovitsh-Udi et Clarke, 2013, 2017). Sur cette base, on peut concevoir la littératie statistique comme une compétence selon Weinert (2001, 1996), qui inclut les composantes du raisonnement scientifique en traitant les données statistiques (avec les dispositions motivationnelles et intentionnelles nécessaires à ce propos)

(Kuntze, Martignon, Vargas et Engel, 2015 ; Kuntze, 2013 ; Kuntze, Lindmeier et Reiss, 2008). De cette manière, il est possible de considérer l'argumentation sur la base de données statistiques comme sous-composante importante au cœur de la littératie statistique.

III - ARGUMENTATION SUR LA BASE DE DONNÉES STATISTIQUES

La figure 5 présente un autre problème accompagné d'un exemple d'argumentation sur la base de données statistiques, exemple destiné à mener à davantage d'argumentation. Sur cette figure, un diagramme montre les précipitations moyennes de 2003 à 2020, ainsi qu'un personnage affirmant qu'au vu des précipitations (selon les données) « il n'y a pas d'effet de changement de climat » dans la région en question. Cette affirmation semble contredire le pronostic de pluies intensifiées, mais la structure de l'argumentation parait correcte à première vue. Cet exemple constitue un bon cas pour illustrer l'emploi de la stratégie (4) explicitée dans la figure 4, à savoir : analyser et questionner l'évidence. Cette stratégie fait partie du raisonnement scientifique dans le domaine d'intersection entre la pensée critique et la littératie statistique, et peut aider à se rendre compte que l'usage des valeurs moyennes ne peut guère éclairer des effets éventuels de changement de climat : en effet les extrêmes (pluies excessives d'un côté et sécheresses de l'autre) ont tendance à rester cachés derrière les valeurs moyennes. Dans le cas de ce problème (figure 5), chercher et consulter plus de données statistiques (par exemple en suivant le lien figurant au-dessous du graphique) peut mener à une argumentation plus développée.

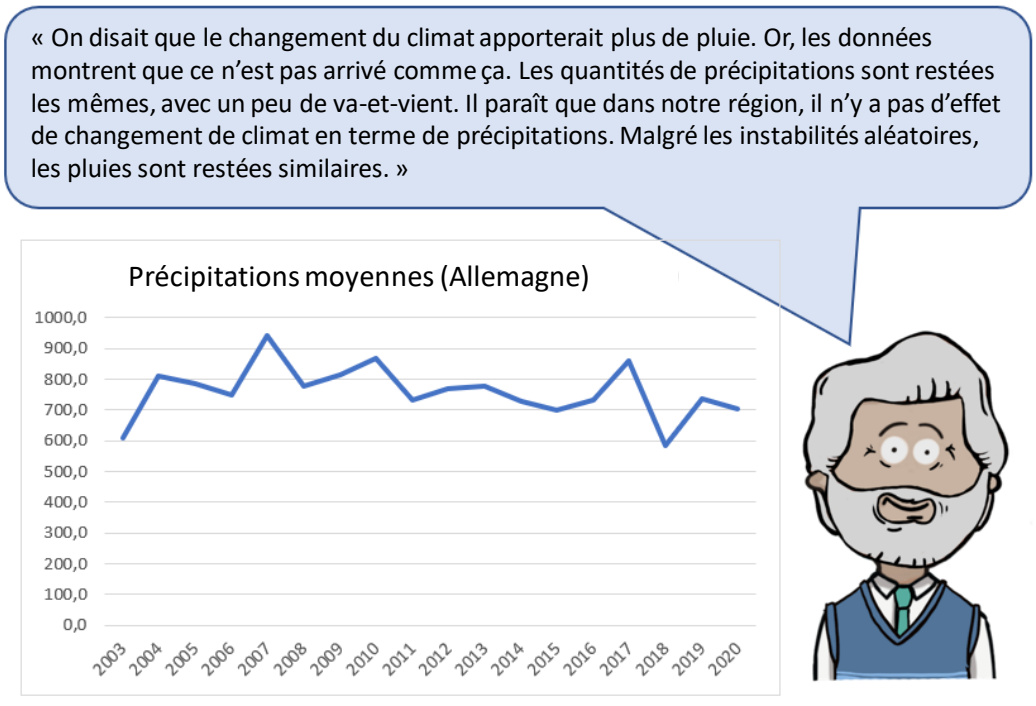


Figure 5. Problème « précipitations » (Kuntze et Krummenauer, 2022, p. 458, traduit)

1 Argumentation et enseignement des mathématiques

Au sens plus général, les compétences en argumentation représentent un objectif important d'enseignement en mathématiques (KMK, 2022, 2012; NCTM, 2000). Bien que l'argumentation comme but d'enseignement ne soit pas contestée, l'argumentation sur la base de données statistiques en classe de mathématiques n'a guère été examinée en didactique des mathématiques.

Or d'un point de vue épistémologique, l'argumentation sur la base de données statistiques est fondamentalement différente de la production de preuves et de démonstrations en mathématiques. En effet, en contraste avec les preuves et démonstrations mathématiques, des arguments pour et contre une affirmation peuvent être produits sur la base des mêmes données statistiques : en présence de variabilité statistique dans les données (voir par exemple le problème présenté dans la figure 1), ceci est pourtant souvent possible.

En raison du manque de recherche sur l'argumentation sur la base de données statistiques, il s'avère donc nécessaire d'explorer plusieurs pistes :

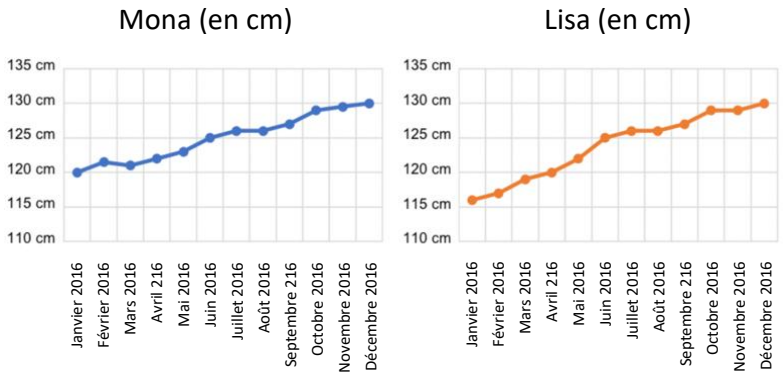
- le fondement théorique (comment peut-on décrire des éléments-clés de l'argumentation sur la base de données ?) ;
- les connaissances et/ou compétences des élèves (où en sont-ils ?) ;
- la potentielle structure de la compétence d'argumentation sur la base de données statistiques (comment décrire les compétences des élèves ?) ;
- la possibilité de promouvoir l'argumentation sur la base de données statistiques (quelles peuvent être les caractéristiques clés menant à la progression dans cette compétence ?).

2 Argumentation sur la base de données statistiques

L'argumentation sur la base de données statistiques constitue une forme d'argumentation (Stylianides et al., 2016), utilisant des données statistiques spécifiques afin de soutenir une affirmation (Krummenauer et Kuntze, 2019). La structure de l'argumentation sur la base de données statistiques peut être décrite selon Toulmin (2003, p. 89) par les deux éléments fondamentaux présents dans un argument : la conclusion qui doit être soutenue par l'argument et le *datum*, à savoir les données, c'est-à-dire ce qui va être utilisé pour soutenir la conclusion dans l'argumentation (Krummenauer et Kuntze, 2018).

En profitant du fondement théorique qui a déjà été introduit, on peut décrire l'argumentation sur la base de données statistiques à travers le raisonnement scientifique (Fischer et al., 2014 ; Kuhn, 2010 ; Kuhn et Pearsall, 2000 ; Sodian, 2008 ; Zimmerman, 2007). Les interprétations de données statistiques y jouent le rôle des hypothèses ou de la théorie, alors que les données statistiques jouent le rôle de l'évidence. Les arguments sur la base de données statistiques utilisent donc l'évidence pour évaluer les interprétations de données statistiques. Pour illustrer ceci, la figure 6 montre un problème moins complexe que celui de la figure 1.

Mona et Lisa sont des jumelles. Leur mère les a mesurées chaque mois. Elle a dessiné les diagrammes suivants sur son ordinateur :



Quand Lisa le voit, elle dit :

« En juin 2016, on avait toutes les deux la même taille »

Lisa, a-t-elle raison? *JUSTIFIE ta réponse.*

Figure 6. Problème de Mona et Lisa (Krummenauer et al. 2022, p. 220, traduit)

La figure 7 présente des réponses typiques, extraites d'une étude avec élèves de la 4ème année de l'école primaire (Krummenauer et al., 2022). On y voit des argumentations sur la base de données statistiques plus ou moins complètes, mais aussi des réponses qui montrent tout d'abord des difficultés à extraire les informations à partir du diagramme, par exemple : « Non, Lisa n'a pas raison, parce qu'on voit dans le diagramme que Lisa a été grande de 116 cm, mais Mona a été grande de 120cm, donc c'est faux. » (ici les valeurs de janvier 2016 ont été prise en compte). Des argumentations basées uniquement sur considérations de contexte apparaissent également, par exemple : « Oui, Lisa a raison, parce que les deux sont des jumelles. ». Dans ce cas, il n'est pas fait référence aux données statistiques, mais au fait que Mona et Lisa sont des jumelles, argument pris comme « justification » pour dire que les deux ont toujours la même taille. Nous constatons par ailleurs des difficultés à identifier le rapport entre l'affirmation et les données, par exemple : « Non, c'est faux, Mona a grandi de 10 cm seulement, Lisa beaucoup plus, elle a grandi de 14 cm. ». Cette réponse montre que les considérations sur la base des données statistiques ne servent pas d'argument pour réfuter l'affirmation donnée. Enfin certaines assertions révèlent des difficultés avec l'expression d'arguments, par exemple : « Non, c'est pas juste, elle n'a pas raison » ou « Oui, elle a raison, on le voit ». Dans ces deux cas particuliers, la référence aux données statistiques est absente ou diffuse.

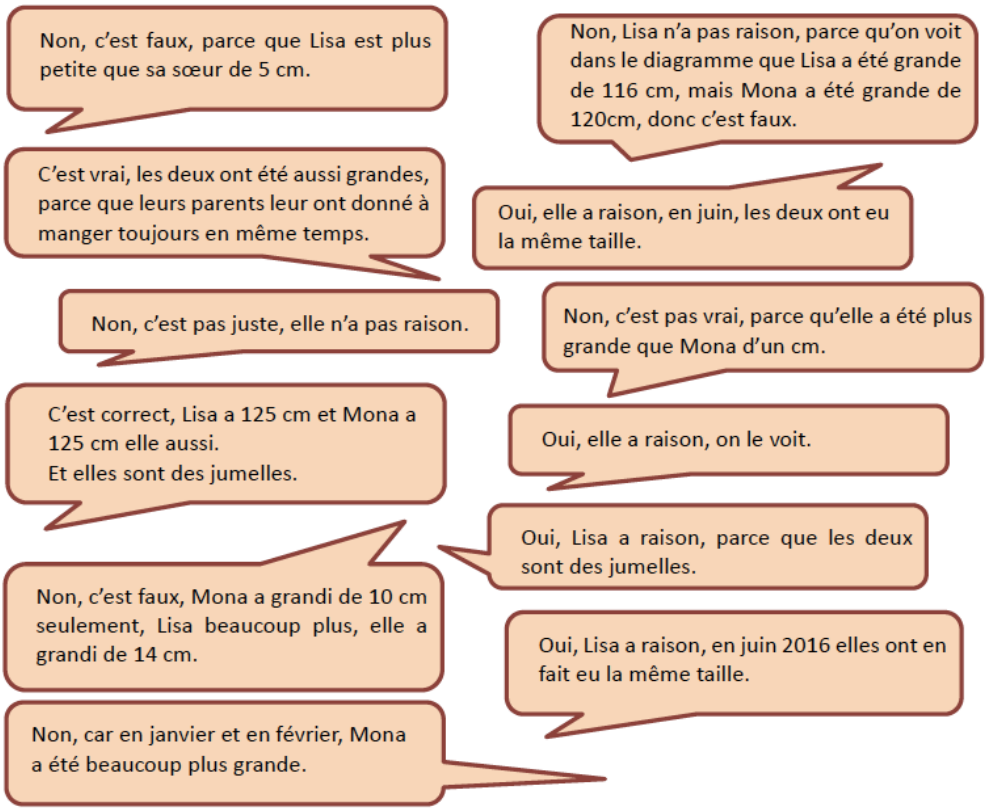


Figure 7. Réponses typiques, extraites d'une étude avec élèves de la quatrième année (âge : 9-10 ans) de l'école primaire (Krummenauer et al., 2022, p. 221, traduit)

Ces réponses indiquent déjà la variation dans les réponses observables. D'un côté, on observe des arguments incomplets ou basés sur des considérations de contexte seulement, et de l'autre, des arguments basés sur les données statistiques complets. Pour regarder de plus près et en conséquence du manque de recherche empirique, nous allons présenter quelques résultats issus d'études sélectionnées, qui répondent à de nouvelles questions de recherche. Il apparait en effet nécessaire du côté de la recherche empirique, et surtout en relation avec l'enseignement à l'école primaire, d'explorer les questions suivantes à propos de l'argumentation sur la base de données statistiques : où en sont les élèves avec leurs connaissances et compétences ? Comment peut-on décrire leurs compétences ? Est-il possible

de promouvoir l'argumentation sur la base de données statistiques ? En cas de réponse positive, comment s'y prendre, c'est-à dire est-ce qu'on peut identifier des caractéristiques d'approches promettant du succès ?

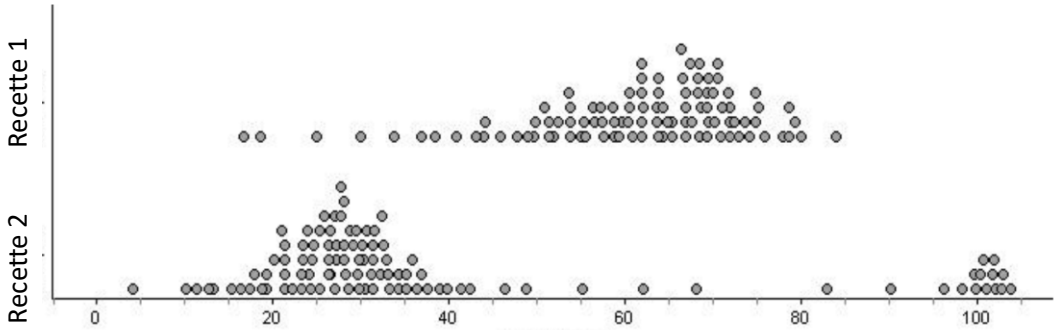
Dans la suite, nous présentons des réponses provenant d'études empiriques, qui ont été conçues et menées au cours du travail de thèse de Jens Krummenauer (2021)[1].

IV - RÉSULTATS PROVENANT D'ÉTUDES SÉLECTIONNÉES

1 Où en sont les élèves avec leurs connaissances et compétences ?

La première étude empirique (étude A), a consisté en une réanalyse de données provenant du projet RIKO-STAT (Kuntze et al., 2015). Elle s'est appuyée sur les réponses de 385 élèves de 4ème année (N=385 enfants, âge moyen M=10.0 ans, SD=0.61, 191 filles, 193 garçons) au problème de la figure 8.

Un producteur de médicaments contre le mal de tête a développé deux recettes différentes. Les comprimés ont été testés avec 100 personnes avec mal de tête en laboratoire. Le diagramme montre combien ça a duré jusqu'à la disparition du mal de tête. Chaque point correspond à une personne.



Dr. Dubois dit:

La recette 2 est meilleure que la recette 1!

Trouve des arguments **pour et contre**!

Figure 8. Problème (Kuntze et al., 2015, p. 11, traduit) posé dans le cadre du projet RIKO-STAT (Kuntze, Engel, Martignon et Grundacht., 2010) à plus de 350 élèves, dont les réponses ont été réanalysées dans l'étude A sous l'angle de l'argumentation sur la base de données statistiques (Krummenauer et Kuntze, 2018, p. 254)

Dans ce problème, il faut trouver des arguments pour et contre l'affirmation du docteur Dubois. Les données statistiques étant marquées par de la variabilité statistique, il est possible de justifier l'affirmation avec le grand nombre de personnes qui ont guéri plus tôt avec la recette 2 que la plupart des personnes ayant pris des comprimés de la recette 1. En même temps, on peut dire que la recette 1 est meilleure que la recette 2, parce que les données montrent que personne n'a souffert de mal de tête plus de 90 minutes après avoir pris les comprimés, alors que ceci n'est pas le cas pour la recette 2. Pour donner une réponse avec des arguments dans ce sens, il faut séparer évidence (données) et théorie (affirmation du docteur), traiter l'affirmation comme une hypothèse, chercher des données (de l'évidence) « pour », chercher des données (de l'évidence) « contre », et enfin produire les arguments « pour » et « contre ».

[1] Jens Krummenauer a aussi relu cet article et contribué à son développement.

Le codage des réponses des élèves s'est alors appuyé sur ces critères. Le code A désignait des « réponses correctes » avec au moins un argument correct pour chaque côté qui recourt aux données statistiques pour et contre : deux arguments ont donc dû être identifiés pour déclencher ce code. Voici un exemple d'une telle réponse : « Plus de gens ont été guéris plus rapidement avec la recette 2. Mais avec la recette 1, personne n'a dû souffrir plus de 90 minutes. » Dans cette réponse, l'élève se réfère au plus grand nombre de personnes guéries « plus rapidement avec la recette 2 » dans la première phrase, avant de plaider pour la recette 1 en se référant à l'absence de cas de personnes dans les données ayant été guéries après une durée plus longue que 90 minutes. Le code B représentait des argumentations partielles, à savoir un argument basé sur les données statistiques « pour » ou un argument « contre » l'affirmation donnée, sans donner d'arguments pour les deux côtés. Le code C, finalement, couvrait les réponses qui ne contenaient pas d'argument sur la base des données statistiques.

La figure 9 montre les fréquences des argumentations correctes (code A), partielles (code B), et les autres réponses (code C). Nous constatons que 16,9% des élèves ont développé des arguments « pour » et « contre » de l'affirmation donnée, 11,9% des élèves ont développé des arguments seulement dans un sens (« pour » ou « contre ») et 71,2% des réponses ne correspondant pas aux attentes du problème. Pour ces réponses, une analyse interprétative supplémentaire de façon « *bottom-up* » a été effectuée.

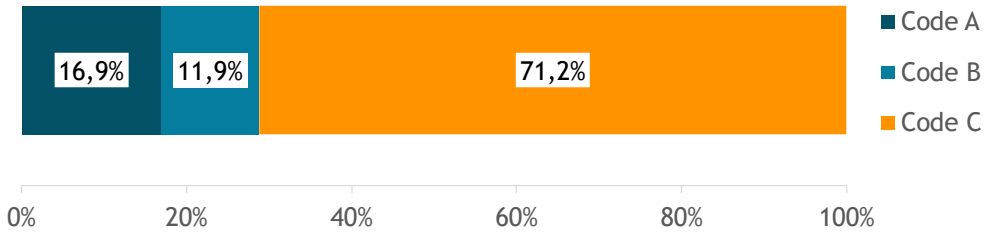


Figure 9. Fréquence de codes (Krummenauer & Kuntze, 2018, p. 167 sq., traduit)

La fréquence des réponses correctes (avec arguments « pour » et « contre ») n'atteint que 16,9% pour le problème de la figure 8, ce qui reflète la difficulté empirique élevée de ce problème[2]. Malgré la fréquence relativement basse de réponses correctes, certains exemples révèlent la compétence des élèves :

> *Elle [la recette 2] est effective pour la plupart des gens dans l'intervalle de 20-35 minutes. Par contre avec la recette 2, il y a aussi des personnes chez lesquelles ça a donné un effet aux environs de 104 minutes. Bien sûr, ils pourraient avoir bu une « petite bière » avant – or, probablement la recette 2 donne un effet moins digne de confiance que la recette 1 !*

Par ailleurs un codage « *bottom up* » des réponses a fourni des catégories décrivant les difficultés des élèves. Par exemple, une de ces catégories rassemblait les « argumentations » purement liées au contexte, sans référence aux données statistiques (voir figure 10 pour plus de détails). Deux réponses exemplifient cette sous-catégorie : « C'est bien que les gens avec mal de tête mangent des comprimés. Mais ce n'est pas très bien que l'on en mange trop. » ; « Parce que la recette 2 contient de meilleurs ingrédients. Dans la première recette, il n'y a pas d'ingrédients tellement bons dedans. » La figure 10 montre les catégories résultantes ainsi que leurs fréquences. Interprétations et conclusions y sont indiquées à droite près de la liste des catégories.

Face à de pareilles observations, se pose la question de la possibilité pour les élèves plus jeunes de produire des argumentations sur la base de données statistiques. L'étude B a donc été effectuée à partir d'entretiens avec des élèves de début de la 1ère année (âge 6-7 ans) d'école primaire (Krummenauer, Emhard et Kuntze, 2020 ; Krummenauer et al., 2023).

[2] Voir section 2 pour plus d'information sur la hiérarchie de difficulté de la compétence d'argumentation sur la base de données statistiques.

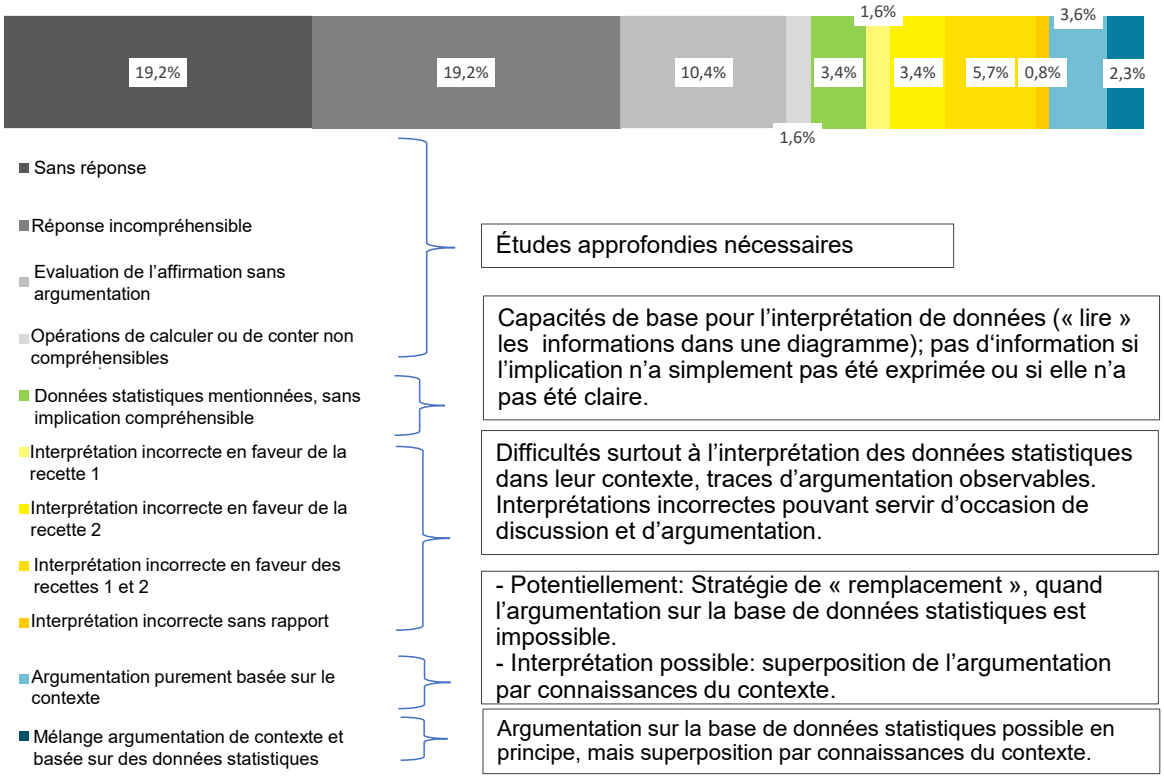


Figure 10. Catégories résultantes de l'analyse « bottom up » de réponses sans argument basé sur les données statistiques (Krummenauer et Kuntze, 2018, p. 167 sq., traduit)

Dans les entretiens, une poupée (« Sally ») faisait des affirmations face aux données statistiques proposées sous forme d'images-diagrammes ou d'images-tableaux. Les élèves à peine entrés en école avaient l'occasion de répondre directement s'ils étaient d'accord avec Sally et pourquoi ils l'étaient ou non. En cas de non-réponse directe à Sally, l'intervieweur demandait s'ils étaient d'accord avec Sally et pourquoi. La figure 11 montre la représentation des données statistiques (à droite) ainsi que l'affirmation prononcée par la poupée (à gauche).

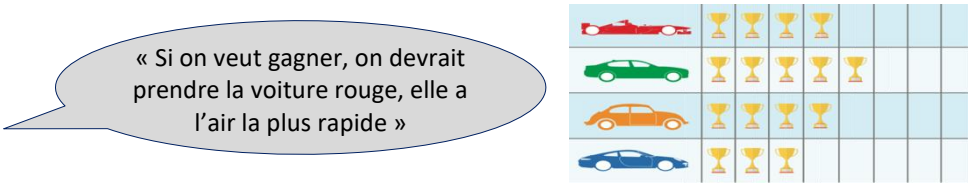


Figure 11. Données statistiques et affirmation pour le problème « course de voitures » (Krummenauer, Emhard et Kuntze, 2020, p. 113, traduit)

Onze problèmes d'argumentation ont été proposés dans chaque entretien. Ci-dessous figure l'extrait d'un entretien relatif au problème « course de voitures » (Krummenauer et al., 2020, p. 120, traduit). P désigne la poupée, E l'élève et I l'intervieweur.

P : Si moi, je participais à la course, alors je prendrais la voiture rouge, elle a l'air la plus rapide.

E : Mais elle ne l'est pas. La voiture verte est la plus rapide, parce qu'elle a plus de trophées.

I : Tu dis donc que Sally n'a pas raison, elle doit prendre une autre voiture ?

E : La verte est la meilleure.

I : Comment tu as trouvé cela ?

E : Parce qu'ici, il y a un, deux, trois, quatre, cinq trophées [montre les trophées de la voiture verte] et là seulement quatre [montre les trophées de la voiture rouge] et là quatre [montre les trophées de la voiture orange] et là seulement trois [montre la voiture bleue].

Dans cet entretien, l'élève a produit une argumentation basée sur les données statistiques représentées sous forme de tableau présentant des graphiques de trophées. Un deuxième extrait d'entretien est le suivant (ibid., p. 124, traduit) :

I : Qu'est-ce que tu dirais ? Doit-elle prendre la voiture rouge ?
E : Hum [affirmatif].
I : Pourquoi ?
E : Parce que c'est une voiture de course.
I : D'où est-ce que tu sais ça ?
E : Parce que je le sais donc ? [intonation de question]
I : Tu le sais ? D'où ça ?
E : De la télé.

Dans cet exemple, l'intervieweur offre des occasions à l'élève pour produire une argumentation. Celui-ci argumente uniquement sur la base de considérations de contexte, à savoir que la voiture rouge est une voiture de course.

Dans les entretiens, les données fournies n'étaient pas toutes de nature discrètes : certaines représentaient aussi des données continues. Les représentations graphiques du problème de la « réserve d'eau de pluie de Sally » utilisent un diagramme-image représentant les quantités d'eau dans le réservoir (figure 12).

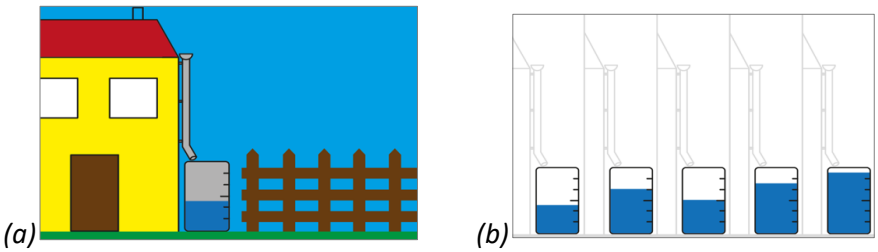


Figure 12. Illustration d'introduction (a) et données statistiques (b) pour le problème « réserve d'eau de pluie de Sally » (Krummenauer et al., 2020, p. 125)

Le codage des entretiens a été effectué en analogie avec l'approche de l'étude A, avec un codage « *top down* » et un codage « *bottom-up* » pour les difficultés potentielles ayant surgi. La figure 13 met en évidence la structure du codage.

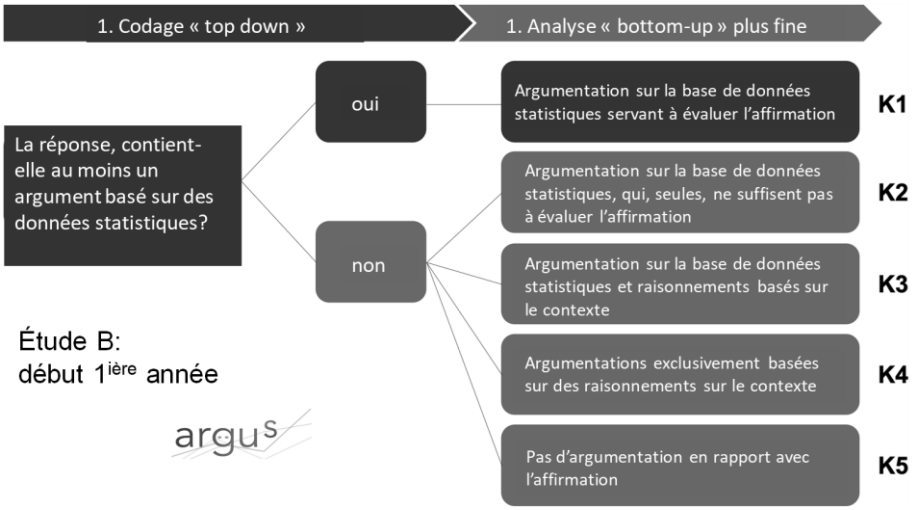


Figure 13. Codage pour les interviews (ibid., p. 119, traduit)

Les résultats du codage (figure 14) révèlent que chaque élève a produit au moins une argumentation sur la base de données statistiques, la majorité des élèves ont su donner des arguments sur la base des données statistiques dans plus de 50% des problèmes posés.

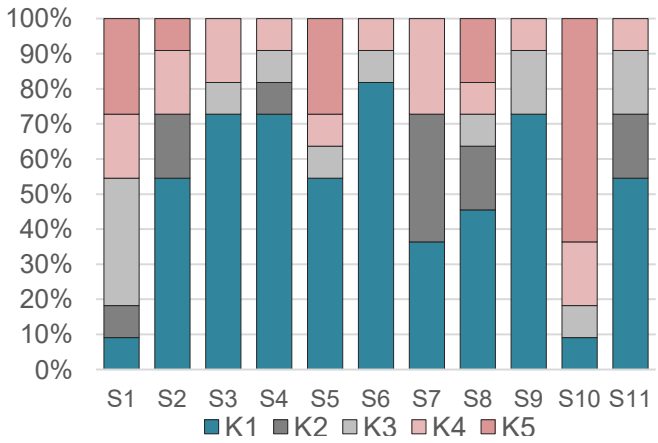


Figure 14. Fréquence de codes (ibid., p. 120, traduit)

Selon les observations faites jusqu'ici, les problèmes varient en difficulté empirique, et les compétences des élèves diffèrent aussi. Il parait donc nécessaire d'explorer des moyens pour décrire la compétence en argumentation sur la base des données statistiques.

2 Comment peut-on décrire les compétences des élèves en argumentation sur la base de données statistiques ?

Sur la base de considérations théoriques (voir sections I à III) et des résultats des études empiriques antérieures, l'étude C (Krummenauer, 2021 ; Krummenauer et Kuntze, accepté b) s'est concentrée sur trois points : la construction d'un modèle de compétence ; la construction d'un test selon le modèle de compétence ; une étude empirique visant la question de savoir si les niveaux de compétence anticipés dans le modèle de compétence théorique pouvaient être reconstruits empiriquement à travers une modélisation Rasch. Une telle étude permet en effet d'examiner si les problèmes dans un test obéissent à une hiérarchie anticipée théoriquement. En même temps, l'étude C visait aussi à décrire où en étaient les élèves testés – dans le cas de l'étude C, des élèves allemands de 4ème année d'école primaire (N=167 ; 54,5% filles, 45,5% garçons ; âge moyenne M=10,4 ans, SD=0,57 ans).

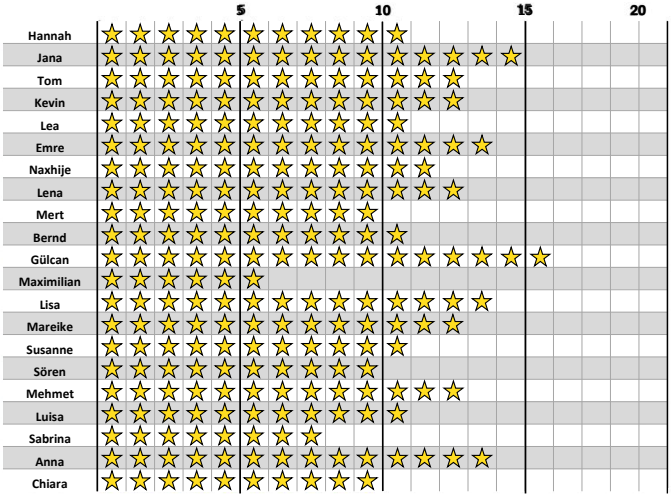
Un modèle hiérarchique de compétence a d'abord été déduit du fondement théorique (figure 15). Les niveaux de compétence 1 à 4 désignent des demandes de difficulté croissantes.

Niveau 1	Argumentation sur la base d'un seul point (significatif) des données statistiques
Niveau 2	Argumentation sur la base de plusieurs points (significatifs) des données statistiques
Niveau 3	Argumentation sur la base de données statistiques qui ne sont pas données (en plus de considérer plusieurs données), nécessité de traiter avec (une forme de) variabilité statistique
Niveau 4	Argumentation sur la base de données statistiques qui ne sont pas données (plusieurs données), nécessité de traiter avec (une forme de) variabilité statistique, développer des arguments différents, soupeser entre ces arguments différents

Figure 15. Modèle de compétence (Krummenauer, 2021, p. 85, traduit)

Au niveau 1, les arguments peuvent se construire sur la base d'un seul point des données statistiques, qui est significatif pour justifier une affirmation correspondante. À ce niveau, il n'est pas nécessaire de comparer plusieurs données, de considérer des tendances, de traiter avec la variabilité statistique (qui implique souvent que l'on doit prendre du recul face aux valeurs données dans les données statistiques), ni de considérer d'autres argumentations possibles. Un exemple d'un problème de niveau 1 est proposé dans la figure 16.

Chaque fois qu'un enfant de la classe de Jana a résolu un problème supplémentaire, il reçoit une étoile, que les enfants collent a la « paroi des étoiles ».
Avant les vacances, l'enseignante dit aux enfants: « chaque enfant, qui a collectionné 15 étoiles, reçoit un bon permettant de ne pas faire les devoirs.
Jana regarde la paroi des étoiles:



Jana montre la paroi des étoiles et dit a son amie:
« regarde, je reçois un bon. »
Jana, a-t-elle raison? *JUSTIFIE ta réponse:*

_____
_____
_____
_____
_____

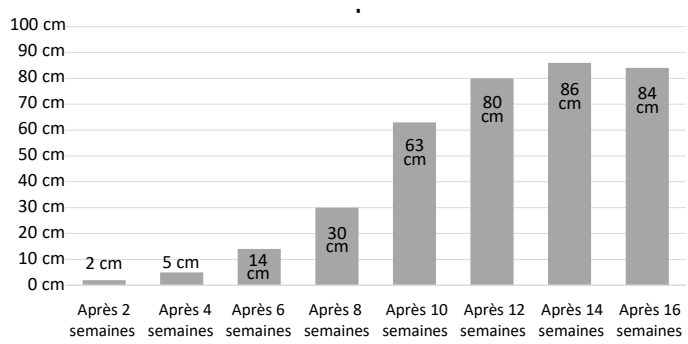
Figure 16. Problème de niveau 1 (Krummenauer, 2021, p. 6, traduit)

Au niveau 2, plusieurs points (significatifs) des données statistiques doivent être pris en considération. Mais la variabilité statistique ne fait pas encore son entrée à ce niveau : elle concerne uniquement les problèmes de niveau 3. Traiter avec de la variabilité statistique en produisant des argumentations sur la base de données statistiques signifie que l'argumentation s'étend aussi – paradoxalement – à des données statistiques qui ne sont pas fournies. On doit souvent imaginer, sur la base des données et de leur variabilité, comment elles vont probablement se reproduire, par exemple si on anticipe un plus grand nombre de données (mesurées, demandées dans des sondages, etc.).

Dans le cas des données de la figure 17, il s'avère difficile de prédire la taille d'une plante de pomme de terre face à de la variabilité possible, et il faut en plus comparer ou plutôt « soupeser »[3] des arguments différents, qui doivent être développés auparavant. Ce problème est alors classé niveau 4.

[3] Les mots « comparer » ou « choisir » paraissent un peu « définitifs » dans leur signification, l'utilisation de « soupeser » (en Allemand « *abwägen* ») pourrait avoir plus le sens de devoir prendre en considération le fait qu'il peut exister d'autres

Dans la classe de Daniel ils ont planté une pomme de terre. Maintenant, ils ont une plante. Quand la plante est sortie de ~~la~~ terre, les enfants ont commencé à la mesurer, chaque deux semaines. Avec les valeurs mesurées, les enfants ont dessiné le diagramme suivant:



Dans la classe parallèle, les amis de Thomas ont planté une pomme de terre, trois semaines plus tard. Maintenant la plante de la classe parallèle mesure 30 cm. Thomas regarde le diagramme de la classe de Daniel et dit:

« Comme on le voit, notre plante va mesurer 63 cm dans deux semaines. »

Thomas, a-t-il raison? *JUSTIFIE ta réponse:*

Figure 17. Problème sur niveau 4 (Krummenauer & Kuntze, accepté a, p. 7, traduit)

Le problème de la figure 8, quant à lui, peut être classé au niveau 3, parce que la recommandation en faveur d'une des deux recettes implique de traiter avec la variabilité relative à la recommandation donnée pour des personnes souffrant de mal de tête dans l'avenir. On doit alors anticiper qu'une distribution va probablement avoir une ressemblance en ce qui concerne les tendances majeures, bien que, dans le détail, il y aura très probablement des données différentes. L'instruction directe de construire les deux arguments ainsi que le fait de « soupeser » différentes argumentations ne soit pas exigé conduisent à ne pas classer ce problème au niveau 4. En revanche, pour répondre au problème de la plante de pomme de terre (figure 17), on doit donner un argument en faveur de l'affirmation de Thomas – pour ce qui est de la tendance dans les données, il a raison – sans oublier de « soupeser » l'argument « contre » basé sur la variabilité que l'on doit anticiper – les plantes croissent individuellement, les mesures de plantes peuvent produire de la variabilité statistique, etc.

Sur la base du modèle de compétence (figure 15), un test a été construit, avec des problèmes des quatre niveaux. Les 167 élèves de 4ème mentionnés ci-dessus ont passé le test. Les réponses ont été codées selon

interprétations et arguments sur la base des données statistiques, et qu'il y a comme une concurrence permanente entre ces arguments qui ne peut guère être résolue définitivement (face aux insécurités stochastiques, par exemple). Parfois, les arguments différents basés sur des données statistiques ne peuvent pas être strictement comparés et très souvent, face à la variabilité statistique, choisir l'unique « bon » argument n'est guère possible. Regarder deux ou plusieurs arguments des différents côtés pour voir comment les données statistiques sont conformes à ces arguments figure parmi ce qui sera appelé « soupeser » dans la suite.

les exigences des problèmes de manière dichotomique. Ensuite, une analyse Rasch a été effectuée. L'analyse Rasch a produit une dimension hiérarchique sur laquelle les personnes testées et la difficulté empirique des problèmes ont pu être localisées. On peut donc vérifier si la difficulté empirique des problèmes conformes aux attentes selon le modèle de compétence et leur design. L'analyse Rasch a montré la hiérarchie empirique selon les attentes, et il n'y avait pas de contradiction au groupement des problèmes dans leurs niveaux de compétence. En d'autres mots, chaque problème de niveau de compétence plus exigeant avait une difficulté empirique plus grande qu'une autre (Krummenauer, 2021 ; Krummenauer et Kuntze, accepté b).

La figure 18 montre la hiérarchie de façon plus élémentaire. On voit les fréquences de solution moyennes pour les problèmes des quartiles de compétence pour les différents niveaux de compétence. Cela veut dire que premièrement, selon le score total, on distingue les quartiles des personnes testées. Puis on considère les fréquences moyennes de solutions de tous les quartiles, pour chaque groupe de problèmes sur les niveaux respectifs 1 à 4. Les résultats montrent que le quartile le plus compétent avait une fréquence de solution sur les niveaux 1 et 2 de respectivement 100% et 93%, ce qui signifie une maîtrise quasi-complète de ces niveaux. Les fréquences de solution moyennes sur les niveaux 3 (43%) et 4 (20%) montrent que traiter avec de la variabilité statistique en argumentant parait à la portée de ces élèves. Pour les autres quartiles, ces deux niveaux apparaissent empiriquement encore très difficiles. Le deuxième quartile montre une bonne maîtrise du niveau 2, alors que pour le troisième quartile, le niveau 2 pose encore des problèmes. Le quartile le moins performant éprouve encore des difficultés considérables avec les problèmes sur le niveau de compétence 1. De manière plus globale, la hiérarchie à travers les niveaux de compétence apparaît. Grossièrement, on pourrait interpréter les résultats de manière que les élèves de chaque quartile paraissent un peu à la « conquête » d'un niveau de compétence : ceux du quartile le moins performant au niveau 1, ceux du troisième au niveau 2, ceux du deuxième commençant à « conquérir » le niveau 3, pendant que ceux du quartile le plus performant résolvent des problèmes de niveau 4 avec de plus en plus de succès.

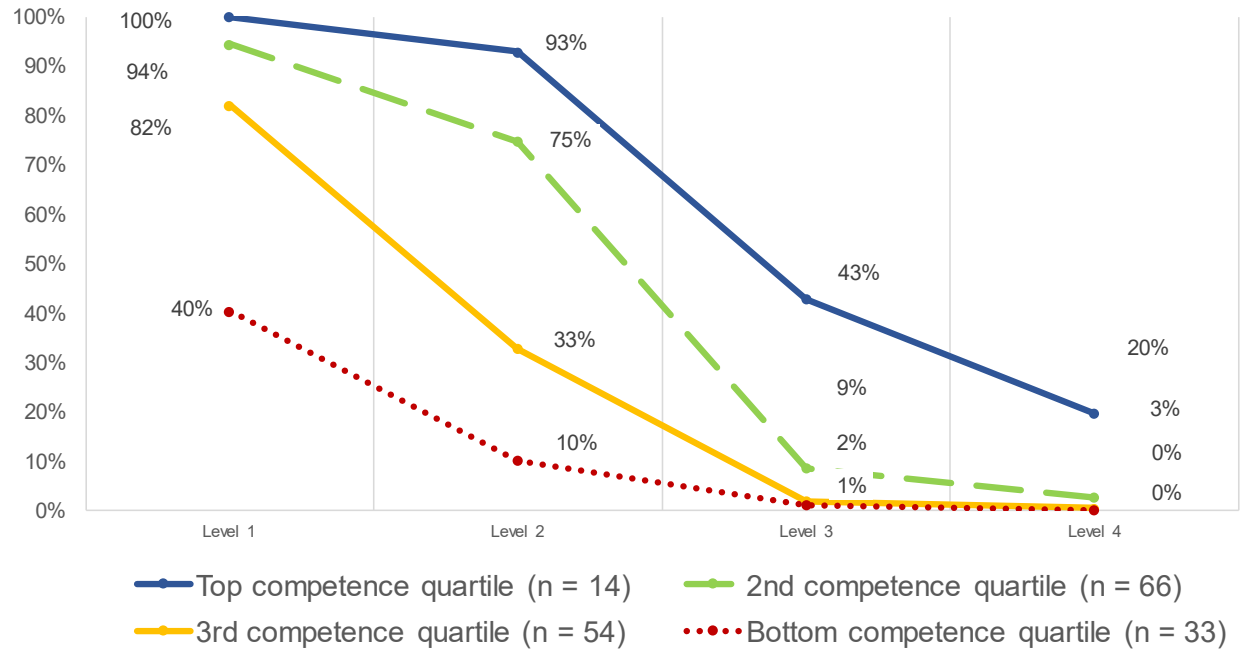


Figure 18. Fréquences de solution moyennes des quartiles de compétence pour les problèmes de différents niveaux de compétence (Krummenauer, 2021, p. 96)

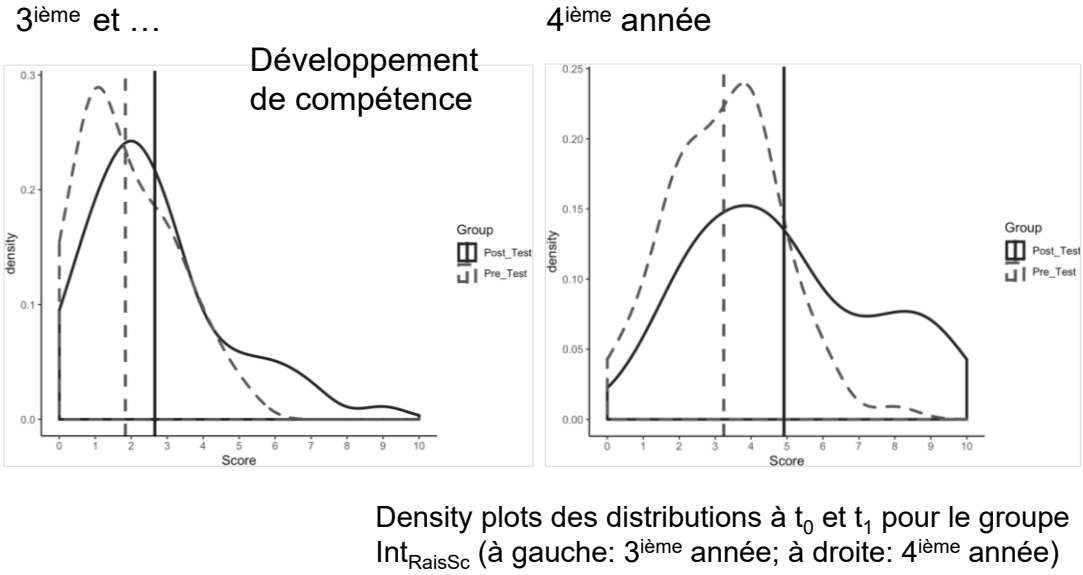
En considérant ces résultats, la question de progression potentielle des élèves à travers la hiérarchie à la suite d'interventions focalisées devient cruciale. Elle fait l'objet de la partie suivante.

3 Est-il possible de promouvoir l'argumentation sur la base de données statistiques ?

Une intervention a été dans le focus de l'étude D (Krummenauer et Kuntze, accepté a, b) : plus de 300 élèves de 3ème (âge 8-9 ans) et 4ème année (âge 9-11 ans) d'école primaire (N=322 enfants ; 52,8 % filles) ont pris part à cette étude empirique. Trois groupes ont été formées. Le premier groupe (« Int_{RausSc} » - Intervention « raisonnement scientifique ») a reçu du matériel d'apprentissage visant au raisonnement scientifique dans le cadre de l'argumentation sur la base de données statistiques. Le deuxième groupe (« $Int_{LireDiagr}$ » - Intervention « lire diagrammes ») a travaillé avec du matériel d'apprentissage destiné à entrainer les capacités de lecture de diagrammes. Un troisième groupe, n'ayant pas bénéficié d'intervention, a servi de groupe contrôle. Le test développé pour l'étude C a servi d'instrument pour mesurer la compétence des élèves avant (*Pre-Test*) et après l'intervention (*Post-Test*), ainsi que quelques semaines après (*Follow-Up Test*).

L'annexe 1 propose une ressource visant le raisonnement scientifique dans le cadre de l'argumentation sur la base de données statistiques, avec des remarques sur son design. Il s'agit d'encourager les élèves à séparer affirmations et évidence, à utiliser les données statistiques, à vérifier les affirmations, à chercher des contre-évidences possibles et à réfuter les affirmations en cas de données statistiques qui contredisent ces affirmations. Les élèves travaillaient individuellement la plupart du temps, avec des phases d'intervention de leurs enseignant(e)s. Ces derniers avaient été renseignés pour agir de manière définie afin de contrôler autant que possible leur influence individuelle, tout en maintenant l'environnement habituel de classe pour les élèves.

La figure 19 montre le progrès en compétence d'argumentation sur la base de données statistiques pour le groupe d'intervention Int_{RaisSc} (séparément pour les élèves en 3ème et 4ème années). Les changements dans le profil des densités montrent comment les élèves de 3ème année ont consolidé leurs compétences de base et ont commencé à « se déplacer » vers les niveaux plus élevés, tandis que dans le groupe des élèves de 4ème année on peut observer qu'en approchant les 8 ou 9 points du score, une partie d'entre eux progresse vers les niveaux sur lesquels on doit traiter avec de la variabilité statistique et parfois « soupeser » des arguments différents.



Density plots des distributions à t_0 et t_1 pour le groupe Int_{RaisSc} (à gauche: 3ième année; à droite: 4ième année)

Figure 19. Étude D – Progrès en compétence d'argumentation sur la base de données statistiques, groupe(s) d'intervention Int_{RaisSc} (Krummenauer et Kuntze, accepté a, p. 18, traduit)

En outre, l'étude D peut apporter des éléments de réponse à la dernière des questions de recherche.

4 Peut-on identifier des caractéristiques d'approches prometteuses ?

L'étude D contient deux interventions différentes (en dehors du groupe de contrôle). On peut alors comparer l'impact de l'intervention visant à promouvoir le raisonnement scientifique avec celui de l'intervention destinée à améliorer les capacités de lecture de diagrammes. Les résultats de l'étude D (figure 20) montrent que l'intervention « lire des diagrammes » n'a aucun effet sur la compétence d'argumentation sur la base de données statistiques, alors que de l'intervention visant le raisonnement scientifique avait un effet statistiquement significatif. Cette dernière approche peut par conséquent être considérée comme un chemin qui peut promouvoir l'argumentation sur la base de données statistiques chez les élèves de l'école primaire.

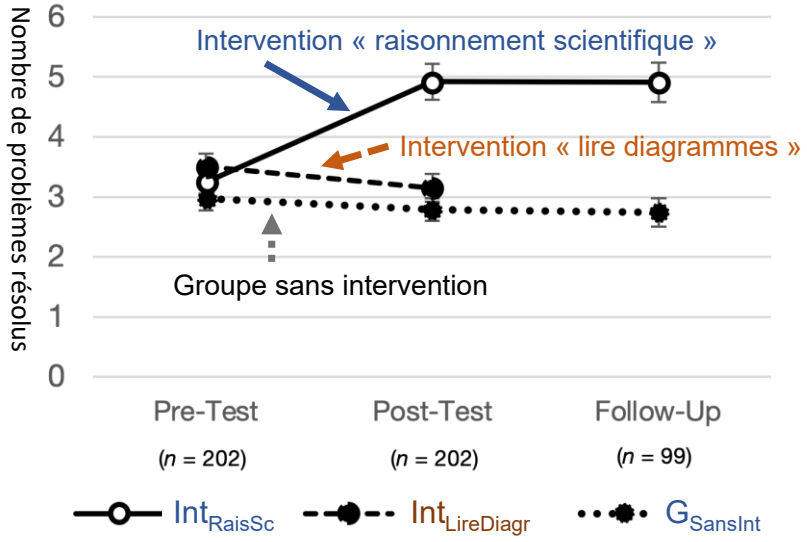


Figure 20. Développement de compétence des groupes d'intervention et de contrôle (Krummenauer et Kuntze, accepté a, p. 16, traduit, avec annotations)

V - DISCUSSION ET PERSPECTIVES

1 Résumé des résultats clés

Nous présentons d'abord certaines limitations des études. Celles-ci ne sont pas représentatives pour les élèves allemands, et il manque de répétitions à travers des cultures d'enseignement différentes, par exemple. En dépit de ces limitations le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques a pu être exploré et les résultats trouvés peuvent donner une première orientation. Parmi ces résultats, on retiendra les points clés suivants.

Les élèves, à partir du début de l'école primaire, *ont des prédispositions* pour l'argumentation sur la base de données statistiques. Déjà au début de l'école primaire – et étant donné qu'il n'y a pas d'école maternelle en Allemagne – on peut observer des argumentations complètes par les élèves novices. Des difficultés potentielles des élèves ont par ailleurs été explorées et des catégories réunissant beaucoup de ces difficultés ont été conceptualisées à partir d'analyses empiriques.

Les compétences en argumentation sur la base de données statistiques peuvent être hiérarchisées (théoriquement et empiriquement). La *complexité peut donc être décrite par des critères* qui sont validés empiriquement. Un instrument permettant de mesurer la compétence d'argumentation sur la base de données statistiques a été testé avec succès : il est en place pour des études postérieures.

Il est enfin possible de promouvoir les compétences en argumentation sur la base de données statistiques à travers une *intervention visant le raisonnement scientifique* (dans le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques).

Pour la pratique d'enseignement des mathématiques (et potentiellement aussi dans d'autres matières) dans les écoles, ces résultats peuvent *fournir des pistes* dans un domaine sur lequel peu de travaux ont été réalisés. Il est désormais possible d'estimer d'où pourraient partir des interventions, à quelles difficultés on pourrait s'attendre, et comment on pourrait atteindre un renforcement des compétences des élèves.

Concernant le développement théorique en didactique des mathématiques, les études présentées ici ont constitué une avancée importante. En effet, la notion de raisonnement scientifique n'a pas seulement permis de décrire des composantes clés dans le domaine d'intersection entre la pensée critique et la littératie statistique, et donc de combler un déficit dans les définitions de la littératie statistique. Elle a aussi fourni un point d'appui pour l'intervention qui a amélioré la compétence des élèves en argumentation sur la base de données statistiques. Soutenue par des résultats empiriques, elle peut aussi être regardée comme une validation de l'innovation théorique apportée par l'application des théories du raisonnement scientifique au domaine de l'argumentation sur la base des données statistiques. En outre les critères théoriques qui ont émergés de cette série d'études peuvent être étendus en dehors du contexte de l'école primaire – qui, en Allemagne couvre les années 1 à 4 (âges de 6 à 11 ans) dans la plupart des régions (*Bundesländer*) allemandes. En raison de l'approche relativement universelle du raisonnement scientifique, des recherches plus focalisées sur d'autres âges d'élèves apparaissent donc prometteuses. Cela mène aux perspectives offertes par cette série d'études.

2 Perspectives

Les résultats présentés débouchent sur plusieurs perspectives concernant la pratique comme la recherche.

L'argumentation sur la base de données peut et devrait être traitée dès l'école primaire. Les hésitations potentielles, qui sont peut-être à l'origine de conceptions curriculaires laissant le raisonnement sur les données statistiques à l'écart, n'ont pas pu être étayées sur la base des résultats empiriques. Si un nombre d'élèves peut résoudre des problèmes d'argumentation sur la base de données statistiques sans enseignement explicite et ce même sur des niveaux de compétence complexes (comme on peut le constater dans le cas des élèves qui ont pris part aux études), les observations de difficultés d'élèves peuvent être considérées comme un défi pour l'enseignement. Il reste à explorer en profondeur si et comment des interventions orientées dans le sens du raisonnement scientifique peuvent aider les élèves à surmonter ces difficultés à partir du début de l'enseignement scolaire. Des études plus spécifiquement dédiées au collège et au lycée s'avèrent également nécessaires. Comme déjà mentionné ci-dessus, cette extension de l'investigation à d'autres groupes d'âge d'élèves pourrait alors fournir de point d'appui à un enseignement continu à travers les années de scolarité. Par ailleurs des approches interdisciplinaires sont possibles. L'enseignement des mathématiques au cours de la scolarité n'est en effet pas le seul à être concerné : les autres matières peuvent aussi contribuer au développement de l'argumentation sur la base de données. Il y a évidemment beaucoup de contenus où les données statiques sont considérées, fournissant ainsi une base pour l'argumentation dans d'autres disciplines, au-delà des sciences naturelles. De plus, le côté métacognitif est probablement un atout majeur dans le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques. Connaître le rôle des stratégies de raisonnement scientifique pourrait notamment aider les élèves à les employer plus consciemment et donc avec plus de succès.

Le raisonnement scientifique peut être considéré comme le noyau de l'argumentation sur la base de données statistiques, ce qui le rend particulièrement utile pour affronter les tentatives de désinformation. Dans le cas idéal, les stratégies de raisonnement scientifique permettent d'identifier les affirmations et les « justifications » possibles, de réfléchir et de rechercher s'il y a une contre-évidence (éventuellement provenant d'autres sources disponibles), de réfléchir sur le contraire de l'affirmation et d'estimer la probabilité que le contraire de l'affirmation soit vrai, d'examiner les « justifications » fournies avec les affirmations, particulièrement à travers la stratégie de questionnement de l'évidence.

Cependant, il faut rappeler que, pour les faits alternatifs, *fake news*, complosphères etc., « soupeser » l'évidence provenant de sources différentes n'est souvent pas facile à cause de « compléments » destinés à être « immunisants » envers le doute potentiel basé sur des sources fiables. Par exemple on observe souvent une mise en question de sources fiables à travers des théories conspirationnistes où de prétendus « intérêts » derrière ces sources qui sont déclarés vouloir supprimer le fait alternatif. Ces « compléments immunisants », sont, d'une certaine manière, issus d'un abus d'éléments de la pensée critique dans le but d'empêcher l'examen puis le rejet de l'affirmation fausse. Créer un doute généralisé constitue donc un outil de désinformation, ce qui rend complexe le traitement des divers faits alternatifs. Pourtant les expériences mettant en œuvre des stratégies de raisonnement scientifique dans le contexte de la littératie statistique et de la pensée critique peuvent rendre les élèves plus forts face aux tentatives de désinformation. Construire un réservoir individuel d'expériences argumentatives des élèves peut donc faire la différence : à travers la participation individuelle des élèves à de telles expériences, l'argumentation sur la base de données statistiques peut servir de compétence clé pour affronter les divers faits alternatifs.

Sur la base des résultats présentés, il devient donc de plus en plus nécessaire d'explorer les connaissances des enseignants comme leurs compétences en analyse des ressources d'enseignement, des données statistiques et des situations en classe. Apparaît alors la nécessité de nouvelles études dans ce domaine, mais aussi un besoin de formation des enseignants. En particulier les résultats existants (Krummenauer et Kuntze, 2021 ; Kuntze et Kurz-Milcke, 2010) pourraient être étendus et amplifiés. Le couplage pensée critique et littératie statistique établi par la perspective théorique du raisonnement scientifique constitue une base pour l'argumentation sur la base de données statistiques, et ses quatre composantes (figure 21) pourraient former un repère pour des recherches étendues.

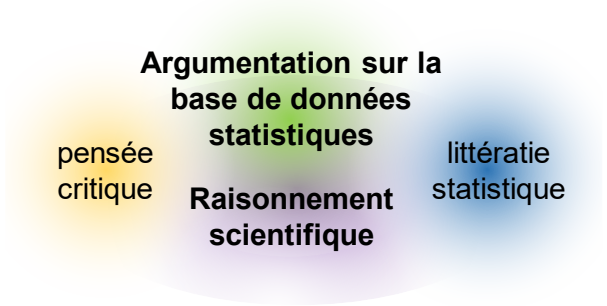


Figure 21. Raisonnement scientifique comme élément théorique reliant pensée critique et littératie statistique – et comme élément clé du fondement théorique de l'argumentation sur la base de données statistiques

3 Préparation des enseignants : un défi à l'échelle européenne

Comment préparer les enseignant(e)s afin qu'ils(elles) puissent promouvoir les compétences en argumentation sur la base de données statistiques de leurs élèves le mieux possible ? Comment les aider à analyser les potentiels d'apprentissage dans leur enseignement quotidien ? Voici quelques objectifs qui méritent attention dans ce contexte :

(1) Avoir une base en littératie statistique (et en probabilité) : les enseignants ont besoin eux-mêmes de compétences en littératie statistique et en probabilité.
(2) Connaître les « grandes idées », par exemple traiter avec la variabilité statistique (Watson et Callingham, 2003), et pouvoir en déduire des buts pour l'enseignement : la vigilance face à ces « grandes idées » peut aider les enseignants à aborder des opportunités d'apprentissage liées à ces idées de manière focalisée.
(3) Savoir où en sont les élèves : ceci peut aider les enseignant(e)s à adapter leur enseignement aux besoins des élèves.

(4) Connaître des scénarios possibles en classe (problèmes, activités en classe, etc.) : connaître des exemples positifs (Ben-Zvi et Garfield, 2004 ; Ben-Zvi et Sharett-Amir, 2005), mais aussi savoir réfléchir sur des situations non-optimales pour développer un réservoir de connaissances de procédures possibles en classe.

Nous traduisons alors ces objectifs en termes de formation en prenant appuis sur les résultats décrits auparavant.

Assurer une base en littératie statistique (1) est primordial, car les enseignants ont besoin d'un fondement de connaissances en mathématiques et statistiques qui les rende compétents à choisir des problèmes intéressants et appropriés pour les élèves en classe. Or les résultats d'une étude de 2010 montrent où en sont les élèves allemands ainsi que les étudiant(e)s futur(e)s enseignant(e)s d'école primaire en littératie statistique (figure 22). Les niveaux de compétence nécessitant le traitement de la variabilité statistique montrent des fréquences de solution plutôt basses, assez proches de la compétence des élèves de collège et même d'école primaire, bien qu'il y ait des différences significatives entre les groupes testés. Les compétences devraient donc être renforcées pour éviter que les futur(e)s enseignant(e)s rencontrent des difficultés avec les contenus d'enseignement.

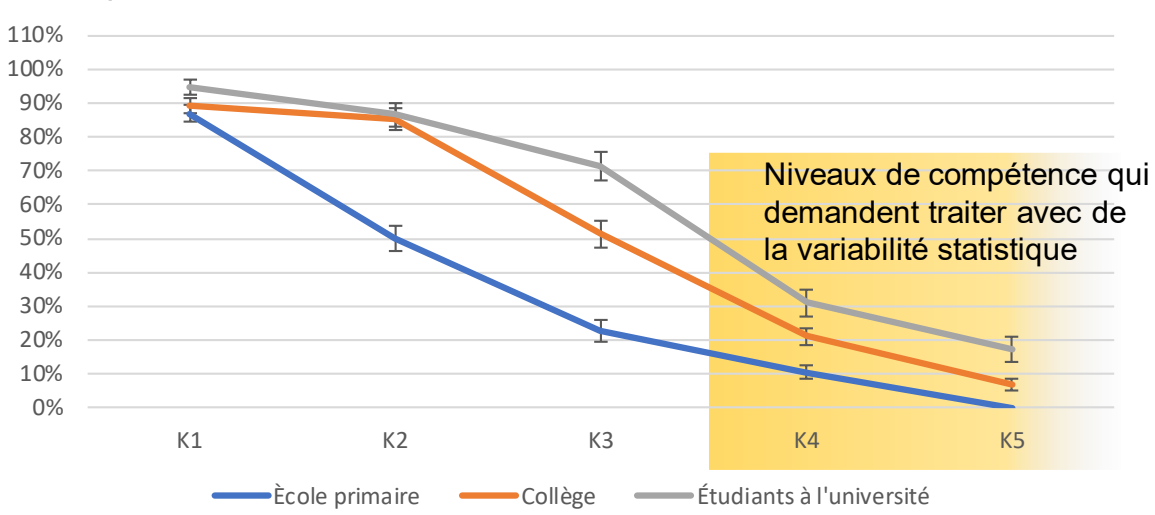


Figure 22. Fréquences relatives de solutions de problèmes sur différents niveaux de compétence dans un test de littératie statistique (projet RIKO-STAT ; Kuntze et al., 2010 ; Kuntze, 2013, voir aussi p. 85 sq., traduit)

Les résultats présentés dans la figure 22 suggèrent aussi que les connaissances de « grandes idées » liées à la littératie statistique (2) ont besoin d'être renforcées chez les futur(e)s enseignant(e)s allemand(e)s. Le côté algorithmique des statistiques joue souvent un rôle prédominant en classe (Watson et Callingham, 2003), bien que savoir structurer l'enseignement de contenus statistiques selon des « grandes idées » puisse permettre aux élèves de découvrir plus de sens derrière les modèles statistiques et les algorithmes. Dans ce domaine, plus de recherches empiriques seraient souhaitables.

Savoir où en sont les élèves (3) peut aussi être une grande aide à l'organisation de l'apprentissage en classe, ce qui souligne l'importance d'une recherche empirique telle qu'elle a été présentée dans la section IV de cet article. Il serait souhaitable d'amplifier ces résultats, aussi dans le contexte international, pour donner plus d'orientation aux scénarios de la préparation des futur(e)s enseignant(e)s.

L'appui aux futur(e)s enseignant(e)s peut porter sur une meilleure connaissance de scénarios pédagogiques destinés à la classe (problèmes, activités en classe, etc.), notamment des exemples positifs de scénarios en classe (Ben-Zvi et Garfield, 2004 ; Ben-Zvi et Sharett-Amir, 2005) ainsi qu'une réflexion des situations de classe non-optimales afin d'enrichir le réservoir de connaissances procédurales. Ce travail peut en outre favoriser la mise en lien entre connaissances théoriques et connaissances relatives au contexte de la pratique (par exemple celles décrites en (1)-(3)).

Il s'agit aussi de développer le « *noticing* » (Sherin, Jacobs et Philips, 2011 ; Amador, Bragelma, et Castro Superfine, 2021 ; Fernández et Choy, 2020) des futur(e)s enseignant(e)s dans le domaine de l'argumentation sur la base de données statistiques ainsi que dans le domaine des statistiques et des probabilités dans un sens plus général. La représentation de situations en classe par des bandes dessinées produites avec un outil numérique offre beaucoup de possibilités à la préparation des futur(e)s enseignant(e)s (Kuntze et al., 2022). Les bandes dessinées peuvent en effet être crées de manière contrôlée de sorte que leur analyse peut soutenir de manière optimale les buts d'apprentissage des futur(e)s enseignant(e)s. L'annexe 2 propose un exemple de bande dessinée montrant une classe qui travaille sur un problème de médiane et de moyenne (Kuntze et Krummenauer, 2024). Les occasions d'argumentation au sein de la situation de classe sont présentées afin de créer une culture de discours argumentatif dans l'interaction en classe, autour d'un problème dans lequel les élèves doivent imaginer des données statistiques possibles selon la médiane donnée et d'autres valeurs. La bande dessinée finit avec une question de réflexion et d'analyse, et les futur(e)s enseignant(e)s peuvent notamment discuter sur des occasions d'argumentation ratées. Dans ce cas, les critères d'analyse que l'on peut utiliser ne sont pas limités au fondement théorique introduit dans les sections I à III de cet article, car le discours argumentatif autour du problème de médiane et de moyenne comme l'objectif de profiter davantage d'occasions d'argumentation, impliquent plus de critères (*ibid*.), en particulier :

(1) Identifier des occasions d'argumentation sur le niveau des contenus mathématiques. Les enseignants devraient en effet être vigilants didactiquement sur le potentiel mathématique du discours en classe pour qu'ils soient en mesure d'identifier des propos pouvant être exposés à l'argumentation et par suite d'enrichir les activités argumentatives des élèves. Dans l'exemple de l'annexe 2, prendre les valeurs des longueurs de poissons données et celles qu'on doit imaginer comme des valeurs arrondies et calculer avec plus d'exactitude avec les valeurs maximales, permettrait de justifier que le pêcheur a raison après avoir arrondi de manière mathématiquement correcte.

(2) Assurer l'accessibilité des argumentations des élèves à l'ensemble de la classe. L'accessibilité des argumentations sur le niveau du contenu mathématique peut être facilitée par une réduction de la vitesse dans le discours en classe, par la répétition d'argumentations par d'autres élèves avec leurs mots, et à travers des aides en termes de structure et de clarté, par exemple en identifiant l'argument et l'affirmation qui est soutenue.

(3) Se référer précisément et explicitement à ce qui a été dit et justifié par les élèves lors des interactions en classe. Par exemple : « je veux commenter sur ce que Jérôme a dit avant, car il a dit que le Super Blaster rayonne plus loin selon le diagramme. Je ne suis pas d'accord, parce que … ». De telles références soutiennent la clarté dans le discours.

(4) Éviter de quitter prématurément un thème ou un propos qui rendrait possible (ou même nécessaire) davantage d'argumentation.

(5) Inclure autant d'élèves que possible dans le discours, éviter des dialogues un-à-un enseignant(e)/élève, dans lesquels les autres élèves ne jouent pas de rôle.

(6) Promouvoir les méta-connaissances sur l'argumentation, par exemple à travers une réflexion rétrospective sur les argumentations qui ont eu lieu au cours de l'interaction antérieure en classe.

Ces critères étendent les connaissances des futur(e)s enseignant(e)s sur l'argumentation autour des données statistiques vers la sphère de la pratique en classe, en ajoutant d'autres éléments significatifs de théorie, par exemple : les activités de discours (Cohors-Fresenborg, 2019 ; Cohors-Fresenborg et Kaune, 2007) ; une approche basée sur l'analyse d'éléments métacognitifs dans l'interaction en classe (Nowińska et Praetorius, 2017).

L'exemple de l'annexe 2 met en évidence que pour préparer les futur(e)s enseignant(e)s, l'analyse de situations de classe peut apporter des occasions de connecter les critères et les connaissances théoriques

avec des situations proches de la pratique en classe, et aussi des motivations à promouvoir le *noticing* des futur(e)s enseignant(e)s.

La formation initiale des enseignant(e)s à propos de l'argumentation sur la base de données statistiques peut ainsi intégrer de manière particulièrement féconde l'usage de formats de travail avec des situations de classe (de type bandes dessinées), en ciblant l'interaction de l'enseignant(e) avec les élèves et celle entre les élèves autour des données statistiques et autour de l'argumentation. En particulier ces formats permettent aux futur(e)s enseignant(e)s de faire des expériences avec une vue plus large sur une « culture de dialogue » et de discours argumentatif liés à l'argumentation sur la base de données statistiques en classe afin d'aider les élèves à résister à un entourage médiatique de plus en plus influencé par des faits alternatifs et tentatives de désinformation.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Amador, J., Bragelman, J. et Castro Superfine, A. (2021). Prospective teachers' noticing. *Teaching and Teacher Education, 99*. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103256

Ben-Zvi, D. et Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 3-15).

Ben-Zvi, D. et Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions? Dans K. Makar (dir.), *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy*. Brisbane: University of Queensland.

Bullock, M. et Ziegler, A. (1994). Scientific Thinking. Dans F. Weinert et W. Schneider (dir.*), The Munich Longitudinal Study on the Genesis of Ind. Competencies*. Munich: MPI.

Chinn, C. A. et Brewer, W. F. (1998). An empirical test of a taxonomy of responses to anomalous data in science. *Journal of Research in Science Teaching, 35*(6), 623-654.

Cohors-Fresenborg, E. (2019). Metacognitive and discursive activities – an intellectual kernel of classroom discussions in learning mathematics. Dans *Proceedings of CERME11*. Utrecht: University.

Cohors-Fresenborg, E. et Kaune, C. (2007). Modelling classroom discussions and categorizing discursive and metacognitive activities. Dans *Proceedings of CERME5* (p. 1180-1189). Nicosia: University of Cyprus and ERME.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston: Heath.

Dunbar, K. N. et Klahr, D. (2012). Scientific thinking and reasoning. Dans K. J. Holyoak et R. G. Morrison (dir.), *The Oxford handbook of thinking and reasoning* (p. 701-718). Oxford: University Press.

Ennis, R. H. (1987). A taxonomy of critical thinking dispositions and abilities. Dans J. B. Baron et R. J. Sternberg (dir.), *Teaching thinking skills: Theory and practice* (p. 9-26). New York: Freeman.

Ennis, R. H. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational Researcher, 18*, 4-10.

Ennis, R. H. (2002). Goals for a critical thinking curriculum and its assessment. Dans A. L. Costa (dir.), *Developing minds* (3e ed., p. 44-46). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Ennis, R. H. et Millman, J. (2005). *Cornell critical thinking test, level Z* (5e ed.). Seaside, CA: The Critical Thinking Company.

Fernández, C. et Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Dans S. Llinares et O. Chapman (dir.), *International Handbook of mathematics teacher education*. (2e ed.) (Vol. 2, p. 337-360). Brill.

Fischer, F., Kollar, I., Ufer, S., Sodian, B., Hussmann, H., Pekrun, R., Neuhaus, B., Dorner, B., Pankofer, S., Fischer, M., Strijbos, J.-W., Heene, M. et Eberle, J. (2014). Scientific reasoning and argumentation: Advancing an interdisciplinary research agenda. *Frontline Learning Research, 4*, 28-45.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Innabi, H. et Sheikh, O. (2007). The Change in Mathematics Teachers' Perceptions of Critical Thinking after 15 Years of Educational Reform in Jordan. *Educational Studies in Mathematics, 64*(1), 45-68.

Klahr, D. et Dunbar, K. (1989). Developmental differences in scientific discovery processes. Dans Klahr, D. et Kotovsky, K. (dir.), *Complex Information Processing* (p. 109-143). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Knöbel, S., Krummenauer, J. et Kuntze, S. (2025). Datenbasiertes Argumentieren im Kontext der Förderung von Bildung für nachhaltige Entwicklung und Klimawandel. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2025*. Münster: WTM.

Koerber, S., Sodian, B., Thoermer, C., & Nett, U. (2005). Scientific reasoning in young children: Preschoolers' ability to evaluate covariation evidence. *Swiss Journal of Psychology, 64*(3), 141-152.

Krummenauer, J. (2021). *Argumentieren auf der Basis statistischer Daten – Empirische Untersuchungen zur Kompetenz von Lernenden in der Primarstufe und zu Effekten einer Intervention.* [Thèse]. Verlag Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

Krummenauer, J., Emhart, M. et Kuntze, S. (2020). Können Kinder zu Beginn der ersten Klasse bereits mit statistischen Daten argumentieren? – Empirische Befunde aus einer Interviewstudie im Anfangsunterricht. *Mathematica didactica, 43*(2), 111-130.

Krummenauer, J., Gutensohn, F., Aichele, J., Emhart, M. et Kuntze, S. (2022). Argumentation based on statistical data at the very beginning of primary school – evidence from two empirical studies. Dans C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez et N. Planas (dir.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 75-82). PME.

Krummenauer, J., Gutensohn, F., Aichele, J., Emhart, M. et Kuntze, S. (2023). Young primary students' difficulties related to data-based argumentation – a qualitative analysis. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi et E. Herendiné-Kónya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 13)* (p. 2128-2135). Budapest: Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Krummenauer, J. et Kuntze, S. (2018). Primary Student's Data-Based Argumentation – An Empirical Reanalysis. 2018. Dans E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg et L. Sumpter (dir.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 251-258). PME.

Krummenauer, J., & Kuntze, S. (2019). Primary students' reasoning and argumentation based on statistical data. Dans U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen et M. Veldhuis (dir.), *Proceedings. of the 11th Congess. of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 241-248). Utrecht : Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Krummenauer, J. et Kuntze, S. (2020). Datenbasiertes Argumentieren fördern – Wie lassen sich geeignete Lernanlässe schaffen? *MNU-Journal*, *73*(5), 380-386.

Krummenauer, J. et Kuntze, S. (2021). Teacher students' and in-service teachers' awareness of statistical variation and related learning potentials in different profession-related requirement contexts. Dans M. Inprasitha, N. Changsri, N. Boonsena (dir.). Pr*oceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 163-172). Khon Kaen, Thailand: PME.

Krummenauer, J. et Kuntze, S. (accepté a). Datenbasiertes Argumentieren in der Grundschule fördern – Eine Interventionsstudie. [Fostering data-based argumentation in primary school. An intervention study]. *Journal für Mathematikdidaktik.*

Krummenauer, J. et Kuntze, S. (accepté b). Datenbasiertes Argumentieren in der Grundschule fördern: Konzeption und Inhalte von Interventionen zur Förderung des datenbasierten Argumentierens. *Journal für Mathematikdidaktik.*

Krummenauer, J., Stark, L., Schwaderer, F. et Kuntze, S. (2022). Vom Faktencheck zum Datenbasierten Argumentieren. *MNU-Journal*, *75*(3), 219–224.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA).*

Kultusministerkonferenz (KMK). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.*

Kuhn, D. (1989). Children and Adults as Intuitive Scientists. *Psychological Review, 96*, 674-689.

Kuhn, D. (2010). What is scientific thinking and how does it develop? Dans U. Goswami (dir.), *Handbook of Childhood Cogn. Development* (2e ed.) (p. 371 393). Oxford: Blackwell.

Kuhn, D., Amsel, E. et O'Loughlin, M. (1988). *The Development of Scientific Thinking Skills*. San Diego, California: Academic Press.

Kuhn, D. et Pearsall, S. (2000). Developmental origins of scientific thinking. *Journal of Cognition and Development, 1,* 113-129.

Kuntze, S. (2013). Modellieren beim Nutzen von Darstellungen in statistischen Kontexten. Hierarchische Beschreibung und Bedingungsvariablen eines Aspekts mathematischer Kompetenz. Dans R. Borromeo Ferri, G. Greefrath et G. Kaiser (dir.), *Mathematisches Modellieren in Schule und Hochschule* (p. 71-94). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kuntze, S., Aizikovitsh-Udi, E. et Clarke, D. (2013). Strategies for evaluating claims – an aspect that links critical thinking and statistical thinking. Dans A. Lindmeier et A. Heinze (dir.), *Proceedings of the 37th Conf. of the IGPME*, (Vol. 5, p. 235). Kiel: PME.

Kuntze, S., Aizikovitsh-Udi, E. et Clarke, D. (2017). Hybrid Task Design: Connecting Learning Opportunities Related to Critical Thinking and Statistical Thinking. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 92-935.

Kuntze, S., Aizikovitsh-Udi, E. et Krummenauer, J. (2022). Umgang mit Fake News, Verschwörungsmythen und Pseudowissenschaft – Was können Critical Thinking und Statistical Literacy beitragen? *MNU-Journal*, *75*(3), 181-186.

Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. et Gundlach, M. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the project RIKO-STAT. Dans C. Reading (dir.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* Ljubljana, Slovenia. International Statistical Institute.

Kuntze, S. Fernández, C., Friesen, M., Ivars, P., Krummenauer, J., Llinares, S., Samková, L., Skilling, K., Healy, L., Bernabeu, M. et Schwaderer F. (2022). *Cartoon vignettes for connecting mathematics education theory and practice – Supporting teacher education and professional development through collaborative reflection on mathematics classrooms*. [Book preprint available online from www.coreflect.eu, print edition in preparation].

Kuntze, S. et Krummenauer, J. (2022). Argumentationen beurteilen im Mathematikunterricht. *MNU-Journal, 75*(6), 452-459.

Kuntze, S. et Krummenauer, J. (2024). Promoting Discourse and Argumentation in Mathematics Classroom Interaction as a Challenge for Pre-Service Teachers – Vignette-Based Learning Opportunities as a Possible Solution Pathway. Dans J. Morska et A. Rogerson (dir.), *Building on the Past to Prepare for the Future. Proceedings of the 18th International Conference of The Mathematics Education for the Future Project* (p. 173-181). WTM.

Kuntze, S. et Kurz-Milcke, E. (2010). Content domain-related and task-specific views of mathematics teachers in the area of statistics. Dans F.M. Pinto et T.F. Kawasaki (dir.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 193-200). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Kuntze, S., Lindmeier, A. et Reiss, K. (2008). "Using models and representations in statistical contexts" as a sub-competency of statistical literacy – Results from three empirical studies. *Proceedings of ICME 11*.

Kuntze, S., Martignon, L., Vargas, F. et Engel, J. (2015). Competencies in understanding statistical information in primary and secondary school levels: An inter-cultural empirical study with German and Colombian students. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 5-25.

Kuntze, S. et Reiss, K. (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie - Ergebnisse einer Untersuchung textlicher Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*(3/4), 245-268.

Lipman, M. (1991). *Thinking in education*. New York: Cambridge University Press.

McPeck, J. (1981). *Critical Thinking and Education*. New York: St. Martin's Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTN.

Nowińska, E. et Praetorius, A.-K. (2017). Evaluation of a rating system for the assessment of meta-cognitive-discursive instructional quality. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Ressources in Mathematics Education* (p. 3121-3128). DCU Institute of Education ERME.

Reiss, K. et Thomas, J. (2000). Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. *Mathematica didactica, 23*, 96-112.

Sherin, M., Jacobs, V. et Philipp, R. (dir.). (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Siegel, H. (1988). *Educating reason: Rationality, critical thinking and education*. Routledge.

Sodian, B. (2008). Entwicklung des Denkens. Dans R. Oerter et L. Montada (dir.), Entwicklungspsychologie (6e ed.) (p. 434-479). Weinheim: Belz.

Stylianides, A. J., Bieada, K. N. et Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education. Dans A. Gutiérrez, AG. C. Leder et P. Boero (dir.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (p. 315-351). Rotterdam: Sense Publishers.

Thomas, J. (1997). *Wissenschaftliches Denken im Jugendalter*.Detuschland: Johannes-Gutenberg-Universität Mainz.

Toulmin, S. (2003). *The use or argument* (2e edition). Cambridge: University Press.

Tschirigi, J. (1980). Sensible Reasoning: A Hypothesis about Hypotheses. *Child Development, 51*, 1-10.

Wallman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching our Society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), 1-8.

Watson, J.M. (1997). Assessing Statistical Thinking Using the Media. Dans I. Gal et J.B. Garfield (dir.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (p. 107-121). IOS Press.

Watson, J. et Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal, 2*(2), 3-46.

Weinert, F. (1996). Lerntheorien und Instruktionsmodelle. Dans F. Weinert (dir.), *Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie. Band 2: Psychologie des Lernens und der Instruktion* (p. 1-48). Hogrefe.

Weinert, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. Dans F. Weinert (dir.), *Leistungsmessungen in Schulen* (p. 17-31). Beltz.

Williamson, Ph. (2016). Take the time and effort to correct misinformation. *Nature*, *540*, 171.

Willingham, D. (2007). Critical Thinking – Why is it so hard to teach? *American Educator, 2007*(3), 8-19.

Zimmerman, C. (2007). The development of scientific thinking skills in elementary and middle school. *Developmental Review*, *27*(2), 172-223.

VII - ANNEXE 1 – EXTRAIT D'UNE RESSOURCE D'APPRENTISSAGE VISANT LE RAISONNEMENT SCIENTIFIQUE

Correct ou pas correct?

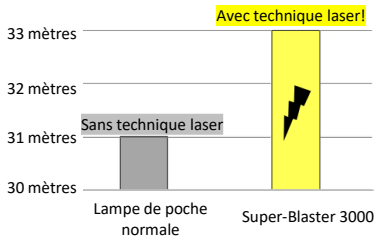
Alex et Claire veulent faire du camping avec leurs parents. Ils ont besoin d'une lampe de poche! À deux, ils vont dans un magasin en ville.

Le vendeur dans le magasin leur dit:



Regardez! Le Super-Blaster 3000 rayonne trois fois plus loin qu'une lampe de poche normale!

Et il montre ce diagramme:





Tu as entendu, le Super-Blaster 3000 rayonne trois fois plus loin … je veux l'acheter!

Verbalisation d'une difficulté observée dans des études antérieures: des enfants acceptent hâtivement des affirmations sur données statistiques comme valables

Mais peut-être ce n'est pas correct ce que dit le vendeur! Allons-y, regardons les données dans le diagramme de plus près!



Verbalisation de stratégies de raisonnement scientifique qui se dirigent contre cette fausse affirmation:

- Traiter des affirmations sur données statistiques comme hypothèses
- Vérifier l'affirmation avec les données

Claire a regardé précisément les données dans le diagramme et elle constate:

Ce que le vendeur dit n'est pas correct !!

Peux-tu justifier, ***pourquoi*** il n'a pas raison? Regarde le diagramme précisément et complète l'argument* de Claire.

Choisis parmi les propositions.

Un argument est comme une justification. Avec un argument tu dis pourquoi une chose est comme tu penses.

Clarification d'une notion nécessaire



Le vendeur n'a pas raison, parce que…

_____

_____

_____

_____

Une solution partielle et alternatives de justification est présentée aux élèves, pour diriger le focus des élèves vers le lien entre l'affirmation à justifier (« Le vendeur n'a pas raison ») et des aspects significatifs de l'évidence (et donc vers une stratégie de raisonnement scientifique qui est une clef pour l'argumentation sur la base de données statistiques).

… on voit dans le diagramme, que les deux lampes de poche rayonnent de manière égale.

… le Super-Blaster 3000 dépense trop de courant et n'est pas bien pour l'environnement.

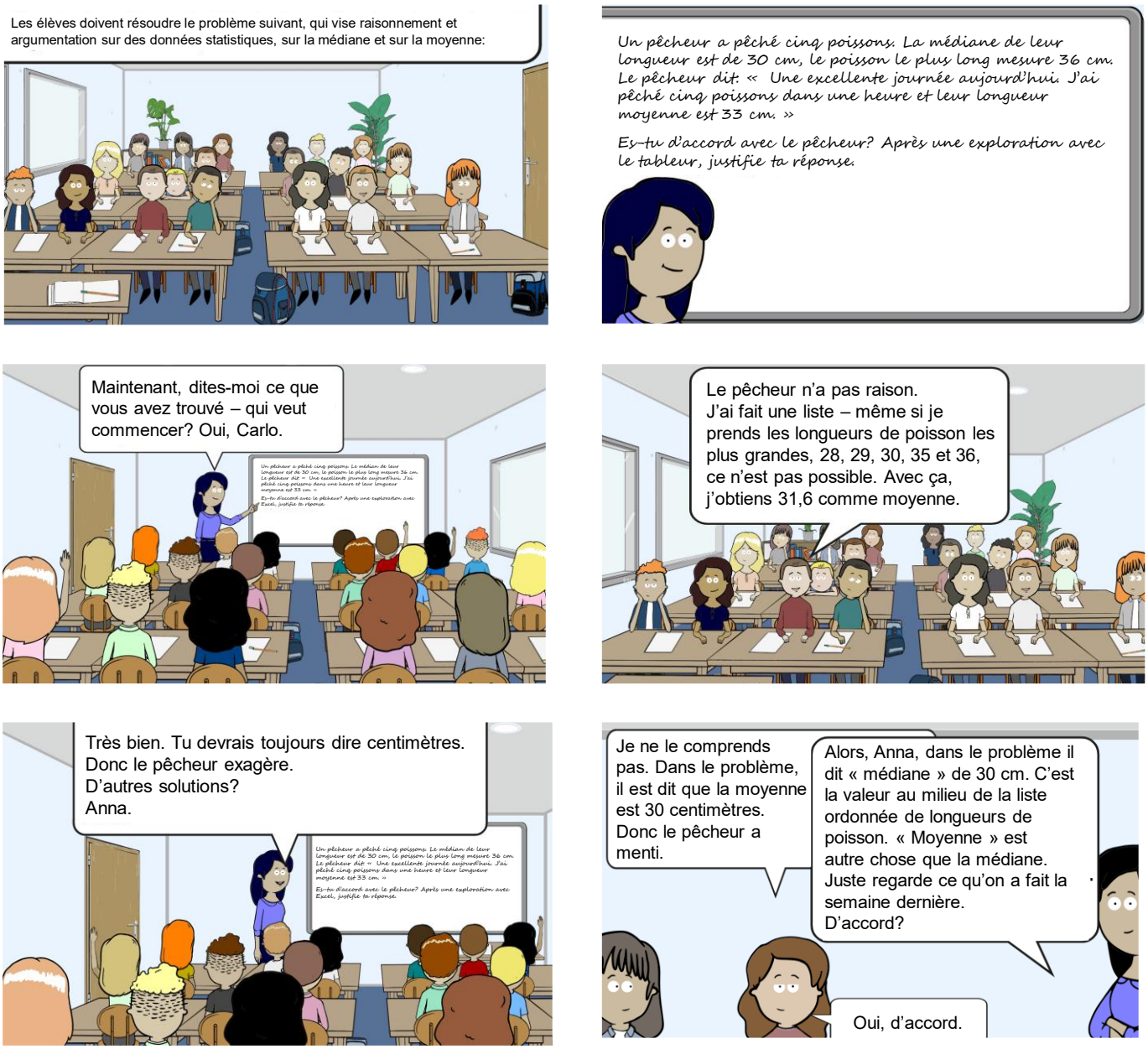
… le Super-Blaster 3000 rayonne seulement 2 mètres plus loin que la lampe de poche normale.

Le choix au milieu représente une difficulté souvent observée (justification purement basée sur le contexte malgré des données significatives disponibles, voir p.ex. Krummenauer & Kuntze, 2018) le choix fonctionne, ici, comme un distracteur.

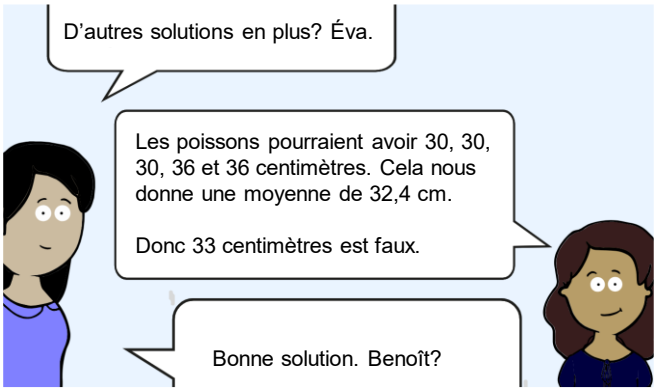
Source : Krummenauer et Kuntze (accepté b, p. 4, traduit)

ANNEXE 2 - BANDE DESSINÉE À ANALYSER PAR DE FUTUR(E)S ENSEIGNANT(E)S

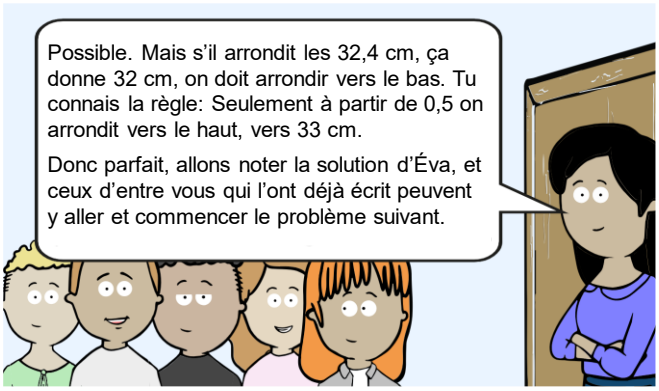
La création des bandes dessinées est facilitée par l'application DIVER (« *Designing and Investigating Vignettes in teacher Education and Research* »), qui a été développée au cours du projet coReflect@math[4].

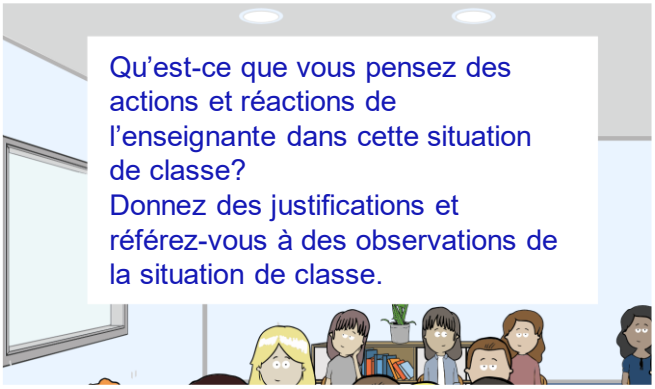


[4] www.coreflect.eu ; co-financé de 2019 à 2023 par l'Union Européenne.









Source : Kuntze et Krummenauer (2024, p. 176 et ss., traduit)

coReflect @maths
Digital Support for Teachers' Collaborative Reflection on Mathematics Classroom Situations
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

QUELLES MATHEMATIQUES POUR L'EDUCATION AU DEVELOPPEMENT DURABLE ET A LA TRANSITION ECOLOGIQUE

Sylvie GRAU
Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques
INSPE de l'académie de Nantes
Laboratoire du CREN
sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé
Des mentions ont été ajoutées aux programmes scolaires français des différents cycles par le Conseil supérieur des programmes en 2020 dans l'optique d'un « renforcement des enseignements relatifs au changement climatique, à la biodiversité et au développement durable ». Si ces textes affichent des intentions, qu'en est-il des ressources et des pratiques pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques ? Quels sont les enjeux ? De quelles connaissances mathématiques faut-il disposer pour espérer relever le défi écologique ? Quels enseignements sont nécessaires ?
Nous vous proposons d'analyser ensemble quelques ressources et d'explorer certaines pistes en lien avec les différents domaines du savoir mathématique, l'objectif étant de permettre l'entrée de tous les élèves dans une pensée complexe.

Lorsqu'on se pose la question des connaissances mathématiques dont il faudrait disposer pour espérer relever le défi écologique, assez naturellement, le domaine des statistiques est privilégié. L'objectif est de développer l'esprit critique des élèves à travers cet enseignement, en les amenant à une meilleure compréhension de ce qui se joue dans le traitement de données, la lecture et l'interprétation de graphiques mais surtout d'infographies. Cela passe par une nécessaire problématisation, car l'interprétation ne peut se faire qu'en rapport avec une question clairement posée. Le risque est d'en rester à un enseignement de techniques, éloignées des problèmes dans lesquels ces apprentissages sont contextualisés. Tout aussi naturellement, il s'agit d'amener les élèves à savoir débattre. Encore faut-il comprendre quelle est la spécificité du débat, du statut du vrai et du faux, du statut de la preuve, en classe de mathématiques afin de les expliciter aux élèves.

Cependant d'autres domaines, tout aussi primordiaux sont à considérer et malheureusement trop souvent oubliés : la mesure, les variations et la covariation de grandeurs, les probabilités, la pensée algébrique, la modélisation, voire la pensée multiplicative ainsi que le raisonnement et la logique. Autant de pistes que nous devons explorer pour permettre à tous les élèves d'entrer dans une pensée complexe.

I - CE QUE DISENT LES TEXTES OFFICIELS

En préparant cette revue de lecture des textes concernant l'éducation au développement durable (EDD) et à la transition écologique dans les programmes et les documents d'accompagnement, un premier constat a été ma difficulté à trouver des informations claires sur le sujet. L'EDD est une mission de l'école inscrite dans le code de l'éducation :

> *L'éducation à l'environnement et au développement durable débute dès l'école primaire. Elle a pour objectif de sensibiliser les enfants aux enjeux environnementaux et à la transition écologique. Elle permet la transmission et l'acquisition des connaissances et des savoirs relatifs à la nature, à la nécessité de préserver la biodiversité, à la compréhension et à l'évaluation de l'impact des activités humaines sur les ressources naturelles et à la lutte contre le changement climatique. Elle comporte également une sensibilisation à la réduction des déchets, au réemploi et au recyclage des produits et matériaux, ainsi qu'au geste de tri. (Article L312-19 - Code de l'éducation - Légifrance, 2021)*

Cette éducation repose sur les programmes scolaires sans qu'il s'agisse d'une discipline, elle apparait comme faisant partie des « principaux enseignements » – avec les langues vivantes, l'éducation artistique et culturelle, l'éducation à l'image, au cinéma et à l'audiovisuel, l'utilisation du numérique, l'enseignement des sciences, l'éducation à la vie affective et relationnelle et à la sexualité, le sport et l'éducation à la défense – permettant aux élèves l'acquisition d'un socle commun de connaissances et de compétences et de culture (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2025). Elle repose sur des projets pédagogiques impliquant les élèves comme rappelé dans un Vademecum de 72 pages (MNJS, 2020) dans lequel il est redit qu'il s'agit d'une éducation transversale et que diverses modalités de mise en œuvre doivent former les élèves à l'action et à l'engagement.

Ce Vademecum s'inscrit dans la continuité de l'Agenda 2030 signé en 2019 (MENJ – DGESCO, 2019) fixant des axes de travail, en particulier :

1. Les établissements doivent être des lieux exemplaires en matière de protection de l'environnement et de la biodiversité.
2. Le pilotage doit être renforcé et s'appuyer sur les dynamiques créées par la démocratie lycéenne.
3. Un renforcement des thématiques dans les programmes et les diplômes.

Ce renforcement sera effectif en 2020 avec différents ajouts dans les programmes dont ceux de mathématiques, nous y reviendrons plus avant.

La loi n° 2021-1104 du 22 août 2021 « portant lutte contre le dérèglement climatique et renforcement de la résilience face à ses effets » amène une modification du code de l'éducation précisant que l'EDD doit permettre aux élèves de comprendre les enjeux environnementaux, sanitaires, sociaux et économiques de la transition écologique et du développement durable. Il s'agit de développer les connaissances scientifiques et les compétences des élèves en vue de leur permettre de maîtriser ces enjeux, notamment ceux relatifs au changement climatique, à la santé environnementale et à la préservation de la biodiversité terrestre et marine, sur l'ensemble du territoire national. Il est aussi précisé que le ministère garantit les contenus, les modalités de mise en pratique de ces contenus et la cohérence du déploiement de cette éducation dans le cadre scolaire.

1 Une éducation qui se joue sur deux piliers

Dans le programme d'Enseignement Moral et Civique (EMC) publié en juin 2024 (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2024) et mis en œuvre au cours préparatoire (CP, élèves de 6 ans) et au cours moyen première année (CM1, élèves de 9 ans) à la rentrée 2024, il est demandé de traiter des problématiques liées aux EMI (Education aux médias et à l'information) et à l'EDD. Un tableau synthétise ces problématiques (Ibid., p. 5). Au CP par exemple il s'agit d'initier à la distinction entre propriété personnelle et collective, aider l'élève à comprendre le respect qui est dû à l'environnement et au vivant, des espaces familiers aux espaces plus lointains, qui sont des biens communs. Le programme ne précise cependant pas ce qu'il s'agit exactement d'enseigner. Sur le site Eduscol, des ressources sont disponibles (Eduscol, 2024) : un référentiel de compétences, une fiche synthétique permettant d'identifier 4 domaines de compétences EDD pour la scolarité (s'ouvrir à la complexité des thématiques de développement durable ; faire preuve d'esprit critique pour appréhender

les problématiques de développement durable ; adopter un comportement éthique et responsable vis-à-vis de l'environnement et des sociétés humaines ; agir individuellement et collectivement pour construire un monde durable), des repères de progression et des attendus de fin de cycle ainsi que des ressources (voir Figure 1). Ces documents laissent cependant à la charge des enseignants de déterminer les connaissances nécessaires pour cet enseignement et les modalités d'enseignement adaptées. Nous trouvons cependant quelques éléments qui permettent de mieux cerner ce qu'il est possible de mettre



Figure 1. Documents ressources sur le site Eduscol

en place.

Les repères de progressions indiquent que cette éducation se joue sur deux piliers : les enseignements disciplinaires et les activités et projets éducatifs. Ces deux piliers entrent en interaction du fait que les actions et projets doivent créer la nécessité des connaissances travaillées disciplinairement et qu'en retour ces connaissances peuvent servir d'apports pour construire les projets et activités. Il semble donc que cet enseignement doive s'appuyer sur l'interdisciplinarité, sur la résolution de problèmes et sur une pédagogie de projets.

Concernant les actions ou projets mis en place dans les établissements scolaires, l'analyse des pratiques enseignantes montre des références souvent plus intuitives que fondées scientifiquement et parfois basées sur des doxas et sur le registre du sensible (Redondo, 2021). Ainsi l'analyse des actions et projets montre qu'ils sont faits sur la base par ordre de priorité de :

- Leur simplicité ou leur facilité de mise en œuvre ;
- La dimension concrète des activités ;
- Le caractère ludique des activités ;
- L'adaptation possible aux caractéristiques des apprenants ;
- Le contact avec la nature et/ou la réalité ;
- L'activité de l'élève.

Redondo ajoute que ces priorités présentent un risque de focalisation sur le matériel, peu de décontextualisation et d'abstraction.

En fait il est bien difficile de modéliser l'articulation entre les savoirs disciplinaires et les actions en EDD. Roy et Gremaud (2017) ont tenté cette modélisation en définissant quatre modalités (figure 2) : le normatif, le réflexif sur l'axe horizontal, l'instruction et la socialisation sur l'axe vertical. Pour eux l'articulation doit d'une part amener les élèves à mobiliser des savoirs scientifiques pour comprendre les problématiques en jeu, et ce, de manière à effectuer par la suite des choix éclairés ou mener des actions

concrètes scientifiquement appuyées, et d'autre part amener les élèves à s'appuyer sur l'étude de problématiques pour construire des savoirs scientifiques contextualisés et ancrés dans la vie hors de l'école.

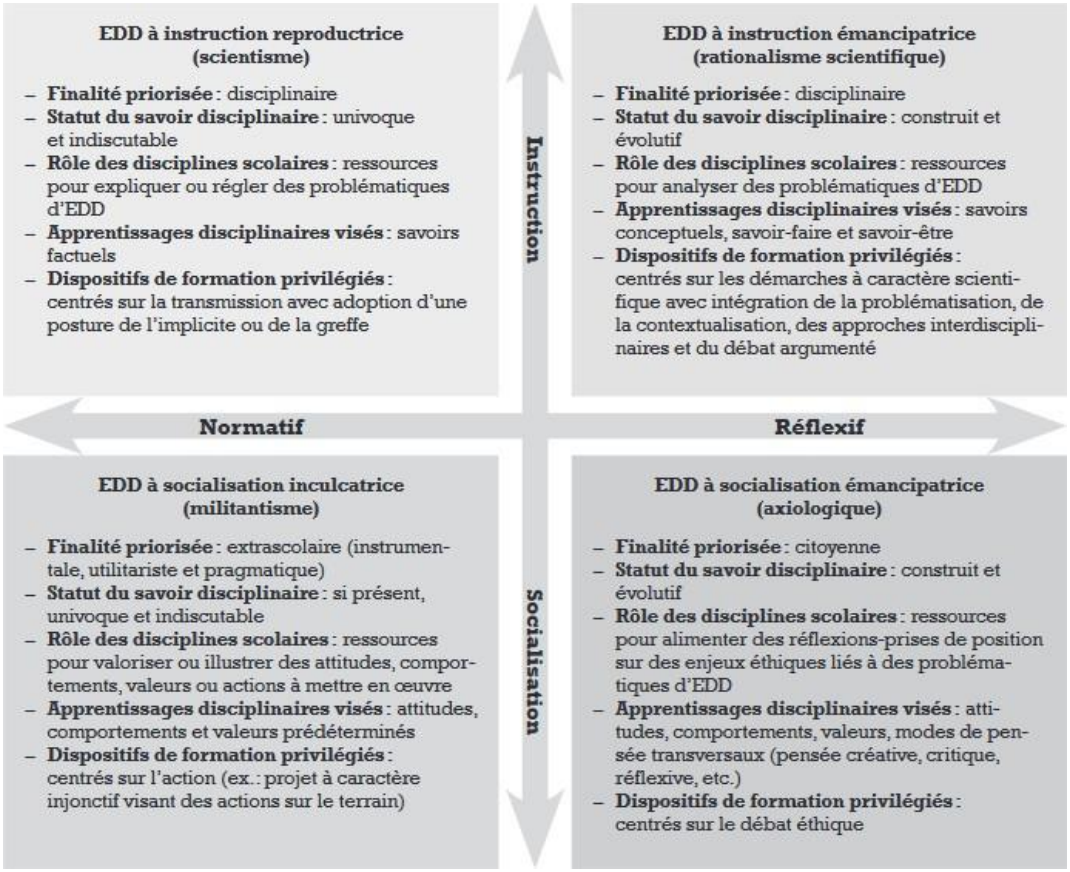


Figure 2 : Quatre configurations théoriques possibles des relations entre disciplines scolaires et problématiques d'EDD (Roy et Gremaud, 2017, p. 104)

Précisons maintenant les savoirs disciplinaires concernés par cet enseignement.

2 Les savoirs disciplinaires

L'enseignement est organisé dans ces documents autour de six thèmes (biodiversité et écosystèmes, alimentation, eau et changement climatique, gestion durable des ressources naturelles, aménagement durable des territoires, numérique) et il est précisé le rôle des mathématiques en ces termes :

- Les thèmes autour du changement climatique, du développement durable et de la biodiversité doivent être retenus pour développer des compétences en mathématiques en lien avec les disciplines plus directement concernées. Une entrée par la résolution de problèmes est à privilégier. (MEN, 2024, p. 3)

Des compétences dans certains domaines sont précisés :

- **Organiser** des données issues d'autres enseignements (sciences et technologie, histoire et géographie, éducation physique et sportive, etc.) en vue de les **traiter.**
- **Chercher :** prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.
- **Modéliser :** utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.

Nous identifions ici deux fonctions des mathématiques : elles sont outils pour résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne et objets pour concevoir des modèles mathématiques permettant d'organiser les données afin d'en produire de nouvelles.

Le Vademecum pointe le rôle des mathématiques dans la prévision, l'adaptation des écosystèmes aux changements et la compréhension d'interactions complexes en explicitant certains aspects qui concernent toute la scolarité :

- La résolution de problèmes mathématiques doit permettre d'utiliser des données réelles issues de la vie quotidienne.
- Les situations doivent susciter l'esprit critique et stimuler la pensée abstraite. L'objectif d'un ancrage rationnel vise à ce que les données soient analysées objectivement avec un raisonnement logique pour éviter que les élèves portent un jugement basé sur des intuitions ou des émotions.
- Les statistiques doivent être étudiées et en particulier les études de moyennes sur de longues périodes.
- Les calculs de moyennes, variances, les diagrammes doivent permettre de décrire les évolutions, comprendre les causes, tenter des prévisions en quantifiant le mieux possible les incertitudes.
- La compréhension des données chiffrées est essentielle pour les critiquer et les confronter.

Ces éléments se traduisent par des ajouts aux programmes en 2020 (Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2020). Pour ce qui concerne le cycle 1 (élèves de 2 à 5 ans), le texte insiste surtout sur « la pratique en classe d'activités de description pour exercer les élèves à l'observation » et sur les prolongements possibles par « des activités liées aux pratiques de la vie courante témoignant du respect de l'environnement » sans qu'un lien direct ne soit fait avec les savoirs mathématiques (Programme du cycle 1 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p. 8). Pour le cycle 2 (élèves de 6 à 8 ans), on lit dans le préambule que :

> *Les thèmes autour du changement climatique, du développement durable et de la biodiversité doivent être retenus pour développer des compétences en mathématiques en lien avec les disciplines plus directement concernées. Une entrée par la résolution de problèmes est à privilégier. Les notions suivantes peuvent être mobilisées dans ce cadre : comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer ; comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées ; utiliser les unités spécifiques de ces grandeurs et les règles de conversion.* (Programme du cycle 2 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p. 56).

Pour le domaine des nombres et calculs au cycle 2, il est précisé que « le choix des applications ou exemples de contextualisation proposés aux élèves en mathématiques est propice à une découverte des problématiques de protection de l'environnement et de la biodiversité » (Ibid., p. 58). Dans celui des grandeurs et mesures, il est ajouté que les problèmes « peuvent faire intervenir des grandeurs repérables (temps, température), des activités de représentation sur un axe, de comparaison (avant, après ; plus froid, plus chaud), de soustraction (calcul d'une durée, calcul d'un écart de température) » (Ibid., p. 61). Pour le cycle 3 (élèves de 9 à 11 ans), le préambule est similaire mais des capacités à mobiliser dans ce cadre sont explicitées :

> *utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux ; calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux ; résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux ; comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux: longueur (périmètre), aire, volume, angle ; utiliser les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs ;*

résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux. (Programme du cycle 3 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p. 91).

Ces programmes insistent donc sur la contextualisation des situations d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques avec le risque que ces situations perdent leur pertinence didactique vis-à-vis des savoirs mathématiques visés. Nous l'illustrerons plus loin sur des exemples de ressources qui proposent aux élèves des tâches qui ne permettent pas plus d'éduquer au DD que d'enseigner les mathématiques.

3 Le programme de 2025

Les nouveaux programmes de mathématiques de 2025 changent radicalement des précédents. Ils n'abordent plus explicitement l'EDD ou les enjeux climatiques sauf dans les objectifs majeurs du cycle 3 où il est écrit que « l'enseignement des mathématiques au cycle 3 s'inscrit dans une démarche éducative plus large en sensibilisant les élèves aux défis environnementaux du 21e siècle, notamment le changement climatique, la perte de la biodiversité et l'épuisement des ressources naturelles » (Eduscol, 2025). Ils précisent que ces questions doivent être abordées dans des projets ou actions interdisciplinaires. Bien sûr une contextualisation des problèmes est toujours possible mais le programme ne donne pas d'exemples de tâches en lien avec les mathématiques.

En conclusion, nous avons bien une volonté institutionnelle d'articuler l'enseignement des mathématiques aux enjeux climatiques et écologiques mais cette articulation repose sur les choix pédagogiques des enseignants.

II - QUELLES MATHÉMATIQUES POUR QUELLES PROBLÉMATIQUES ?

Pour s'attaquer aux problématiques de l'EDD et de la transition écologique, il est nécessaire de développer certaines compétences : chercher, débattre, prouver, avoir un esprit critique. En mathématiques, ces compétences sont travaillées mais avec certaines spécificités. En particulier la question du vrai et du faux en mathématique ne se traite pas de la même manière que dans les autres disciplines ou la vie de tous les jours. En mathématiques, il suffit d'un contre-exemple pour prouver qu'une proposition est fausse et quel que soit le nombre d'expériences vérifiées, seule une démonstration peut établir qu'une propriété est vraie. On pourrait penser que les mathématiques sont à l'opposé de l'incertitude et pourtant elles sont capables de quantifier cette incertitude. Les mathématiques doivent amener à douter de ce que nous voyons, de ce que nous percevons, de nos intuitions premières. Alors quels savoirs s'agit-il d'acquérir ?

1 Des savoirs ancrés dans la vie

Lorsqu'on analyse les problématiques de protection de l'environnement et de la biodiversité, il s'avère qu'il peut être utile de savoir prélever des informations, les comparer, identifier des variations de grandeurs et des relations entre différentes grandeurs, choisir des modèles, faire des prévisions, estimer pour décider et mesurer l'incertitude. Ce qui suppose de maîtriser certains savoirs mathématiques pour modéliser et donc traiter les problèmes du réel comme : les nombres et les calculs, les probabilités, le modèle de la proportionnalité et la pensée algébrique (qui arrive dans les programmes du CM1 à la rentrée 2025). D'autres savoirs sont quant à eux construits dans le monde réel, ils y ont leur raison d'être, et en premier lieu, les mesures de grandeurs (Chambris, 2007). Ces mesures s'appuient sur la perception physique des grandeurs (la perception visuelle pour la plupart mais aussi en soupesant pour la masse, l'audition pour le bruit…). La comparaison directe, puis indirecte, et enfin par le biais d'un étalon, permet d'aborder les unités et la mesure. Les grandeurs étudiées à l'école peuvent déjà s'ancrer dans des contextes d'étude en lien avec les questions de protection de l'environnement et de biodiversité (voir Tableau 1) mais un enjeu est aussi de comprendre les conversions de grandeurs que nous utilisons parfois sans nous en rendre compte. Par exemple, il n'est pas rare de répondre à la question : « Est-ce que tu habites loin ? » (question portant sur une longueur) par : « Non, j'habite à 5 min ! » (réponse par une

mesure de durée), assimilant la distance du trajet à sa durée. C'est ce mécanisme qui est utilisé en infographie lorsque l'aire d'un motif par exemple est censée représenter la mesure d'une autre grandeur comme une consommation, un « équivalent en tonne CO2 », une durée de vie etc. Un autre aspect est la distinction qu'il s'agit de faire entre d'une part les mesures avec instrument - associées à une incertitude liée à l'instrument de mesure et à l'opérateur qui effectue la mesure – et d'autre part le calcul, qui lui, se base sur des modèles et des valeurs exactes mais peut aussi être incertain du fait de l'adéquation ou non du modèle (le modèle de la proportionnalité par exemple).

Grandeurs	Contextes d'étude possibles
Longueurs, aires, volumes	Distances parcourues, empreinte au sol, consommation d'eau, d'électricité, de métaux rares…
Masses	Poids des déchets, consommation alimentaire, biomasse…
Contenances	Gaspillage alimentaire, consommation d'eau, emballages…
Temps et durées	Durée de vie des produits, émissions sur un trajet, variations en fonction du temps...
Conversions de grandeurs et d'unités	Utiles pour comprendre les infographies et données environnementales : tonne de CO_2, m^3 d'eau, décibels…

Tableau 1 : grandeurs étudiées et contextes d'étude

Un autre cadre mathématique est très ancré dans le réel, ce sont les statistiques. Le domaine « Organisation et gestion de données » aborde la construction et la lecture de tableaux et de graphiques, l'interprétation de données chiffrées (moyenne, étendue, encadrement) qui sont utiles pour comprendre les infographies (en particulier sur le climat et la biodiversité) et les courbes d'évolution (par exemple des températures ou de la pollution). Ce domaine gagnerait à être enseigné à partir du traitement de données réelles (Derouet et Dutarte, 2025). Il s'agirait d'amener les élèves à concevoir, mettre en œuvre des enquêtes et traiter les données brutes, ce qui signifie de les dépouiller et de concevoir une catégorisation. L'interprétation de données est impossible si l'on n'a pas une compréhension des enjeux du processus complet : du choix de la question, de l'échantillon, à celui de l'organisation. En particulier la mise en tableau n'est pas une évidence pour beaucoup d'élèves car ils n'ont jamais été confrontés à la détermination des entêtes des lignes et des colonnes des tableaux, les tâches proposées étant le plus souvent de compléter des tableaux déjà mis en forme. Comme pour les mesures de grandeurs, il s'agit aussi de bien différencier les statistiques descriptives ancrées dans le réel des statistiques inférentielles et probabilités qui offrent des modèles pour anticiper, prévoir. Les résultats probabilistes sont liés aux modèles choisis.

2 Des modèles abstraits

Il est beaucoup moins intéressant de travailler des savoirs concernant les autres domaines mathématiques à partir de problèmes du réel. Le risque de partir de fragments de la réalité est que ces données, si elles peuvent constituer un contexte permettant aux élèves d'acquérir des connaissances extra-mathématiques, peuvent ne pas être un milieu pertinent pour l'enseignement des notions mathématiques visées. Dans ce cas, les fragments du réel vont être choisis ou même modifiés pour que les données soient didactiquement pertinentes (que ce soit par exemple en modifiant la taille des nombres, le nombre de données, les relations entre ces données) et permettre aux élèves une modélisation horizontale pour construire un problème mathématique, que par une modélisation verticale ils vont traiter grâce à un modèle mathématiques (comme la proportionnalité par exemple).

Nous obtenons un cycle de modélisation qui s'ajoute au modèle développé par Yvain-Prébiski (Yvain-Prébiski et Discours, 2023) (Figure 3). Par exemple des mesures réelles ne permettent pas d'avoir une situation de proportionnalité exacte du fait des incertitudes de mesures, on va donc considérer des arrondis qui nous arrangent pour que la proportionnalité sur les nombres soit vérifiée. En fait une première modélisation horizontale est de la responsabilité de l'enseignant ou est prise en charge par le manuel utilisé. Certains élèves l'ont très bien compris, ils savent qu'ils sont en mathématiques pour faire des mathématiques, ils vont donc faire abstraction du contexte. C'est d'ailleurs un élément très discriminant, les élèves de milieux sociaux plus éloignés de l'école ne « jouent » pas au même jeu que les autres, ils s'intéressent au contraire très fortement au contexte et peuvent passer à côté de l'apprentissage mathématique. On pourra lire à ce sujet les travaux de Rayou sur les malentendus socio-scolaires (Rayou, 2020). Ainsi, les fragments du réel peuvent alors constituer un milieu didactique pertinent pour l'apprentissage des mathématiques mais amener la construction des connaissances erronées du point de vue du contexte.

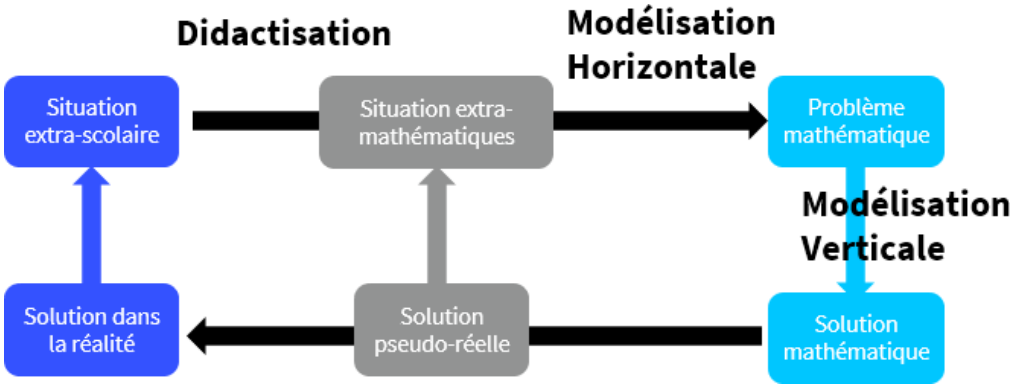


Figure 3 : double cycle de modélisation

Pour aller plus avant dans notre exploration, il nous faut analyser ce que les enseignants peuvent trouver comme ressources pour éduquer au climat et à la biodiversité. C'est pourquoi nous allons explorer quelques manuels scolaires.

III - DES MANUELS SCOLAIRES DU CYCLE 3

Une première étude menée sur les manuels de mathématiques du lycée nous a permis de repérer que certains éditeurs ont choisi d'étiqueter certaines activités ou exercices d'une mention « Esprit critique » ou « EDD ». Quelques études de cas montrent des situations qui, au lieu de déconstruire certaines croyances ou préjugés, risquent de les accentuer (Grau, 2024) et surtout qui réduisent la complexité tout en demandant aux élèves d'émettre des jugements ou des avis. Pour ce qu'il en est des manuels de mathématiques du primaire, nous n'avons pas trouvé d'exercices ou d'activités explicitement liées au DD ou à la transition écologique. Nous nous sommes alors tournés vers les manuels de sciences et technologies dans lesquels des activités sont fléchées « mathématiques ». Nous proposons d'analyser quelques activités tirées de deux manuels des éditeurs Istra et Magnard.

1 Le risque de développement de l'éco anxiété

Dans le manuel des éditions Magnard Cahier Odysséo Sciences et Technologie CM2 (Lollier-Reuss, 2024), la tâche est de réponde à une question « quelle partie du territoire français a été épargnée par la canicule en 2023 ? » à partir de la lecture d'une carte légendée. Un apport d'informations est donné par un personnage sans que l'on sache l'origine de cette information, il s'agit d'une définition de la canicule, définition qui peut être scientifiquement contestable et qui n'est pas utile pour répondre à la tâche. En effet, pour répondre, il faut comprendre que la carte indique le nombre de jours de canicule en France en 2023 sur une échelle allant de « aucun » (départements colorés en bleu) à 20 jours (départements

colorés en rouge) et donc identifier les zones bleues sur la carte. Il faut encore pouvoir les nommer. On peut imaginer qu'une réponse attendue serait de dire que le nord de la France a été épargné par la canicule en 2023. Que cherche-t-on à construire à travers cette tâche ? La séquence porte sur le réchauffement climatique, la page bilan définit ce qu'est l'effet de serre et se termine par un schéma indiquant les conséquences du réchauffement climatique. On peut déduire de ce schéma que dans le sud de la France, plus touché par la canicule, les maladies se propagent plus rapidement et les personnes les plus vulnérables (encore faudrait-il savoir de quelle vulnérabilité il s'agit) sont fragilisées. Associé aux autres conséquences que sont le déplacement de populations, l'impact sur la vie marine, les famines, la diminution de la biodiversité, on peut craindre un effet anxiogène d'un enseignement basé sur ces ressources sur les élèves. Par ailleurs, on ne voit pas quelles connaissances mathématiques sont mobilisées alors qu'un travail sur la variation des températures, la fréquence des canicules, des comparaisons, des calculs de moyennes, permettraient plus surement de construire une représentation des évolutions et un travail sur les grandeurs et sur la gestion de données (voir figure 4).

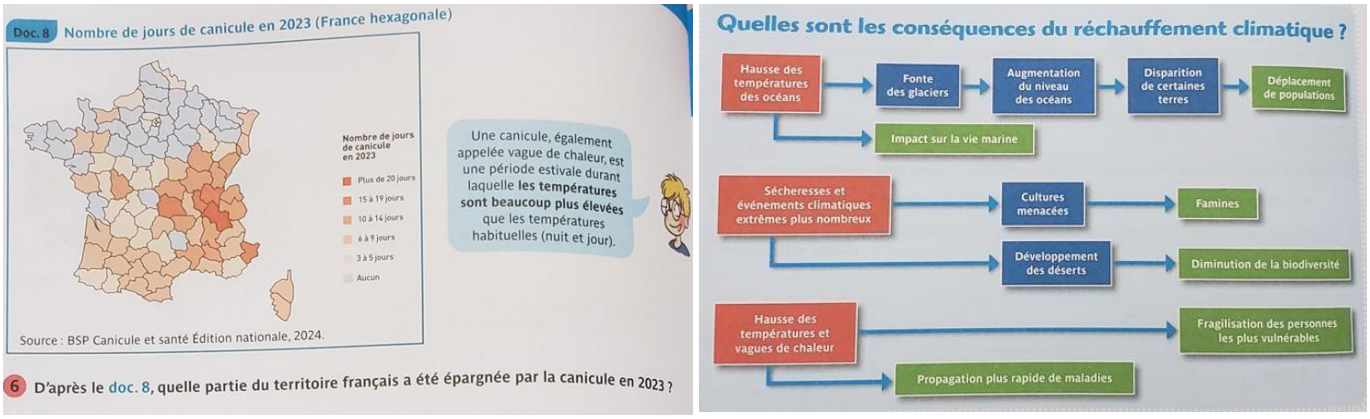


Figure 4 : manuel Magnard, 2024

2 Des savoirs mathématiques « transparents »

Si nous nous intéressons maintenant à la problématique de la préservation des ressources, la question de la consommation de l'eau est souvent traitée. Dans le manuel Istra Ecocitoyens durables ! CE2 - Cahier élève, (Le Van Gong, 2022) une infographie est proposée permettant de chiffrer la consommation d'eau en litres suivant son utilisation (figure 5) : se laver, boire, faire la vaisselle, arroser le jardin, la chasse d'eau, le remplissage de la piscine etc. Le titre du document est « Tu consommes chez toi en moyenne chaque jour ».

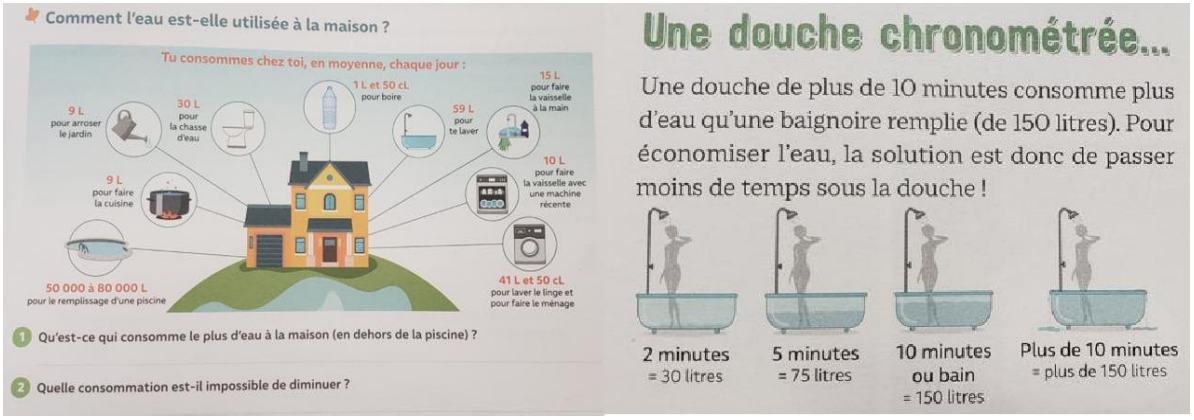


Figure 5 : manuel Istra CE2, 2022

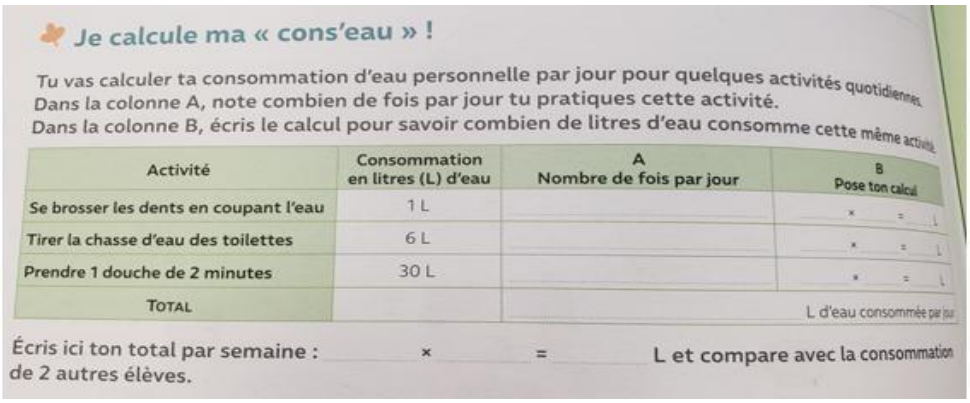
Quelques éléments posent problème dans ce document :

- Le concept de moyenne n'est pas au programme du CE2 et comme nous le verrons plus loin dans cet article, plusieurs conceptions peuvent amener des interprétations différentes : si on la considère comme une égale répartition (on répartit le total de la consommation sur une période également sur chacun des jours de cette période) ou comme un équilibre (ce qui est plus dépensé un jour compense une économie un autre jour).
- On demande de comparer des nombres entiers avec des ordres de grandeurs très différents. En fait seules quelques comparaisons semblent être porteuses d'éléments propre à faire des choix, comme par exemple la comparaison entre la quantité d'eau utilisée pour une vaisselle suivant qu'elle est faite à la main ou avec une machine. On peut cependant encore s'interroger sur les conclusions à en tirer car on ne considère pas ici l'impact de la fabrication de la machine à laver, sa durée de vie, son traitement en fin de vie etc.
- La précision des données est très différente : 41 L et 50 cL pour le lave-linge et pour faire le ménage quand d'autres consommations sont données non pas par un nombre mais par un intervalle (50 000 L à 80 000 L pour le remplissage d'une piscine). Pourquoi ce choix ? Est-ce pour travailler les conversions d'unités ? les grands nombres ?

Une autre infographie apporte une information sur la consommation d'eau en fonction de la durée d'une douche. Ici encore des savoirs mathématiques sont transparents. Il s'agit de la covariation de deux grandeurs : on étudie implicitement la covariation du volume d'eau utilisé en fonction de la durée de la douche. Mais aussi le modèle de la proportionnalité, qui est appliqué sans être discuté. On ne sait pas non plus s'il s'agit de valeurs moyennes, est-ce pareil quelle que soit la douchette utilisée par exemple ? On ne sait pas non plus ce qui se passe si on reste plus de 10 min sous la douche. Le niveau d'eau dans la baignoire est différent sur les dessins mais la hauteur d'eau est-elle proportionnelle au volume d'eau ? à la durée ? Pour le dernier cas, la baignoire déborde, ce qui signifie qu'un bain serait plus économique en eau si on reste plus de 10 min ? Pourtant la solution annoncée est qu'il faut passer moins de temps sous la douche ? Enfin au niveau des signes, on voit ici l'utilisation du signe d'égalité entre deux grandeurs qui pose question d'un point de vue sémiotique. Il faudrait rigoureusement utiliser le signe $\propto$ qui symbolise la proportionnalité (2 min $\propto$ 30 L) et qui malheureusement est très peu utilisé en France.

3 Une démarche d'enquête

Le manuel Istra CE2 est accompagné d'un guide dans lequel on propose une pédagogie de l'enquête. La démarche est intéressante puisque les fragments du réel seront de natures différentes : certains seront recueillis par une enquête menée par les élèves (figure 6) les amenant à prendre des informations dans leur quotidien et à interroger ce quotidien, d'autres seront apportés par des documents (souvent des extraits de documents authentiques).



Je calcule ma « cons'eau » !

Tu vas calculer ta consommation d'eau personnelle par jour pour quelques activités quotidiennes.
Dans la colonne A, note combien de fois par jour tu pratiques cette activité.
Dans la colonne B, écris le calcul pour savoir combien de litres d'eau consomme cette même activité.

Activité	Consommation en litres (L) d'eau	A Nombre de fois par jour	B Pose ton calcul
Se brosser les dents en coupant l'eau	1 L		× = L
Tirer la chasse d'eau des toilettes	6 L		× = L
Prendre 1 douche de 2 minutes	30 L		× = L
TOTAL			L d'eau consommée par jour

Écris ici ton total par semaine : × = L et compare avec la consommation de 2 autres élèves.

Figure 6 : manuel Istra CE2, 2022

Pour la séquence sur la consommation d'eau, le recueil de données est le nombre de fois qu'ils font un certain nombre d'activités par jour. Les informations apportées permettent une comparaison (un foyer de 4 personnes composé de 2 adultes et 2 enfants consomme en moyenne 410 L par jour) permettant de questionner le concept de moyenne. Des calculs statistiques peuvent aussi être faits au sein de la classe (moyenne, amplitude, extrema). Le manuel apporte une autre information avec la consommation d'eau moyenne d'un adulte suivant le continent où il vit (Amérique, Europe, Afrique).

Pour chaque thématique, le manuel propose des enquêtes, des informations sous différentes forme, des questions et tableaux à compléter mais aussi une institutionnalisation et une ouverture à la « réflexion personnelle » pour que les élèves proposent des pistes d'actions.

Ces institutionnalisations ne concernent cependant pas les notions mathématiques mobilisées. Il serait pourtant intéressant d'utiliser le travail mené dans ces séquences pour construire le savoir mathématique.

IV - QUELQUES PISTES ET DOMAINES A EXPLORER

D'un point de vue plus général, nous nous sommes penchés sur les représentations naïves pouvant faire obstacle au développement d'un comportement éco-responsable et à une prise en compte des questions de biodiversité et de protection de l'environnement. Il nous semble que différents concepts relevant de plusieurs domaines des mathématiques sont particulièrement à travailler, nous allons les préciser.

1 La pensée multiplicative

L'enjeu d'une pensée multiplicative est de concevoir que des grandeurs peuvent varier de manière exponentielle et non proportionnelle. En termes de croissance, les effets ne sont pas les mêmes et nous avons du mal à percevoir des variations exponentielles. La proportionnalité est, malgré toutes les difficultés que nous pouvons rencontrer dans son enseignement en tant qu'outil, une représentation relativement naturelle. En fait le problème vient surtout de la prédominance de la pensée additive dans l'enseignement en France. La multiplication sur les entiers est définie comme une addition réitérée, ce qui ne permet pas de distinguer les deux opérations. Le simple fait d'organiser cette addition réitérée sous forme de lignes et de colonnes fait alors apparaître le produit comme un produit cartésien. Les deux facteurs ont alors une signification différente (deux lignes de 3 ou trois colonnes de 2) alors que le produit est le même (commutativité de la multiplication). Les représentations que nous utilisons sont donc essentielles. La représentation mentale est différente suivant l'organisation : si on illustre le produit de 2 par 3 par une tablette de chocolat avec une organisation rectangle, la commutativité apparaît car on peut voir 2 lignes de 3 ou 3 colonnes de 2, si on présente deux regroupements de 3 jetons, il apparait l'addition réitérée 2+2+2 (Figure 7).

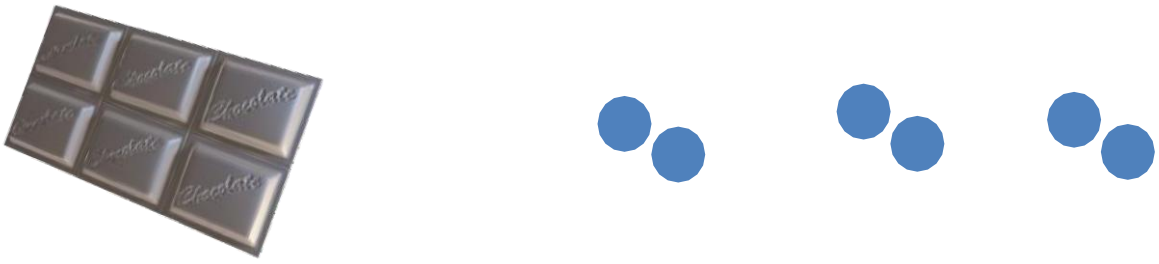


Figure 7 : deux représentations du produit de 2 par3

Il semblerait intéressant de privilégier ce que l'on appelle les « nombres rectangles » (CSEN, 2022 ; ESPE Bretagne, s. d.). Dans une pensée additive, les nombres entiers sont tous écartés de 1 unité. Avec la pensée multiplicative, 2 est le double de 1 alors que 10 est 1,1 fois 9. Le rapport est donc inférieur.

On peut alors tracer une droite graduée où la graduation est proportionnelle au taux d'augmentation entre les nombres (100% soit 1 unité entre 1 et 2 puisque 2 est le double de 1 mais 10% soit 0,1 entre 9 et 10) (Figure 8).

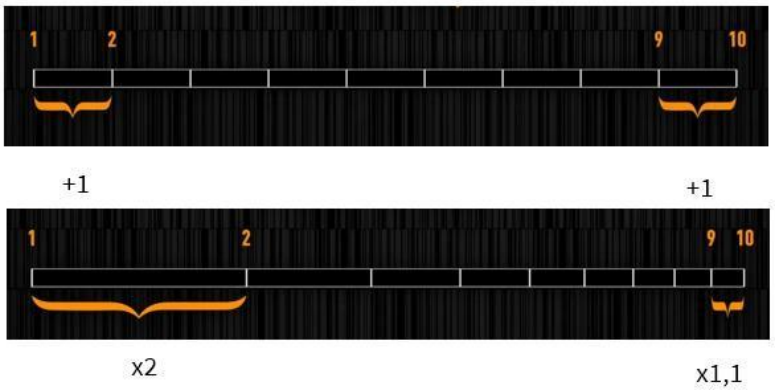


Figure 8 : graduation additive et graduation multiplicative

La loi de Benford, s'appuie sur ce principe et permet d'expliquer des résultats statistiques qui semblaient incohérents (Chagny et de la Rue, 2022). Actuellement, cette loi est utilisée pour détecter les fraudes bancaires par exemple (ARTE, s. d.). Il ne s'agit pas d'enseigner ces droites graduées mais juste de savoir que ces deux modes de pensée existent et qu'ils n'apportent pas les mêmes informations. Pour l'enseignant, cela peut apporter des éléments de compréhension d'erreurs dans les productions d'élèves mobilisant la pensée multiplicative. Pour les élèves, il s'agit de ne pas croire que la pensée additive est le seul modèle valide.

Ainsi sur le graphique ci-dessous (Figure 9), on peut considérer la variation absolue entre 3 et 6 qui est de 3 ou la variation relative qui est que 6 est le double de 3. Cette pensée multiplicative est nécessaire pour résoudre des problèmes dans lesquels apparaissent des relations de la forme « trois fois plus », « quatre fois moins ».

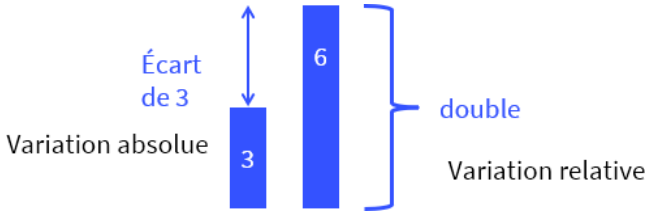


Figure 9 : Différence entre variation absolue et variation relative

Il serait donc intéressant de travailler autant la pensée multiplicative que la pensée additive.

2 L'approche co-variationnelle

Nous avons vu que les grandeurs et les mesures de grandeurs sont au cœur des problèmes de développement durable et des questions de transition écologique. Mais plus que les grandeurs elles-mêmes ce sont leurs variations qui nous intéressent et comment elles varient ensemble : la covariation. Or en France, le programme propose souvent d'apprendre des modèles et des techniques au sein de ces modèles plutôt que d'amener les élèves à construire ces modèles. Ainsi les élèves apprennent à résoudre des problèmes de proportionnalité sans avoir établi que la proportionnalité n'est qu'une covariation possible parmi d'autres et sans avoir non plus établi que ce modèle s'applique parce qu'il a été implicitement admis une relation de dépendance entre les grandeurs. Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux systèmes complexes, cette relation de dépendance n'est pas immédiate, elle doit être prouvée.

La fondation « La main à la pâte » propose des séquences très pertinentes pour travailler cette question au cycle 3. Par exemple, se demander si le poids et la taille varient au cours de la journée ? (La Fondation

La main à la pâte, s. d.) La covariation de grandeurs peut facilement être travaillée à travers des expérimentations en classe et en dehors. L'important est de varier les situations pour que les élèves étudient des variations en fonctions du temps (court et long), qui ne soient pas toutes proportionnelles, qu'ils puissent comparer à des données scientifiques. Un autre aspect est de faire la différence entre les valeurs exactes et les mesures. Ici c'est le regard sur les mathématiques qu'il s'agit de changer. Dans notre société, nous avons tendance à considérer les mathématiques comme la science de l'exactitude.

3 La gestion de données

Le paradoxe des statistiques est qu'elles visent une objectivation malgré de nombreux biais qui seraient à mettre en évidence liés au choix des critères, au choix des tests, à la nature de l'échantillon, sa représentativité, les erreurs dans les traitements, les choix de représentations, les préjugés etc. En particulier il serait intéressant de travailler la confusion entre corrélation et causalité. C'est particulièrement important pour que les élèves comprennent la différence entre les statistiques descriptives et les statistiques inférentielles qui visent, elles, à prévoir, prendre des décisions, modéliser. Par exemple, dans cet autre problème proposé par la main à la pâte « l'hirondelle et la grenouille » (Zimermann et al., 2017), il s'agit de vérifier si les hirondelles font bien le printemps et si la grenouille permet de prévoir la pluie.

Il s'agit donc non seulement de construire les savoirs statistiques à partir d'enquêtes menées par les élèves, mais aussi prévoir la possibilité de comparaisons entre différentes enquêtes (entre classes, établissement, avec des données authentiques disponibles en ligne). Une culture des « data » qui amène à reconsidérer la taille des échantillons manipulés et nécessite des traitements numériques.

Des recherches didactiques sont indispensables à mener pour analyser ce qu'il conviendrait d'enseigner pour éviter certains obstacles didactiques. Nous avons déjà évoqué la question de la moyenne. Deux conceptions sont à construire qui ne sont pas forcément compatibles. La première est de concevoir la moyenne comme un point d'équilibre (la question de l'équilibre dans l'EDD est souvent abordée) avec comme image mentale la bascule, la balance. Une autre conception est la distribution uniforme qui revient en fait à un partage équitable. Prenons l'exercice suivant :

> *Le tableau suivant indique la distance que doit parcourir Tessa pour se rendre de sa maison à ses endroits préférés. Calcule la distance moyenne.*

Endroit	Ecole	Librairie	Parc	Cinéma
Distance de la maison en km	3	5	4	4

Figure 10 : exercice de la distance moyenne à partir d'un tableau de valeurs

La représentation en termes d'équilibre (Figure 11) amène à dire qu'en moyenne Tessa parcours 4 km

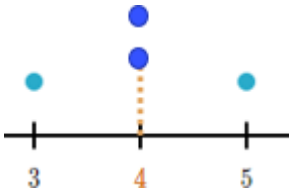


Figure 11 : moyenne équilibre

pour se rendre à ses endroits préférés. La distribution uniforme amène quant à elle à calculer le total qui est de 16 km mais qui n'a aucun sens dans la situation, et à diviser ce total par 4.

Cet exemple permet de comprendre que suivant les problèmes, la conception de la moyenne est différente et donc la technique peut être plus ou moins bien comprise. En particulier, si la somme des données n'a pas de sens dans la situation, il faut privilégier la recherche d'équilibre pour interpréter le

résultat. On peut ensuite amener les élèves à voir que le calcul par distribution uniforme permet de retrouver ce point d'équilibre.

Ce développement ici vient appuyer la nécessité d'un enseignement pensé et structuré de notions implicitement considérées comme naturellement acquises. Nous faisons l'hypothèse que ces savoirs impensés sont une cause de différenciation.

4 Mesurer le hasard

Un autre enjeu est le développement d'une pensée probabiliste. L'arrivée de ce domaine dans les programmes est intéressante mais il ne faudrait pas que cet enseignement reproduise des erreurs déjà identifiées par les didacticiens (Derouet et Dutarte, 2025). Mesurer le hasard est un changement important dans notre perception du monde. Il s'agit d'amener les élèves à comprendre qu'on n'influence pas un résultat par la volonté ou la croyance, mais aussi qu'un évènement très probable peut cependant ne pas se réaliser (Grau et Lemaire, 2025).

Les probabilités ne doivent pas être considérées indépendamment des problèmes qui les ont vu naître. Les jeux en particulier sont un bon contexte pour comprendre en quoi les probabilités peuvent aider à prendre une décision.

5 La pensée algébrique

De la même manière, concernant la pensée algébrique, il s'agit de la différencier de la pensée algorithmique. L'important n'est pas d'enseigner des techniques de résolutions algébriques mais bien d'amener les élèves à repérer des régularités, formaliser des règles, calculer sur des grandeurs inconnues (que ce soit avec des schémas comme les schémas en barre ou en utilisant des symboles comme le point d'interrogation ou une lettre). Amener nos élèves à généraliser des processus en utilisant des inconnues ou des variables est indispensable pour construire à la fois des règles et des hypothèses. Cela passe par des tâches variées qui ne doivent pas se restreindre à « trouver l'inconnue ».

De nombreux travaux en didactique dans le champ du *Early Algebra* (OIPA, s. d.) sont autant de points d'appui pour penser cet enseignement (Grau, 2025).

V - CONCLUSION

Si les programmes affichent la volonté de mettre en place cette éducation, les moyens mis à disposition des enseignants restent très insuffisants. Le travail de cartographie effectué par le CSEN est un sérieux appui pour penser cet enseignement en pointant les points de vigilances permettant de mieux choisir les situations d'enseignement-apprentissage et les ressources. Mais à ce stade de notre réflexion, nous ne pouvons que constater que les didacticiens n'ont pas encore assez pris en charge la question des savoirs mathématiques à enseigner pour une éducation au DD et à la transition écologique. Si nous avons pointé des concepts clés qu'il s'agirait de travailler et qui sont pour la plupart en rupture avec les savoirs tels qu'ils sont enseignés à l'heure actuelle, il s'agit aussi de développer ce qu'on appelle des connaissances mathématiques d'ordre 2, c'est-à-dire ce que signifie chercher, résoudre et prouver en mathématiques. Pour cela les élèves doivent rencontrer des problèmes complexes, comme les problèmes d'optimisation, ceux avec plusieurs ou sans solution, utiliser différents types de raisonnements et être amenés à construire eux-mêmes des problèmes à partir de données brutes. Ce projet ambitieux nécessite bien évidemment une formation qui ne doit pas se limiter à la formation initiale et s'appuyer sur des recherches collaboratives avec les didacticiens des mathématiques. Nous avons tous à y gagner, tant ces questions sont essentielles pour redonner du sens à l'apprentissage des mathématiques, donner du pouvoir d'agir aux élèves, favoriser leur engagement dans le travail collectif de ces questions.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARTE, (s. d.). *Voyages au pays des maths - La loi de Benford.* Consulté le 8 octobre 2025. https://www.arte.tv/fr/videos/097454-002-A/voyages-au-pays-des-maths/.

Article L312-19 - Code de l'éducation - Légifrance. Consulté le 8 octobre 2025. https://www.legifrance.gouv.fr/codes/article_lc/LEGIARTI000043974666.

Chagny, G., et de la Rue, T. (2022). L'incroyable statistique des premiers chiffres. *The Conversation France*. https://hal.science/hal-03721340.

Chambris, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM,* 69, p. 5 - 31.

CSEN, (2022). *De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique*. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/CSEN_Synthese_structures-mutliplicatives_web.pdf

Derouet, C. et Dutarte, P. (2025). Futur programme de mathématiques du cycle 3 : statistique et probabilité en CM1-CM2-Sixième. Dans *JdS 2025 : 56èmes Journées de Statistique de la SFdS*. Marseille, SFdS.

Eduscol, Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Dgesco, (2024). « L'éducation au développement durable dans le cadre des enseignements ». Consulté le 8 octobre 2025. https://eduscol.education.fr/3921/l-education-au-developpement-durable-dans-le-cadre-des-enseignements.

Eduscol, Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, (2025). *Programme de mathématiques pour le cycle 3*. https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel620_annexe2-v2.pdf

ESPE Bretagne, (s. d.). *Unité 3 situation d'apprentissage : nombres rectangles et écritures multiplicatives*. https://blog.espe-bretagne.fr/ace/wp-content/uploads/v20_module_3_les_nombres_rectangles-1.pdf

Grau, S. (2024). « Esprit critique et mathématiques : analyse de situations proposées en classe de 2nde ». Présenté à 21e colloque Problema, Nantes.

Grau, S. (2025). « Des chiffres et des lettres ». *Au fil des maths* (555), p. 8 − 14.

Grau, S. et Lemaire, S. (2025). « Take it easy ! ». *Au fil des maths* (558).

La Fondation La main à la pâte (s. d.). « Le poids et la taille varient-ils au cours de la journée ? Expérimentons ! ». Consulté le 8 octobre 2025. https://fondation-lamap.org/sequence-d-activites/le-poids-et-la-taille-varient-ils-au-cours-de-la-journee-experimentons.

Le Van Gong, A., Haller, C. et Bourdenet, K. (2022). Ecocitoyens durables ! CE2 - Cahier élève. Paris : Hachette Education Enseignants.

Loi n° 2021-1104 du 22 août 2021 portant lutte contre le dérèglement climatique et renforcement de la résilience face à ses effets, 2021-1104 (2021).

Lollier-Reuss, N., Batreau, V., Gallet, N. et Poupeau, V. (2024). *Sciences & technologie- cahier CM2*. Odysséo. Paris : Magnard.

MEN, (2024). *Attendus de fin de cycle – EDD et transition écologique - Cycle 2*. https://eduscol.education.fr/document/61217/download

Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, (2020). « Bulletin officiel n°31 du 30 juillet 2020 ». Consulté le 8 octobre 2025. https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39771.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, (2024). *Programme de l'enseignement moral et civique du cours préparatoire à la classe terminale des voies générale, technologique et professionnelle et des classes préparant au CAP.* https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel934_annexe_ok.pdf

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, (mai 2025). https://www.education.gouv.fr/le-socle-commun-de-connaissances-de-competences-et-de-culture-12512

MENJ – DGESCO (2019). Circulaire n° 2019-121 du 27-8-2019. https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo31/MENE1924799C.htm

MNJS, (2020). *Vademecum – Education au développement durable.* https://eduscol.education.fr/document/5239/download?attachment

« OIPA » (s. d.). Consulté le 8 octobre 2025. https://www.oipa.education/.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. *Education et didactique,* 14(2), p. 49 − 64.

Redondo, C. (2022). Analyse praxéologique des pédagogies de l'éducation au développement durable. *Education et didactique*, 16(2), 81 111.

Roy, P. et Gremaud, B. (2017). Une démarche d'investigation interdisciplinaire pour traiter des problématiques d'EDD dans une perspective d'instruction et de socialisation émancipatrice. *Formation et pratiques d'enseignement en question* (22), p. 99−123.

Yvain-Prébiski, S. et Discours, J. (2023). La modélisation mathématique dans la résolution de problèmes concrets.

p. 129, in *Actes du 48e colloque COPIRELEM*. Toulouse : ARPEME.

Zimmermann, G., Pasquinelli, E. et Farina, M. (2017). *Esprit scientifique, esprit critique : un projet pédagogique pour l'école primaire*. Avec La Main à la pâte. Éditions le Pommier. https://www.fondation-lamap.org/projets-thematiques.

LE DEFI ECOLOGIQUE

Jean-Michel ZAKHARTCHOUK
Professeur de Lettres honoraire et formateur
jeanmichel.zakhartchouk@wanadoo.fr

Résumé
L'école doit prendre toute sa part dans le grand défi écologique qui se pose à tous. Toutes les disciplines sont concernées, et donc les mathématiques. Les programmes intègrent désormais cette dimension, même si on peut juger cela insuffisant. Cet enseignement doit se faire en utilisant les ressources d'une pédagogie active. Nous donnons un exemple de travail à l'école primaire d'utilisation de l'outil « graphiques » en lien avec l'enseignement du climat.

Je suis très heureux de voir un colloque de didacticiens de mathématiques insérer dans ses réflexions une table ronde centrée sur ce que j'appelle « le défi écologique » pour l'école. Celui-ci en effet concerne toutes les disciplines scolaires et donc chaque enseignant à tous les niveaux de l'enseignement.

Il est important, dans un premier temps, et parlant, comme on dit, « sous le contrôle de Eric Guilyardi » qui représente ici les apports scientifiques à la question de l'environnement, je voudrais d'abord dire de façon générale ce qui, selon moi, incombe aux enseignants pour contribuer à « relever le défi écologique » avant d'aborder quelques pistes possibles plus spécifiques aux mathématiques.

I - DES PROGRAMMES AUX PRATIQUES DE CLASSE

Si on ne veut pas que soit marginalisée la thématique de l'écologie (réchauffement climatique, biodiversité), il est essentiel qu'elle soit fortement présente dans les programmes. Il est vrai que des progrès ont été accomplis dans ce sens. En 2019, le ministre de l'Éducation nationale, Jean-Michel Blanquer, dit souhaiter que le Conseil supérieur des programmes « renforce les éléments ayant trait au changement climatique, au développement durable et à la biodiversité dans les programmes » (Blanquer, 2019). Et effectivement, des ajouts ont été apportés dès juillet 2020. Ainsi, en cycle 3, il est indiqué que toutes les disciplines se doivent d'aborder « ces questions majeures de la science et des enjeux sociétaux » et qu'à la fin du cycle, les élèves doivent identifier quelques impacts des activités humaines sur l'environnement et faire le lien entre les besoins humains et la gestion raisonnée des ressources naturelles. Ce sujet est développé dans le premier chapitre de mon ouvrage (Zakhartchouk, 2024).

Mais dès les cycles 1 et 2, les programmes invitent à une première sensibilisation par des activités autour des différentes formes de la matière et de la vie, et de leurs évolutions, notamment à travers le domaine « Questionner le monde » (voir https://www.pass-education.fr/actu-questionner-le-monde-cycle-2/)

Reste que cet enseignement ne doit pas se faire aux marges, « quand il reste du temps ». L'intégration aux programmes de français et de mathématiques, les fameux « fondamentaux » selon une expression qu'on pourrait discuter, est à cet égard essentielle. Nous y reviendrons, on peut et on doit faire des maths pour mieux s'approprier les questions d'environnement et du français pour pouvoir comprendre les phénomènes en jeu. On sait que l'enseignement des sciences reste un peu un parent pauvre dans le primaire, malgré les efforts remarquables des équipes de La Main à la pâte[1] notamment. L'enseignement du climat, de la biodiversité, du développement durable, ne doit pas être le parent pauvre d'un parent pauvre ! De plus, cet enseignement s'inscrit dans la transversalité et met en jeu d'autres compétences que « cognitives », étant au cœur des CPS

[1] La Main à la pâte est une fondation créée en 2012 par l'Académie des Sciences et les écoles normales supérieures de Paris et de Lyon. Elle a vocation à accompagner les professeurs dans l'enseignement des Sciences à l'école et au collège.

(compétences psycho-sociales) dont il est si souvent question aujourd'hui ou encore des compétences de vie et de citoyenneté (Develay, 2023).

II - S'APPUYER SUR DES CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES, OUI, MAIS…

Il est clair que cet enseignement a besoin d'apports scientifiques forts, de connaissances. Même si celles-ci devront ensuite être largement « simplifiées » pour être accessibles à de jeunes élèves, elles doivent être suffisamment solides pour que cette simplification ne tombe pas dans le simplisme. La formation des enseignants est bien évidemment en jeu et on sait les difficultés de tout concilier dans la formation initiale des futurs professeurs des écoles, d'où l'importance de la formation continue. Une des difficultés d'ailleurs réside dans le fait que les connaissances en ce domaine sont plutôt récentes et ne sont pas toujours stabilises. Certes, que des connaissances scientifiques évoluent et demandent souvent des révisions de ce qu'on pensait acquis n'est pas spécifique aux sciences de l'environnement (qu'on pense aux savoirs sur la préhistoire par exemple), mais en l'occurrence, il s'agit de sciences plutôt neuves et qui ne peuvent pas toujours établir des vérités à l'abri de contestations et controverses. Mais en même temps, il existe des consensus : sur la réalité du réchauffement climatique, sur l'influence de l'homme sur cette réalité, sur la perte de la biodiversité. Ce qui n'empêche pas les débats sur la vitesse du réchauffement ou de la montée des océans sans parler de la possibilité de captation du carbone ou d'actions humaines et technologiques pour atténuer le réchauffement. Aussi est-il important de distinguer « ce que l'on sait » de ce qui n'est encore qu'hypothèses. Oui, le doute qui est souvent à la base de tout travail scientifique a toute sa place, à condition toutefois que le « droit au doute » s'accompagne d'un « devoir du doute », selon la belle expression de Gérald Bronner (2019), c'est-à-dire de la mise en place d'une méthodologie scientifique pour savoir si le doute est légitime et peut conduire à une révision de ce qui a été établi. Les activités de type les projets « Esprit scientifique, esprit critique » de la fondation La Main à la Pâte[2] justement mettent les jeunes élèves en position de petits chercheurs, en s'appuyant toutefois sur des connaissances sûres. « Il s'agit non pas de faire construire des savoirs par les élèves, mais leurs connaissances », en s'appropriant des savoirs, pour reprendre une distinction chère à Sylvain Connac (2017). Ce n'est pas un enseignement magistral qui permettra cette appropriation des connaissances, qui est synonyme d'une transmission de connaissances bien comprise (et bien durable). On comprendra facilement qu'est cruciale la question des sources : d'où vient ce qu'on sait, en quelles sources peut-on avoir confiance ? A l'heure de l'intelligence artificielle générative, déterminer la plus ou moins grande fiabilité des informations est capital et les mathématiques peuvent y contribuer largement (Farina et Pasquinelli, 2020).

III - PETITS GESTES ET CLASSE DEHORS

La tentation est grande d'axer la prise de conscience écologique pour les enfants de l'école primaire autour des « écogestes » : ne pas gaspiller l'eau, être attentif aux déchets, etc. Mais ceux-ci, qui parfois se confondent avec des règles de vie ordinaires pas forcément en lien avec une quelconque conscience écologique (laisser un endroit propre…) ne sont pas forcément porteurs de cette prise de conscience nécessaire. Il s'agit de leur donner du sens et de les relier à la vie quotidienne présente et future. Ce qui peut d'ailleurs entrer en conflit avec des modes de vie familiaux. Les enfants peuvent-ils vraiment faire pression par exemple auprès de leurs parents pour aller à l'école à pied plutôt qu'en voiture quand ce n'est pas vraiment nécessaire ? Ou pour manger davantage de légumes et produits frais plus que de la viande ? Ou pour ne pas trop chauffer la maison ? Ou ne pas renouveler constamment son stock de vêtements ? Sans doute pas, ou alors il faut engager un dialogue approfondi, dans le respect de chacun, en associant les familles. Plusieurs expériences et projets nous montrent que c'est possible

[2] Pour le projet « Esprit scientifique, esprit critique -cycle 2 », voir le site : https://fondation-lamap.org/projet/esprit-scientifique-esprit-critique-cycle-2 et pour le projet « Esprit scientifique, esprit critique -cycle 3 », voir le site : https://fondation-lamap.org/projet/esprit-scientifique-esprit-critique-cycle-3

(voir Guillou, 2020 ou le numéro spécial de la revue Repère Irem n°124, consacré aux mathématiques en plein air[3]). Et il importe de montrer aussi en quoi des pratiques alternatives peuvent être plaisantes et sources de bien-être et de meilleure santé. Vertus de la marche à pied ou du vélo, diversification du goût, surtout lorsqu'on peut tirer des légumes et des herbes d'un jardin potager à l'école, etc.

L'expérience des éco-délégués peut être soit un effet de vitrine ou une coquille vide, soit un levier d'action à condition de donner des responsabilités réelles à ces éco-délégués. Le mot « responsabilité » est d'ailleurs essentiel, il ne s'agit pas de faire des leçons de morale, de « culpabiliser », mais bien de montrer comment chacun peut participer au grand défi écologique, sans pour autant faire reposer sur l'individu la charge de « sauver la planète » alors même qu'il s'agit d'une question politique mondiale. Notons au passage qu'il faudrait éviter l'expression de « sauver la planète » car ce n'est pas notre bonne vieille Terre qui est en jeu (elle en a vu d'autres !), mais la possibilité pour les humains de continuer à y vivre…

Autre piste intéressante : permettre une reconnexion avec la nature, notamment à travers des moments de « classe dehors ». Un puissant mouvement existe de développement d'initiatives pour sortir des murs de la classe, comme en témoignent l'organisation de Rencontres Internationales de la Classe Dehors (Marseille, 2025) et les expériences relatées dans deux dossiers des Cahiers pédagogiques (2021 et 2022). Ces temps de classe en plein air sont non seulement des occasions de goûter aux charmes de la nature, trop ignorées de bien de nos enfants, d'écouter les oiseaux ou découvrir les plantes, mais aussi d'apprendre autrement, y compris en faisant des mathématiques (découvrir dans la forêt des formes géométriques, pratiquer des activités de mesure, etc.). Certes, les partisans de la « classe dehors », dans leur enthousiasme militant, peuvent surestimer l'importance et la fécondité des activités qui vont avec. Il s'agit d'évaluer les effets bénéfiques, mais aussi les limites de ces apprentissages au cœur de la Nature, en distinguant d'ailleurs un objectif d'apprendre avec la nature (qui alors est un moyen pour faire des maths, du langage oral, des sciences…) et un objectif d'apprendre la nature (la connaitre, savoir l'apprécier, l'admirer), en sachant également conjuguer l'avant et l'après la sortie en plein air (préparation et exploitation). En pédagogie, les solutions magiques n'existent pas.

IV - DES FORMES ACTIVES D'APPRENTISSAGE

Nous l'avons souligné : la pédagogie verticale ne convient pas à un enseignement de l'environnement, même si des moments d'apport magistral sont bien sûr possibles. La pédagogie active (en incluant l'activité intellectuelle, qui reste essentielle) nous propose de multiples formes de travail qui vont dans ce sens. On peut citer :

- La discussion à visée philosophique
- Le débat mouvant
- Les jeux de rôles
- L'écriture à la première personne
- Les jeux, défis, escape game…
- La démarche d'investigation
- La construction de quizz

Tout n'est pas adapté à l'école primaire, ou doit être adapté pour les plus jeunes. Mais on peut s'inspirer de ces formes, pour tous les types de contenus d'ailleurs. Ajoutons toutes les formes coopératives, le travail de groupes, le tutorat entre élèves.

Qu'en est-il de cette pratique qu'on appelle « l'enseignement explicite » et qui est plutôt en vogue aujourd'hui ? On ne peut qu'encourager les enseignants à rendre explicites leurs consignes, leurs façons de travailler, les

[3] Trouvé en ligne : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-124-reperes-irem/numero-124-de-reperes-irem-juillet-2021--1213810.kjsp?RH=1549569937920

objectifs poursuivis, etc. Pour cela d'ailleurs, il ne suffit pas d'un discours professoral, l'explicitation se fait au cours de l'activité, beaucoup d'élèves ne comprenant le sens de ce qu'ils font… qu'en faisant, ou après avoir fait, en utilisant les diverses manières de pratiquer la métacognition, chère à juste titre à de nombreux didacticiens. Mais venant d'Outre-Atlantique, ce qui se présente sous le label d'« enseignement explicite », cherche à propager, sinon imposer, une méthode unique qui n'a ses vertus que si elle n'est pas unique précisément, avec au cœur de ce dispositif, le « modelage » par l'enseignant et la reproduction des « bons gestes » par les élèves. Reprenons ce qui est dit plus haut : il n'y a pas de solution magique en pédagogie (Delboe, 2025). Nous croyons bien davantage à la diversité, à la pluralité des méthodes et approches, et particulièrement dans l'enseignement de l'environnement.

V - UN EXEMPLE DE LA PLACE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques, donc, doivent prendre toute leur part à cet enseignement. Laissons à Sylvie Grau, qui a davantage de compétences pour cela, dégager nombre de pistes possibles à l'école primaire pour y parvenir. Contentons-nous de reprendre un exemple de module d'apprentissage et d'activités que j'ai pu suivre en grande partie, menée dans des écoles à Nogent sur Oise, dans le cadre du centre pilote La Main à la pâte, à l'initiative d'une équipe. Le module intitulé « vers les graphiques » est le fruit d'un travail collectif mené avec Nathalie Pasquet, Emilie Rama, Nicolas Demarthe et Virginie Vitse, que l'on peut trouver en ligne : https://oise-nogent.centres-pilotes-lamap.org/documentation-pedagogique/vers-les-graphiques

Ce travail repose d'abord sur un constat initial : les élèves présentent des difficultés avec les graphiques, pour notamment graduer régulièrement ou dans l'ordre croissant ou encore placer des points à partir de coordonnées.

Aussi le module va-t-il être mis en place pour pourvoir des pré requis nécessaires. Les séances de maths ont été menées sur la même période que les séances de sciences sur le changement climatique. Ce module se divise en 3 séquences : les tableaux à double entrée, les lignes graduées et les graphiques. Concentrons-nous ici sur les graphiques. Dans l'exemple ci-dessous (*figure 1*), ~~l~~e tracé ne ressemble pas à une courbe. Ici l'élève a pris la donnée dans le tableau pour une période de 10 ans et a relié la date à la température. Or pour tracer un graphique, il faut placer des points en croisant les données. On apprend ainsi aux élèves que pour tracer une courbe, il faut tenir compte du tableau de données. Il ne faut pas tracer au hasard. Les données du tableau nous permettent de placer des points sur le graphique. Ensuite il faut relier les points pour tracer la courbe.

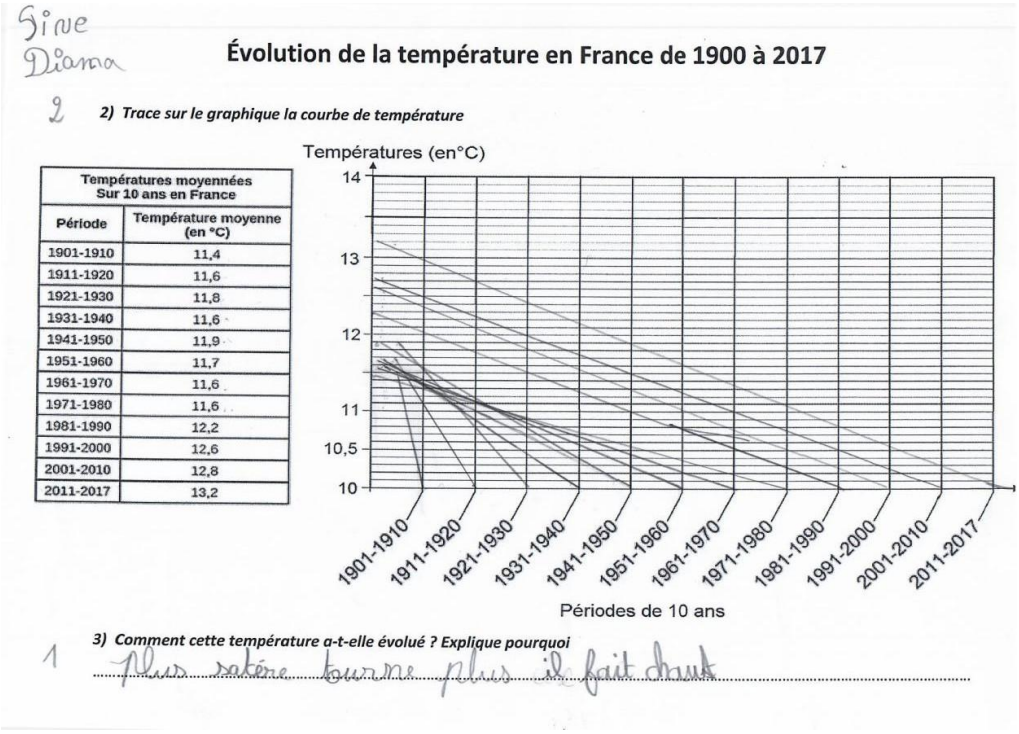


Figure 1.

On présente alors aux élèves plusieurs types de courbes : ascendantes, descendantes, en faisant comprendre pourquoi elles ont cette forme.

Deux exemples peuvent illustrer cette typologie, l'un ascendant (fig.2), l'autre descendant. (*fig.3*) . Remarquons que dans les deux cas, il s'agit d'un phénomène négatif pour l'environnement.

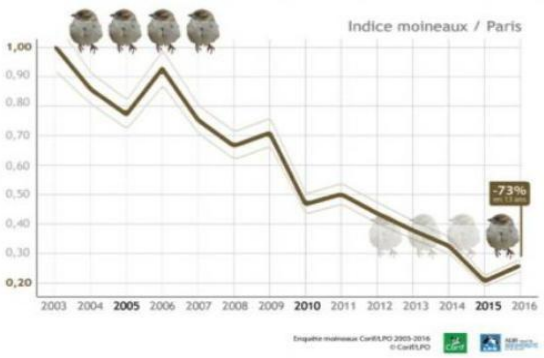
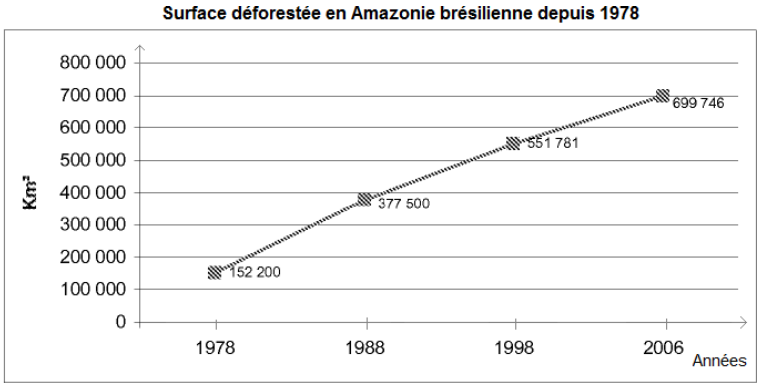


Figure 2. Population de moineaux à Paris



Source : Données de l'INPE (www.inpe.br).

Figure 3. Aire annuelle de déforestation en Amazonie, en km²

Puis, on étudie cette courbe spectaculaire (*figure 4*) en cherchant à expliquer pourquoi elle a cette forme.

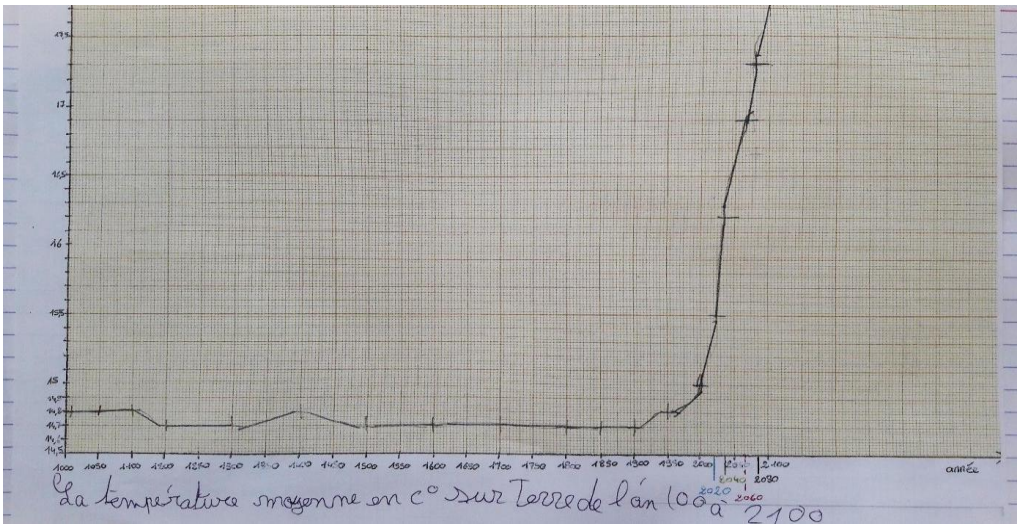


Figure 4. Evolution des températures moyennes sur un millénaire

En fait, à l'aide de documents, la classe pourra établir une corrélation avec la révolution industrielle, à partir de la fin du XIX° siècle. Ce qui constitue alors une conclusion qui nous ramène au travail global sur le climat qui est un des points forts des séquences du centre pilote La Main à la pâte de Nogent.

Et dans le cadre de cette pédagogie active et transversale, les élèves vont être amenés, en construisant un spectacle théâtral reprenant en grande partie les connaissances scientifiques acquises en cours d'année, à « jouer » cette courbe de façon acrobatique et tellement marquante pour les esprits (*figure 5*).



Figure 5. Un moment du spectacle de Sciences en scène sur le climat.

A travers cet exemple, on voit comment l'appropriation d'outils mathématiques, en l'occurrence si indispensables au citoyen d'aujourd'hui, bombardé de graphiques et de courbes dans les médias et sur les réseaux sociaux, est incontournable pour un enseignement de l'environnement en même temps que ce dernier donne du sens à ces outils. On est loin de simples habillages à thématique écologique à l'occasion de problèmes mathématiques. On part là de besoins de savoirs et savoir-faire pour avancer dans la compréhension de phénomènes environnementaux, tout en montrant les limites d'un outil ou ses mauvais usages. Ainsi, les élèves sont-ils

amenés à prendre conscience de la différence entre corrélation et causalité. Cela peut se faire à partir d'exemples très parlants, comme la relation existante entre la réussite scolaire ou tel ou tel facteur. L'ouvrage déjà cité « Esprit critique, esprit scientifique » propose une activité où l'on va démonter un soi-disant rapport de causalité suite à une courbe qui met en relation positive la taille du pied et la réussite à une dictée (la vraie cause pouvant être la relation entre taille du pied et âge). Le danger du graphique peut être justement de renforcer une illusion de causalité.[4]

On peut appliquer cet apprentissage à des contenus environnementaux et inviter à repérer là où il y a simple corrélation et là où il peut y avoir relation de causalité.

Pour contribuer aux prises de conscience que nous sommes bien dans « l'affaire du siècle » face au réchauffement climatique et à la perte de la biodiversité, pour pouvoir former de futurs éco-citoyens réfléchis et responsables, nous avons besoin de la mobilisation de l'école et en premier lieu des enseignants. Tous ceux qui doivent les accompagner, les former, les sensibiliser ont aussi cette « mission ».

VI - BIBLIOGRAPHIE

Blanquer, J.-M. (2019). Lettre de saisine du 20 juin 2019 au CSP. En ligne : https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/document/Consultez%20la%20lettre%20de%20saisine%20du%2020%20juin%202019-238635.pdf

Bronner, G. (2019). Former l'esprit critique. Dans *Cahiers pédagogiques*, n°550, 55-56.

Connac, S. (2017). Enseigner sans exclure. Dans *La pédagogie du colibri*, Paris, ESF.

Develay, M. (2023). *Les compétences de vie en classe*, de Boeck.

Delboe, G. (2025). *Et si on était plus explicite* (ressource en ligne). Url : https://www.cahiers-pedagogiques.com/et-si-on-etait-encore-plus- explicite/

Farina, M. et Pasquinelli, E. (2020). *L'art de faire confiance, Pour un nouveau contrat entre la science et les citoyens*, Paris, Odile Jacob.

Guillou, N. (2020). « Agir sur » veut dire « agir avec ». *Les Cahiers pédagogiques*, 560.

Zakhartchouk, J.-M. (2024). Relever le défi écologique à l'école. ESF.

Les Cahiers pédagogiques. (2020). *Urgence écologique, un défi pour l'école*, 560

Les Cahiers pédagogiques. (2021). *Apprendre dehors*, 570.

Les Cahiers pédagogiques. (2023). *Apprendre avec la nature*, 585.

Les programmes et circulaires sur l'éducation à l'environnement et au développement durable :

https://eduscol.education.fr/3921/l-education-au-developpement-durable-dans-le-cadre-des-enseignements

https://www.education.gouv.fr/l-education-au-developpement-durable-7136

[4] Voir à ce sujet : https://fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/ESEC/C3D4%20enseignant.pdf

ATELIERS

A11 Page 89	La formation initiale des enseignants du primaire en Belgique : quel est l'impact d'une formation reçue sur les pratiques d'un stagiaire ?	Céline NIHOUL
A12 Page 114	De la problématique notionnelle à la conception d'instruments pour l'enseignement des fractions. Quel dispositif de formation engager ?	Christine SCALISI NEYROUD, Céline HUGLI
A13 Page 132	Dispositif de formation utilisant le jeu de go pour enseigner les mathématiques au cycle 1	Albert FENECH, Antoine FENECH, Richard CABASSUT
A14 Page 144	Former les enseignants du premier degré au choix de leurs exercices d'entraînement	Michella KIWAN-ZACKA, Frédérick TEMPIER
A15 Page 157	Des situations langagières au service de la résolution de problèmes basiques	Laetitia DICHARRY, Cynthia LAROCHE, Carine REYDY, Patrick URRUTY
A16 Page 171	Les jeux de grille du CP à la sixième, une entrée dans le raisonnement mathématique	Audrey CANDELORO, Catherine THOMAS
A17 Page 200	De situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox à l'école élémentaire à l'élaboration d'une ressource à destination des enseignants	Sylvie BLANQUART, Claire GUILLE-BIEL WINDER, Christophe DRACOS, Stéphane GINOUILLAC, Anne-Claire FOURCADE, Barbara STRBA
A18 Page 230	Une ressource pour former à l'enseignement de la géométrie au cycle 3	Édith PETITFOUR Isabelle BAILLY-PURNU
A19 Page 253	Quelle transposition de concepts de didactique en formation ? L'exemple de la situation Concertum	Anne BILGOT, Christophe BILLY, Fabien EMPRIN, Isabelle LAURENÇOT SORGIUS COPIRELEM

A21 Page 296	Identifier les déterminants didactiques d'une situation : une condition nécessaire dans la conduite d'une séquence en résolution de problème ?	Bénédicte ARTOLA, Christophe BILLY, Marc CAILHOL, Pierre DANOS, Cédric FRUCHON, Isabelle LAURENÇOT SORGIUS, Floriane WOZNIAK Groupe École primaire IRES de Toulouse
A22 Page 319	La notion d'angle du « papier-crayon » au « goudron-craie »	Richard DEBORDE, Sonia YVAIN-PREBISKI
A23 Page 335	Conjuguer mathématiques et sciences de la nature autour de situations-problèmes	Audrey DAINA, Xénia SUBILIA, Fabienne BARROCA-PACCARD
A24 Page 354	Le Challenge mathématique, un dispositif de résolution de problèmes	Vincent DIONISI, Herrade GUTH, Marie-Anne MARRIÈRE, Karine RUDLOFF-BEYER, Sarah HINTERLANG Mission maths 68
A25 Page 369	Le Chercher-Débattre-Prouver à partir du cycle 1	Michèle GANDIT, Nataly ESSONNIER, Laurence MOSSUZ, Jean-Christophe SALMON, IREMI de Grenoble
A26 Page 396	Savoir exploiter un jeu pour des apprentissages mathématiques à l'école et en formation de professeurs des écoles : l'exemple de Match Point	Cécile BERROUILLER, Pierre EYSSERIC, Chantal MOUSSY, Arnaud SIMARD, Frédérick TEMPIER, Gwenaëlle VAY COPIRELEM
A27 Page 413	La situation « Bande unité », pour aller des fractions aux nombres décimaux avec ERMEL	Julien ANGLARD, Jennifer KIEFFER, Olivier METTER, Sven SEYFRIED, Gwenola URVOY Groupe IREM de Strasbourg "Enseigner avec la ressource ERMEL"
A28 Page 428	Motifs à l'école primaire à travers l'action « 4 jours, 4 défis » de la Mission Mathématiques 67	Hélène CHILLES-BRIX, Stéphanie DENIZOT, Emmanuelle LECOINDRE-KIM, Mission Mathématiques 67

LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE EN BELGIQUE : QUEL EST L'IMPACT DE LA FORMATION REÇUE SUR LES PRATIQUES DES STAGIAIRES ?

Céline NIHOUL
Formatrice, Haute École Albert Jacquard
CREAJ
celine.nihoul@heaj.be

Résumé

En Belgique francophone, la formation mathématique proposée dans le cadre de la formation initiale des enseignants du primaire varie fortement selon le profil du formateur et l'établissement où il exerce. Partant de ce constat, nous cherchons à identifier les différents profils de formateur en mathématiques et à analyser leurs pratiques d'enseignement. Nous nous intéressons également à l'impact de ces pratiques sur l'émergence des pratiques enseignantes chez les novices.

L'atelier se déroule en trois temps. Nous présentons d'abord le contexte belge de la formation initiale ainsi que quelques outils théoriques permettant d'analyser les pratiques enseignantes. Ensuite, nous proposons aux participants de travailler en petits groupes afin d'inférer des éléments sur les pratiques du formateur et du formé ciblés. Enfin, nous clôturons par une discussion collective visant à mettre en lumière l'impact des pratiques du formateur sur celles du formé.

I - CONTEXTE

L'enseignement en Belgique francophone se structure en quatre niveaux : l'enseignement maternel (2,5 à 6 ans), l'enseignement primaire (6 à 12 ans), l'enseignement secondaire inférieur (12 à 15 ans) et l'enseignement secondaire supérieur (15 à 18 ans). Les futurs enseignants des enseignements maternel, primaire et du secondaire inférieur sont formés dans les départements pédagogiques des Hautes Écoles. Depuis la mise en œuvre de la Réforme de la Formation Initiale des Enseignants (RFIE) en septembre 2023, leur cursus s'étend sur quatre années, est co-diplômé avec une université et comprend des cours disciplinaires (environ 110 crédits sur 240), des cours de pédagogie (environ 50 crédits), des ateliers pratiques et des stages (environ 60 crédits), ainsi qu'un mémoire de fin d'études (environ 20 crédits). Les futurs enseignants du secondaire supérieur, quant à eux, suivent un parcours principalement disciplinaire au sein des universités. À l'issue de leur formation, aucun concours n'est requis : les candidats postulent directement dans les différents réseaux d'enseignement, qui organisent leur affectation. Il est fréquent que les premières années de carrière se traduisent par une succession de remplacements, jusqu'à ce que les enseignants acquièrent un statut de « prioritaires » grâce à l'accumulation de jours de service. Cette situation conduit à une première dérive soulignée par les participants de l'atelier : les résultats obtenus au cours de la formation initiale n'ont aucune incidence sur l'accès à l'emploi.

Dans la formation des enseignants en mathématiques, plusieurs types de connaissances doivent être abordés (Houdement et Kuzniak, 1996 ; Houdement, 2013). Les futurs enseignants doivent non seulement maîtriser les savoirs disciplinaires, mais également développer des connaissances propres à l'enseignement de la discipline. Ces connaissances peuvent être mathématiques lorsqu'un enseignant prépare sa leçon, la régule ou l'évalue. Elles peuvent être didactiques s'il s'appuie sur des recherches en didactique des mathématiques. Elles peuvent aussi être pédagogiques lorsqu'il apprend à « fonctionner »

en classe ou à coopérer avec les autres (Bednarz et Proulx, 2009). Selon Butlen et Masselot (2019), ces dernières contribuent au développement d'une vigilance didactique, c'est-à-dire la capacité à réaliser des ajustements didactiques lorsque les mathématiques sont enseignées afin de s'adapter au public. Bednarz et Proulx (2009) ajoutent également les connaissances institutionnelles, qui permettent aux enseignants de situer leur pratique dans le cadre des référentiels et des programmes, et d'assurer la continuité des apprentissages.

Dans les Hautes Écoles en Belgique francophone, des programmes internes précisent les contenus mathématiques à aborder dans chaque cours, sous des intitulés strictement disciplinaires comme « Nombres et opérations » ou encore « Solides et figures ». Ces programmes n'explicitent pas les connaissances didactiques, pédagogiques ou institutionnelles à développer. La formation semble donc accorder une priorité à la maîtrise de la discipline, au détriment de son enseignement. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce choix. D'une part, les étudiants ont suivi des parcours scolaires très différents, générant des niveaux très variables en mathématiques. Cette diversité, déjà relevée dans d'autres contextes (Morin, Theis et Rosa-Francoeur, 2012), entraîne parfois des difficultés majeures, voire un rapport conflictuel à la discipline (Adihou et Arsenault, 2012 ; Adihou, Arsenault et Marchand, 2006 ; Sayac, 2012 ; Taveau, 2011). Cela explique certainement pourquoi les programmes se concentrent essentiellement sur le développement de la maitrise des contenus disciplinaires, considérée comme un préalable à l'acquisition de connaissances didactiques (Morin, 2008). D'autre part, la pénurie de formateurs en mathématiques en Belgique contraint les institutions à recruter des profils très variés : titulaires d'un master en mathématiques ou en physique, ingénieurs, parfois docteurs, mais également formateurs sans réelle formation didactique. Leurs connaissances de la discipline, de la didactique et des élèves diffèrent considérablement, ce qui explique éventuellement le focus des programmes sur la discipline plutôt que sur l'enseignement de celle-ci.

À partir de ces constats, plusieurs hypothèses peuvent être avancées. Tout d'abord, nous supposons que la formation initiale des futurs enseignants en mathématiques peut être très différente en fonction du profil du formateur, de l'hétérogénéité du public et de l'institution dans lequel il travaille. Puis, le profil du formateur peut influencer l'organisation des contenus disciplinaires et les choix pédagogiques, ses pratiques étant façonnées par ses propres connaissances.

Finalement, nous faisons l'hypothèse que la formation reçue permet aux futurs enseignants de développer des connaissances sur les mathématiques et son enseignement, notamment à l'école primaire. Celles-ci influenceraient les choix qu'ils doivent effectuer lorsqu'ils sont en contexte de stage ou, par après, dans l'exercice de leur métier. Autrement dit, la formation reçue par le futur enseignant influencerait son profil d'enseignant novice et, par conséquence, influencerait ses pratiques enseignantes, en germe dès la formation (Mangiante-Orsola, 2012). Notre problématique s'inscrit dans cette perspective et dans celle des travaux de Choquet (2022) : Comment les pratiques du formateur influencent-elles les pratiques des enseignants novices de l'enseignement primaire ?

Afin d'apporter les premiers éléments de réponse à cette question, nous présentons d'abord les outils théoriques mobilisés pour analyser les pratiques enseignantes. Puis, nous étudions les pratiques d'un formateur en mathématiques et celles d'un novice formé par ce dernier. Enfin, nous tentons de mettre en relation les résultats des analyses précédentes pour en dégager quelques résultats.

II - OUTILS THEORIQUES

Notre questionnement s'inscrit dans le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), qui permet d'analyser les pratiques enseignantes en mathématiques. L'approche didactique nous amène à étudier les choix opérés par l'enseignant en termes de contenus mathématiques et de gestion de classe, dans le but de favoriser les apprentissages des élèves. L'approche ergonomique, quant à elle, considère l'enseignant comme un professionnel exerçant un métier, soumis à diverses

contraintes. L'articulation de ces deux approches permet de mieux appréhender la complexité des pratiques enseignantes, à travers l'étude de cinq composantes (Chesnais, 2009 ; Robert, 2004 ; Vandebrouck, 2008). Les composantes cognitive et médiative, rattachées à l'approche didactique, nous renseignent sur les apprentissages des élèves. La composante cognitive permet d'identifier les apprentissages potentiels des élèves en analysant les scénarios élaborés par l'enseignant (choix de contenus, d'organisation, de tâches prescrites, …). La composante médiative s'intéresse aux déroulements effectifs en classe et aux apprentissages réalisés par les élèves. Les composantes institutionnelle, sociale et personnelle, rattachées à l'approche ergonomique, éclairent les contraintes liées à l'exercice du métier. La composante institutionnelle renvoie aux injonctions officielles (programmes, référentiels), aux contraintes horaires, ainsi qu'aux choix de manuels parfois imposés. La composante sociale concerne les attentes liées à l'établissement, aux collègues, aux parents ou encore aux élèves. La composante personnelle rend compte des représentations de l'enseignant sur son métier, sur l'enseignement des mathématiques et sur la formation initiale, mais aussi sur son parcours, son expérience et ses propres connaissances disciplinaires et didactiques (Choquet, 2022).

Ces différentes composantes sont très imbriquées. Selon Robert et Vandebrouck (2014), les choix cognitifs et médiatifs d'un enseignant peuvent être orientés par sa composante personnelle, tout en tenant compte des contraintes institutionnelles et sociales. Néanmoins, il reste possible d'inférer des éléments spécifiques à chacune d'elles, notamment par l'étude des scénarios et de leur déroulement, en analysant les programmes scolaires et en menant des entretiens individuels.

Dans cette étude de cas, nous étudions, d'une part, les pratiques d'un formateur et, d'autre part, les pratiques d'un enseignant novice (stagiaire). À l'instar de Choquet (2022), nous prenons en compte, du côté formateur, les contenus de la formation prévus, les déroulements effectifs en classe, les contraintes de son métier et ses représentations de la discipline, de son enseignement et de la formation initiale. Du côté du novice, nous analysons le scénario élaboré dans le cadre d'un stage à la suite de la formation, les déroulements effectifs en classe, les contraintes du stage et ses représentations de la discipline et de son enseignement. D'un point de vue méthodologique, nous ne pouvons pas analyser l'ensemble de la formation et l'ensemble des sujets attribués lors des stages. C'est pourquoi nous avons ciblé un contenu, abordé à la fois au sein de la formation initiale et souvent attribué lors des stages, à savoir la notion d'aire d'un polygone. Pour étudier les pratiques relatives à ce contenu, nous avons mené une étude de relief (au sens de Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi et Rogalski, 2007), permettant d'éclairer les choix réalisés par le formateur et par le novice lors de la conception de leurs scénarios. Nous avons également analysé les référentiels de mathématiques suivis par le formateur et par le novice. Les analyses a priori et a posteriori des scénarios ont été conduites afin de déterminer les apprentissages potentiellement réalisés par les futurs enseignants et les élèves.

III - QUELQUES ELEMENTS DE RELIEF

Nous nous intéressons à la notion d'aire et, plus particulièrement, à son enseignement dans le primaire où elle est principalement travaillée à travers les figures polygonales. Nous présentons ici quelques résultats issus de notre étude cognitive et curriculaire afin de dégager les premières spécificités de cette notion et mieux comprendre les choix effectués par les enseignants (formateur et novice).

Les référentiels de mathématiques (FWB, 2022) pour l'enseignement primaire en Belgique sont organisés autour de quatre grandes thématiques : les nombres, les grandeurs, la géométrie et le traitement de données, chacune étant abordées tout au long des six années du primaire. Dans les premières années, l'accent est mis sur les nombres et les figures géométriques qui seront nécessaires dans l'étude de l'aire. Celle-ci n'est réellement définie et enseignée qu'à partir de la quatrième primaire (9-10 ans). Jusqu'alors, les élèves ont travaillé sur les grandeurs continues à travers la notion de longueur et le calcul de périmètres de figures planes. Les référentiels définissent l'aire comme l'étendue d'une surface plane et

fixent pour objectif principal la mesure de l'aire de figures planes classiques à l'aide de formules. En quatrième année, cette étude se limite aux carrés et rectangles. En cinquième année (10-11 ans), elle s'étend au parallélogramme, mis en relation avec le rectangle. En sixième année (11-12 ans), les formules pour mesurer l'aire du triangle, du losange et du trapèze sont introduites, toujours en lien avec celle du rectangle. Ainsi, à la fin du primaire, l'aire possède un statut d'objet mathématique (au sens de Douady, 1987). Les aspects calculatoires y sont prépondérants, ce qui ne permet pas de donner du sens aux formules (Boule, 2001). Le statut d'outil reste, quant à lui, peu exploité, bien qu'il pourrait l'être, par exemple, dans de petites démonstrations géométriques ou pour étendre la multiplication aux nombres fractionnaires (Perrin-Glorian et Pinvidic, 2022).

Cette orientation des programmes peut générer des confusions chez les élèves, mises en évidence par de nombreux travaux de recherche (Douady et Perrin-Glorian, 1984 ; Héraud, 1991 ; Perrin-Glorian, 1990 ; Perrin-Glorian et Pinvidic, 2022). Tout d'abord, au vu de la première formalisation de la notion donnée aux élèves, il est possible que la grandeur continue et l'objet géométrique ne soient pas bien distingués. Par exemple, il est courant de lire dans les manuels scolaires un amalgame entre surface et superficie : « Calcule la surface du rectangle ». Ensuite, la notion de mesure en elle-même n'est pas définie. Il peut donc être difficile pour un élève de comprendre que la mesure de l'aire permet d'associer à une surface un nombre et, ainsi, confondre la grandeur et le nombre ou encore la grandeur et l'application mesure. Cela se marque, par exemple, dans les manuels scolaires par des phrases comme « L'aire vaut 2 cm² ». Enfin, vu que le périmètre est travaillé bien avant l'aire, il est possible aussi que les élèves confondent les deux grandeurs. Cette confusion se repère, par exemple, lorsque les élèves établissent une causalité dans l'augmentation ou la réduction d'une des deux grandeurs : « si l'aire augmente, alors le périmètre aussi », « si le périmètre augmente, l'aire aussi ».

Les référentiels insistent cependant sur la mise en relation des formules avec celle du rectangle, favorisant certainement une démarche de découpage-recollement de surfaces (Perrin-Glorian, 1990) ou de division méréologique (Duval, 2005). Ces manipulations amènent à découper des figures planes pour les transformer en d'autres figures planes. Elles aident aussi à mieux comprendre que des surfaces visuellement différentes peuvent avoir une même mesure. Toutefois, les notions de conservation et d'additivité ne sont ni explicitées dans les référentiels, ni systématiquement présentes dans les manuels scolaires. La figure 1 illustre cette démarche pour lier la formule pour mesurer l'aire du trapèze avec celle du rectangle.



Figure 1. La démarche de découpage-recollement.

La notion d'aire d'un polygone relève du domaine des grandeurs, mais mobilise également des connaissances sur les figures planes et sur les nombres. Trois cadres, au sens de Douady (1987), interviennent ainsi dans son enseignement : le cadre géométrique, le cadre numérique et le cadre des grandeurs. L'enseignement de cette notion constitue donc une opportunité pour établir des relations entre ces cadres (Perrin-Glorian, 1990). Les élèves doivent être amenés à effectuer de tels jeux de cadres.

De plus, plusieurs registres de représentation sémiotique (au sens de Duval, 1995) peuvent être mis en œuvre lors de l'enseignement cette notion, engendrant de nombreuses activités de conversion. Par exemple, l'extrait du manuel scolaire *Carrément Math 5* illustre quelques conversions.

> *Sur un terrain carré de 50 m de côté, la commune a décidé de construire un nouveau hall omnisport de 42 m sur 23 m. Quelle surface du terrain reste-t-il ? (Heyvaert, 2023, p. 16)*

L'énoncé du problème est donné en langue naturelle. Une modélisation de celui-ci amène à construire un dessin (figure 2). Une conversion a lieu entre le registre de la langue naturelle et du dessin.

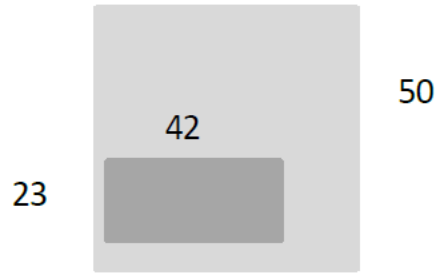


Figure 2. Dessin modélisant le problème.

Bien qu'il soit question de surface, il est attendu des élèves qu'ils mesurent la superficie totale du terrain, celle du hall omnisport pour en déduire celle restante. Voici la correction donnée :

Aire terrain = c x c
= 50 x 50
= 2 500

Aire hall = L x l
= 42 x 23
= 966

Aire restante = 2500 – 966 = 1534

L'aire du terrain libre est de 1 534 m².

Une formule générale est donnée pour le carré et le rectangle dans le registre symbolique. Il s'agit ensuite de les particulariser avec les données numériques de l'énoncé. Une conversion vers le registre numérique est à réaliser. Une fois la réponse finale calculée, la conclusion du problème est écrite, amenant une conversion entre le registre numérique et le registre de la langue naturelle. Dans certains cas, les unités de mesure ne sont pas identiques et un travail préalable éventuellement dans le registre du tableau est à effectuer. Une conversion, dans les deux sens, entre le registre numérique et du tableau est alors à mettre en œuvre.

Les premières spécificités de la notion d'aire peuvent être désormais précisées. Pour conceptualiser cette notion à l'école primaire, les statuts outil / objet doivent être développés, des jeux de cadres et des conversions de registres doivent être travaillés et de nombreuses connaissances notamment en géométrie et en arithmétique doivent être disponibles.

Nous allons maintenant analyser les pratiques du formateur et, en particulier, repérer si certaines de ces spécificités sont mises en avant dans sa formation.

IV - LES PRATIQUES DU FORMATEUR

Lors de l'atelier, il a été demandé aux participants d'inférer des éléments relatifs aux composantes des pratiques du formateur et de préciser si certaines des spécificités évoquées au point précédent apparaissent dans sa formation. Pour ce faire, plusieurs documents ont été fournis : des extraits d'un entretien individuel avec le formateur (Annexe 1), des informations complémentaires concernant son parcours professionnel et académique (Annexe 2), ainsi que la séquence qu'il a prévu sur la notion d'aire d'une figure polygonale (Annexe 3). Les déroulements n'ont pas été pris en compte dans ce contexte. Après trente minutes de travail en binômes ou en trinômes, suivies d'une discussion collective, quelques éléments ont pu être dégagés.

Le formateur interrogé est un ingénieur industriel en agronomie. Il dispose d'un titre pédagogique lui permettant d'enseigner la biologie dans le secondaire supérieur (15-18 ans) et suit actuellement une formation complémentaire obligatoire pour continuer à exercer comme formateur d'enseignants. Cette formation, centrée sur la didactique générale, aborde quelques notions de didactique liée à la discipline

du diplôme. Le formateur est donc formé à la didactique des sciences. Les connaissances didactiques pour les mathématiques ne sont alors que peu développées. Malgré ces limites, le formateur semble accorder une valeur particulière à la littératie scientifique, comme en témoignent les extraits suivants :

> *Clarifier les points que j'estime être problématiques et, pour ça, j'essaie de m'éclairer par des résultats de la recherche.*
> *Aborder plusieurs façons de voir ces notions-là. Je ne l'ai pas beaucoup fait en mathématiques, je le fais bien plus en sciences, bien sûr, mais je regardais ce qu'il y avait dans les programmes et j'essayais de me baser sur la littérature […] pour agrémenter ça et qu'ils puissent avoir un regard critique […] sur ces notions-là.*

Il affirme également que la recherche en éducation et en didactique joue un rôle important dans l'élaboration de ses formations, bien qu'il souligne manquer de temps et de préparation pour la didactique des mathématiques :

> *Les contraintes en termes d'heures, en termes de niveau initial des étudiants… la remise à niveau prend le plus de place. On a moins le temps d'avoir justement ce recul sur les notions, parce que les étudiants arrivent avec un niveau peu élevé. […] Ma formation ne m'a pas du tout préparée à faire ça. J'étais peu outillée pour donner ça convenablement. Il a fallu que je trouve des personnes ressources, mais de base, je n'étais pas armée pour ce boulot-là, clairement pas.*

Ces propos révèlent un hiatus, repéré par les participants à l'atelier, entre l'idéal du formateur – proposer une formation nourrie par la recherche et diversifiée dans ses approches – et ce qu'il est réellement en mesure de mettre en place dans le temps imparti et compte tenu de ses ressources.

Le manque d'expérience dans la formation des enseignants de l'école primaire et un manque de temps pour la préparation des séquences expliquent que le formateur suive un document construit par un autre formateur dans une autre Haute École ainsi que le livre imposé par l'institution. À ses yeux, le niveau faible en mathématiques des futurs enseignants justifie que la formation se concentre essentiellement sur la maîtrise des contenus disciplinaires. Comme il le dit lui-même :

> *Même si c'est dommage qu'on soit obligé de passer autant de temps là-dessus, mais c'est incontournable.*

Ainsi, il attend des étudiants qu'ils soient capables d'introduire la notion, de relier les manipulations et les formules et les exploiter dans les exercices. Toutefois, il reconnaît que la maitrise des contenus disciplinaires ne suffit pas pour enseigner, mais considère que sa mission prioritaire est de la garantir.

Dans la séquence construite, la majorité des contenus porte sur les formules pour mesurer l'aire de différents polygones. Le formateur choisit de les introduire dans un ordre précis se rapprochant de celui suggéré par les référentiels de l'école primaire : rectangle, carré, parallélogramme, triangle, losange, trapèze, polygone régulier. Il s'appuie donc explicitement sur ces référentiels, mais se limite à en extraire une liste de contenus à aborder :

> *Je vais toujours revoir dans les référentiels. Je liste un peu tout ce qui doit être vu [dans la formation].*

Cela montre que les connaissances institutionnelles servent de guide à sa préparation, mais qu'elles ne sont pas développées chez les futurs enseignants dans le cadre de la formation en mathématiques. Par ailleurs, les exercices choisis par le formateur mettent en œuvre les différentes formules, ce qui illustre encore une fois, sa volonté de s'assurer de la maitrise des contenus mathématiques. Aucun outil mathématique, didactique ou méthodologique n'est proposé dans la formation pour aider les étudiants à concevoir eux-mêmes une séquence sur l'aire. Les spécificités de la notion, mentionnées précédemment, ne sont pas mises en avant. Les difficultés potentielles des élèves ne sont pas évoquées. De plus, le formateur semble considérer que les connaissances pédagogiques relèvent de la responsabilité des cours de pédagogie :

> *Pour moi, c'est plutôt le job des pédagogues [gérer correctement le tableau].*

Encore une fois, j'ai tendance à reléguer ça [la gestion de la classe] plutôt du côté des pédagogues.

Les participants à l'atelier repèrent, néanmoins, dans les documents distribués aux étudiants, une volonté de relier les formules à des manipulations. Par exemple, la formule pour mesurer l'aire du parallélogramme est introduite par une démarche de découpage-recollement, consistant à transformer un parallélogramme en rectangle (figure 3). Lors des déroulements en classe, le formateur manipule lui-même la figure pour montrer le procédé aux futurs enseignants.

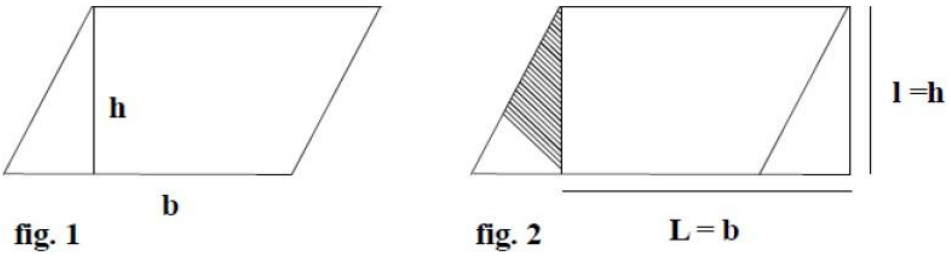


Figure 3. Extrait de la formation étudiée sur l'aire du parallélogramme.

Toutefois, cette démarche n'est pas exploitée pour les autres polygones. Par exemple, pour les trapèzes, la démarche proposée consiste à prendre deux trapèzes isométriques, à les juxtaposer pour obtenir un parallélogramme (figure 4). Lors des déroulements, la manipulation n'est pas effectuée avec les étudiants.

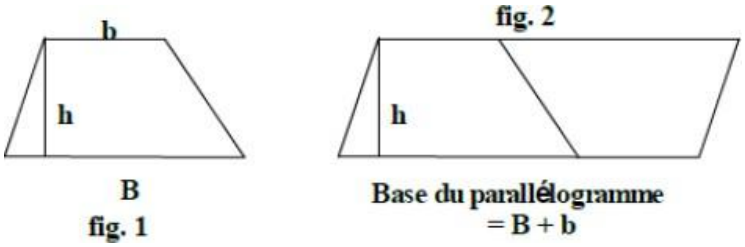


Figure 4. Extrait de la formation étudiée sur l'aire du trapèze.

De l'analyse des documents et des extraits d'entretien, les participants à l'atelier ont pu dégager des éléments relevant des différentes composantes des pratiques enseignantes. Ils sont présentés dans le tableau 1.

Personnelle	Sociale	Institutionnelle	Cognitive	Médiative
• Ingénieur • Agrégé en biologie • Suit un master de spécialisation en formation des enseignants • Valeur de la littératie • Expérience faible en enseignement • La didactique des mathématiques dit comment construire un cours	• Suivre le document d'un pair • Pas assez d'heures de cours • Niveau faible des étudiants en mathématiques	• Manque de temps pour travailler autre chose que la discipline • Suit le livre de Roegiers • S'appuie sur les programmes institutionnels	• Pas de connaissances pédagogiques (pas son job) • Insistance sur les formules mathématiques • Pas de connaissances mathématiques • Ébauche d'une démarche de découpage-recollement mais avec deux figures identiques • Pas de connaissances institutionnelles • Pas de connaissance didactique • Ne parle pas des difficultés potentielles des élèves • Tâches prescrites d'application immédiate des formules, répétitives	• Démarche de découpage-recollement réalisée une seule fois sur le parallélogramme • Suit le document écrit • Donne cours de manière assez frontale • Du temps est laissé aux étudiants pour réaliser les tâches • Pas de correction des tâches réalisées

Tableau 1. Analyse des pratiques du formateur.

L'analyse réalisée avec les participants met en évidence une formation mathématique centrée sur la maîtrise des contenus disciplinaire, au détriment des dimensions didactiques et pédagogiques. Nous nous intéressons désormais aux pratiques d'un étudiant, ayant suivi cette formation, qui devient enseignant novice lors d'un stage afin d'étudier dans quelle mesure ces choix influencent sa propre pratique.

V - LES PRATIQUES DU NOVICE

Pour le novice, les consignes données aux participants de l'atelier étaient identiques à celles concernant le formateur : il s'agissait d'inférer des éléments relatifs aux composantes de ses pratiques et de préciser si certaines des spécificités de la notion d'aire apparaissaient dans sa séquence. Plusieurs documents ont

été fournis : des informations sur le parcours du novice (Annexe 4), la séquence prévue (Annexe 5) et quelques indications relatives aux déroulements en classe (Annexe 6). Après trente minutes de travail en binômes ou en trinômes, suivies d'une discussion collective, plusieurs éléments ont été dégagés.

Le novice est étudiant en deuxième année de bachelier et effectue un stage en sixième primaire (11-12 ans). Le maitre de stage lui a imposé de concevoir une leçon sur la notion d'aire d'un trapèze. La préparation a été validée par le maitre de stage mais pas par le formateur en mathématiques. Ce stage est le troisième réalisé par le novice. Lors de l'entretien, il confie ne pas apprécier les mathématiques et rencontrer de nombreuses difficultés dans cette discipline. Il a préparé sa leçon uniquement à partir de la formation reçue, sans recourir à un manuel scolaire.

Dans sa leçon, le novice envisage une découverte de la formule pour mesurer l'aire d'un trapèze par une activité de manipulation dont la consigne est : « Construisez deux trapèzes identiques et utilisez-les pour retrouver une figure connue ». L'objectif est que les élèves se rappellent la construction du trapèze, le découpent puis le juxtaposent avec un trapèze isométrique afin d'obtenir un parallélogramme, dont la formule pour mesurer l'aire a été vue en cinquième année. Une identification des objets désignés par les lettres dans les différentes formules et une correspondance entre celles-ci est à réaliser. Cependant, lors des déroulements, le novice est déstabilisé car il n'avait pas prévu que différents types de trapèzes pouvaient être construits par les élèves. Il n'avait anticipé la manipulation qu'avec des trapèzes isocèles. Il est donc démuni lorsqu'un élève produit des trapèzes rectangles. Pris de court, il restreint la consigne pour n'obtenir que des trapèzes isocèles. Cette réaction illustre à la fois l'influence de sa formation et son absence de connaissances mathématiques et didactiques lui permettant d'anticiper différentes stratégies de raisonnement, notamment avec les analyses *a priori*, et de s'adapter aux élèves. Elle reflète également un élément de sa composante personnelle : il choisit de rester dans sa zone de confort et d'éviter la prise de risque.

Une discussion collective est prévue à la fin de la manipulation pour valider la formule attendue. Or, lors des déroulements en classe, les élèves ne participent pas, ne répondent pas aux questions du novice et n'ont pas réussi à déduire la formule. Face à cette impasse, le novice prend alors à sa charge le rappel de la formule pour mesurer l'aire d'un parallélogramme, indique B x h sur le Tableau Blanc Interactif (TBI) et fait le schéma de la figure 5.

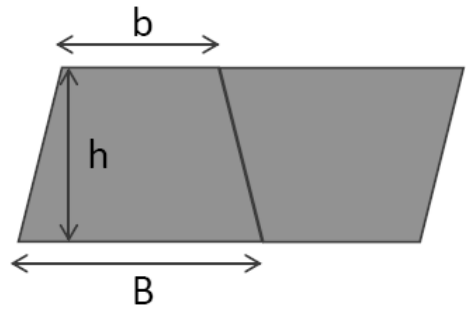


Figure 5. Schéma réalisé au TBI par le novice.

La lettre B désigne successivement deux objets : la mesure de la longueur de la base du parallélogramme et la mesure de la longueur de la grande base du trapèze isocèle. Le novice ne semble pas percevoir que cela peut être une source de difficultés pour les élèves. Constatant que la formule n'est produite par aucun élève, il finit par l'écrire lui-même. Ainsi, bien qu'il valorise l'importance de la manipulation, il ne l'articule pas réellement avec la formule et ne cherche pas à lui donner du sens. De plus, la généralisation aux trapèzes quelconques n'est jamais abordée.

La séance se termine par une phase d'exercices dans laquelle les tâches prescrites ont toutes le même énoncé : « Calcule l'aire du trapèze ». Cela laisse supposer que le novice rencontre lui-même une confusion entre l'aire et les nombres. De plus, à aucun moment, il utilise le verbe « mesurer » aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. Les trapèzes proposés sont tous isocèles et isométriques, indépendamment des

mesures indiquées (figure 6).

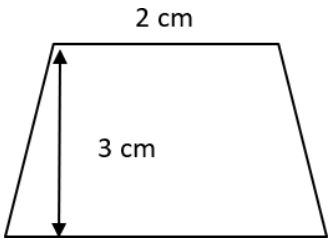


Figure 6. Tâche proposée par le novice.

En classe, les énoncés sont projetés les uns à la suite des autres sur le TBI. Les élèves travaillent en autonomie pendant que le novice circule entre les bancs. Aucun exemple n'est donné et aucune correction n'est proposée. Les copies sont recueillies pour une correction à domicile, clôturant la leçon.

Dans cette leçon, le novice ne prend pas en compte les spécificités de la notion d'aire. Cela peut s'expliquer, d'une part, par la formation qui ne les mets pas en évidence et, d'autre part, par son choix de travailler seul sans support de manuel scolaire. L'absence de connaissances sur l'enseignement de la notion a conduit à des manques dans la préparation, la mise en œuvre et l'ajustement de la leçon. Le novice n'anticipe pas ou pas assez les raisonnements possibles des élèves, ne prend pas en compte leurs difficultés et minore les activités des élèves.

La discussion collective menée durant l'atelier a permis de construire le tableau 2 dans lequel les composantes des pratiques enseignantes du novice ont été résumées.

Personnelle	Sociale	Institutionnelle	Cognitive	Médiative
• N'aime pas les mathématiques • Rencontre des difficultés avec la discipline • Débutant	• Travaille seul • Sujet imposé et validé par le maitre de stage	• Est conforme au référentiel • Ne s'appuie pas sur la formule du rectangle	• Se base sur la formation reçue • Choisit de travailler uniquement les Trapèzes isocèles	• Il interdit le trapèze rectangle • Il introduit lui-même la formule
• Se rassure avec les formules et ne prend pas de risque • A eu le formateur en formation • Il faut manipuler en mathématiques		• Pas de manuel utilisé	(figures prototypiques) • Les élèves doivent déduire la formule seuls à partir de la manipulation prévue et d'un dessin • Ne part que du parallélogramme • Ne généralise pas à tous les types de trapèzes • Connaissances anciennes à mobiliser sur les trapèzes, les parallélogrammes et les formules de mesure d'aire correspondantes • Exercices d'application de formules, stéréotypés et répétitifs • Pas de découpage-recollement • Pas de difficultés envisagées des élèves	• Pas de lien avec les connaissances anciennes • Pas de vérification de l'acquisition de la notion • Pas d'exemple • Pas de correction • Utilisation du TBI inadéquate, aucune trace écrite pour les élèves

Tableau 2. Analyse des pratiques du novice.

L'analyse des pratiques du novice réalisée avec les participants de l'atelier met aussi en évidence des choix liés à la formation reçue et à ses propres représentations. Nous nous intéressons désormais aux liens potentiels

entre les pratiques du formateur et celles du novice.

VI - PREMIERS RESULTATS

Afin d'apporter des éléments de réponse à la problématique, nous avons demandé aux participants de l'atelier de croiser les analyses des pratiques du formateur et du novice et d'inférer en quoi les premières ont pu influencer les secondes. Plusieurs constats ont émergé de nos discussions.

Tout d'abord, la composante cognitive des pratiques du formateur, elle-même grandement influencée par la composante personnelle, semble avoir un impact direct sur la composante cognitive du novice. Ce dernier reprend, en effet, la formation telle qu'il l'a reçue, sans la remettre en question ni la modifier. Le choix du formateur de mettre l'accent sur la maitrise de la discipline plutôt que sur les connaissances didactiques ne fournit pas au novice les outils nécessaires pour concevoir des exercices consistants. De ce fait, les participants suggèrent que la composante personnelle du formateur influe sur la composante cognitive du novice.

Par ailleurs, le formateur affirme explicitement que ce n'est pas son rôle d'intégrer des connaissances pédagogiques au sein de la formation disciplinaire. Cette conception entraîne des répercussions visibles dans les pratiques du novice. En effet, le travail collectif a mis en évidence que les activités des élèves en sont grandement minorées, que les ajustements aux élèves sont quasi inexistants et que la gestion collective des corrections est absente. La vision de la formation chez le formateur, élément de la composante personnelle, semble influencer la composante cognitive et la composante médiative du novice. Certains participants y ont vu une forme de contrat institutionnel implicite entre le formateur et le novice et soulignent la pertinence d'analyser les pratiques du novice dans un autre contexte de formation, avec un autre formateur de mathématiques ou lorsqu'il débutera dans sa propre classe.

Ensuite, les choix cognitifs et médiatifs du formateur paraissent également, selon le collectif, jouer un rôle déterminant dans la représentation que le novice se fait de l'enseignement des mathématiques. Le formateur conçoit le développement du sens d'une notion principalement à travers des manipulations sans véritable articulation avec la formule. Cela se retrouve chez le novice qui insiste sur une activité de manipulation en début de leçon, sans qu'elle serve de levier pour la suite de celle-ci. De plus, le formateur prend à sa charge l'introduction des formules, donne cours de manière frontale et propose des exercices d'application de formules sans correction collective. Le novice reproduit ce schéma : il introduit lui-même la formule, propose une série de tâches centrées sur son application, ne fournit aucun exemple et aucune correction. Ce parallèle suggère que les composantes cognitive et médiative du formateur influencent la composante personnelle du novice. Ce constat rejoint les résultats présentés par Choquet (2022).

L'analyse des pratiques du formateur montre, enfin, que les différents types de connaissances ne sont pas mobilisés. Le novice, de son côté, prépare sa leçon sans tenir compte des difficultés potentielles des élèves, des spécificités de la notion, des injonctions des référentiels scolaires et des enjeux liés à la gestion de la classe. Ce choix nous a semblé logique, puisqu'il n'a pas été formé à ce type de réflexion. Toutefois, il n'a pas non plus cherché à compenser ces manques par des recherches complémentaires ou l'utilisation de manuels scolaires. Il est donc possible que l'absence de développement de ces connaissances dans la formation limite la capacité du novice à élaborer et ajuster sa séquence. La composante cognitive du formateur influence probablement les composantes cognitive, médiative et institutionnelle du novice, selon le type de connaissances développé ou laissé de côté au sein de la formation.

VII - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En Belgique francophone, les formations mathématiques proposées aux futurs enseignants de l'école primaire se caractérisent par une forte hétérogénéité, aussi bien à l'intérieur d'une même institution qu'entre différentes institutions. Cette diversité s'explique notamment par la variété des profils des

formateurs, liée à un manque de formation spécifique ou à la pénurie dans ce métier, ainsi que par les disparités des niveaux de maîtrise des contenus disciplinaires par les étudiants, pouvant varier selon les institutions.

Au regard de ces constats, deux hypothèses ont été formulées :

1) Les pratiques enseignantes du formateur sont influencées par son profil.
2) La formation reçue par le novice influence ses pratiques enseignantes en germe.

C'est à partir de ces hypothèses que nous avons orienté notre étude de cas et l'atelier associé autour de la question suivante : comment les pratiques du formateur influencent-elles les pratiques des enseignants novices de l'enseignement primaire ?

L'appui sur le cadre théorique de la Double Approche nous a permis d'analyser les cinq composantes des pratiques (cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle) chez un formateur de mathématiques et chez un de ses étudiants en situation de stage. Les premiers résultats tendent à confirmer les hypothèses initiales.

Du côté du formateur, ses pratiques apparaissent fortement déterminées par sa vision du métier, sa conception de la formation initiale et les connaissances (mathématiques, didactiques et institutionnelles) dont il dispose. Si certaines contraintes pèsent sur son activité, de nombreux choix cognitifs et médiatifs s'expliquent par des éléments de sa composante personnelle. Du côté du novice, il est plus difficile d'inférer des éléments sur les pratiques enseignantes puisque son expérience est encore limitée et ses pratiques ne sont pas encore cohérentes et stables. Néanmoins, certains choix effectués dans la préparation ou dans la mise en œuvre de sa leçon semblent directement reliés à la formation reçue. C'est le cas, par exemple, lors de l'introduction de la formule par manipulation et lors de la phase d'exercices. Le croisement des analyses suggère ainsi un effet de transfert quasi direct, sans prise de recul, entre la formation reçue et les pratiques du novice. Ce résultat met en évidence un impact particulièrement marqué de la composante cognitive des pratiques du formateur sur les composantes personnelle, institutionnelle, cognitive et médiative des pratiques du novice. Contrairement aux travaux de Choquet (2022) qui identifiaient des effets directs et réflexifs de la formation, nos résultats montrent uniquement un effet direct et peu, voire pas du tout, réflexif. Cela peut s'expliquer par le contexte belge et par la taille réduite de notre échantillon.

Ces résultats invitent à renforcer la formation mathématique des formateurs eux-mêmes, en insistant sur l'intégration de connaissances mathématiques, didactiques, pédagogiques et institutionnelles spécifiques à l'enseignement de la discipline. Celle-ci permettrait certainement de mieux accompagner les novices dans leur entrée dans le métier, en développant chez eux une certaine vigilance didactique.

Notre travail présente plusieurs limites. Des choix méthodologiques ont été faits pour cet atelier de deux heures. L'analyse ne porte que sur un seul formateur, de surcroit non formé, et un seul novice, rencontrant lui-même des difficultés avec les mathématiques. De plus, les déroulements de la formation ne sont pas détaillés et l'entretien du novice n'a pas été fourni. Des éléments pertinents ont été ciblés afin d'expliciter plus facilement la relation entre les pratiques du formateur et du novice. Lors des discussions en atelier, nous avons également constaté que l'imbrication des composantes dans la Double Approche peut entraîner des divergences d'interprétation chez les participants. Nous avons quand même réussi à construire ensemble les tableaux 1 et 2.

Dans notre recherche, nous travaillons actuellement sur un échantillon composé de trois formateurs et de trois novices. Bien que les profils soient variés, les résultats convergent avec ceux présentés ici. Nos perspectives incluent l'augmentation de l'échantillon afin d'affiner les analyses didactiques, ainsi que le suivi d'un même novice tout au long de son cursus pour mieux comprendre l'évolution de ses pratiques et la manière dont il s'appuie sur la formation. L'objectif plus général de cette recherche est de mettre en évidence les éventuels manques de la formation actuellement proposée et de contribuer à l'amélioration des dispositifs existants.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

Adihou, A. et Arsenault, C. (2012). Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire : choix, caractéristiques, résultats et effets. Dans J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (éds.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches* (225 – 253). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Adihou, A., Arsenault, C. et Marchand, P. (2006). Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maitres. Consultée le 04/04/2025, Url : https://emf.unige.ch/application/files/2314/5388/8555/EMF2006_GT2_Adihou.pdf

Bednarz, N. et Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : clarifications conceptuelles et épistémologies. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 1 – 9.

Boule, F. (2001). Découpages et recomposition de surfaces. Dans Groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais (éd.), *Aire et périmètre : dossier d'activités pédagogiques*. Paris : Ministère de la Justice – Ministère de l'Éducation Nationale.

Butlen, D. et Masselot, P. (2019). Enjeux et modalités de formation pour les professeurs des écoles en didactique des mathématiques. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies, 19,* 91 – 106.

Chesnais, A. (2009). L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris VII.

Choquet, C. (2022). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* numéro thématique 1, 287 – 313.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5 – 32.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.-J. (1984). Aires de surfaces planes 1ère partie. *Petit x, 6*, 5 – 33.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : P. Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5 – 53.

Héraud, B. (1991). Construction et apprentissage du concept d'aire chez les enfants du primaire. *Bulletin AMQ, 31*(4), 82 – 88.

Heyvaert, G. (2023). *Carrément Math 5* (livre-cahier B). Mont-Saint-Guibert – Wommelgem : Editions Van In.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Paris : Université Paris-Diderot.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 287 – 322.

Fédération Wallonie-Bruxelles (FWB) (2022). *Référentiel de mathématiques – Tronc commun*. Quentin David.

Mangiante-Orsola, C. (2012). Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *32*(3), 289 – 331.

Morin, M.-P. (2008). Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education, 31*(3), 537 – 566.

Morin, M.-P., Theis, L. et Rosa-Francoeur, J. (2012). Intégrer les connaissances mathématiques et didactiques : le cas de la formation en enseignement au préscolaire et au primaire de l'université de Sherbrooke. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (195 – 205). Genève : Université de Genève.

Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E. et Rogalski, M. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques au collège et au lycée – Quelques exemples. *Document pour la formation des enseignants*, 9, Université Paris VII.

Perrin-Glorian, M.-J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x, 24*, 5 – 36.

Perrin-Glorian, M.-J. et Pinvidic, A. (2022). Les aires comme outil de démonstration au collège. *Petit x, 117*, 73 – 96.

Robert, A. (2004). Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspective en formation d'enseignants. *Petit x*, *65*, 52 – 79.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, *2*(4), 505 – 528.

Robert, A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 10.*

Sayac, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. Les savoirs de la formation.

Recherche et formation, 71, 115 – 130.

Taveau, C. (2011). Quels enjeux pour la formation de formateurs en mathématiques des enseignants de l'école primaire en France ? *Revue Internationale Francophone*, numéro spécial 2010, 40 – 57.

Vandebrouck, F. (éd.) (2008). La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants. Toulouse : Octarès.

IX - ANNEXE 1 : enretien formateur

00:03:43 Chercheur

Si je te demande de me dire ce que tu entends par les mots « enseigner les mathématiques », qu'est-ce que tu me répondrais ?

00:03:51 Formateur

Euh… Déjà, établir un rappel des notions qu'ils sont censés avoir vues en secondaire. Euh… Clarifier les points que j'estime être problématiques, et pour ça, j'essaye de m'éclairer par des résultats de la recherche.

00:04:14 Chercheur

Et enseigner aux futurs enseignants, est-ce que ça ajoute des choses ou pas ? 00:04:19 Formateur

Oh oui, ça ajoute la dimension didactique. Donc, pour moi, voir comment on introduit certaines notions, comment faire une critique des outils employés, des manuels employés également. Et donc vraiment voir quels pourraient être les pièges dans lesquels les enfants pourraient tomber et comment on fait pour les mettre en évidence, les éviter, les prendre en considération.

00:07:27 Chercheur

Au sein de la formation initiale des futurs enseignants, quels sont tes objectifs en mathématiques ? 00:07:33 Formateur

Ah ! Donc les remettre à jour sur les notions qu'ils vont voir… et pour ça, je vais toujours revoir dans les référentiels. Je liste un peu tout ce qui doit être vu.

00:07:44 Chercheur

Donc tu te sers des référentiels ? 00:07:47 Formateur

Oui. Euh … Aborder plusieurs façons de voir ces notions-là. Je ne l'ai pas beaucoup fait en mathématiques, je le fais bien plus en sciences, bien sûr, mais je regardais ce qu'il y avait dans les programmes et j'essayais de me baser sur la littérature aussi pour … voilà, pour agrémenter ça et qu'ils puissent avoir un regard critique … Après voilà … sur ces notions-là.

00:08:16 Chercheur

Ok, donc ils prennent un peu de recul par rapport aux notions qu'ils doivent enseigner ? 00:08:20 Formateur

Ouais, c'est ça … tout à fait. 00:08:24 Chercheur

Est-ce que tu as dans ton métier rencontré des contraintes ?

00:08:31 Formateur

Bah, des contraintes en termes d'heures, en termes de niveau initial des étudiants… puisque la remise à niveau, finalement, prend le plus de place dans la formation. Et donc, on a moins le temps d'avoir justement ce recul sur les notions, parce que les étudiants arrivent avec un niveau peu élevé. Donc, je dirais que ce sont les deux contraintes principales que j'ai rencontrées. Une contrainte ? Je ne sais pas si on peut considérer ça comme étant une contrainte, mais le fait aussi que ma formation ne m'a pas du tout préparée à faire ça, et donc, bah finalement j'étais peu outillée pour donner ça convenablement, quoi. Il a fallu que je trouve des personnes ressources, mais de base, j'étais pas armée pour ce boulot-là, clairement pas.

00:10:39 Chercheur

Est-ce que tu suis un ordre particulier pour introduire tes figures ? 00:10:44 Formateur

Je commence par l'aire du rectangle. Et puis, je passe par l'aire du carré en expliquant que le carré est un rectangle particulier. Le parallélogramme, ensuite, parce que le découpage qui était proposé dans le bouquin permettait de récupérer un rectangle, donc il y a ça. Le triangle, parce qu'en le repliant, on pouvait passer à un rectangle ou un parallélogramme. Sachant que, quand j'utilise des parallélogrammes, c'est un parallélogramme qui n'est pas rectangle. Dans ce cas-là, enfin, on se comprend…

00:11:31 Chercheur Strict ?

00:11:36 Formateur

Oui, voilà. Et puis un peu le reste, je crois que je n'ai pas trop eu de réflexion par rapport à ce que je mettais après, par rapport au fait qu'il y a l'aire du losange, puis du trapèze, puis du polygone régulier.

00:11:51 Chercheur

Est-ce que tu les fais manipuler ? 00:11:54 Formateur

Je fais manipuler, oui. 00:11:56 Chercheur

Et quelles sont tes manipulations ? 00:11:58 Formateur

Donc je prends un parallélogramme justement pour qu'il puisse découper un triangle, le replacer de l'autre côté, récupérer un rectangle.

00:12:26 Chercheur

Donc tu manipules … juste découper le parallélogramme pour former un rectangle. Est-ce que tu manipules pour les autres figures ?

00:12:33 Formateur

Non, par manque de temps. 00:12:35 Chercheur

Est-ce que tu donnes une surface-unité et tu leur demandes de remplir la surface ? 00:12:40 Formateur

Non.

00:12:41 Chercheur Même pour l'estimation ?

00:12:44 Formateur

Même pour l'estimation, même si ça aurait été intéressant de le faire. 00:12:47 Chercheur

OK, qu'est-ce que tu attends des étudiants sur la notion d'aire, qu'ils soient capables de faire quels aspects ?

00:12:54 Formateur

Qu'ils soient capables de l'introduire auprès des enfants. Donc, effectivement, à … aussi partir de manipulations. Euh. Faire des liens entre la manipulation et les formules et introduire les formules. Et puis, utiliser les formules pour résoudre des problèmes divers.

00:13:12 Chercheur

OK. Est-ce que tu leur demandes de créer une leçon qui est autour de la notion d'aire ? 00:13:20 Formateur

Non. Pas le temps. 00:13:21 Chercheur

Est-ce que tu leur demandes de faire une liste d'exercices qui met en jeu les formules ? 00:13:25 Formateur

Non.

00:13:28 Chercheur

Ok. Est-ce qu'ils ont du matériel à produire par rapport à ça ? 00:13:31 Formateur

Non.

00:15:43 Chercheur

Ok. Que penses-tu de l'enseignement actuel des formules pour mesurer les aires des polygones en primaire ?

00:15:51 Formateur

Je n'ai pas beaucoup d'opinions là-dessus, voire quasi pas, parce que je ne suis pas spécialement intéressée par ce qui se passe en classe.

00:16:00 Chercheur

Donc tu ne sais pas si on donne du sens aux formules, si elles sont vues juste pour les voir, le type d'exercice qu'on demande en classe ou quoi que ce soit.

00:16:08 Formateur

Non, ces dimensions-là ont complètement été ignorées. 00:16:10 Chercheur

D'accord, alors ça va être très simple. Maintenant je te donne une série d'affirmations et tu dois me répondre avec une échelle de Likert.

Les futurs enseignants doivent comprendre les notions mathématiques pour bien les enseigner. 00:16:56

Formateur

Tout à fait d'accord. 00:17:01 Chercheur

Les futurs enseignants qui maîtrisent les notions mathématiques sont toujours de bons enseignants. 00:17:07 Formateur

Ah, pas d'accord. Ils doivent au minimum les maîtriser. Mais ça ne suffit pas de maîtriser les notions pour répondre.

00:17:16 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit s'assurer que les futurs enseignants maîtrisent les notions mathématiques.

00 :17 :20 Formateur

Tout à fait d'accord. Même si c'est dommage qu'on soit obligé de passer autant de temps là-dessus, mais c'est incontournable.

00:17:27 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit enseigner des concepts didactiques aux futurs enseignants.

00:17:32 Formateur

Tout à fait d'accord, ça devrait être le cœur de ce qu'on fait. 00:17:35 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit proposer des activités qui mettent en jeu les notions mathématiques étudiées et qui sont adaptées aux élèves du primaire.

00:17:43 Formateur Ouais, d'accord, d'accord. 00 :17 :47 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit outiller les futurs enseignants pour élaborer des fiches d'exercices.

00:17:52 Formateur D'accord aussi.

00:17 :54 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit s'assurer que les futurs enseignants gèrent correctement leurs tableaux.

00:18:06 Formateur

Le formateur de mathématiques… ni en désaccord, ni d'accord. Pour moi, c'est plutôt le job des pédagogues. Et tant qu'on y est, autant les aider s'ils font des exercices au tableau.

00:18:15 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit s'assurer que les futurs enseignants gèrent correctement les interventions des élèves aussi bien dans les moments de correction, de synthèse, de questions, les échanges.

00:18:25 Formateur D'accord.

00:18:28 Chercheur

Au sein de la formation initiale, le formateur de mathématiques doit s'assurer que les futurs enseignants gèrent correctement leurs classes.

00:18:35 Formateur

Ni en désaccord, ni en accord. Encore une fois, j'ai tendance à reléguer ça plutôt du côté des pédagogues. 00:18:44 Chercheur

La didactique des mathématiques sert principalement à dire aux futurs enseignants comment enseigner les notions mathématiques.

00:18:55 Formateur

D'accord, ce n'est pas tout à fait d'accord non plus, il n'y a pas que ça. 00:19:00 Chercheur

La recherche en éducation et en didactique joue un rôle important dans l'élaboration de la formation. 00:19:05 Formateur

Tout à fait d'accord. 00:19:09 Chercheur

La recherche en éducation et en didactique joue un rôle important dans le métier d'enseignant. 00:19:13 Formateur

Tout à fait d'accord.

X - ANNEXE 2 : parcours du formateur

1 Parcours Formateur

Le formateur est ingénieur industriel en agronomie section environnement. Il a une agrégation en biologie (titre pédagogique requis pour enseigner dans l'enseignement secondaire supérieur – 15-18 ans). Il réalise une formation supplémentaire obligatoire pour rester formateur de futurs enseignants (Master de Spécialisation en Formation d'Enseignants).

Il est dans sa sixième année d'enseignement dont la quatrième année au sein de la formation initiale des futurs enseignants de l'enseignement maternel, primaire et secondaire inférieur.

2 Informations supplémentaires

Il suit le livre de X. Roegiers (2011) sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire pour construire son cours. C'est une référence bien connue et imposée par notre consortium (plusieurs hautes écoles et une université).

Il s'appuie aussi sur un cours réalisé par un ancien collègue dans une autre haute école.

XI - ANNEXE 3 : séquence prévue par le formateur

- Définition de l'aire

L'**aire** d'une surface est l'étendue de celle-ci. L'aire est donc la grandeur de la surface. On dit aussi **superficie**.

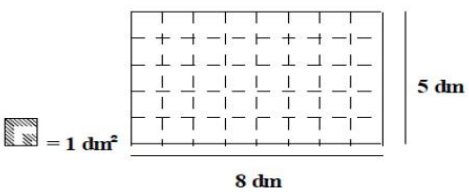
- Mesure de l'aire : estimation, quadrillage.
- Les unités conventionnelles
- Les formules :
    - L'aire du rectangle :

Le rectangle, surface la plus générale dont tous les angles sont droits, est la figure de base à partir de laquelle pourra être découverte l'aire de toutes les autres figures.

L'aire du rectangle s'obtient par recouvrement grâce à l'unité d'aire.

On choisira évidemment un rectangle dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers.

Prenons, par exemple, un rectangle dont la longueur vaut 8 dm et la largeur 5 dm.



Pour recouvrir une bande horizontale, il faut utiliser 8 fois l'unité d'aire (1 carré d'1 dm de côté).

L'aire d'une bande est donc de: 1 dm² x 8.

Le rectangle se compose de 5 bandes horizontales identiques.

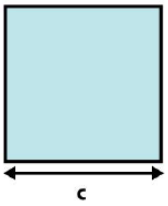
L'aire du rectangle vaut donc 5 fois l'aire d'une bande horizontale, c'est-à-dire:

1 dm² x 8 x 5 = 40 dm²

On fait ainsi apparaître la formule qui donne l'aire A du rectangle en fonction de la longueur L et de la largeur l. ***A = L x l***

- L'aire du carré :

D'un point de vue mathématique, on peut considérer le carré comme un rectangle particulier dont la longueur et la largeur sont de même longueur. Dans ce cas on parlera de côté.



On en déduit que la formule de l'aire du carré est : ***A = c x c***

A l'école primaire, il arrive fréquemment que l'étude du carré précède celle du rectangle.

- L'aire du parallélogramme :

L'aire A du parallélogramme est donnée par la formule ***A = b x h*** où b est la base et h la hauteur du parallélogramme

Démarche méthodologique

On prend deux parallélogrammes identiques en carton.

Le premier (fig. 1) laissé intact sert de figure de référence. On y marque la base b et la hauteur h.

Le second est découpé (fig. 2) et les parties obtenues sont replacées de manière à obtenir un rectangle.

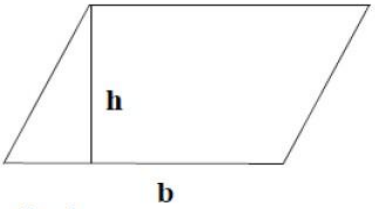


fig. 1

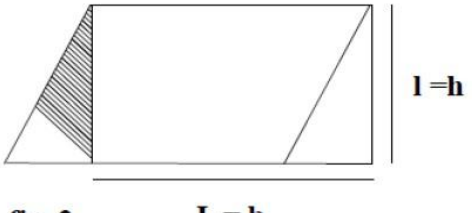


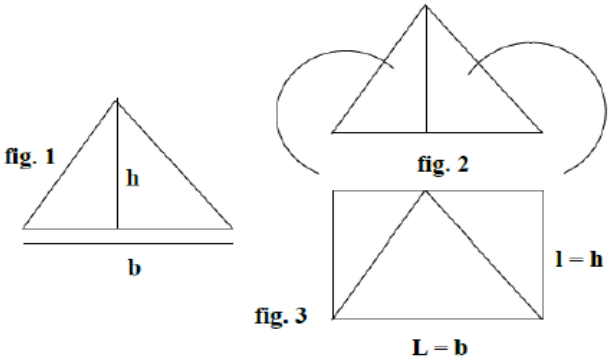
fig. 2

On constate facilement que la longueur L du rectangle vaut la base b du parallélogramme de référence et que la largeur l du rectangle vaut la hauteur h du parallélogramme de référence.

Par conséquent:

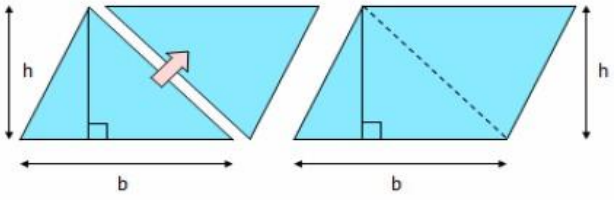
Aire du parallélogramme = aire du rectangle = L x l = b x h

- L'aire du triangle :



On constate facilement que la longueur L du rectangle vaut la base b du triangle de référence et que la largeur l du même rectangle vaut la hauteur h du triangle de référence.
Par conséquent: Aire du triangle = ½ aire du rectangle = $\frac{1}{2}(Lxl) = \frac{b\ x\ h}{2}$

On peut également trouver la formule de l'aire du triangle à partir du parallélogramme :



$$\text{aire du triangle} = \frac{\text{aire du parallélogramme}}{2} = \frac{b \times h}{2}$$

- L'aire du losange :

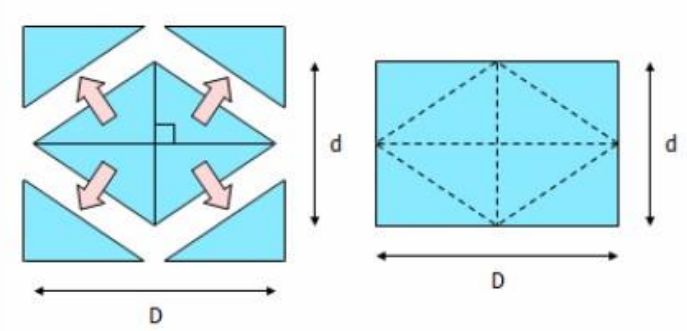
L'aire A du losange est donnée par la formule $A = \frac{D\ x\ d}{2}$

où D et d sont respectivement la grande diagonale et la petite diagonale du losange.

Démarche pédagogique

On utilise deux losanges identiques en carton. Le premier (fig. 1) est conservé intact. On y marque la grande diagonale D et la petite diagonale d.

Le second (fig. 2) est découpé et les morceaux obtenus sont replacés autour du premier de manière à constituer un rectangle.



$$\text{aire du losange} = \frac{\text{aire du rectangle}}{2} = \frac{d \times D}{2}$$

On constate facilement que la longueur L du rectangle obtenu vaut la grande diagonale D du losange de référence et que la largeur l du rectangle obtenu vaut la moitié de la petite diagonale d du losange de référence.

- L'aire du trapèze :

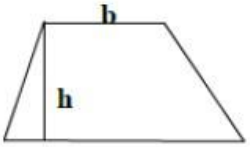
L'aire A du trapèze est donnée par la formule $A = \frac{(B+b)\,x\,h}{2}$

où B est la grande base, b la petite base et h la hauteur du trapèze.

Démarche pédagogique

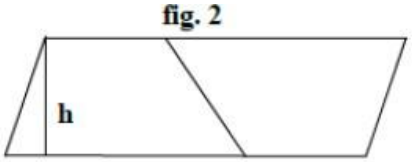
On prend trois trapèzes identiques en carton.

Le premier (fig. 1) sert de figure de référence. On y marque la grande base B, la petite base b et la hauteur h. Les deuxièmes et troisièmes sont juxtaposés de manière à former un parallélogramme (fig. 2).



B
fig. 1

fig. 2



Base du parallélogramme
= B + b

On constate facilement que la base du parallélogramme obtenu vaut la somme B+b des bases du trapèze de départ et que la hauteur du même parallélogramme vaut la hauteur du trapèze de départ.

Par conséquent :

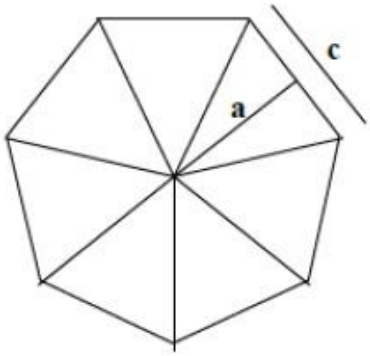
$$Aire\ du\ trapèze = \frac{1}{2}\ aire\ du\ parallélogramme = \frac{1}{2}.(B+b)\ x\ h = \frac{(B+b)x\,h}{2}$$

- L'aire du polygone régulier :

L'aire A d'un polygone régulier est donnée par la formule $A = \frac{p\ x\ a}{2}$

où p est le périmètre du polygone et a l'apothème du polygone.

Considérons, par exemple, un polygone régulier à sept côtés (heptagone).



Il est formé par la juxtaposition de 7 triangles isocèles identiques.

Chacun de ces triangles isocèles a pour base le côté c du polygone et pour hauteur l'apothème a du polygone.

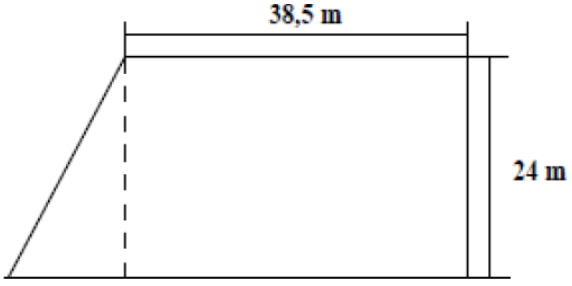
Par conséquent l'aire d'un triangle isocèle est $\frac{c\ x\ a}{2}$

L'aire du polygone régulier vaut évidemment la somme des aires des triangles isocèles qui le constituent

Aire du polygone régulier : $n\ x\ \frac{c\ x\ a}{2} = \frac{p\ x\ a}{2}$ si p désigne le périmètre du polygone régulier et si n est le nombre de triangles isocèles identiques.

Exercices :

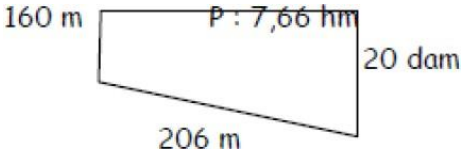
1. Dans un terrain rectangulaire de 180m de longueur, on élève 45 chevaux. Pour qu'ils puissent s'ébattre librement, on a prévu 300m² par cheval. Calculer la largeur de ce terrain. Rép : 75m
2. Calculer l'aire d'un carré dont la diagonale mesure 18 cm. Rép : 162cm²
3. La figure ci-contre représente un terrain partagé en deux parties par une clôture. La superficie totale étant de 1122m², calculer la base de la parcelle triangulaire. Rép : 16.5m



4. Un champ triangulaire a une aire de 2 ha 30 a. Sa base mesure 500m. Calculer sa hauteur.

Rép : 92m

5. Un parterre dont l'aire vaut 22.5m² a la forme d'un losange. On l'entoure d'un sentier ; sa grande diagonale augmente ainsi de 2m et la petite de 1.6m. Calculez l'aire du sentier sachant que la grande diagonale intérieure du parterre mesure 7.50m. Rép : 13.6m²
6. Un terrain ayant la forme d'un losange doit être échangé contre un autre de même aire, de forme carrée et de 360m de périmètre. Calculez la petite diagonale du losange sachant que l'autre mesure 135m. Rép : 120m
7. Calculez l'aire du terrain de sport suivant. Rép : 36 000m²



XII - ANNEXE 4 : parcours du novice

Le novice est en L2 instituteur primaire et réalise sa séquence lors d'un stage au deuxième quadrimestre (deuxième semaine de stage). Il a eu une formation sur la notion d'aire au deuxième quadrimestre de la L2 avant son stage. Il n'aime les mathématiques et a de nombreuses difficultés. Il n'a pas beaucoup d'expérience de terrain : un stage d'observation d'une semaine en L1 et un stage pratique de deux semaines au premier quadrimestre de la L2.

Le sujet lui a été imposé par le maitre de stage. Il a réalisé entièrement sa séquence seul. Le travail a été validé par le maitre de stage. Il n'a pas été validé par un formateur de mathématiques.

Il n'utilise pas de manuel pour préparer sa séquence.

XIII - ANNEXE 5 : séquence prévue par le novice

- Activité introductive :

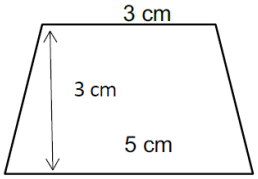
Construisez deux trapèzes identiques et utilisez-les pour retrouver une figure connue.

- Émergence de la formule pour mesurer l'aire d'un trapèze :

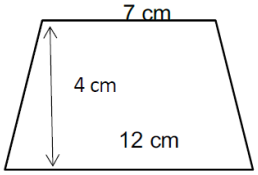
La formule de l'aire d'un trapèze est :
.....
.....
.....

- Exercices

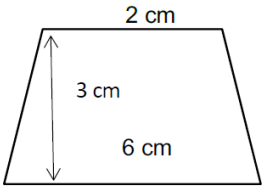
1 Calcule l'aire du trapèze.



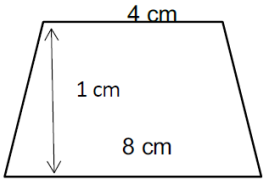
2 Calcule l'aire du trapèze.



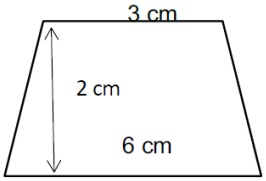
3 Calcule l'aire du trapèze.



4 Calcule l'aire du trapèze.

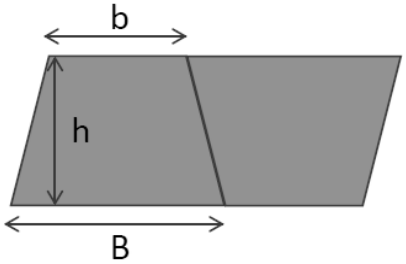


5 Calcule l'aire du trapèze.



XIV - ANNEXE 6 : quelques éléments des déroulements pour le novice

Séance de 2 heures : Le novice projette la consigne de l'activité introductive au Tableau Blanc Interactif (TBI) et donne des morceaux de feuilles colorées. Les élèves réalisent l'activité en autonomie et le novice passe entre les bancs. Un élève dessine deux trapèzes rectangles. Le novice l'en empêche et ajoute la consigne de ne surtout pas faire de trapèze rectangle. Une fois que tout le monde a obtenu un parallélogramme, il repasse au TBI et demande comment les élèves ont fait. Les deux trapèzes sont isocèles et juxtaposés pour construire un parallélogramme. Il rappelle directement la formule pour mesurer l'aire d'un parallélogramme et écrit au tableau B x h. Il demande aux élèves d'en déduire la formule pour mesurer l'aire d'un trapèze. Ils n'y parviennent pas. Pour les aider, il réalise sur le TBI le dessin suivant :



Les élèves ne parviennent pas à donner la formule attendue. Il finit par donner la formule et l'écrit sur cette page du TBI. Le novice enchaîne et affiche au TBI les exercices de mise en application de la formule. Les élèves doivent travailler en toute autonomie. Il passe entre les bancs. À la fin de la séance, il ramasse les copies pour corriger les exercices à domicile.

DE LA PROBLÉMATIQUE NOTIONNELLE À LA CONCEPTION D'INSTRUMENTS POUR L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS ET QUEL DISPOSITIF DE FORMATION ENGAGER

Christine SCALISI NEYROUD
Chargée d'enseignement, HEP LAUSANNE
UER MS
christine.scalisi-neyroud@hepl.ch

Céline HUGLI
Chargée d'enseignement, HEP LAUSANNE
UER MS
celine.hugli@hepl.ch

Résumé
Dans cet article, nous proposons un dispositif de formation pour le corps enseignant et le corps estudiantin testé à la Haute École Pédagogique de Lausanne. La formation décrite s'inscrit dans la théorie de la médiation sémiotique (Mariotti et Maracci, 2010). La conception d'un objet pédagogique, influencée par l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), les affordances liées à l'artefact et les observations sur le terrain nous ont permis de construire cette formation ainsi qu'un modèle pour penser cet objet pédagogique. L'atelier proposé au 51e colloque de la Copirelem (Strasbourg, 2025) a offert au groupe participant à l'atelier la possibilité d'expérimenter une étape de ce processus en élaborant un objet low-tech qui réponde à une problématique mathématique.
Un tel dispositif semble revêtir un possible changement dans la pratique enseignante, en augmentant les compétences du corps enseignant et en donnant du sens aux apprentissages des élèves.

I - INTRODUCTION

Dans cet article, nous décrivons comment la conception d'objets pour l'enseignement des mathématiques permet d'enrichir les compétences du corps enseignant relativement à la notion qu'elles et ils travaillent. Ce processus de formation (initiale ou continue) renforce ainsi les compétences en didactique tout en développant des compétences de conception et peuvent modifier les pratiques pédagogiques. Ceci en faisant bénéficier, par la suite, les élèves de supports différenciés, en soutenant ainsi la diversité scolaire.

Les exemples d'expériences relatées au début de cet article proviennent de formations dispensées à la Haute École Pédagogique (HEP) de Lausanne dans le canton de Vaud, en Suisse. Elles se sont déroulées en grande partie dans les locaux du FabLearn[1] de la HEP Vaud.

Dans les premiers paragraphes de cet article, le terme de FabLearn est défini de manière à le distinguer de FabLab. La suite est destinée à expliciter la modélisation de la conception d'un artefact. Ce processus de conception met en lien : objectif - mise en scène - schèmes d'utilisation - artefact. Les liens entre ces différents éléments, définis plus loin, permettent de comprendre le sens spécifique donné à ce processus. L'article se poursuit par les expériences vécues des trois groupes participant à notre atelier. La conclusion de l'article propose une synthèse des opinions échangées au colloque ainsi qu'un point de vue des auteures au regard des compétences pouvant être développées par un tel dispositif.

1 https://fablearn.hepl.ch/

II - CONTEXTES

1. Les systèmes scolaires en Suisse

Commençons tout d'abord par expliciter quelques éléments de contexte relatifs aux particularités de la Suisse en matière d'enseignement. En Suisse, il existe quatre langues nationales (allemand, français, italien et romanche, figure 1) et 26 cantons dont chacun a un système scolaire spécifique.

En effet, chaque canton est souverain en matière d'éducation et dispose de ses propres lois sur l'enseignement. Il existe cependant une volonté d'harmonisation de ces législations. Pour la Suisse romande (cantons francophones), c'est la Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique (CIIP) qui est l'institution de coordination. La coordination passe par le Plan d'Étude Romand (PER) et des Moyens d'Enseignement Romand (MER) qui sont communs aux cantons francophones (CIIP, 2010).



Figure 1. Répartitions géographiques des langues officielles en Suisse [2]

2. L'enseignement et moyens d'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud

Pour l'apprentissage des mathématiques, les moyens d'enseignement (manuels scolaires pour le corps enseignant et les élèves) sont conçus sous le mandat de la CIIP. Le processus de conception est très long car tous les cantons doivent se mettre d'accord et approuver les moyens d'enseignement. Depuis 2019, de nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques, sous format numérique, ont été introduits progressivement dans les cantons romands. Pour le Canton de Vaud, ce déploiement a débuté en 2020 et s'est achevé en juillet 2025. Ce Moyen d'Enseignement Romand (MER) de mathématiques officiel, nommé ESPER, est constitué d'un livre, d'un fichier et d'un espace en ligne où figurent les tâches et d'un espace personnel où regrouper les choix effectués. Les tâches proposées sont en lien direct avec les objectifs et la progression d'apprentissages du PER (CIIP, 2024). Le plus souvent, du matériel est disponible pour réaliser les tâches proposées. Ce MER apporte donc la garantie de proposer des tâches adaptées aux niveaux et besoins des élèves. Le corps enseignant reste néanmoins libre d'ajouter d'autres contenus ou d'autres matériels d'enseignement afin de compléter des points qui leur semblent importants.

3. Des FabLabs au FabLearn de la Haute École Pédagogique de Lausanne

Dans les années 2015, la HEP Vaud s'est équipée d'un **FabLab**. Ce terme de FabLab provient de la contraction de *Fabrication Laboratory*. Les FabLabs[3] ont débuté dans les années 1990 aux États-Unis.

2 https://fr.wikipedia.org/wiki/Langues_en_Suisse
3 https://artsetmetiers.fr/fr/quest-ce-quun-fablab

Différentes définitions ont été données mais toutes convergent vers la proposition donnée par le site Internet de l'École nationale supérieure d'Arts et Métiers qui définit ces espaces comme suit :

> *Les fablabs sont basés sur les principes d'ouverture et de collaboration. Ils s'appuient sur des machines de fabrication numérique et des réseaux qui permettent de s'échanger des fichiers dans le monde entier. Un objet peut donc être conçu dans un fablab, fabriqué dans un autre et amélioré dans un troisième.*

Après quelques années de mise à disposition du Fablab de la HEP Vaud en libre accès, l'institution a décidé d'orienter cet espace vers une utilisation à des fins plus pédagogiques, c'est-à-dire se diriger vers la conception de matériel destiné à l'enseignement. Pour cette raison, le nom de cet espace a changé mettant ainsi en avant le terme *apprentissage* ; l'espace de fabrication porte à présent le nom de **FabLearn**.

L'accès au FabLearn de la HEP Vaud est restreint au corps estudiantin et enseignant. Un groupe de collègues de l'institution de diverses disciplines est spécialement mandaté pour servir de guide et permettre ainsi aux personnes intéressées de concevoir, prototyper et fabriquer leur matériel éducatif à l'aide de machines (figure 2). Ces dernières sont actuellement de trois sortes : imprimantes 3D, découpeuses laser et découpeuses numériques (Cameo).



Figure 2. Machines à disposition au FabLearn de la HEPL

4. Le making

L'approche de conception peut se décliner de manières différentes pour l'objet matériel qui sera utile comme médiateur sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008), c'est-à-dire travailler soit en *low-tech* et/ou encore en *high-tech* :

- avec le *low-tech*, on utilise des matériaux simples (carton, crayon, ciseaux, papier…), c'est-à-dire une technologie très élémentaire ;
- avec le *high-tech*, on fait intervenir l'informatique et les technologies avancées, souvent critiquées pour leur caractère non durable.

Les deux types de conception peuvent cohabiter, se succéder ou exister indépendamment l'un de l'autre. Les apprentissages développés ne sont généralement pas les mêmes, étant données que des compétences numériques sont inhérentes au *high-tech*. L'objectif, l'utilisation et l'aspect durabilité doivent être pris en compte afin de s'orienter vers le choix d'une méthode de conception pertinente.

À partir de ce qui vient d'être dit, nous définissons le *making* comme la conception et la fabrication, numérique ou non, d'objets médiateurs pour l'apprentissage.

III - ÉVÈNEMENTS ET EXPÉRIENCES DE FORMATION DES ENSEIGNANT.E.S AVEC LE FABLEARN

Appréhender le potentiel du *making*, dans un dispositif de formation de conception d'objets matériels pédagogiques, nécessite d'être illustré.

1. Intervention de la HEP Vaud en lien avec le *making* : événement promotionnel « Salon MINT »

Le salon MINT, qui a ouvert ses portes pour la première fois en 2024, est un espace qui propose des expériences ludiques aux classes vaudoises, des élèves de 8 à 12 ans, dans le domaine des Mathématiques, de l'Ingénierie, de la Nature et la Technologie (MINT), dont le but est de promouvoir des métiers scientifiques.

L'unité de recherche et d'enseignement des mathématiques et des sciences (UER MS) de la HEP Vaud y propose des activités mathématiques qui permettent de faire des *mathématiques autrement* en regard des activités présentées dans les classes du canton de Vaud.

Élèves, corps enseignant, familles confrontent leurs compétences en manipulant des objets. Des collègues de l'UER MS de la HEP sont présent.e.s pour inciter le public à s'engager dans des activités de recherche en lien avec le PER.

Les photographies ci-dessous illustrent deux activités mathématiques en lien avec le repérage dans le plan et les solides. Les anamorphoses (figure 3.a) sont un exemple de *low-tech*. Les connecteurs (figure 3.b), en plastique et maïs, qui permettent d'assembler les baguettes d'un mètre de long (figure 3.c) font partie du *making high-tech*. Ces derniers ont été réalisés au FabLearn sur une imprimante 3D.

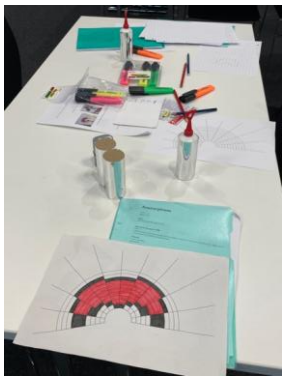


Figure 3.a Anamorphose



Figure 3.b Connecteurs



Figure 3.c Baguettes

2. Intervention de la HEP Vaud en lien avec le *making* : expérience de formation négociée

La HEP Vaud propose des formations négociées pour le corps enseignant du canton de Vaud qui peut être formé sur une thématique de son choix.

Un groupe d'enseignantes et d'enseignants a ainsi été réuni pour concevoir du matériel de différenciation pour l'enseignement des mathématiques. Lors de cette formation, ces personnes ont appris à préciser leurs problématiques, élaborer des prototypes et acquis des compétences techniques. Une fois l'objet concrétisé, elles ont pu aller l'éprouver en classe.

La problématique retenue par ce groupe lors de cette formation était en lien avec les fonctions, concept difficile à intégrer pour les élèves en raison du lien parfois flou entre le graphique et l'écriture littérale.

Après leur choix de problématique, le groupe a fait l'esquisse, une ébauche, d'objet possible (figure 6.a et figure 6.b). Ensuite, il a conçu un premier prototype *low-tech* dans la salle qui permet la fabrication (figure 6.c et figure 6.d). Ce prototype a généré de nouveaux questionnements de l'objet et des modifications à lui apporter (figure 6.e). La première conception *high-tech* a alors émergé (figure 6.f). On peut constater sur les images ci-dessous que la démarche fait intervenir deux types de *making*.

Par la suite, le prototype aura été testé en classe afin de voir s'il permettrait de répondre aux objectifs disciplinaires visés et/ou s'il nécessiterait à nouveau des modifications.

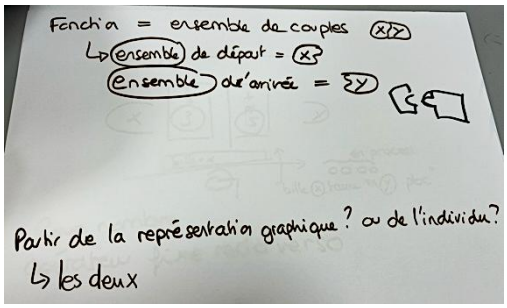


Figure 6.a. Premières réflexions

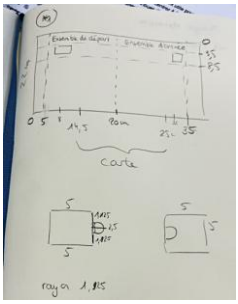


Figure 6.b



Figure 6.c. low-tech

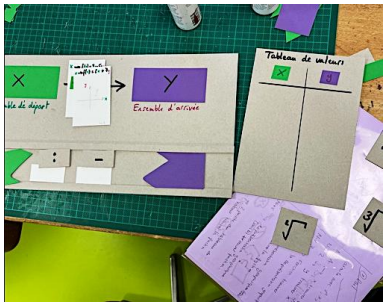


Figure 6.d. conception low-tech

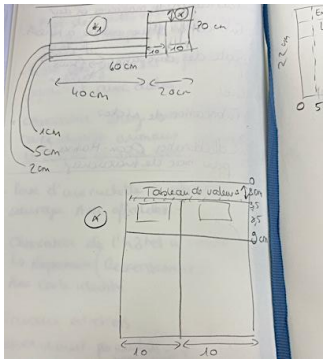


Figure 6.e

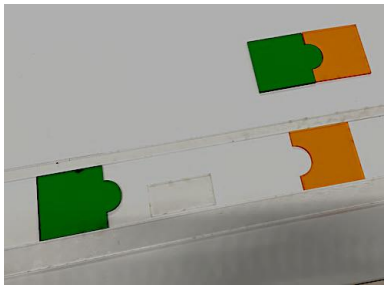


Figure 6.f. high-tech

Les différents entretiens réalisés avec les personnes de cette formation ont montré qu'elles avaient affiné leurs connaissances de la notion mathématique choisie.

3. Intervention de la HEP Vaud en lien avec le *making* : expérience en formation initiale cursus Bachelor Primaire

En dernière année de cursus formation initiale Bachelor Primaire, chaque membre du corps estudiantin doit réaliser un mémoire professionnel. Certains groupes choisissent de concevoir et tester des objets pour l'enseignement des mathématiques. Ils sont accompagnés par les collègues du FabLearn.

Dans notre exemple (figure 7), deux étudiantes ont choisi d'introduire, dans une séquence d'enseignement, la « machine à calculer » vue fréquemment sur les réseaux sociaux.

Dans un premier temps, elles ont analysé la machine en faisant des liens avec les concepts théoriques étudiés lors de leur formation. Dans un deuxième temps, elles ont créé leur machine au FabLearn en y apportant les modifications imaginées. Enfin, dans deux classes différentes, elles ont mené une séquence

sur les problèmes additifs de type composition d'états (Vergnaud, 1990a)[4] pour obtenir des données « avec ou sans utilisation de la machine ».

Lors de la conception, ces étudiantes ont pris en compte les aspects théoriques suivants :

- différentes représentations du nombre (sous une forme analogique et sous la forme d'écriture chiffrée) ;
- la mobilisation de la manipulation active, en considérant que la manipulation est active lorsque l'élève recherche une stratégie en lien avec l'objectif de l'activité, contrairement à la manipulation passive, qui peut constituer une étape de familiarisation avec le matériel, ou intermédiaire lorsque l'objectif fait appel à des compétences d'abstraction.

Sur les illustrations, il y a les cartes créées avec représentation analogique ainsi que le boitier amovible pour encourager le passage à l'abstraction (anticiper le résultat et pouvoir le vérifier).



Figure 7. Machine à calculer personnalisée

À la fin de leur mémoire, les deux étudiantes ont exprimé les compétences acquises en didactique des mathématiques, notamment la pertinence de travailler en parallèle les différents codes du nombre. La conception de l'objet a été un moyen pour mettre en lien savoirs théoriques et expériences pratiques liées à la didactique.

IV. UN MODÈLE POUR PENSER LE MATÉRIEL DIDACTIQUE

1. Situation de l'origine du modèle

Nos formations, en lien avec le design d'objets pour l'enseignement, nous ont menés à constater l'intérêt que revêt la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008), qui traite de l'appréhension de l'artefact par l'élève qui va le transformer en instrument, mais également de l'importance de la posture de la personne enseignante en tant que médiatrice sémiotique. Cette théorie décrit le développement de la connaissance, de la pensée, par l'usage d'artefacts qui en facilitent l'élaboration. Les liens avec Vygotski (1981) sont clairement identifiés. Cette thèse articule des éléments tels que l'artefact, l'enseignante ou l'enseignant, le contenu transmis, la réceptrice ou le récepteur et le contexte. Ils s'inscrivent dans un processus qui permet le passage à la connaissance, mathématique dans notre cas. Lors d'une activité mettant en jeu une médiation sémiotique, les signes (langage, symboles, représentations graphiques…) et les artefacts utilisés dans une activité sociale sont partagés et permettent progressivement de faire émerger la connaissance mathématique cherchée. Ce processus doit être intentionnellement développé dans un environnement pensé en amont par la personne enseignante. Ainsi, l'instrument élaboré par l'élève à partir de l'artefact participe pleinement à la

4 Ce sont des problèmes du type : dans le vase de Sophie, il y a 5 tulipes et 6 jonquilles, combien y a-t-il de fleurs en tout ? Cette situation, pouvant être modifiée en fonction de ce qui est recherché : j'ai 11 fleurs dans mon vase. J'ai 5 tulipes et toutes les autres fleurs sont des jonquilles. Combien ai-je de jonquilles ? …

résolution de la tâche et laisse émerger des signes, au sens large, dont l'enseignante ou l'enseignant doit se saisir afin de les faire évoluer en significations mathématiques.

Nous pouvons prendre l'exemple de la règle graduée pour effectuer une mesure de longueur. À sa première utilisation, l'élève prendra connaissance de cet artefact, peut-être pour en faire un objet de jeu. Puis, guidé par la personne enseignante, par la tâche proposée, par le contexte de la tâche, elle ou il apprendra à la positionner (schèmes d'utilisation), à en comprendre la graduation, afin d'obtenir la mesure de la longueur d'un segment. Il s'agit de rester conscient que cela s'inscrit dans un processus.

Au vu de l'importance de l'artefact (Rabardel, 1995), utilisé comme outil de médiation sémiotique (Mariotti et Maracci, 2010), il nous a semblé important de revenir à la conception de l'artefact, sachant toute la pertinence que l'instrument revêt dans le processus d'apprentissage. Pour le terme *instrument*, nous utilisons la définition de Rabardel (1995), pour qui l'instrument est constitué de l'artefact, porteur de contraintes par ses affordances notamment, ainsi que des schèmes (sociaux et personnels) d'utilisation, c'est-à-dire que la forme de l'artefact invite à certaines actions sans qu'elles doivent être explicitées, soit parce que ces actions sont déjà connues (schèmes sociaux), soit parce que l'artefact en question induit son utilisation (par exemple la poignée du bâton de ski dont la partie supérieure inscrit une tenue par la main). Ceci montre l'intérêt de penser les affordances et les schèmes d'utilisation en amont, cela lors du processus de création de l'artefact.

La forme de l'artefact, les schèmes d'utilisation qui lui sont appliqués, et la mise en scène (explicitée plus bas) qui l'entourent, doivent être non seulement réfléchis mais aussi éprouvés par les utilisateurs et utilisatrices afin d'atteindre les objectifs qu'on lui confère.

2. Un modèle pour penser le matériel didactique

Fortes de ces observations, nous avons voulu déterminer les éléments minimaux pour penser le matériel didactique. Dans ce modèle, quatre pôles de réflexion apparaissent, les quatre sommets du tétraèdre (figure8). Des liens existent entre chaque sommet. Ceci donne la possibilité d'entrer dans la conception de matériel didactique non pas spécifiquement par l'objectif d'apprentissage, mais par l'artefact par exemple, rendant notre modèle utile également pour l'analyse d'instruments déjà conçus.

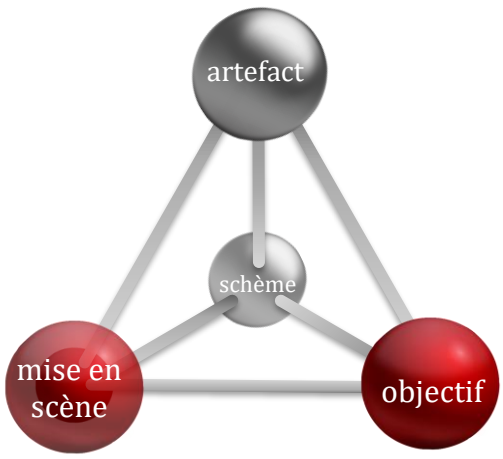


Figure 8. Modèle pour penser l'objet pédagogique

Nous ne voyons pas le processus de conception en didactique, *a fortiori* de création, comme linéaire, mais évolutif, en raison des va-et-vient entre ces quatre pôles, qui permettent progressivement d'atteindre la meilleure forme du prototype localement et temporellement situé.

2.1. Artefact et schèmes d'utilisation

Comme nous l'avons exposé plus haut, l'instrument est constitué de l'artefact et de ses schèmes (Rabardel, 1995). Ainsi, nous avons décidé de les garder séparés, car jouer sur l'un des deux seulement permet parfois de créer un déséquilibre qui conduit à une nouvelle connaissance.

Prenons l'exemple d'une tasse avec une anse, remplie de thé chaud. L'habitude et les affordances proposées par cet objet incitent à la prendre par l'anse et à la porter à sa bouche (usage classique, devenu un réflexe). Artefact et schèmes habituels se conjuguent pour une utilisation attendue de cet objet.

Prenons, à présent, une tasse sans anse remplie de thé chaud et mettons-nous à la place de l'enfant qui ne connaît pas ce type de tasse. Il va la prendre à pleines mains, sachant que c'est la meilleure façon de faire afin d'avoir plus de stabilité dans sa préhension, mais risque de la laisser tomber, ses doigts ayant ressenti une légère brûlure. Afin de prendre tout de même cette tasse, il va devoir planifier de nouveaux schèmes pour accéder à la boisson. Des tests successifs lui feront développer de nouvelles connaissances qui se stabiliseront par l'entrainement. Ainsi les affordances de cet artefact vont mettre en défaut des invariants opératoires qui devront évoluer.

C'est parce que les liens entre artefact et schèmes d'utilisation sont très forts que l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) les dissocie. En émettant des hypothèses sur les schèmes possibles mais inefficaces, on ouvre la voie à des déséquilibres propices à l'apprentissage.

Le matériel didactique est un objet phénoménal individuel, c'est-à-dire que ses affordances, quand bien même elles ont été pensées intentionnellement ainsi que sa relation à l'individu, restent personnelles.

2.2. Mise en scène

Il est aussi tout à fait possible de garder les schèmes habituels d'un instrument, schèmes dont les invariants opératoires sont une composante (Vergnaud, 1990b), et de créer le déséquilibre par une mise en scène imaginée à cet effet. Ce terme de mise en scène est important et choisi à dessein. À l'instar d'une pièce de théâtre, le scénario n'est pas suffisant ; il doit intégrer entre autres les affordances de l'artefact et les hypothèses de schèmes que l'élève utilisera ou développera pour s'approprier ce qui deviendra un instrument au service de l'apprentissage. À cela s'ajoute la mise en scène, l'environnement, les modalités, les consignes à donner (qui se doivent d'être relativement ouvertes pour permettre à l'élève d'entrer dans un processus de recherche). C'est un espace où l'action est encouragée par des guidages implicites. De plus, afin de guider l'élève vers cette appropriation désirée, la personne enseignante devra peut-être jouer le rôle de médiatrice sémiotique à un moment donné (Bartolini Bussi et Mariotti, 2010).

Nous illustrons nos propos avec l'exemple que nous nommons « tours de Lego® ». Nous avons créé une situation de recherche qui utilise une plaque et des pièces 1x1 de Lego® de couleurs différentes. Nous les organisons selon l'image ci-dessous (figure 9). Nous plaçons un nouveau cube, un peu plus loin sur la plaque, et demandons aux élèves de dire le nombre de cubes qui se trouveront à cet emplacement.

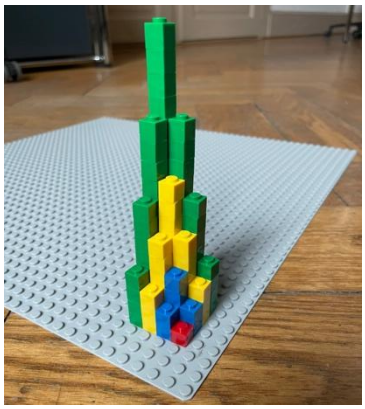


Figure 9. Tours Lego

L'analyse que nous pouvons faire selon notre modèle (figure 8) :

- L'artefact se révèle être le petit cube unité.
- Les schèmes, initiés par l'artefact, correspondent à l'empilement (schèmes usuels et connus). L'élève ne se trouve donc pas confronté à une surcharge cognitive qui l'obligerait en plus à comprendre comment utiliser l'artefact.
- La mise en scène se situe dans la disposition de ces cubes unités (empilés selon les nombres des tables de multiplication), la consigne (volontairement large, combien de cubes sur celui qui est éloigné des autres ?). Ainsi, la disposition des cubes et la consigne orienteront les élèves sur la recherche de la formation des tours dans un premier temps, puis sur la réponse à la question dans un second temps.

L'objectif mathématique est d'activer une nouvelle représentation des tables de multiplications au moyen d'une modalité peu utilisée, à savoir haptique, et ainsi exercer le transfert de connaissances.

Cette situation de recherche permet d'émettre des hypothèses, de les tester, de confronter et argumenter ses propres idées aux autres. Elle peut être menée sous la forme de débat mathématique (au sein du groupe, puis de toute la classe) dans le but de soumettre une solution qui fasse l'unanimité (Scalisi Neyroud et al., 2025). Dans cette situation, la personne enseignante se met en retrait pour laisser les élèves formuler leurs hypothèses. C'est à la toute fin, lors de l'institutionnalisation, qu'elle reprend un rôle de médiation, facilitant ainsi le passage des signes aux connaissances mathématiques.

2.3. Objectif

Bien que nous n'ayons pas commencé par ce pôle, il est évident qu'il est présent dans toutes les réflexions précédentes. Si le matériel didactique ne permet pas d'atteindre l'objectif mathématique visé, issu d'une problématique rencontrée sur le terrain, c'est qu'il n'est momentanément pas adéquat ou que la mise en scène n'est pas la plus pertinente.

L'atteinte de l'objectif d'apprentissage permet de valider la pertinence du design de l'artefact, des schèmes qui y sont associés et de la mise en scène choisie.

Avant de présenter le dispositif de formation, utilisant ce modèle, dispensé aux corps estudiantins de la HEP et enseignant.e.s vaudois.e.s, il faut garder à l'esprit l'objectif durant toute la conception de matériel didactique. Lors de son élaboration, la conceptrice ou le concepteur fait des hypothèses sur les schèmes qui seront développés par les élèves dans l'appréhension de l'objet matériel. Il est nécessaire d'y penser lors de sa création, notamment pour apporter des perturbations cognitives.

La démarche qui permet d'aboutir au matériel didactique le plus adéquat, doit inclure une phase d'expérimentation et d'observation contextuelle afin de juger de sa pertinence. Cette phase nous a également permis de développer le dispositif de formation qui suit.

V - UN DISPOSITIF DE FORMATION QUI INCLUT LE MODÈLE POUR PENSER LE MATÉRIEL DIDACTIQUE

Depuis deux ans, nous proposons des formations autour de la construction de matériels pédagogiques à des groupes enseignant en fonction depuis quelques années et à des groupes étudiants intéressés par ce processus (comme rapporté dans la partie III). Ces derniers viennent avec une problématique disciplinaire qui leur est propre. Ils souhaitent y répondre par le processus du *making*.

La structure a donc été éprouvée à plusieurs reprises ; ses fondements semblent s'être stabilisés. Néanmoins, cette formation reste, et cela est notre désir, réellement adaptable aux besoins des différents groupes.

Notre dispositif se décline de la façon suivante (figure 10). Au départ, les groupes participant à la formation conçoivent de petits objets en bois et en PLA[5] pour développer des compétences sur les logiciels et les machines présentes dans notre espace (logiciels de conception 2D et 3D, découpeuse laser et imprimante 3D). Cette première phase leur permet d'envisager le champ des possibles de production. Ensuite, ils doivent déterminer ou affiner leur problématique, souvent orientée sur les erreurs d'élèves rencontrées, sur les notions complexes à enseigner ou encore sur la création de matériel à destination d'élèves dits en difficulté. Puis, s'aidant de leur problématique, ils énoncent l'objectif d'apprentissage du modèle (figure 8) pour penser le matériel didactique. Enfin, ils entament le processus de conception en gardant en tête que le prototype doit servir de médiateur à l'élève pour atteindre l'objectif d'apprentissage.

La première phase, *low-tech,* du processus de conception, s'opère avec du matériel varié : carton, papier, aimants, pâte à modeler. Il leur est ainsi possible de cibler les dimensions de l'artefact, de réfléchir aux schèmes associés, d'effectuer un premier test d'utilisation.

La deuxième phase du processus de conception est la réalisation qui s'accomplit souvent au travers de nombreux ajustements.

La troisième phase du processus de conception permet de produire le premier prototype. Ce prototype sera ensuite soumis aux élèves pour des tests. Ces tests permettront d'apporter encore des modifications pour obtenir un objet matériel plus adapté à l'objectif d'apprentissage visé.

Si ce dernier n'est pas atteint, il faudrait alors modifier la mise en scène ou alors le design de l'objet en ayant préalablement discriminé qui, des schèmes ou des affordances, ne sont pas efficients. Par ailleurs, les affordances ne seraient pas non plus celles déterminées par la conceptrice ou le concepteur.

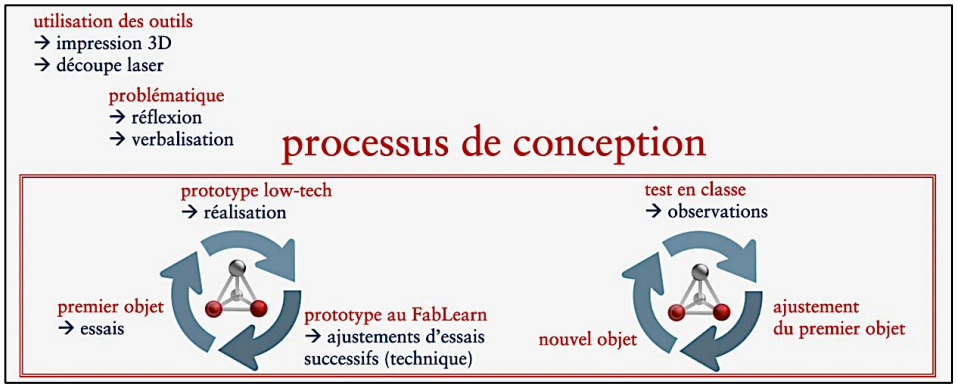


Figure 10. Processus de conception

Comme tout processus, celui-ci prend du temps. En revanche, c'est une démarche qui, par les compétences et les savoirs qu'elle développe, permet de modifier la posture enseignante. Cette formation propose également un modèle d'analyse d'objets matériels orienté sur l'outil médiateur.

VI. EXPÉRIENCES VÉCUES À LA COPIRELEM

L'atelier de la Copirelem s'est exclusivement centré sur la phase de conception *low-tech*. Nous avons proposé trois problématiques, pour que les participant.e.s puissent se focaliser essentiellement sur cette phase de conception. Voici les problématiques proposées :

1. *Comment, sur une droite graduée, donner du sens au passage de la fraction représentant la mesure de la longueur d'un intervalle à une position symbolisée par une graduation ?*

[5] Le PLA est un matériau pour les imprimantes 3D (filament en acide polylactique).

2. *Comment donner du sens aux conversions d'unités ? (problématique en lien avec des erreurs récurrentes chez nos élèves malgré un outil existant, le tableau de conversion)*
3. *Comment sensibiliser les élèves au périmètre du cercle et à son lien avec π ?*

Deux groupes ont souhaité réfléchir à la première problématique. Un troisième groupe s'est consacré à la deuxième problématique. La troisième problématique n'a pas été retenue. En revanche, l'artefact créé à la HEP sur cette thématique a été présenté en conclusion de l'atelier. Il est décrit à la fin de cette partie.

Le matériel créatif mis à disposition des groupes était : carton, carton ondulé, papier de couleurs (A3 - A4) et quadrillé, papier - mousse, scotch, colle, agrafeuse, ficelle, cure-pipe, pique à brochette, gomme, crayon, stylo-feutre, cutter, ciseaux…

1. Autour de « Comment, sur une droite graduée, donner du sens au passage de la fraction représentant la longueur d'un intervalle à une position symbolisée par une graduation ? »

Deux groupes que nous nommerons A et B (A : 3 personnes / B : 3 personnes) ont décidé de travailler sur cette problématique.

1.1. Synthèse du travail du groupe A

Le premier quart d'heure a permis aux personnes de ce groupe d'échanger sur les savoirs théoriques, leur connaissances personnelles sur le sujet et leur compréhension de la consigne. Les notions *fraction d'un tout* et *fractions unités* ont émergé. Ce premier temps d'échange met l'accent sur la nécessité de construire progressivement un univers commun dans lequel elles et ils vont évoluer durant le temps que durera l'atelier.

Rapidement, de premières idées d'objets ont été proposées et dessinées. Ces illustrations ont permis de poursuivre cette analyse de la problématique et d'étendre les réflexions aux pratiques et aux exemples rencontrés de difficultés. Ces premières idées sont toujours sujettes à évoluer, mais elles constituent un point de départ à une réflexion plus approfondie des dilemmes induits par les propositions d'objets (figure 11), à savoir comment faire accepter le passage de la mesure d'une aire (ici les surfaces sont des rectangles) à la mesure d'une longueur (ici, représentée par un segment inclus dans la droite graduée) pour aboutir au marquage d'un point de cette même droite graduée (abscisse), alors que ce ne sont pas les mêmes grandeurs.

À la suite de ces ébauches, les personnes du groupe A sont revenues sur les termes utilisés dans la problématique ; la formulation ne leur paraissait plus adéquate. Cette nouvelle investigation leur a permis d'établir que les élèves savent ce qu'est le « marquage », qu'ils savent également reporter. C'est à partir de ce constat que le groupe poursuivra vers une mesure de longueur comme le report d'unités.

Une vingtaine de minutes après le début de l'atelier, nous les avons invités à utiliser leur matériel. Cette demande est en réalité une relance pour permettre au groupe de concrétiser physiquement les discussions et faire évoluer encore le prototypage.

Par la suite, les termes de « bande » et de « ficelle », qui mettent évidemment l'accent sur différentes grandeurs, à savoir l'aire ou la longueur, ont été passablement discutés et surtout manipulées (figure 11).

L'utilisation de leur artefact a été expliquée lors de la rapide présentation de fin d'atelier. La longueur du cadre (en carton gris sur la figure 11) constitue l'unité. Les bandes de couleurs, des parties simples de l'étalon associé à l'unité, représentent soit un demi (en rouge), un tiers (en jaune), un quart (en bleu). Il s'agit ensuite de prendre le cordon vert pour le tirer jusqu'à la valeur à atteindre (par exemple : trois parties rouges sur la figure 11). Ce mouvement s'arrête et une marque au crayon est inscrite sur la bande jaune clair : la valeur est ensuite indiquée : trois quarts.

Nous pouvons constater que le temps à disposition pour la réalisation d'un artefact et la réflexion des schèmes d'utilisation était insuffisant. Ce prototype demande, comme les suivants, encore un temps de réflexion et de manipulation.

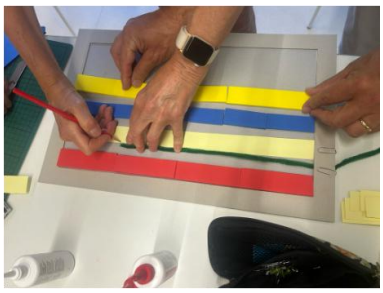


Figure 11. Passage de la mesure d'une surface à la mesure d'une longueur

1.2. Synthèse du travail du groupe B

Dans le second groupe, le point de départ des discussions a été marqué par la bande que l'on plie pour obtenir des fractions simples (demi, quart, tiers), situation où la fraction est vue comme « partie d'un tout ». Les membres du groupe se questionnent sur la bande de papier qui peut être vue comme une surface et non une bande que l'on plie, afin de l'utiliser comme élément de mesures à reporter.

Après une demi-heure d'échanges, les artefacts ont évolué de la bande de papier que l'on plie à la ficelle qui se déroule (figure 12). Mais le groupe a essayé tout de même de gérer le passage d'une aire à une longueur.

Le matériel choisi a permis d'imaginer une « roue » qui déroule une ficelle sur plusieurs tours et se déploie sur une demi-droite. L'idée de la demi-droite pour définir l'origine avait préalablement été débattue par le groupe. En effet, l'origine associée au zéro appartenant bien à la droite graduée est nécessaire pour la construction d'une droite numérique.

Les disques posés sur le dérouleur permettent d'identifier des surfaces (les habituelles tranches de pizzas) familières aux élèves. Ainsi le passage des aires aux longueurs, puis au marquage d'un point est pris en charge par l'objet imaginé par les personnes du groupe B.

L'utilisation de la machine est décrite ainsi :

1. D'abord, on déroule la ficelle sur un tour pour marquer une unité.
2. Ensuite, on place sur le disque initial un nouveau disque avec des marques (par exemple : des quarts)
3. Puis, on déroule à nouveau la ficelle depuis la même origine pour graduer le segment unité en quarts.
4. Et ainsi de suite ; on peut répéter cette situation avec autant de surfaces fractionnées que créées.

L'objectif de cet artefact étant de transposer un tiers du périmètre du disque construit, déterminé par un tiers de l'aire du disque, sur une demi-droite et ainsi la graduer en tiers, donc passer à une fraction unité que l'on reporte.

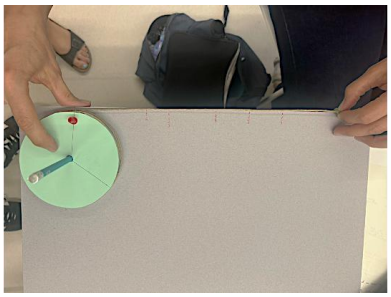


Figure 12. Démonstration du dérouleur de ficelle comme marqueur de fractions unités.

Au terme de l'atelier

Nous avons constaté une approche différente pour une problématique similaire. Les questionnements communs rappellent la complexité de la représentation des fractions, plus spécifiquement du passage des surfaces (ici rectangulaire ou circulaire) à la symbolisation de la coordonnée sur une droite numérique. Des prototypes d'objets pour aider les élèves à la représentation et la compréhension de ce passage ont été élaborés durant cet atelier. Ils méritent d'être encore requestionnés, mais ils ont également été au service des personnes des différents groupes pour débattre, entrer par une autre porte dans la notion de fractions, sans tenir pour acquises certaines évidences qui éloignent parfois d'une investigation pertinente des difficultés d'élèves.

2. Autour de « Comment donner du sens aux conversions d'unités ? (lien avec des erreurs récurrentes et avec un outil existant insatisfaisant, car ne donnant pas de sens) »

Le groupe formé de quatre personnes s'est d'abord interrogé sur l'utilisation contextuelle du terme « unité » ; s'agit-il de réfléchir à un instrument pour permettre des conversions entre unités de numération ou entre unités de mesure ? Puis, dans le cas d'unités de mesure, s'agit-il de concevoir un prototype qui permette de manipuler les relations entre unités de mesure d'une même grandeur (par exemple : L, dL, cL, mL…) ou un prototype qui permette de multiplier ou diviser par 10, 100, 1000… quelle que soit l'unité de mesure ?

Pour prendre une décision, les personnes de ce groupe ont discuté de l'éventail des artefacts déjà existants (par exemple : le glisse-nombre) et des biais d'utilisation dans l'enseignement. Les discussions se sont ensuite centrées sur les difficultés des élèves. Et force de constater que si les élèves ne font pas de lien entre les différentes unités d'une même grandeur, c'est que :

a. la grandeur *longueur* se prête bien à la manipulation (100 centimètres ou 10 décimètres sur la règle d'un mètre) et les artefacts sont déjà très présents dans les classes ;
b. l'abstraction pose un problème ce qui est le cas pour le tableau de conversion, le glisse-mesure ;
c. il est nécessaire de percevoir et manipuler chaque unité ;
d. il est nécessaire de percevoir et manipuler le report des plus petites unités (par exemple les 10 dL dans 1 L) ;
e. le sens du report d'unité pour les grandeurs masse, volume/capacité sont compliquées à matérialiser ;
f. le matériel de manipulation doit être proche du quotidien des élèves.

Au bout d'un quart d'heure, le groupe s'est donc positionné sur la création d'un prototype cylindre-litre avec des anneaux (figure 13) représentants le contenant mais en différentes unités. Le prototypage a été réalisé à l'aide d'une bouteille en PET (figure 13). Les anneaux ont été réalisés avec du papier calque.



Figure 13. Prise de note du prototype cylindre-litre et anneaux

Les réflexions de conception ont porté sur :

- le choix des matériaux et la couleur des matériaux : matériaux imperméables, glissants, incolores et transparents pour voir le liquide mais aussi pour mieux appréhender et acquérir le sens des différentes unités de mesure ;
- l'anticipation des schèmes d'utilisation : superposer dix anneaux pour obtenir le contenu ;
- la mise en scène : est-il possible de gérer l'utilisation du liquide en classe ? Est-ce que tous les liquides permettent de faire comprendre le sens de l'unité ? Faut-il proposer de comparer différents liquides ? À capacités égales, les élèves remettraient-ils en doute leur mesure en fonction de la forme du récipient (bouteille vs bol vs bassine) ?

À la suite de ce temps créatif, les réflexions ont porté sur la visée de l'objectif d'apprentissage : est-ce que l'objet permet de manipuler les unités et d'effectuer les conversions aisément ? L'avis soutenu par le groupe est qu'enseigner les conversions n'a pas de sens, en revanche c'est la manipulation de l'objet qui permettra d'induire les différentes unités et de permettre aux élèves d'incarner le sens de ces unités.

Communément, le groupe a donc estimé que l'élève pourrait ancrer l'apprentissage des conversions d'unités de capacité grâce à l'objet à manipuler. Après avoir permis aux élèves de se construire des référents (ici, les anneaux – figure 13) des différentes unités et de s'être assuré de la bonne compréhension des liens existants entre ces unités, il sera possible de faire des conversions de manière abstraite. Voici un verbatim du groupe : « ils ont à la fois un référent pour chaque sous-unité et ils auront vécu... Mais visuellement, il faut qu'ils aient visuellement l'objet, pour pouvoir faire, parce qu'au début tu as l'action, après tu peux enlever l'action de transvaser mais tu as toujours l'objet. »

Les derniers échanges ont porté sur les tâches existantes dans les moyens d'enseignement et leur potentiel didactique. Est-ce que « le cylindre-litre et ses anneaux » peut devenir un outil innovant ?

3. Autour de « Comment sensibiliser les élèves au périmètre du cercle et à son lien avec π ? »

À la fin de la séance, nous avons présenté quelques objets[6]. Nous parlerons ici uniquement de l'objet qui permet une approche de π. En Suisse, il figure au programme du cycle 3 (12-15 ans), mais nous faisons une sensibilisation auprès des élèves de 10-11 ans. L'intérêt réside dans le fait que le nombre π n'est pas parachuté comme une valeur constante sans unité mais émerge progressivement par l'utilisation du matériel. La volonté de travailler à l'aide de mesure non conventionnelle pour appréhender et donner du sens à ce nombre nous paraissait importante.

Dans le matériel visible plus bas (figure 14.a), on aperçoit des polygones dont le nombre de côtés augmente progressivement, tous inscriptibles dans un cercle de 10 cm de diamètre, pour finalement obtenir le cercle complet. À l'extérieur des cercles, tangents à ces derniers (figure 14.a), on retrouve la représentation courante de ces polygones qui progressent également vers le cercle. On remarque également une longueur-unité, celle d'une petite baguette en bois de 10 cm.

Sur l'image de droite (figure 14.b), on trouve une feuille A3 qui permet la mesure du périmètre de chaque polygone.

Les consignes données aux élèves sont les suivantes :

- *Compare les longueurs des périmètres de chaque figure et classe-les de la plus petite à la plus grande.*
- *Reporte le périmètre de chaque polygone sur les demi-droites adéquates.*
- *Que peux-tu observer ?*

[6] À retrouver sur le site : labomath.hepl.ch

- *Utilise la longueur-unité (celle de la baguette en bois), afin de mesurer la longueur de ces périmètres.*

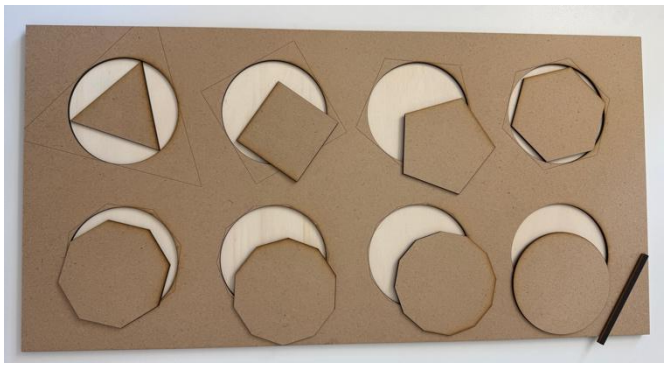


Figure 14.a

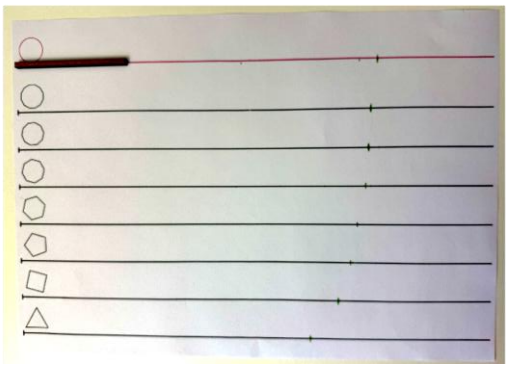


Figure 14.b

La première question incite l'élève à la recherche : trouver une procédure qui lui permette d'effectuer le classement attendu. Elle ou il n'a pas droit aux instruments conventionnels de mesure de longueur.

En Suisse, les différentes procédures de comparaison sont enseignées entre 4 ans et 11 ans. Les élèves comparent une grandeur grâce à l'approche perceptive, puis la procédure de comparaison directe, ensuite celle de comparaison indirecte. À la suite de cela, c'est le mesurage qui sera mis en avant avec l'utilisation de mesures non conventionnelles, puis conventionnelles.

La plus grande longueur de périmètre peut émerger grâce à la surface plus claire du disque dans lequel le polygone s'inscrit. Néanmoins, le passage à la feuille A_3, où il s'agit d'une manière ou d'une autre de reporter la longueur des périmètres des différentes figures, constitue une étape importante pour la suite (figure 14.b). L'élève expérimente de façon incarnée la longueur du périmètre en le déroulant sur la demi-droite. Une fois tous les périmètres reportés, une courbe émerge en reliant les extrémités des périmètres déroulés qui tend vers la longueur du périmètre du cercle. Cette ultime longueur mesure, grâce à la baguette unité, 3 et un petit peu plus. Pour les élèves de cet âge-là (π est abordé à 12-13 ans en Suisse) nous donnons finalement la valeur attendue. Il s'agit avant tout de créer un lien le cercle et π.

Comme on peut le voir, l'approche reste expérimentale, la précision n'est pas l'objectif de la tâche, mais bien le fait de donner du sens à un nombre très utilisé.

VII - CONCLUSION : ÉCHANGES ET PERSPECTIVES AUTOUR DU MODÈLE

En guise de conclusion, nous avons décidé de mettre l'accent sur les points saillants des discussions durant les ateliers et sur ce que nous avons pu observer lors des formations dans notre institution.

1. Réactions à la suite des ateliers

S'il est vrai que le processus créatif prend du temps, la conception des prototypes a permis d'initier un questionnement plus approfondi des notions mathématiques travaillées.

Lorsque nous faisons ces formations, le corps estudiantin bénéficie d'une journée complète afin de réaliser un prototype *low-tech*. Il est évident qu'avec le temps imparti à cet atelier, les groupes ont initié un prototype qui demande à être éprouvé. Les explications rapides de fin de séance sur l'utilisation de leur objet étaient succinctes et demandent des éclaircissements. La roue pour le passage à la droite graduée ou encore la bouteille pour visualiser les unités de capacité ne manquent pas d'intérêt et d'innovation. Néanmoins, les conceptions mentales des notions abordées ne semblent pas avoir changé. Ceci certainement pour deux raisons : le temps à disposition (une heure trente pour enrichir ses conceptions est très court) et les habitudes (il y a toujours des résistances à modifier ses habitudes ou sa

façon de voir les choses). Compte tenu de ce qui précède, ce qui a été proposé en fin d'atelier et un bon début qu'il faut requestionner.

Notre objectif, finalement, était que ces groupes vivent une expérience de conception, donc une approche différente, afin de réfléchir à une notion qu'ils connaissent. En cela, l'atelier a atteint son objectif.

En écoutant les personnes des différents groupes, nous avons pu remarquer que les notions travaillées ont été challengées par la conception et que des va-et-vient fréquents ont eu lieu entre leur connaissance de la notion travaillée et l'artefact réalisé. Ce dernier a été pensé au niveau de sa manipulation, donc au niveau des schèmes d'utilisation.

À la suite des ateliers, l'appréciation d'avoir vécu un atelier peu commun a été relevée. Elles et ils ont perçu le potentiel formatif, du point de vue des connaissances mathématiques pour la formation des étudiantes et des étudiants, mais aussi des capacités transversales que cette formation peut développer, telles que la collaboration, la pensée créative et la démarche réflexive.

Les groupes de l'atelier ont trouvé un intérêt à aborder des notions complexes et des difficultés mathématiques des élèves par le biais de la conception d'objets à manipuler.

Les points d'interrogation ou questionnements concernant l'organisation d'un tel dispositif, des coûts et des ressources humaines ont été soulevés, ce que l'on pourrait interpréter comme un intérêt à la réflexion de la mise sur pied d'une telle formation.

En effet, ce dispositif nécessite un travail minimum de 20 heures pour un groupe qui expérimente cette formation. À cela, il faut aussi ajouter la disponibilité et présences des collègues qui dispensent la formation. Enfin, tout l'intérêt réside dans les tests du matériel conçu auprès des élèves, afin de pouvoir faire évoluer l'objet. La première utilisation en classe revêt une importance capitale notamment dans l'observation de la part de l'enseignante ou de l'enseignant quant à la manipulation de l'objet par l'élève. Un questionnement doit émerger tel que : comment l'élève appréhende-t-il l'objet ? La situation imaginée, donc la mise en scène, est-elle pertinente ? Quelle concordance entre ce qui avait été imaginé et ce qui se passe réellement en classe ? L'objectif mathématique est-il atteint ?

On constate que ces questions sont en lien avec le modèle pour penser l'objet didactique et ce sont bien celles-ci qui permettront une version améliorée de l'objet. Ainsi le temps de formation pour ce dispositif ne peut se faire en continu mais de manière échelonnée.

À cela, il s'agit également d'ajouter l'accès à un local comme un FabLab, ainsi que les ressources matérielles qui peuvent engendrer un certain coût.

2. Compétences acquises lors de ce dispositif

À la question de ce que la mise en œuvre d'un tel dispositif peut apporter à la formation, nous avons quelques pistes.

Lors de l'accompagnement et de la discussion avec des groupes en formation sur le *making* à la HEP Vaud, nous avons constaté que la création de matériel pédagogique pour les mathématiques suscite de l'intérêt certes, mais permet également de développer un nombre important de compétences telles que :

- augmenter les connaissances dans la notion disciplinaire choisie pour sa problématique ;
- développer des compétences dans l'utilisation des machines numériques et leur logiciel ;
- travailler à l'intersection de l'analogique et du numérique ;
- entretenir l'intérêt de la collaboration et du partage de pratiques ;
- intégrer le processus itératif du prototype à l'objet final en passant par une phase de test ;
- comprendre que l'artefact est lié à des schèmes d'utilisation et ne pas les négliger ;
- déployer ses compétences dans le processus créatif ;
- travailler la résolution de problèmes et l'argumentation ;
- développer son agentivité et son sentiment d'auto-efficacité ;

- développer un esprit critique

Devant ce tableau presque idyllique qui promeut de multiples compétences, nous pouvons y ajouter quelques bémols qu'il s'agit de dépasser, afin de pouvoir montrer l'intérêt de ce type de dispositif.

Dans son article de 2005, Ertmer met en lumière les obstacles que l'on peut rencontrer dans ce genre de formation. Il explique que le corps enseignant n'adhère pas spontanément à ces pratiques de *making* car il est envahi de croyances limitantes quant à leurs compétences face à la technologie. Cette croyance mise au regard des croyances sur l'enseignement et l'apprentissage, c'est-à-dire leur pratique habituelle, les empêchent d'entrer dans la formation sans réticence. Et de conclure, pertinemment, sur le fait qu'il est difficile de savoir si les croyances précèdent l'usage des technologies ou l'inverse, mais qu'il devient évident qu'un changement doit se faire simultanément. Avec l'espoir qu'une augmentation des compétences techniques et de leur intérêt dans l'enseignement modifiera l'habitude de leurs pratiques enseignantes.

De plus, proposer de telles formations peut redéfinir l'identité même de l'enseignante et l'enseignant, afin d'évoluer au niveau de ses croyances et être ainsi un levier pour un changement de pratiques pédagogiques.

> *Afin d'anticiper la transformation de l'identité professionnelle à venir, nous devons continuer à prendre en compte la situation des enseignants dans leurs premières années de pratique, où l'influence du contexte – la nature de l'établissement d'enseignement, leurs collègues, la direction de l'établissement, leurs propres élèves et la communauté scolaire au sens large – se fait fortement sentir. Nous devons ensuite nous efforcer d'intégrer nos connaissances sur les contextes et les communautés, ainsi que sur leur influence sur la formation de l'identité enseignante, dans nos programmes de formation des enseignants, afin de préparer les nouveaux enseignants aux défis du développement positif d'une identité professionnelle forte.*[7] *(traduit de Beauchamp et Thomas, 2009, p. 186).*

3. Perspectives

Nous pensons que notre dispositif de formation est relativement stabilisé, ou tout du moins nous permet de mener des formations qui développent des compétences intéressantes en éducation. En ce qui concerne notre modèle théorique en quatre pôles, ce dernier n'est qu'un point de départ que nous sommes en train de développer et d'affiner. Nous nous concentrons notamment sur les schèmes et en particulier sur les invariants opératoires (Vergnaud, 1990b), et nous avons l'intention de préciser notre compréhension des affordances liées à l'artefact, en ce qu'il « invite » à faire, selon une approche écologique de la perception (Gibson, 1979).

7 In order to anticipate the reshaping of professional identity that will come, we must continue to consider the situation of teachers in the early years of practice, where the influence of their surrounding context – the nature of the educational institution, teacher colleagues, school administrators, their own students and the wider school community – is strongly felt. We must then try to incorporate what we know about the contexts and communities and their influence on the shaping of teacher identities into our teacher education programmes to prepare new teachers for the challenges of developing strong professional identities in positive ways. (Beauchamp et Thomas, 2009, p. 186)

BIBLIOGRAPHIE

Beauchamp, C. et Thomas, L. (2009). Understanding teacher identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175–189. https://doi.org/10.1080/03057640902902252

Bartolini Bussi, M.-B. et Mariotti, M.-A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.

Ertmer, P. A. (2005). Teacher pedagogical beliefs: The final frontier in our quest for technology integration ? *Educational technology research and development*, *53*(4), 25-39.

Gibson, J. J. (1979). *Une approche écologique de la perception visuelle*. Bellevaux : éditions Dehors.

Mariotti, M. A. et Maracci, M. (2010). Les artefacts comme outils de médiation sémiotique : quel cadre pour les ressources de l'enseignant ? Dans G. Gueudet et L. Trouche (éd.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (91-107). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

https://www.researchgate.net/publication/236477687_Un_artefact_comme_instrument_de_mediation_semiotique_une_ressource_pour_le_professeur

Rabardel, P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? *Les dossiers de l'Ingénierie éducative, 19*, 61-65. https://edunum.unige.ch/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf

Scalisi Neyroud, C., Serment, J., Batteau, V., Epp, S., Trgalova, J. et Vialle, L. (2025). Instaurer un débat mathématique en classe de primaire : récit d'une expérimentation autour des transformations géométriques. *Revue De Mathématiques Pour l'école*, 243.

https://doi.org/10.26034/vd.rm.2025.6239

Vergnaud, G. (1990a). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant* (261-278). Paris : Presses Universitaires de France.

Vergnaud, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol/2.3,* 133-170. La Pensée Sauvage.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. *The concept of activity in Soviet psychology*, 144-188. Abingdon-on-Thames : Routledge.

Sites

Arts et Métiers. *Qu'est-ce qu'un FabLab ?* Consulté le 19.08.2025. https://artsetmetiers.fr/fr/quest-ce-quun-fablab

CIIP. (2023). *Espace des moyens d'enseignement romands. (ESPER)*. https://www.ciip-esper.ch/#

CIIP. (2024). *Plan d'études romand*. https://portail.ciip.ch/per/disciplines/5

HEP Lausanne. (n.d). *FabLearn*. Consulté le 15.05.2025. https://fablearn.hepl.ch/

DISPOSITIF DE FORMATION UTILISANT LE JEU DE GO POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AU CYCLE 1

Albert FENECH
Président du club de Go de Strasbourg
fenech@wanadoo.fr

Richard CABASSUT
IREM de Strasbourg
richard.cabassut@gmail.com

Antoine FENECH
Professeur au Collège international de Strasbourg
antoine.fenech@gmail.com

Résumé
Le rapport Villani-Torossian (2018) souligne qu'en travaillant les fondamentaux par une approche différente, le jeu contribue lui aussi à la formation mathématique des élèves.
Dans le cadre du projet Maths et go, le jeu de go est introduit en classe en tant que support d'apprentissages mathématiques.
Ce support a la particularité d'être exploitable dans tous les domaines du nouveau programme de mathématiques du cycle 1.

I - CADRE THÉORIQUE DE LA DOUBLE TRANSPOSITION

La double transposition (Cabassut, 2009a, 2009b) étudie les configurations d'enseignement où deux types de savoirs sont enseignés, par exemple arguments mathématiques et arguments extra-mathématiques dans l'enseignement de la preuve, connaissances mathématiques et connaissances du monde réel dans l'enseignement de la modélisation (Fenech, Fenech et Cabassut, 2025, p. 427). Ici deux institutions produisent des savoirs. Le club de go de Strasbourg est une institution qui produit la connaissance de règles adaptées du jeu de go et de techniques de jeu. L'école primaire française est une autre institution où le programme de mathématiques est enseigné. Nous étudions la double transposition de la connaissance du jeu de go et du programme mathématique du cycle 1 de l'école primaire française.

II - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

Dans ce paragraphe nous décrivons de manière chronologique le déroulement de l'atelier.

1 Découverte du jeu de go

La première partie de l'atelier fait découvrir en jouant la règle adaptée utilisée en maternelle, sans référence à l'exploitation mathématique du jeu.
Pour la présentation de cette règle, on définit une progression en trois étapes (à traiter en classe en trois séances distinctes espacées d'au moins une semaine).

1.1 Étape 1 - Introduction de la « règle des petits »

En maternelle, le go se joue sur un plateau où sont tracées huit lignes horizontales et huit verticales.
Le plateau est appelé « goban » (figure 1). (On prononce gobâne).

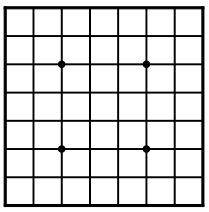


Figure 1. Goban en maternelle

Le go se joue à deux.
Un joueur a des pions noirs, l'autre des blancs. On utilise le mot pierre.
Les joueurs vont poser à tour de rôle une pierre sur le goban.
Les pierres sont posées sur les intersections du quadrillage ou de la grille (figure 2).
Noir joue le premier coup, Blanc jouera le dernier.
Au cours de la partie, les deux joueurs vont poser le même nombre de pierres sur le plateau.

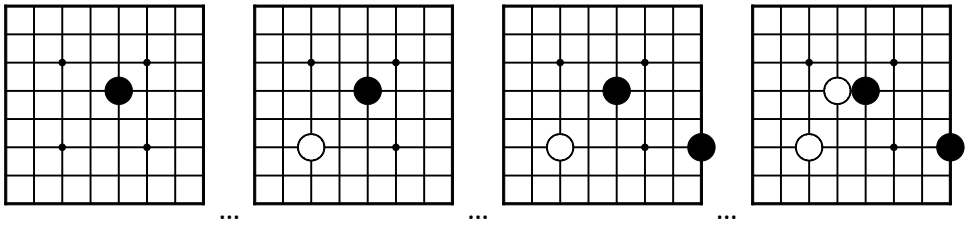


Figure 2. Exemple de début de partie

En maternelle, les quatre premiers coups sont imposés pour faire apparaître l'une des positions suivantes (figure 3) :

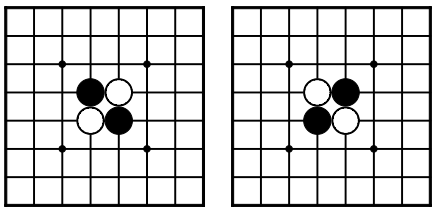


Figure 3. Positions imposées en maternelle

Les deux pierres noires « ne se touchent pas ». Les deux pierres blanches ne se touchent pas.
Les coups suivants ne sont plus imposés (figure 4).

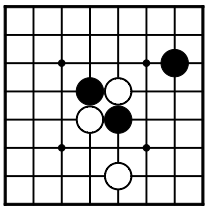


Figure 4. Exemple de coups permis

On peut poser une pierre dans un coin.

On peut poser une pierre sur un bord (figure 5).

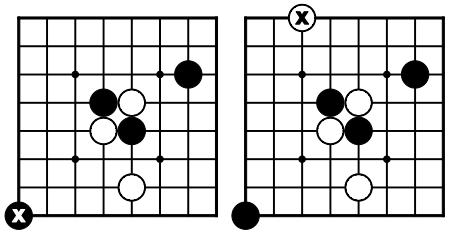


Figure 5. Exemple de coups permis

Au début de la partie, à chaque fois que Blanc joue, il y a autant de pierres blanches que de noires sur le plateau (figure 6).

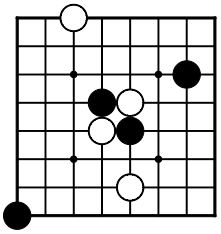


Figure 6. Exemple de plateau en début de partie

Le but du jeu est d'avoir le plus de pierres de sa couleur sur le plateau à la fin de la partie (figure 7).

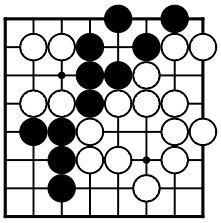


Figure 7. Exemple de plateau en fin de partie

Ceci est la position à la fin d'une partie. Qui a gagné ?

Une fois posée, une pierre ne se déplace pas, mais une règle permet de capturer des pierres adverses et de les retirer du plateau. Pour expliquer cette règle de prise, on commence par introduire la notion de chaîne. Pour définir une chaîne, on introduit la notion de « pierres qui se touchent ».

Notion de chaîne

Introduction de la notion de pierres qui se touchent.

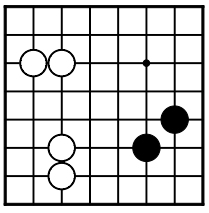


Figure 8. Exemple de pierres qui se touchent ou ne se touchent pas

On voit sur ce diagramme (figure 8) deux fois deux pierres blanches qui se touchent.
Les pierres noires ne se touchent pas.

Création de chaînes en respectant la consigne

On pose une première pierre. La suivante doit toucher la première. La troisième doit toucher une des deux premières…

Exemple de formulation du professeur sur le plateau vide avec des pierres blanches (voir figure 9)

« Pose une pierre. On dit qu'il y a une chaîne d'une pierre sur le goban. Pose une pierre qui touche la pierre. On obtient une chaîne de deux pierres. Pose une pierre qui touche une des deux pierres. On obtient une chaîne de trois pierres. Pose une pierre qui touche une des trois pierres. On obtient une chaîne de quatre pierres… »

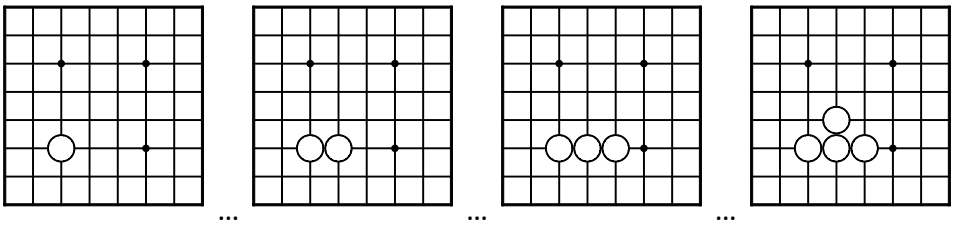


Figure 9. Création d'une chaîne de pierres

La chaîne créée peut apparaitre sans appliquer la procédure décrite.

Justification que des pierres d'une même couleur font partie de la même chaîne

Déplacement sur les lignes du quadrillage :

- Sur un plateau vide, on montre un déplacement sans marquer de pause.

Déplacement par petits pas sur les lignes du quadrillage :

- Déplacement en marquant des pauses.
- « Ceci est un petit pas » (passage d'une intersection à une intersection adjacente).

Justification que des pierres font partie de la même chaîne

- Justification sur un diagramme ne comportant qu'une chaîne blanche :

Pour expliquer que des pierres font partie de la même chaîne, on montre un déplacement par petits pas passant par toutes ces pierres, sans passer sur une intersection libre (figure 10).

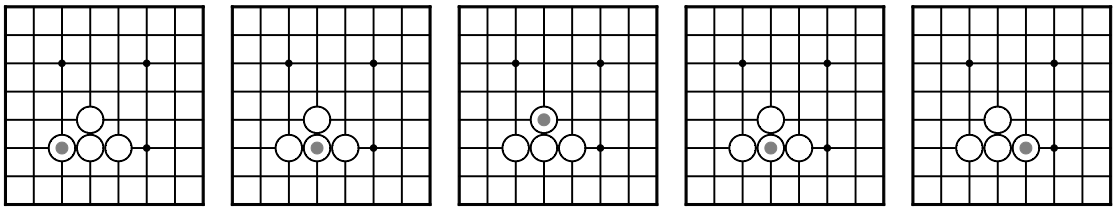


Figure 10. Déplacement par petits pas sur un diagramme unicolore

- Justification sur un diagramme comportant des pierres des deux couleurs (figure 11) :

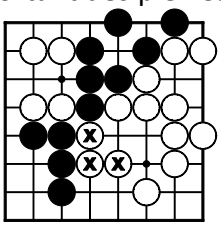


Figure 11. Exemple de diagramme bicolore

Pour expliquer que les trois pierres blanches mises en évidence font partie de la même chaîne, on montre un déplacement par petits pas passant par ces pierres, sans passer sur une intersection libre et sans passer par une pierre noire (figure 12).

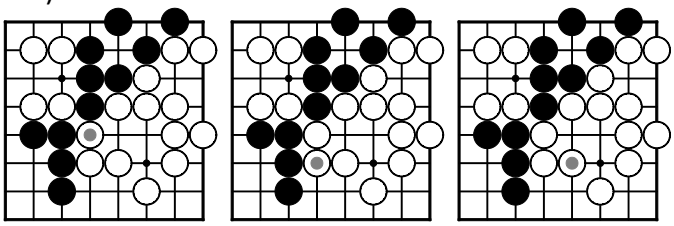


Figure 12. Déplacement par petits pas sur un diagramme bicolore

Encerclement de la chaîne créée

« Pose une pierre noire qui touche une pierre blanche. »

« Pose une pierre noire qui touche une pierre blanche … » (figure 13)

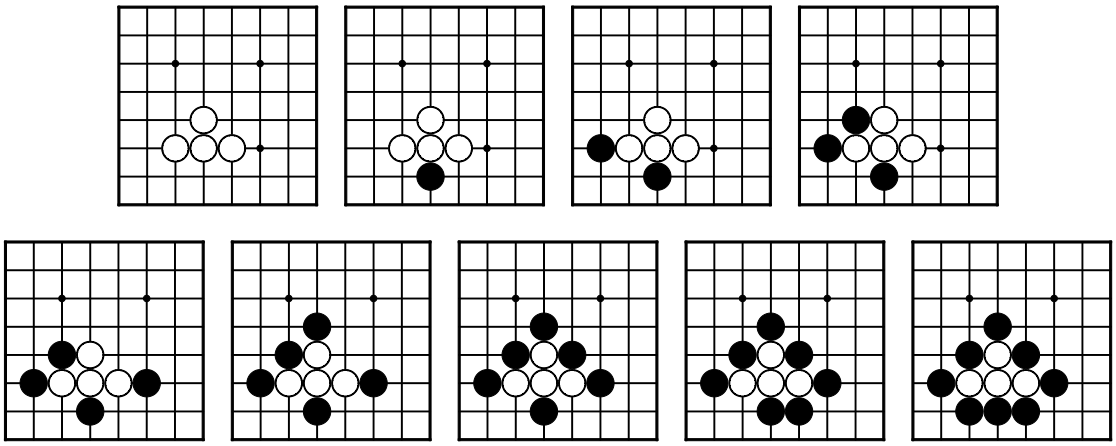


Figure 13. Encerclement de la chaîne blanche par les noirs

Quand il n'est plus possible de poser une pierre noire qui touche une pierre blanche, la chaîne blanche est capturée. Les pierres blanches sont retirées du plateau (figure 14).

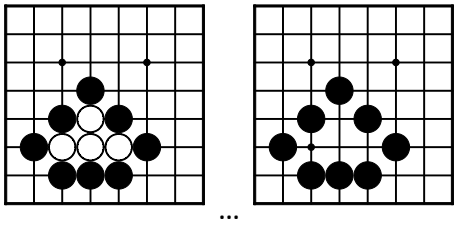


Figure 14. Capture de la chaîne blanche

Exemples d'encerclement pour sept cas particuliers (une ou deux pierres) (figure 15) :

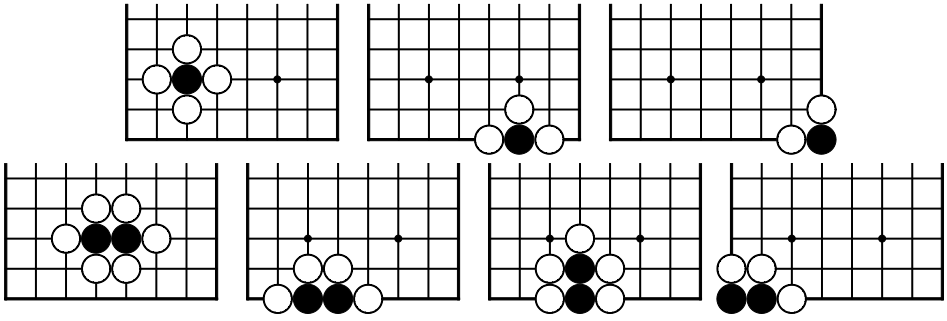


Figure 15. Exemples d'encerclement d'une ou deux pierres

Temps de jeu 1

Partie 1 au tableau avec quatre pierres en croix - un coup par participant

En maternelle, les parties sont jouées au tableau tant que les élèves ne visualisent pas les chaînes et les encerclements.

Compléments entre les étapes 1 et 2

Activités incontournables en lien avec le jeu de go (pour progresser au go)

- Dénombrement des chaînes de quatre pierres
- Encerclement d'une chaîne - Nombre de libertés

Le nombre de libertés d'une chaîne est le nombre de pierres qu'il reste à poser pour la capturer.

Combien de pierres va-t-on poser ? Combien de pierres reste-t-il à poser ?

- Quelle est la pierre inutile ? (Figure 16)

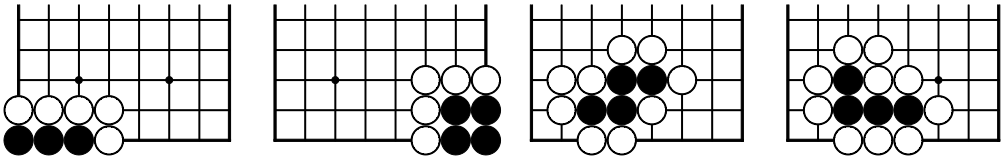


Figure 16. Exemple de diagrammes pour identifier la pierre inutile

- Défendre une chaîne en atari (une chaîne est en atari lorsqu'elle n'a plus qu'une liberté) (figure 17).

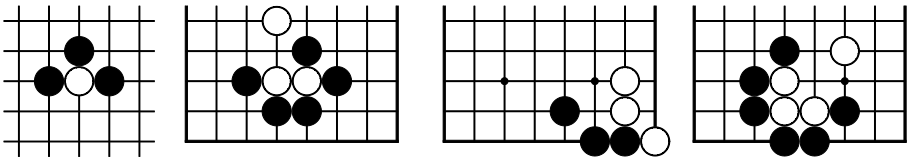


Figure 17. Exemple de diagrammes pour étudier la défense d'une chaine en atari

- Quelle est la chaîne capturée ? (Figure 18)

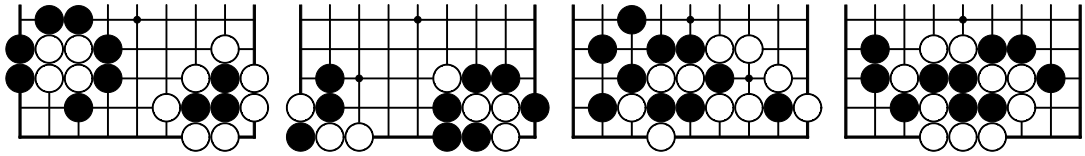


Figure 18. Exemple de diagrammes pour identifier les chaînes qui peuvent être capturées

1.2 Étape 2 - Notion de coup interdit

Coups interdits

Il est interdit de jouer à un endroit où l'on n'aurait aucune liberté (figure 19).

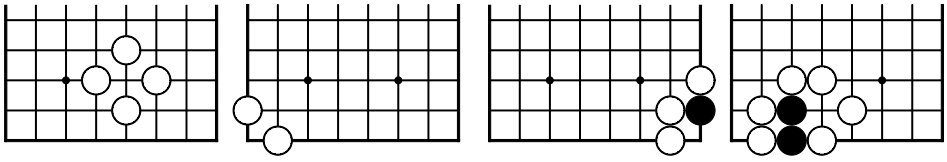


Figure 19. Exemples de positions avec un coup noir interdit

Temps de jeu 2

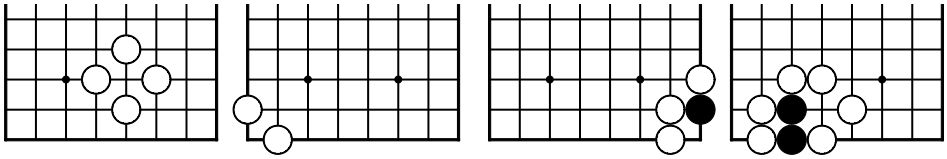
Partie 2 sur table La partie dure trois minutes.

1.3 Étape 3 - Notion d'exception à la règle sur les coups interdits

Exception à la règle sur les coups interdits

Il est interdit de jouer à un endroit où l'on n'aurait aucune liberté, sauf si ce coup permet de capturer une chaîne adverse (figure 20).

Positions avec un coup noir interdit



Diagrammes correspondants illustrant l'exception

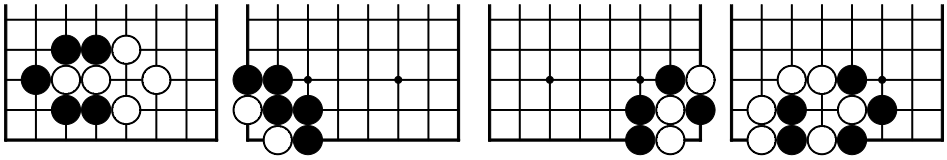


Figure 20.Exemples de coups permettant de capturer une chaîne adverse

Temps de jeu 3

Partie 3 sur table Vider son bol de quinze pierres

2 Échanges sur les possibilités offertes par le jeu de go

Dans la deuxième partie de l'atelier, les participants échangent sur les possibilités offertes par le jeu de go dans chacune des thématiques du programme : nombre, résolution de problème, géométrie, grandeur et motifs organisés, le texte de la première partie étant relu.

2.1 Affichage des 5 thématiques

Le nouveau programme de Maternelle est structuré en cinq thématiques :

- « découvrir les nombres », organisée en deux sous-parties relatives à la fonction cardinale et à la fonction ordinale du nombre,
- « utiliser les nombres pour résoudre des problèmes »,
- « explorer les solides et les formes planes »,
- « explorer les grandeurs »
- « se familiariser avec les motifs organisés ».

Les participants indiquent leurs idées (classées en fonction des thématiques) (figure 21).

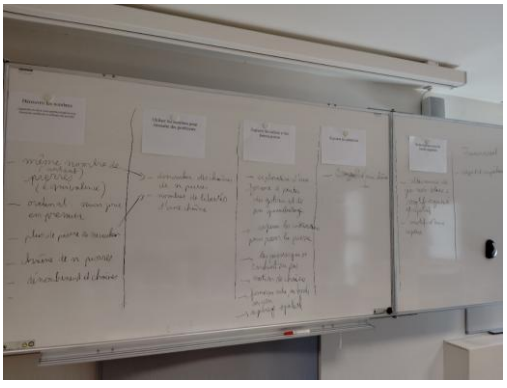


Figure 21. Idées des participants notées au tableau pendant l'atelier

2.2 Idées recueillies par thématique

Découvrir les nombres

Même nombre de (autant) pierres (équivalence)

Ordinal : Noir joue en premier

Plus de pierres de sa couleur

Chaînes de n pierres

Dénombrement et chaînes

Utiliser les nombres pour résoudre des problèmes

Dénombrer des chaînes de n pierres

Nombre de libertés d'une chaîne

Explorer les solides et les formes planes

Exploration d'une forme à partir du goban et de son quadrillage

Repérer les intersections pour poser la pierre

Les pierres qui se touchent ou pas

Notion de chaîne

Forme au centre, sur le bord, dans un coin

Repérage spatial

Explorer les grandeurs

« Masse » d'une chaîne

Se familiariser avec les motifs organisés

Alternance de jeu Noir-Blanc = motif organisé et répétitif

Motif d'une capture

III - QUELQUES EXEMPLES DE RESSOURCES

Préparé mais non abordé

1 Complément pour la thématique 1 : « Découvrir les nombres »

1.1 Fonction cardinale du nombre

But du jeu : procédures de détermination du vainqueur

- Comptage dénombrement en déplaçant les pierres (paquets de n pierres, dizaines)
- Comptage numérotation (sans déplacement des pierres)

Détermination du nombre de libertés d'une chaîne (nombre de pierres à poser pour la capturer)

- Reproduction de la chaîne et encerclement. Comptage dénombrement en posant les pierres.
- Sans reproduire la chaîne :
  - Pointage des libertés, intersections libres où il faudra poser une pierre
  - Pointage des libertés en les comptant (comptage numérotage)
  - Pointage en comptant (comptage numérotage) puis validation en posant les pierres (comptage dénombrement des pierres posées pour encercler la chaîne)

- Pointage en comptant (comptage numérotage) puis validation par un compte à rebours des libertés restantes en encerclant la chaîne

1.2 Fonction ordinale du nombre

Reposer dans l'ordre les coups joués (figure 22).

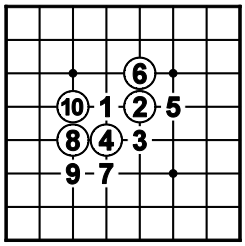


Figure 22. Exemple de diagramme pour étudier la fonction ordinale des nombres

2 Complément pour la thématique 2 : Utiliser les nombres pour résoudre des problèmes

Un des auteurs s'est inspiré des catégories de problèmes suggérées dans les programmes du cycle 1 (Ministère de l'Éducation nationale (MEN), 2025) pour définir 13 catégories de problèmes.

2.1 Les 13 catégories de problèmes définies

Problèmes de la catégorie « composition d'états »

1 Donnée des deux parties – Recherche du tout

2 Donnée du tout et d'une partie – Recherche de l'autre partie

Problèmes de la catégorie « transformation d'état » avec ajout (de pierres pour encercler)

3 Donnée de l'état initial et de l'ajout – Recherche de l'état final

4 Donnée de l'état initial et de l'état final – Recherche de l'ajout

5 Donnée de l'ajout et de l'état final – Recherche de l'état initial

Problèmes de la catégorie « transformation d'état » avec retrait (de pierres capturées)

6 Donnée de l'état initial et du retrait – Recherche de l'état final

7 Donnée de l'état initial et de l'état final – Recherche du retrait

8 Donnée du retrait et de l'état final – Recherche de l'état initial

Problèmes de comparaison

9 Donnée des deux quantités – Recherche de l'écart

10 Donnée de la plus petite quantité et de l'écart – Recherche de la plus grande quantité

Concordance des termes de l'énoncé avec l'opération à effectuer (si n ≠ b)

11 Donnée de la plus petite quantité et de l'écart – Recherche de la plus grande quantité

Non concordance des termes de l'énoncé avec l'opération à effectuer (si n ≠ b)

12 Donnée de la plus grande quantité et de l'écart – Recherche de la plus petite quantité

Concordance des termes de l'énoncé avec l'opération à effectuer (si n ≠ b)

13 Donnée de la plus grande quantité et de l'écart – Recherche de la plus petite quantité

Non concordance des termes de l'énoncé avec l'opération à effectuer (si n ≠ b).

2.2 Exemple

Un diagramme représentant un encerclement est caché. L'enseignant lui associe un énoncé (choisi dans l'une des treize catégories précédentes).

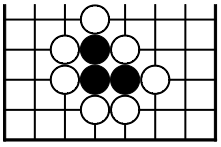


Figure 23. Diagramme caché associé à un énoncé

Exemple pour la catégorie « problème de comparaison avec donnée de la plus grande quantité et de l'écart, recherche de la plus petite quantité, non concordance des termes de l'énoncé avec l'opération à effectuer » (figure 23) :

Il y a sept pierres blanches. Il y a quatre pierres blanches de plus que les pierres noires.

Combien y a-t-il de pierres noires ?

L'élève résout le problème arithmétique (apprentissage mathématique) et recherche une position correspondant à l'énoncé (appropriation de la notion d'encerclement au jeu de go).

Présenté très rapidement

3 Complément pour la thématique 3 : « Explorer les solides et les formes planes »

Activité incontournable : le dénombrement des chaînes de quatre pierres (figure 24).

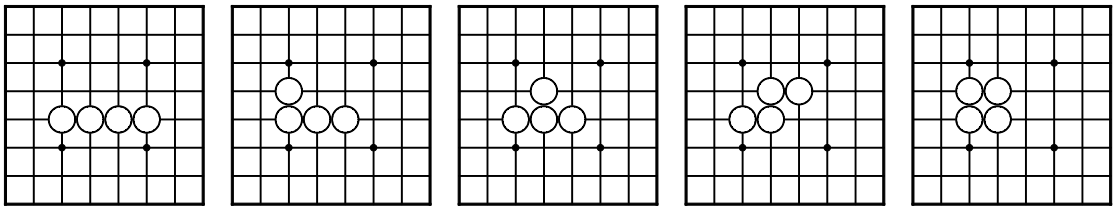


Figure 24. Chaînes de quatre pierres

Prolongement : activité sur les décompositions du nombre quatre à partir des formes des chaînes de quatre pierres puis sur celles du nombre cinq à partir de chaînes de cinq pierres.

Préparé mais présenté très rapidement

4 Complément pour la thématique 4 : « Explorer les grandeurs »

Longueur associée à une forme obtenue avec deux pierres qui ne se touchent pas.

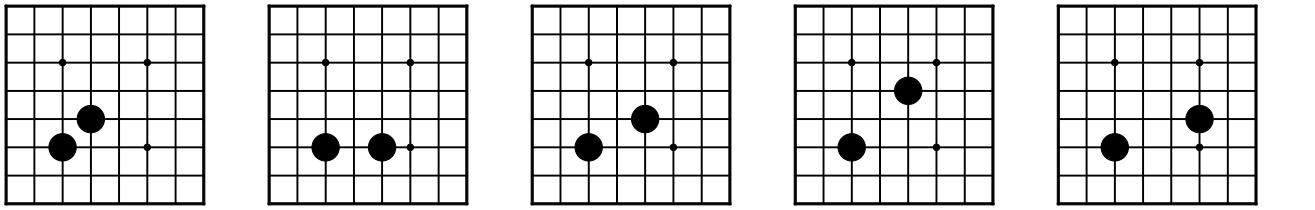


Figure 25. Dénominations de positions particulières

Préparé mais non abordé

5 Complément pour la thématique 5 : « Se familiariser avec les motifs organisés »

5.1 Pair go

Une variante privilégiée dans le cadre du projet Maths et go est le pair go.



Figure 26. élèves jouant au Pair go

Une partie de pair go oppose deux paires constituées d'une fille et d'un garçon qui s'affrontent lors d'une même partie, les deux joueurs de chaque paire jouent un coup à tour de rôle sans se concerter. L'esprit d'équipe et la collaboration filles-garçons sont travaillés dans le cadre de cette variante.

Les coups sont joués dans l'ordre : Fille Noir - Fille Blanc - Garçon Noir - Garçon Blanc puis on recommence.

5.2 Jeu à handicap

Avant chaque partie opposant au tableau l'enseignant à un groupe d'élèves, une frise est représentée avec les pierres magnétiques qui vont être utilisées.

On « lit » ces frises de la gauche vers la droite.

Frise 1 – Handicap de niveau 1

●●○●●○●●○●●○●●○●●○●●○

Cette frise signifie que le premier coup (noir) est joué par un élève, le second (noir) aussi et le troisième coup (blanc) est joué par le professeur et ainsi de suite.

Frise 2 – Handicap de niveau 2

●○●●○●○●●○●○●●○●○●●

Frise 3 – Handicap de niveau 3

●○●○●●○●○●○●●○●○●○

Frise 4 – Handicap de niveau 4

●○●○●○●●○●○●○●○●●○●

Ici, une fois sur quatre, les élèves jouent deux coups consécutifs.

IV - CONCLUSION

Au cours de cet atelier nous avons montré qu'en s'appuyant sur une règle adaptée l'introduction du jeu de go peut s'envisager dès la maternelle. Jouer fait partie des modalités d'apprentissage à l'école maternelle au même titre que résoudre des problèmes, s'exercer ou mémoriser. Le jeu de go regroupe toutes ces modalités et permet une exploitation mathématique dans les différentes thématiques du programme. Les prochains développements du jeu de go, notamment dans les autres cycles sont décrits dans (Fenech et Cabassut, 2020 ; Fenech, Fenech et Cabassut, 2025).

V - BIBLIOGRAPHIE

Cabassut, R. (2009a) The double transposition in proving dans Lin Hsieh H., de Villiers, N.T (éds.), *ICMI study 19 Conference Proceedings.* Taiwan : University Taipei.

Cabassut, R.(2009b) The double transposition in mathematisation at primary school. Dans *Proceedings of 6th Cerme (congress of European society for research in mathematics education*)(2156-2165).France : Lyon.

Fenech, A., et Cabassut, R. (2020). Dispositif de formation utilisant le jeu de go pour enseigner les mathématiques à l'école primaire. *Revue De Mathématiques Pour l'école*, *233*, 144–150. https://www.revue-mathematiques.ch/files/5215/9195/4938/RMe-233- Fenech.pdf

Fenech, A., Fenech, Al., Cabassut, R. (2025) Dispositif de formation utilisant le jeu de go pour enseigner les mathématiques aux cycles 1 et 2. 49e colloque de la Copirelem. Marseille. https://www.copirelem.fr/wordpress/wp-content/uploads/2024/11/Actes-MARSEILLE-2023.pdf

Ministère de l'Éducation nationale (2024) Programme d'enseignement pour l'acquisition des premiers outils mathématiques du cycle 1.BO du 31 octobre 2024.

https://eduscol.education.gouv.fr/4674/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1

Site maths et go : https://maths-et-go.fr/

Villani C., Torossian C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* Ministère de l'Education Nationale. France.

FORMER DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ AU CHOIX D'EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Michella KIWAN-ZACKA
MCF, Université Paris-Est Créteil
LDAR
michella.zacka@u-pec.fr

Frédérick TEMPIER
MCF, CY Cergy Paris Université, COPIRELEM
LDAR
frederick.tempier@cyu.fr

Résumé
Dans les classes, une partie importante de l'activité mathématique des élèves est consacrée à la résolution d'exercices d'entraînement, quelle que soit la démarche d'enseignement mise en œuvre. Pourtant en formation, ils semblent moins questionnés que les situations d'introduction de connaissances. En nous appuyant sur la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Abboud-Blanchard et al., 2017, Roditi et Salles, 2015) nous avons utilisé des outils d'analyse d'exercices afin d'analyser les exercices d'un même chapitre dans plusieurs manuels de CM2 (Tempier et Kiwan-Zacka, 2025). L'atelier vise à réfléchir à l'usage de ces outils en formation pour aider les enseignants à analyser les exercices proposés dans les manuels afin d'en sélectionner ou d'en modifier.

I - INTRODUCTION

Dans l'apprentissage des mathématiques, la résolution d'exercices est un passage incontournable qui permet d'approfondir la compréhension et la familiarisation d'une connaissance nouvelle, même dans le cadre d'une pratique routinière (Esmenjaud-Genestoux, 2006). Des exercices plus complexes peuvent permettre, quant à eux, une mise en fonctionnement de cette connaissance nécessitant de l'adapter et de prendre des initiatives (Robert, 2008). Ils peuvent également être un point d'appui pour la conceptualisation dans le cas d'ensembles d'exercices organisés (Watson et Mason, 2006). Dans les classes une partie du travail mathématique est consacrée à la résolution d'exercices, quelle que soit la démarche d'enseignement mise en œuvre : explication-application ou observation-compréhension-application ou problème-compréhension-application (Rey, 2001). Dans l'enseignement et la formation des enseignants, il nous semble que le choix des situations d'introduction de nouvelles notions est davantage interrogé que celui des exercices, malgré la place qu'occupe la résolution d'exercices dans les classes. Ils peuvent paraître comme des « objets banals, moins intéressants ; ils demeurent pourtant incontournables » (Esmenjaud-Genestoux, 2006). Lorsque les professeurs de CM2 utilisent des ressources pour préparer leur classe, c'est principalement pour chercher des exercices à proposer en classe (Allard et al., 2022). Plus précisément, 72% d'entre eux en recherchent fréquemment (« souvent » ou « très souvent »). Parmi les ressources qu'ils consultent, les manuels scolaires restent celles qui semblent privilégiées : les professeurs déclarent s'appuyer fréquemment sur un (pour 53% d'entre eux) ou plusieurs manuels (pour 45% d'entre eux) lors de leur préparation (*ibid.*).

Cet atelier vise à interroger les modalités et enjeux de formation des enseignants du premier degré autour des choix des exercices de mathématiques. Pour cela nous avons choisi de nous intéresser au thème de l'ordre des décimaux en CM2. En début de l'atelier nous avons rappelé quelques résultats de recherche

sur l'ordre des décimaux ainsi que les attendus institutionnels, que l'on pourra retrouver dans Tempier et Kiwan-Zacka (2025).

Les « exercices » considérés dans cette étude correspondent aux tâches proposées après l'introduction d'une notion et la synthèse (le cours à retenir). Il peut s'agir d'exercices d'application, d'entraînement, mais aussi de problèmes, de « défis », de préparation à l'évaluation, etc.

II - QUELS EXERCICES CHOISIR ET POURQUOI ?

À partir d'une double-page extraite du manuel « Le nouvel À portée de maths CM2 » (2019) (annexe 1), les participants à l'atelier ont été invités à sélectionner les exercices qu'ils auraient proposés aux élèves de leur (ou d'une) classe de CM2 en expliquant pourquoi. Lors de la mise en commun, nous sommes revenus sur les différentes justifications proposées dans les groupes, dont nous exposons ici une synthèse.

Les participants ont tout d'abord évoqué la présence et pertinence du contexte. Le contexte peut aider à donner du sens à un exercice, apporter un ancrage dans la « vie réelle », mais il est parfois perçu comme un prétexte décoratif, un habillage, qui n'apporte rien d'utile d'un point de vue mathématique (par exemple dans l'exercice 13 de comparaison des altitudes).

Il a été ensuite question de la prise en compte des obstacles connus sur l'apprentissage de l'ordre des décimaux (qui avaient été rappelés en début d'atelier) et l'importance de confronter les élèves à des « pièges » typiques afin de savoir si ces difficultés sont surmontées par les élèves. Certains groupes auraient souhaité pouvoir modifier les énoncés pour faire davantage varier le nombre de chiffres après la virgule ou encore éviter que tous les nombres aient une partie entière identique.

Les types de tâches mathématiques proposées ont aussi été évoqués. Les participants justifient leur choix d'exercices par la volonté de travailler les différentes tâches : comparaison, rangement, intercalation.

Enfin, le dernier critère indiqué est celui de la variété des registres d'écriture des décimaux. Les participants relèvent que dans cette double-page, les exercices ne présentent que des écritures décimales, et qu'il manque donc des écritures fractionnaires (fractions décimales) et des unités de numération. Cela pourrait permettre de renforcer la compréhension de l'ordre et du système décimal. La droite graduée est présente dans certains exercices mais les participants questionnent son usage puisque le placement préalable sur la droite graduée ne permet plus ensuite de travailler sur le rangement des nombres à partir de leur écriture alors que la droite graduée aurait pu servir plutôt à vérifier les rangements de nombres effectués par les élèves (exercices 3 et 5, annexe 1).

Les critères proposés par les enseignants s'avèrent être des critères plutôt « didactiques ». Il n'est notamment pas apparu de critères liés à la « difficulté » des exercices, comme « cet exercice est trop difficile pour mes élèves », que les enseignants pourraient proposer en référence à la connaissance de leurs élèves. En formation d'enseignants du premier degré, cette première analyse des critères de choix d'exercices de manuels peut alors amener à discuter la différence entre des critères de choix basés sur une analyse de la tâche ou sur une identification de « difficultés » des exercices. La difficulté est un critère subjectif, dont la perception peut être influencée par plusieurs facteurs. Un exercice est souvent jugé difficile lorsque son contenu diffère de ce qui est habituellement proposé en classe ou lorsque l'enseignant sait, par expérience, que les élèves commettent fréquemment des erreurs sur cette tâche. La difficulté perçue peut varier d'un item à l'autre au sein d'un même exercice, ou encore entre différents exercices, comme c'est le cas entre les exercices 1 et 7 du manuel de l'annexe 1, par exemple. De plus la difficulté fluctue non seulement selon les élèves (un même exercice peut être perçu par un enseignant comme difficile pour certains de ses élèves mais pas pour d'autres), mais aussi selon les enseignants (un même exercice peut être perçu comme difficile par un enseignant et facile par un autre). Les limites de ce type de critère de choix d'exercices sont mises en évidence auprès des enseignants afin de justifier notre

approche par une analyse de tâches, que nous allons présenter dans la partie suivante. C'est en effet l'analyse de la tâche, articulée aux connaissances mobilisées et à leur mise en œuvre, qui fournit des critères plus objectifs pour appréhender la complexité d'un exercice. Ce type d'analyse ne varie pas selon des critères subjectifs liés aux enseignants ou aux élèves et permet en outre de mettre en évidence les rôles différents que peuvent jouer des exercices dans la conceptualisation des connaissances.

III - PRÉSENTATION DE NOS OUTILS D'ANALYSE DES EXERCICES

Nous nous appuyons sur le cadre de la théorie de l'activité pour notre étude (Rogalski, 2008 ; Robert, 2008 ; Abboud-Blanchard, Rogalski, Robert et Vandebrouck, 2017 ; Chesnais, 2021) où l'activité d'un sujet est considérée comme tout ce qu'il développe lors de la réalisation de la tâche. Elle est provoquée par les tâches rencontrées et elle est source de l'apprentissage du sujet.

> *« On ne peut […] parler de conceptualisation que si la connaissance visée est disponible pour résoudre un certain nombre de tâches, y compris nécessitant des adaptations non indiquées. Pour y arriver, le moyen est alors un choix de tâches suffisamment variées en termes d'adaptations - associé à des déroulements qui laissent une « part suffisante » de ces adaptations à la charge des élèves » (Chesnais, 2021, p. 58)*

Robert (2008) fait une distinction entre une utilisation simple et isolée d'une connaissance « et le fait qu'elle nécessite une (ou des) adaptation(s) c'est-à-dire s'il faut l'appliquer d'une manière différente ou dans un contexte différent de celui dans lequel elle a été d'abord travaillée » (Chesnais, 2021, p. 57).

Dans l'étude des exercices, nous nous intéressons alors aux potentialités des tâches proposées, sachant que les activités possibles des élèves dépendront aussi de la façon dont ces tâches leur seront proposées, c'est-à-dire des déroulements en classe.

Pour analyser les exercices nous prenons en compte le niveau de mise en fonctionnement des connaissances en jeu, le type de tâche en jeu et le niveau de connaissance en jeu dans la tâche.

1 Différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices

Pour analyser les exercices, nous nous appuyons sur les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (NMFC) de Robert (1998, 2008) et de Roditi et Salles (2015) : le niveau technique, le niveau des connaissances mobilisables, le niveau des connaissances disponibles et celui de la compréhension qualitative d'un concept[1].

Dans le *niveau technique* (« application directe ») les connaissances sont mises en fonctionnement de manière simple et isolée, sans adaptation à mettre en œuvre, dans des exercices d'application immédiate. Par exemple, dans l'exercice 1 de la figure 1, les élèves ont à appliquer une procédure de comparaison de deux nombres décimaux sans mettre en œuvre d'adaptation par rapport à ce qu'ils ont déjà appris à faire.

Le *niveau des connaissances mobilisables* (« adaptation ») concerne les exercices qui mettent en jeu des adaptations des connaissances : changement de point de vue, de cadre, de registre, etc. (Robert, 2008). Par exemple, dans l'exercice 2 (respectivement l'exercice 9) de la figure 1, les élèves vont être amenés à mettre en œuvre une adaptation de la procédure de comparaison en choisissant eux-mêmes l'un des chiffres manquant d'un des deux nombres (respectivement en mettant en œuvre un changement de registre consistant à convertir une écriture fractionnaire en écriture décimale ou inversement).

Le *niveau d'introduction, à l'initiative de l'élève, d'intermédiaire(s) (« intermédiaire »)* où l'élève doit « de manière autonome, introduire un ou plusieurs intermédiaires [qui] peuvent concerner le processus de résolution lui-même : décomposer une question en plusieurs étapes ; introduire une notation pour traiter

[1] Nous utilisons en général un quatrième niveau dans nos analyses : la compréhension qualitative d'un concept (Roditi et Salles, 2015) qui concerne les exercices où les élèves doivent témoigner d'une compréhension de ce concept sans avoir à le mettre en œuvre. Nous ne l'avons pas mobilisé dans l'atelier car il est peu présent dans les exercices des manuels étudiés.

le problème » (Roditi et Salles, 2015). Cette introduction n'est pas suggérée par l'énoncé, elle est donc à l'initiative de l'élève. On trouve souvent des exercices de ce type dans les évaluations internationales, comme celle de PISA (OECD, 2009). Dans l'exercice 14 de la figure 1, l'élève peut prendre l'initiative de calculer la somme des longueurs des deux premiers meubles avant de faire des essais d'ajouts d'autres longueurs de meubles en contrôlant que le total reste inférieur à la longueur du mur (2,91 m).

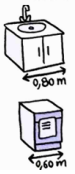
Technique	1 * Recopie et complète avec les signes <, > ou =. a. 2,48 .... 3,25 f. 3,92 .... 3,48 b. 24,1 .... 10,935 g. 10,04 10,1	Application simple et isolée de la procédure de comparaison
Mobilisable	2 * Recopie et complète par un chiffre pour que l'exercice soit juste. a. 4,2 > 4,.... b. 1,....9 > 1,39 c. 12,5 < 1 ....,5 9 * Compare ces nombres et ces fractions. a. $\frac{3}{10}$ ... 0,300 b. $\frac{272}{100}$ ... 3,85 d. 0,87 ... $\frac{860}{1\,000}$ e. 62,84 ... $\frac{2\,265}{1\,000}$	Adaptation de la procédure de comparaison sans (ex.2) et avec (ex.9) changement de registre
Disponible	14 La famille Dulac doit refaire sa cuisine. Elle doit obligatoirement placer, sur une longueur de mur de 2,91 m : – un meuble sous-évier de 0,80 m ; – un autre meuble de 0,60 m. Quelles sont les différentes possibilités pour compléter la cuisine avec des meubles de 0,30 ; 0,40 ou 0,50 m de large ? 	Prise d'initiative : trouver la longueur restante et la comparer à la longueur de l'un des meubles, ou à la somme des longueurs de plusieurs meubles

Figure 1. Exemples d'exercices aux trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.

2 Catégorisation des exercices selon les types de tâches

Les exercices comprennent une ou plusieurs tâches (au sens de la théorie de l'activité), chacune portant sur un type de tâches (Chevallard, 1999) relevant de l'ordre sur les décimaux : comparer deux nombres décimaux, ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant ou décroissant, intercaler un nombre décimal entre deux nombres donnés, encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers ou décimaux et arrondir un nombre donné à l'unité, au dixième ou au centième près.

3 Niveaux de connaissance en jeu des exercices

Les valeurs numériques utilisées dans les tâches sur l'ordre des décimaux influent sur l'activité mathématique de l'élève. Autrement dit, pour réaliser une tâche donnée, l'élève peut mobiliser des connaissances différentes, erronées ou pas, selon les valeurs numériques données. Par exemple, l'élève peut réussir la comparaison de 4,12 et 4,25 en s'appuyant sur des connaissances sur les nombres entiers : $12 < 25$ donc $4,12 < 4,25$. Mais ce raisonnement ne lui permettra pas de réussir la comparaison de 4,12 et 4,5 où il doit mobiliser des connaissances sur les nombres décimaux. Ainsi, en analysant le choix des valeurs numériques des tâches, nous définissons quatre niveaux de connaissance à utiliser par l'élève pour réaliser la tâche. Au niveau 0, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les entiers. Le traitement d'un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule conduit à un résultat correct (comme dans le cas de l'exemple ci-dessus sur la comparaison de 4,12 et 4,25). Au niveau 1, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre *a minima* de connaissances superficielles sur les décimaux. L'élève peut s'appuyer sur certains indices de surface dans l'énoncé le conduisant à un résultat correct. Par exemple, pour comparer 8,7 et 8,08, l'élève peut s'appuyer sur la présence du 0 au début de la partie décimale pour considérer que 8,08 est inférieur à 8,7. Au niveau 2, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre *a minima* de règles ou de techniques apprises sur les décimaux. Par exemple, pour comparer 4,12 et 4,5, le traitement d'un décimal comme deux entiers séparés par une virgule conduit à un résultat erroné ; la mise en œuvre d'une technique sur les décimaux semble nécessaire pour

réaliser la tâche. Au niveau 3, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les décimaux[2]. Elle nécessite une certaine flexibilité par rapport aux règles ou techniques apprises sur les décimaux qui ne peuvent en général pas s'appliquer directement. Par exemple, pour intercaler un nombre entre 4 et 4,1, l'élève peut réaliser la tâche en se ramenant à intercaler un nombre entre 4,00 et 4,10.

Niveaux de connaissance	Comparer	Intercaler
niveau 0	12,25 et 12,52	2,65 < ..... < 2,75
niveau 1	8,7 et 8,08	3 < ..... < 4
niveau 2	4,75 et 4,9	7,8 < ..... < 7,9
niveau 3		5 < ..... < 5,1

Figure 2. Exemples d'exercices aux quatre niveaux de connaissance en jeu pour les types de tâches comparer et intercaler.

[2] Pour les tâches de comparaison, nous n'avons pas identifié de niveau 3. Les tâches de rangement pouvant être interprétées comme des tâches mettant en jeu plusieurs comparaisons (qui demandent donc de s'organiser), nous considérons qu'un rangement mettant en jeu des comparaisons de niveau au plus n ($0 \leq n \leq 2$) relève du niveau n+1 (du fait de l'organisation des comparaisons à mettre en œuvre). Ainsi un rangement mettant en jeu au moins une comparaison de niveau 2 sera considéré de niveau 3.

IV - UTILISATION DE NOS OUTILS D'ANALYSE

Les participants de l'atelier ont été mis en situation d'analyse de quelques exercices d'une double-page du manuel Cap Maths CM2 (Hatier) sur la comparaison et le rangement des décimaux (annexe 2), en utilisant les critères d'analyse présentés : types de tâches, niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et niveaux de connaissance en jeu pour réaliser les tâches. Nous fournissons quelques exemples d'analyses en figure 3.

Exercice ou item (annexe 2)	Type de tâche	Niveau de mise en fonctionnement	Niveau de connaissance en jeu
1.a	Comparer	Application directe (technique) (il s'agit d'appliquer la technique de comparaison apprise de façon simple et isolée)	2
1.b	Comparer	Application directe (technique)	0 (comparer les parties entières fournit un résultat correct)
1.e	Comparer	Application directe (technique)	1 (la présence du 0 comme chiffre des centièmes peut induire la réponse)
2.a	Comparer	Adaptation (mobilisable) (conversion entre écriture fractionnaire et écriture décimale)	0 (une fois la conversion réalisée la comparaison peut se faire comme pour des entiers)
2.b	Comparer	Adaptation (mobilisable)	2
13	Comparer	Adaptation (mobilisable) (s'organiser pour trouver les valeurs possibles du chiffre manquant)	2 (prise en compte la valeur du chiffre des dixièmes)

Figure 3. Exemples d'analyses d'exercices de la double-page du manuel Cap Maths CM2 (annexe 2)

V - PRÉSENTATION D'UNE ENQUÊTE SUR L'ANALYSE DES EXERCICES DES MANUELS DE CM2 SUR L'ORDRE DES DÉCIMAUX

Le contenu de cette partie de l'atelier est repris de la communication présentée l'an dernier au colloque de la COPIRELEM, dont le lecteur pourra trouver le texte dans les actes de ce colloque (Kiwan-Zacka et Tempier, 2025) et de façon plus approfondie dans Tempier et Kiwan-Zacka (2025).

VI - IMPLICATIONS ET QUESTIONS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Les participants ont été invités à échanger autour des questions suivantes :

- Qu'est-ce qui vous semble important de travailler en formation à propos des exercices d'entraînement ? Quels éléments n'ont pas été abordés dans l'atelier ?
- Que proposez-vous en formation à ce sujet ? Que souhaiteriez-vous proposer à la suite de cet atelier ?
- Quels sont les intérêts et les limites des outils d'analyse présentés lors de l'atelier pour la formation des enseignants ?

Nous indiquons ci-dessous les principaux points abordés par les participants lors des échanges.

L'intérêt d'interroger les exercices en formation est mis en avant car le constat est fait que les enseignants utilisent souvent les exercices « parce qu'ils sont dans le manuel » sans suffisamment de prise de recul. Il est important d'outiller les enseignants pour analyser la difficulté autrement que par le ressenti personnel ou celui supposé des élèves. Ce type de travail n'est pas assez traité en formation initiale ou continue. Les outils d'analyses utilisés lors de l'atelier permettent de mieux comprendre les différentes fonctions des exercices dans la maîtrise des connaissances et l'importance de prendre en compte les valeurs numériques, les registres d'écriture... Il est aussi possible de savoir si un exercice met réellement en jeu la compréhension ou permet seulement une réussite de surface. De plus, ces outils peuvent permettre de construire des parcours différenciés selon les besoins des élèves ou encore des évaluations sommatives.

La question de la transposition de ces outils issus de la recherche pour la formation des enseignants a aussi fait l'objet d'échanges dans le groupe. La difficulté de s'approprier ces outils complexes directement en formation, surtout pour les débutants est évoquée. Certains proposent de reformuler certaines catégories d'analyse pour les rendre plus accessibles aux enseignants, en particulier pour les niveaux de connaissance en jeu, qui sont formulés seulement par des nombres de 0 à 3. Qualifier ces différents niveaux pourrait en permettre une meilleure compréhension et appropriation. Il semblerait aussi que la distinction entre les niveaux 0 et 1 ne soit pas utile pour la formation et une proposition serait donc de les regrouper dans un niveau de connaissance en jeu que l'on pourrait qualifier de niveau de « connaissances superficielles » par exemple.

Il apparaît également, qu'en formation, il pourrait être nécessaire d'apporter les différentes catégories d'analyse progressivement en s'assurant de la compréhension de chaque catégorie avant d'en apporter une autre. L'importance du temps long de formation pour s'approprier véritablement ces outils est évoquée, sans se limiter à celui des décimaux donc en les utilisant sur des thèmes mathématiques variés, puisque les outils d'analyse proposés peuvent avoir une portée plus générale que les décimaux.

Les animateurs de l'atelier ont ensuite fait une synthèse sur les étapes de l'atelier, qui peuvent constituer une modalité de formation à l'analyse d'exercices :

- Analyse des exercices d'une double-page de manuel ;
- Présentation d'outils d'analyse des exercices ;
- Appropriation des outils d'analyse sur d'autres exercices ;
- Apports sur les caractéristiques des exercices proposés dans une série de manuels de CM2 ;
- Conception et mise en œuvre d'une séance d'exercices en sélectionnant et en modifiant des exercices issus de différentes ressources.

Ils ont aussi pointé certaines limites et questions encore ouvertes. Par exemple, le fait que l'appropriation de ces outils d'analyse demande aux enseignants du temps pour dépasser l'analyse en termes de

« difficultés ». Il faut aussi penser leur transposition auprès des enseignants pour en faire des outils utilisables. Les enseignants ne pourront, de toute façon, pas entrer dans des analyses comme celles menées dans l'atelier dans le quotidien de leur classe, mais ce type de formation peut toutefois permettre de les rendre plus vigilants sur le choix de leurs exercices.

Il est également important en formation de travailler la mise en œuvre des exercices : les consignes, les aides, les mises en commun… qui conditionnent aussi les effets sur les apprentissages des élèves.

Enfin, ce type d'analyse peut aussi être envisagé pour l'analyse d'exercices d'évaluations sommatives car les critères d'analyse (niveaux de connaissance en jeu et niveaux de mise en fonctionnement des connaissances) constituent à la fois un moyen de maîtriser et d'approfondir les connaissances mais aussi un critère pour évaluer leur maîtrise. Ils peuvent être complétés par des critères spécifiques à l'analyse de tâches d'évaluation (Sayac et Grapin, 2013, 2015).

VII - BIBLIOGRAPHIE

Abboud-Blanchard, M., Rogalski, J., Robert, A. et Vandebrouck, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, 18.* IREMS de Paris.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A., Tempier, F. et Charpentier, A. (2022). Résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. *Document de travail – série études, n°22.E05*, DEPP.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chesnais, A. (2021). Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève. Dans H. Chaachoua, A. essot et al. (coord.), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (vol. 1, 49-79). Grenoble : La pensée sauvage.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2006). Le travail personnel au collègue. Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x, 70*, 48-72.

Kiwan-Zacka, M. et Tempier, F. (2025). Interroger le choix des exercices dans les manuels : le cas de l'ordre des décimaux en CM2. *Actes du 50e colloque COPIRELEM*. Bonneuil-sur-Marne : ARPEME.

OECD. (2009). *Learning mathematics for life. A view perspective from PISA*. Paris : OECD.

Rey, B. (2001). Manuels scolaires et dispositifs didactiques. Dans Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy et J. Lebrun (éd.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites* (25-40). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139–190.

Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (coord.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (45-57). Toulouse : Octarès Editions.

Roditi, E. et Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation & formations*, *86-87* (11), 235–255.

Rogalski, J. (2008). Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentisages des élèves. Dans F. Vandebrouck (coord.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (429-456). Toulouse : Octarès Editions.

Sayac, N. et Grapin, N. (2013). Former à l'évaluation à partir d'un outil de chercheur : enjeux et perspectives. *Actes du XXXVIII Colloque Admee*. Fribourg.

Sayac, N. et Grapin, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé. *Recherches en didactique des mathématiques*, *35*(1), 101–126.

Tempier, F. et Kiwan-Zacka, M. (2025). Régularités et variabilités des caractéristiques des exercices de mathématiques proposés dans les manuels de fin d'école primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 30,* 159-187.

Watson, A. et Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 91-111.

Manuels scolaires

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P., et Madier, D. (2021). *Nouveau Cap Maths CM2*. Hatier.

Lucas, J.-C., Leclec'h-Lucas, J., Meunier, R., Meunier, L., et Trossevin, M.-P. (2019). *Le Nouvel À portée de maths CM2*. Hachette Education.

ANNEXE 1 : EXTRAIT DU MANUEL « À PORTÉE DE MATHS CM2 »

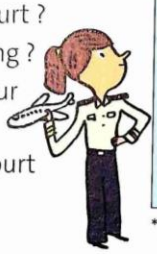
13 Les nombres décimaux : comparer et ranger

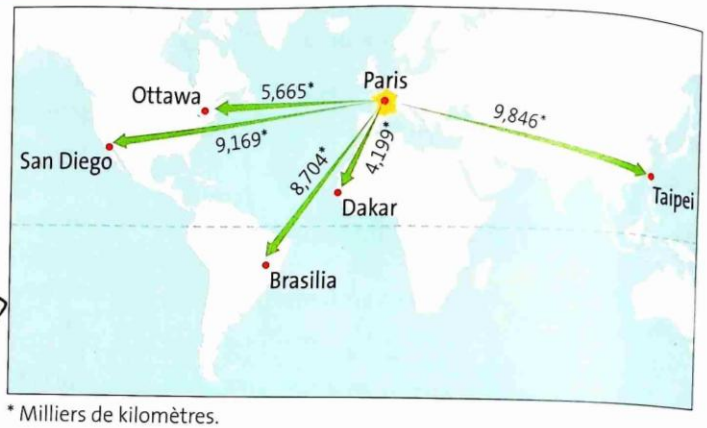
Compétences : Comparer et ranger des nombres décimaux.
Calcul mental : Comparer deux nombres décimaux, ex. 50 à 53 p. 146.

Cherchons ensemble

Cindy est pilote de ligne. Elle étudie ses prochains vols au départ de Paris.

a. Quel est le trajet le plus court ?
b. Quel est le trajet le plus long ?
c. Le trajet est-il plus long pour San Diego ou pour Taipei ?
d. Range les trajets du plus court au plus long.





* Milliers de kilomètres.

Je retiens

→ **Pour comparer** deux nombres décimaux :

• On compare les parties entières si elles sont différentes. *Exemple :* 32,48 et 16,9 **32** > **16** donc 32,48 > 16,9

• Si les parties entières sont égales, on compare les deux parties décimales en commençant par les dixièmes, puis les centièmes et enfin les millièmes...

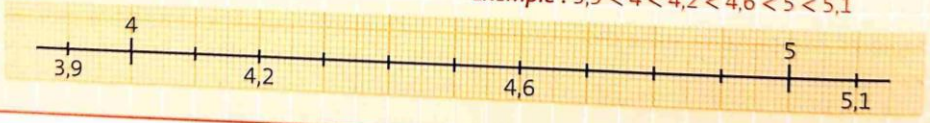
Exemples : 8,24 < 8,45 car **4** dixièmes > **2** dixièmes
8,24 < 8,27 car **7** centièmes > **4** centièmes
8,246 > 8,242 car **6** millièmes > **2** millièmes

→ **Pour comparer** plus facilement deux nombres décimaux, on peut ajouter des zéros pour obtenir le même nombre de chiffres après la virgule.

Exemple : 2,28 et 2,283 → 2,280 < 2,283

→ On peut aussi utiliser la droite graduée.

Exemple : 3,9 < 4 < 4,2 < 4,6 < 5 < 5,1



J'applique

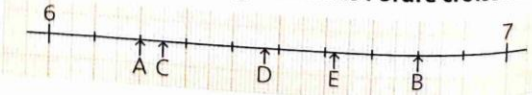
1 • Recopie et complète avec les signes <, > ou =.

a. 2,48 3,25
b. 24,1 10,935
c. 9,561 9,65
d. 12,23 12,230
e. 11,3 9,02
f. 3,92 3,48
g. 10,04 10,1
h. 24,002 24,02
i. 0,17 0,170
j. 1,613 1,631

2 • Recopie et complète par un chiffre pour que l'exercice soit juste.

a. 4,2 > 4,....
b. 1,....9 > 1,39
c. 12,5 < 1 ....,5
d. 2,573 < 2,57....

3 • Donne pour chaque lettre le nombre décimal correspondant et range-les dans l'ordre croissant.

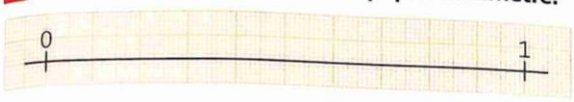


38

Je m'entraîne

Repérer et placer les nombres décimaux sur une droite graduée

4 * **a.** Reproduis cette droite sur papier millimétré.

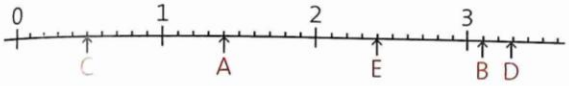


b. Place les nombres décimaux suivants.

• 0,5 • 0,93 • 0,87 • 0,7 • 0,25

5 * Donne le nombre décimal qui correspond à chacune de ces lettres.

Range ces valeurs dans l'ordre croissant.



Comparer et ranger des nombres décimaux

6 * Dans chaque suite de nombres, recopie le nombre le plus grand.

a. 8,2 – 6,4 – 3,1 – 4,7

b. 5,01 – 5,8 – 5,12 – 5,81

c. 9,71 – 9,9 – 9,909 – 9,91

d. 6,138 – 6,19 – 6,108 – 6,139

7 * Recopie les nombres suivants et entoure ceux qui sont plus grands que 4,5.

4,52 – 4,4 – 4,45 – 4,6 – 4,05 – 4,501 – 4,61 – 4,499 – 4,500

8 * Recopie et complète avec l'un de ces nombres.

2,41 2,46 2,482 2,453

a. 2,4 < .... < 2,45 < .... < 2,456

b. 2,453 < .... < 2,48 < .... < 2,5

9 * Range ces nombres dans l'ordre croissant.

a. 8,07 – 8,071 – 7,91 – 8,17 – 8,01 – 8,09 – 7,49

b. 1,702 – 1,71 – 1,77 – 1,7 – 0,795 – 0,78 – 1,007 – 1,707 – 0,675

10 * Range ces nombres dans l'ordre décroissant.

a. 15,789 – 15,708 – 15,7 – 15,41 – 16,91 – 16,7

b. 6 – 6,06 – 66,6 – 66,06 – 60,06 – 0,66 – 0,606 – 6,666

11 * Utilise les étiquettes pour écrire :

3 4 7 8 ,

a. un nombre décimal compris entre 743 et 744.

b. un nombre décimal compris entre 438 et 439.

c. quatre nombres décimaux compris entre 4 et 5.

PROBLÈMES

12 * Lucas veut offrir un cadeau à ses parents et à ses grands-parents. Il ne peut pas dépenser plus de 10,50 € pour chacun.

Que pourra-t-il offrir ?



13 * Observe ce tableau.

Mont Everest	8,848 km
Mont Elbrouz	5,642 km
Kilimandjaro	5,892 km
Mont Blanc	4,809 km
Mont Aconcagua	6,962 km
Mont Vinson	4,892 km

a. Quel est le sommet le plus haut ?

b. Quel est le sommet le moins haut ?

c. Range ces sommets du plus haut au plus petit.

14 ** La famille Dulac doit refaire sa cuisine. Elle doit obligatoirement placer, sur une longueur de mur de 2,91 m :

– un meuble sous-évier de 0,80 m ;

– un autre meuble de 0,60 m.

Quelles sont les différentes possibilités pour compléter la cuisine avec des meubles de 0,30 ; 0,40 ou 0,50 m de large ?





À toi de jouer

La valse des zéros

Fais disparaître un zéro dans le nombre 20 061,060 :

– pour obtenir un nombre plus grand ;

– pour obtenir un nombre plus petit.

ANNEXE 2 : EXTRAIT DU MANUEL « CAP MATHS CM2 »

Cap Maths CM2 (Hatier) 2021

UNITÉ 5

Comparer et ranger des nombres décimaux

Je cherche Ranger des surfaces

À l'aide du matériel « surfaces », Dino, Aya, Tom, Romy et Milo ont réalisé chacun une surface.

Voici l'aire de leurs surfaces exprimées avec l'unité u :

	Dino	Aya	Tom	Romy	Milo
Aire en unité u	2,703	2,6	21,65	2,07	2,12



A Sans les construire, range ces 5 surfaces de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire. Explique la méthode que tu as utilisée.

B Écris une méthode qui permet de comparer deux nombres décimaux.

Je m'entraine

COMPARER, RANGER DES NOMBRES DÉCIMAUX

1 Complète avec <, > ou =.

a. 9,8 … 9,15
b. 14,068 … 2,8
c. 19,63 … 20,01
d. 6,450 … 6,45
e. 6,405 … 6,45
f. 6,045 … 6,45

2 Complète avec <, > ou =.

a. $3,4 \ldots \frac{272}{100}$
b. $2,705 \ldots 2 + \frac{8}{10}$
c. $14,7 \ldots 14 + \frac{700}{1\,000}$
d. $\frac{82}{100} \ldots 8,02$
e. $145,7 \ldots 25 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100}$
f. $25 + \frac{68}{100} \ldots 25,673$

3 Range ces nombres dans l'ordre croissant.

1,2 1,02 0,12 0,012 $\frac{1\,002}{1\,000}$

4 Écris, avec une virgule, trois nombres de 2 chiffres.
Ils doivent être inférieurs à 0,201.

5 Écris, avec une virgule, trois nombres de 4 chiffres.
Ils doivent être inférieurs à $\frac{18}{100}$.

COMPARER, RANGER DES MESURES DÉCIMALES

6 Avec le matériel « surfaces », Milo a construit six surfaces.
Voici leurs aires exprimées avec l'unité u.

	A	B	C	D	E	F
Aire (en unité u)	53	2,3	10,01	0,5	0,24	2,306

Sans les construire, range ces surfaces par ordre croissant d'aire.

82 • quatre-vingt-deux

7 Avec une règle graduée en centièmes d'unité, Aya construit un segmert de longueur 2,15 u.
Tom en a construit un de longueur $\frac{27}{10}$ u et Romy un de longueur 2 u + $\frac{7}{100}$ u.
Le segment d'Aya est-il plus long ou plus court que :
a. le segment de Tom ? **b.** le segment de Romy ?

8 Donne le classement de cette épreuve de 100 m féminin.

Concurrentes	Lina	Gloria	Murielle	Myriam	Allison	Tiana
Temps	11 s	10,94 s	11 s et 1 centième	11,1 s	10,87 s	10 s et 9 dixièmes

9 Range ces pièces de monnaie de la plus légère à la plus lourde.



7,5 g 6,27 g 6,1 g 6,5 g 6,05 g

10 Cette semaine Romy a fait 12,75 km à vélo, Milo en en fait 12,607 km, Aya 12 km et 8 dam.
a. Qui a parcouru le plus de km ? **b.** Qui en a parcouru le moins ?

11 Lors des voyages en avion, les liquides, crèmes et pâtes sont autorisés en cabine dans des contenants de 1 dL maximum chacun.
Parmi ces objets quels sont ceux qui peuvent être emportés en cabine ?

Dentifrice	Huile à bronzer	Bouteille d'eau	Parfum	Bain moussant	Crème pour la peau
7,5 cL	110 mL	0,25 L	3 cL	500 mL	0,05 L

COMPLÉTER DES INÉGALITÉS

12 Complète ces trois inégalités avec le même chiffre. Il y a plusieurs possibilités. Trouve-les toutes.
2,45 < 2,4• 4,0•• < 4,081
4,• < 4,902

13 Trouve toutes les façons possibles de compléter l'inégalité.
7,205 < 7,2•• < 7,21

14 Complète ces inégalités.
Trouve toutes les réponses possibles.
a. 90,• < 90,12 **d.** 56,089 > 56,•
b. •,9 < 1,87 **e.** 37,876 < 37,•
c. 0,• < 0,21 **f.** 0,105 > 0,•1

15 Complète pour que ces nombres soient rangés par ordre croissant.
2,3• < •,312 < 2,• < 2,4•1 < 2,•1 < 2,458

Énigme

Nombre A : J'ai 9 unités.
Je suis écrit avec 2 chiffres après la virgule, le chiffre 8 et le chiffre 5.
Nombre B : Je suis écrit avec 2 chiffres et une virgule. Je suis le plus grand possible.
Nombre C : Je contiens 95 dixièmes.
Mes 3 chiffres après la virgule sont les mêmes.
a. Quel est le plus petit de nous trois ?
b. Et quel est le plus grand ?

hatier-clic.fr/21CM2cap27

DES SITUATIONS LANGAGIÈRES AU SERVICE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES BASIQUES

Laetitia DICHARRY
PEMF, EPPU Romain Rolland, Lormont
Laetitia.Dicharry1@ac-bordeaux.fr

Cynthia LAROCHE
PRPE, INSPE de l'académie de Bordeaux
Cynthia.Laroche@u-bordeaux.fr

Carine REYDY
MFC, INSPE de l'académie de Bordeaux
Laboratoire LaB-E3D
Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

Patrick URRUTY
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Patrick.Urruty@u-bordeaux.fr

Résumé
Dans le modèle en quatre phases inspiré de Verschafell et al. (2000) et repris dans les nouveaux programmes pour le cycle 2 (M.E.N[1]., 2024), lorsqu'un élève résout un problème, il passe de l'énoncé du problème à l'écriture du calcul à effectuer, à l'éventuelle transformation de cette écriture et à la formulation d'une phrase réponse. Dans ce processus, des compétences langagières sont nécessaires pour comprendre et exprimer des relations entre les grandeurs « dans le monde réel » et les associer à des relations entre les nombres « dans le monde des mathématiques ». Dans cet atelier, nous présentons et étudions les potentialités de différentes situations de langage destinées à développer ces compétences dans un contexte où les élèves sont habitués à produire des écritures pré-algébriques pour modéliser les problèmes basiques (Reydy, 2024). Nous resituons ces propositions dans les nouveaux programmes pour le cycle 3 qui visent notamment à « *initier les élèves à la « pensée algébrique » et en particulier [à] développer leur capacité à résoudre des problèmes en raisonnant sur des nombres sans connaitre leur valeur* » (M.E.N., 2025).

Dans cet atelier, nous nous intéressons à la résolution de problèmes arithmétiques verbaux avec des élèves de CM1 et CM2. L'objectif est de faire réfléchir les participants sur les potentialités de différentes situations de langage destinées à favoriser la réussite des élèves en situation de résolution de problèmes. Pour cela, nous prenons appui sur une séquence conduite dans le contexte particulier de mise en œuvre d'un dispositif mathématique, le dispositif « Faits reliés », créé dans le cadre d'un projet de recherche-action réunissant un collectif d'enseignants et de chercheurs.

L'atelier s'est déroulé en trois temps : le premier était consacré à la description du contexte de l'étude et des fondements théoriques qui la soutiennent. Le deuxième était dédié à une mise en activité des participants. Enfin dans le troisième temps, nous avons présenté sept exemples de tâches langagières expérimentées par des enseignants de notre collectif et nous avons analysé leurs potentialités pour aider

[1] Ministère de l'Éducation Nationale

les élèves à résoudre des problèmes arithmétiques. Le compte-rendu ci-après reprend les différentes étapes mises en œuvre lors de la conduite de l'atelier.

I - CONTEXTE ET APPUIS THÉORIQUES

Nous décrivons dans cette partie les appuis théoriques qui ont été proposés aux participants de l'atelier avant de les mettre en situation de recherche par groupes.

1 Le processus de résolution de problèmes

Pour représenter les processus cognitifs en jeu dans l'activité de résolution de problèmes mathématiques, Verschaffel et al. (2000) utilisent le modèle représenté sur le schéma suivant (figure 1).

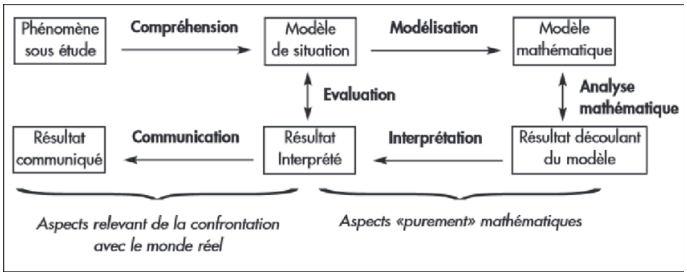


Figure 1. Représentation schématique du processus de résolution de problèmes selon Verschaffel et al. (2000)

Ce modèle sert de cadre à notre projet « Faits reliés ». Pour échanger avec les membres de notre collectif sur l'activité développée et les difficultés rencontrées par les élèves en situation de résolution de problèmes, nous utilisons une version simplifiée de cette représentation (figure 2) qui nous permet d'illustrer le fait que l'élève mobilise tour à tour des représentations du monde réel (l'énoncé dans son contexte, des reformulations de cet énoncé, la phrase réponse, etc.) et du monde mathématique (écritures mathématiques, schémas, etc.) pour parvenir à la réponse.

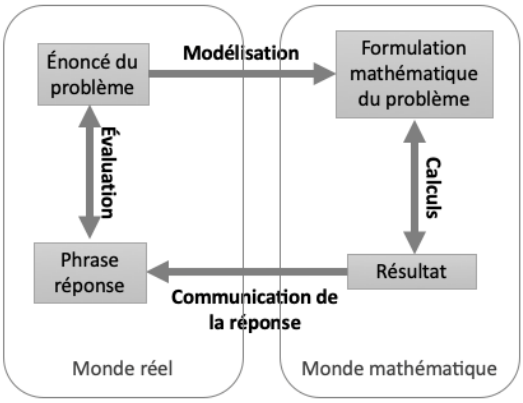


Figure 2. Version adaptée utilisée dans notre projet

Cette représentation est proche de celle proposée par l'OCDE[2], citée notamment par Barquero lors d'un précédent colloque de la COPIRELEM (2022, p. 17). L'aspect chronologique qui y est suggéré ne correspond pas toujours à l'activité réelle de l'élève qui est souvent constituée de va-et-vient entre le contexte évoqué dans l'énoncé et les représentations mathématiques produites. Il est à noter qu'une autre version simplifiée de la représentation adoptée par Verschaffel et al. (2000) est proposée dans les programmes pour l'école primaire du cycle 2 et du cycle 3 applicables à la rentrée 2025 (M.E.N., 2024; M.E.N., 2025).

[2] Organisation de Coopération et de Développement Économiques

2 Le dispositif « Faits reliés »

2.1 Histoire du dispositif

À l'origine du dispositif, un collectif de chercheurs-formateurs et d'enseignants d'une école primaire de REP s'est constitué autour d'un but commun : il s'agissait de créer des ressources en mathématiques pour des élèves de CP à CM2 (classes de l'élémentaire) afin de répondre à des besoins exprimés par les enseignants du collectif. Les chercheurs-formateurs ont proposé quelques apports de la littérature scientifique et de premières pistes à expérimenter ont pu être élaborées. S'en sont suivis des mises en œuvre en classe, des captations vidéo et des entretiens *a posteriori* entre l'enseignant ayant mené la séance et les chercheurs-formateurs, puis des débats lors de réunions du collectif qui ont conduit à des modifications et des ajouts, et ainsi de suite. Cette démarche a permis de construire et d'améliorer collaborativement le dispositif jusqu'à sa version actuelle qui est elle-même toujours en évolution.

Ainsi, le dispositif « Faits reliés » qui a été conçu dans le cadre d'une recherche-action, c'est-à-dire d'un « processus destiné à doter tous les participants de la scène éducative [...] des moyens d'améliorer leur pratique grâce à leurs expériences éclairées et nourries des savoirs théoriques en cours » (Catroux, 2002, p. 8), présente les caractéristiques d'une ingénierie collaborative (Sensevy, 2021, p. 166) : des enseignants et des chercheurs coopèrent pour produire une œuvre commune – le dispositif –, ils en déterminent ensemble les fins et les moyens, il y a égalité des intelligences entre professeurs et chercheurs et les différences de compétences entre les acteurs constituent le moteur de l'invention collective. Le dispositif est « tributaire des situations, il peut être révisé et amélioré à chaque itération [...]. L'ensemble du système de recherche progresse donc par raffinements successifs » (Collectif Didactique pour enseigner, 2024, p. 86).

Tout d'abord réuni autour d'un projet INSPE-CARDIE de l'académie de Bordeaux de 2019 à 2022, notre collectif s'est constitué en groupe IREM[3] depuisu 2023.

2.2 Contenus

Le dispositif « Faits reliés » est adressé aux élèves du CP au CM2. Il est principalement composé d'une progression spécifique sur le calcul et la résolution de problèmes et d'une articulation entre ces deux progressions (Reydy, 2024). Dans le domaine du calcul, des tâches d'entrainement ont pour objectif de permettre aux élèves de mémoriser les tables d'addition et les tables de multiplication et de développer des habiletés de calcul afin de retrouver rapidement des calculs équivalents. En parallèle, les élèves résolvent des problèmes basiques (Houdement, 2017) du champ additif et du champ multiplicatif tirés d'une liste communiquée aux enseignants du collectif en mobilisant les faits numériques et les habiletés de calcul déjà travaillés. La progression qui a permis de constituer cette liste a été pensée en appui sur la typologie de Vergnaud (1986).

Pour mener les tâches qui leur sont proposées dans le domaine du calcul et dans celui de la résolution de problèmes, les élèves utilisent des représentations particulières : les « boites » dans le champ additif ou les « rectangles » dans le champ multiplicatif qui leur permettent de retrouver plus facilement les quatre faits reliés de l'addition ou de la multiplication comme on peut le voir sur la figure 3 (cf. (Foulquier et al., 2022) pour une description détaillée et une étude des usages de ces représentations).

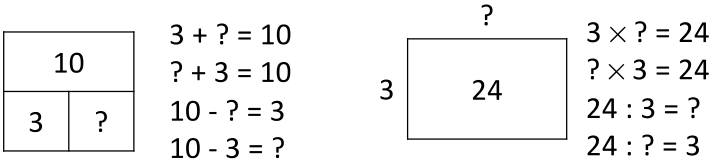


Figure 3. Boite, rectangle et faits reliés associés.

[3] Groupe « Faits reliés » de l'IREM de Bordeaux : https://math-interactions.u-bordeaux.fr/irem/groupes/faits-relies

L'une des spécificités de notre démarche est qu'une méthodologie est explicitement enseignée aux élèves pour résoudre les problèmes du corpus « Faits reliés » : après avoir découvert l'énoncé du problème à l'écrit ou à l'oral, l'élève produit une écriture mathématique qui exprime une relation entre trois nombres (les deux données numériques de l'énoncé et le nombre inconnu désigné par un « ? »), puis il utilise si nécessaire la boite ou le rectangle pour transformer l'écriture en une autre écriture mathématiquement équivalente qui fournit plus facilement le résultat. Enfin, il communique la réponse avec une phrase-réponse. Par exemple, pour le problème « *Thomas a 54 ans. Il a 18 ans de plus que Zoé. Quel âge a Zoé ?* », l'élève peut produire l'écriture « 54 = ? + 18 » qui traduit assez fidèlement le problème, puis la transformer en « 54 – 18 = ? » en s'aidant de la boite, afin d'aboutir à la réponse « *Zoé a 36 ans* ». Ainsi, la boite est un outil transitoire qui facilite si nécessaire la réalisation des calculs. Nous faisons en outre l'hypothèse que le développement des habiletés de calcul travaillées dans notre dispositif améliore les compétences des élèves en résolution de problèmes basiques. Cette hypothèse a été vérifiée avec une cohorte d'élèves de CP-CE1 dans (Reydy, 2024).

Notons que notre démarche va dans le sens des nouveaux programmes de mathématiques pour le cycle 3, en particulier pour ce qui concerne la rubrique « Algèbre » dans laquelle il est précisé qu'à partir du cycle 3, « l'introduction de la pensée algébrique marque un changement de paradigme : il s'agit de raisonner sur des nombres inconnus, qui seront représentés au cycle 4 par des lettres » (M.E.N., 2025, p. 16).

3 Résolution de problèmes et activité langagière

Dans cet atelier, nous nous intéressons donc à la résolution de problèmes basiques dans le contexte spécifique de mise en œuvre par des enseignants du dispositif « Faits reliés » avec leurs élèves. Dans ce cadre, nous faisons la distinction au sens de Rebière (2013) entre « la langue, qui constitue le matériau, réservoir et code, intériorisée par chacun mais partagée dans une communauté, et le langage comme étant la mise en activité, par un sujet singulier et en contexte, de la langue » (Chesnais et Coulange, 2022, p. 86). C'est bien à l'activité langagière des élèves ou de l'enseignant que nous nous intéressons lorsqu'ils sont en situation de résolution de problèmes basiques. Duval note que comme « les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception » (Duval, 1993, p. 38), on s'en donne des représentations qu'il classe dans différents registres sémiotiques. Il peut s'agir de « productions discursives (en langue naturelle, en langue formelle), ou non discursives (figures, graphiques, schémas...) » (Duval, 1996, p. 356).

Dans des études portant sur des élèves plurilingues, Mendonca-Dias et Millon-Fauré (2023) s'inspirent des travaux de Duval (1993, 1996) et de Prediger, Clarkson et Bose (2016) pour distinguer cinq registres pouvant être mobilisés pour exprimer ou communiquer des informations en mathématiques : le registre matériel, le registre graphique, le registre symbolique numérique, le registre symbolique algébrique et le registre verbal. Puisque le registre verbal s 'appuie en partie sur les autres registres, sa mobilisation conduit à des pratiques langagières mettant en jeu différents niveaux de langue. Pour un élève dont la langue de scolarisation est la langue seconde, elles notent que cette complexité est redoublée du fait des va-et-vient nécessaires entre les deux langues de son répertoire linguistique. Elles aboutissent au schéma suivant qui illustre le fait que plusieurs niveaux de discours peuvent être mobilisés : « *le langage courant, le langage mathématique abstrait et décontextualisé et entre les deux, le langage scolaire qui tout en gardant un lien avec le contexte de départ, s'avère conforme aux attentes de l'enseignant.* » (Mendonça-Dias et Millon-Fauré, 2023, p. 76).

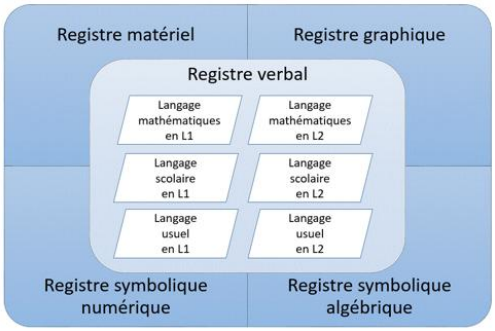


Figure 4. Registres sémiotiques de l'activité mathématique, Mendonça-Dias et Millon-Fauré (2023, p. 76).

Lors de la résolution d'un problème basique comme « *Tom a 12 billes. Il a 4 billes de plus que Lina. Combien Lina a-t-elle de billes ?* », un élève peut être conduit à produire des formulations pour parler sur des représentations de différents registres. Par exemple, il peut dire ou se dire « *Les jetons qui dépassent, c'est ce que Tom a de plus que Lina* » s'il prend appui sur des jetons pour se représenter la situation, ou bien « *On cherche la différence entre 4 et 12* » s'il a produit l'écriture « 12 - 4 », ou encore « *Douze égale combien plus quatre* » s'il a produit l'écriture « 12 = ? + 4 » ou enfin « *Le 12 est en haut dans la boîte car c'est le plus grand des trois nombres* » s'il a utilisé la représentation en boîte. Ainsi, en prenant appui sur les travaux de Duval (1993, 1996), de Prediger et al. (2016) et de Mendonça-Dias et Millon-Fauré (2023), nous proposons de représenter de la manière suivante l'activité langagière des élèves et de l'enseignant en situation de résolution de problèmes.

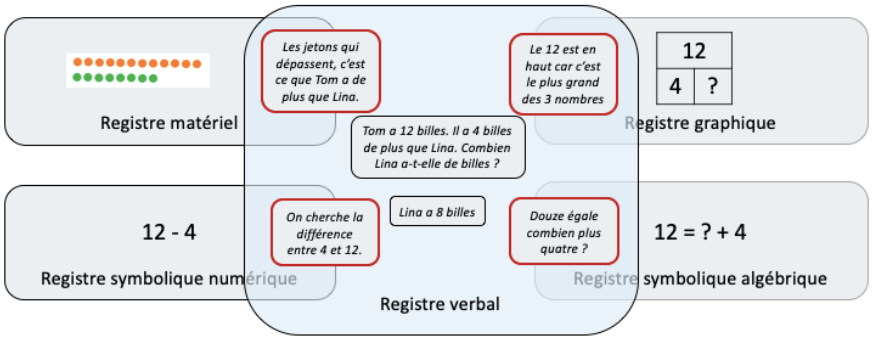


Figure 5. Exemple d'activité langagière possible en situation de résolution de problèmes.

Ce schéma illustre la spécificité du registre verbal dans la résolution de problèmes basiques : le langage peut servir à parler du monde réel mais également à parler des objets présents dans les différents registres sémiotiques ainsi que de leurs relations. En ce sens, il s'agit alors d'un méta-langage : *« Ainsi, le registre [verbal] peut tantôt être considéré comme un registre 'de départ' ou 'd'arrivée', tantôt comme un registre 'accompagnant', jouant alors à plein sa fonction (méta-) discursive dans l'activité (cognitive) mathématique* » (Chesnais et Coulange, 2022, p. 92). Dans l'atelier, nous qualifions de « naturel » le langage utilisé pour parler du monde réel (des situations, des contextes, des grandeurs, etc.) et de « mathématique » le langage qui prend appui sur les autres registres sémiotiques (pour parler des nombres connus, inconnus, de leurs relations, etc.), ce qui permet de réorganiser le schéma de la figure sous la forme suivante.

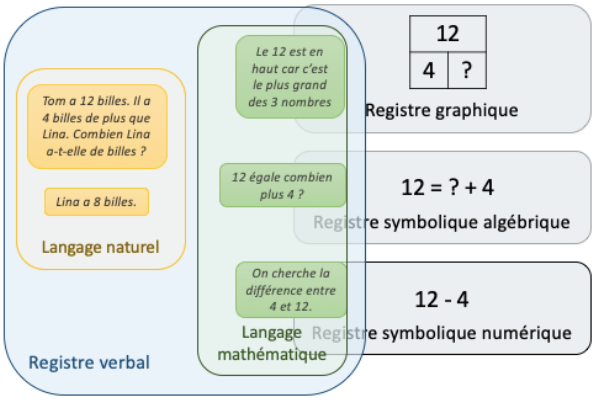


Figure 6. Langage naturel et langage mathématique utilisés pour parler sur les différents registres.

Nous appelons tâche langagière une tâche qui met les élèves en situation d'activité langagière, c'est-à-dire de compréhension ou de production de langage oral ou écrit.

4 Problématique de notre recherche

Dans les situations de classe proposées dans cet atelier, des problèmes basiques (Houdement, 2017) choisis en appui sur la typologie de Vergnaud (1986) sont proposés à des élèves de CM1 ou de CM2. Puisque leurs enseignantes font partie du collectif et utilisent le dispositif « Faits reliés » dans leur classe, les élèves concernés par cette étude sont familiarisés avec trois registres de représentation différents pour exprimer un « calcul » au sens d'une relation entre trois nombres : le registre symbolique numérique (écritures arithmétiques), le registre symbolique algébrique (écritures algébriques, c'est-à-dire écritures avec deux nombres connus et un nombre inconnu représenté par un « ? ») et le registre graphique (représentation de type boîtes et rectangles présentées dans le paragraphe 2.2).

Nous avons vu que l'activité de résolution de problèmes met en jeu des compétences langagières nécessaires pour comprendre et exprimer des relations entre grandeurs dans le monde réel et les associer à des relations entre les nombres dans le monde des mathématiques. Nous cherchons ici à identifier et analyser des tâches langagières susceptibles de faire gagner en autonomie les élèves de cycle 3 dans la résolution de certains types de problèmes basiques.

II - MISE EN ACTIVITÉ DES PARTICIPANTS

Deux temps de travail successifs ont été proposés aux participants de l'atelier.

1 Analyse d'une liste de problèmes

Une liste de problèmes (consultable en annexe) destinée à des élèves de cycle 3 leur a tout d'abord été soumise avec la consigne suivante : « Quels points communs et quelles différences observez-vous entre ces 16 problèmes ? Selon vous, quels choix ont guidé la constitution de cette liste *?* ». Notre objectif était que les participants identifient les variables sur lesquelles nous avions joué pour élaborer cette liste.

Après 10 minutes de recherche, les participants ont fait émerger l'ensemble des critères attendus :

- ils ont noté que les 16 problèmes de la liste portaient sur des grandeurs continues et leur mesure ;
- ils ont repéré que les mêmes données numériques (3, 60 et 180) revenaient dans plusieurs problèmes ;
- ils ont perçu que tous les problèmes de la liste étaient soit des problèmes de comparaison additive, soit des problèmes de comparaison multiplicative, soit des problèmes comportant des termes liés aux fractions comme « demi », « tiers », « quart », etc. ;
- des participants ont constaté que dans les problèmes de comparaison, l'écart n'était jamais la donnée recherchée et ont relevé que certains termes étaient écrits en toutes lettres (« quart ») alors que d'autres étaient écrits en chiffres (« 4 ») ;

- enfin, deux difficultés langagières ont été identifiées : d'une part en fonction de la donnée recherchée, l'expression « *n* fois moins » pouvait conduire soit à une division (problème 1) soit à une multiplication (problème 13). D'autre part l'utilisation de certains termes comme par exemple « courte » dans le problème 9 entrainait l'opération inverse de celle suggérée par l'expression « 2 fois plus » alors que l'expression « 2 fois moins longue » correspondait bien à une division.

2 Élaboration de tâches langagières

Après avoir fait le point avec les participants sur les difficultés langagières inhérentes à ces types de problèmes, nous avons expliqué aux participants que nous avions construit et expérimenté une séquence d'enseignement dans une perspective d'accessibilisation des apprentissages (rendre les élèves de CM1 et CM2 de notre étude capables de résoudre ces 16 problèmes). Avant de leur présenter la séquence, nous leur avons proposé de réfléchir en amont à « des exemples de tâches engageant une activité langagière qui pourraient permettre de préparer les élèves à résoudre de manière autonome les problèmes de cette liste ».

Les participants ont cherché pendant 10 minutes en groupes, puis les propositions suivantes ont été recensées :

1. travailler sur la reformulation des énoncés pour identifier plus facilement l'opération en jeu ;
2. apprendre comment représenter graphiquement un énoncé de problème (produire un schéma) ;
3. demander aux élèves de produire un énoncé à partir de contraintes : par exemple, deux nombres, une formulation de type « fois plus » ou « de plus » et un contexte sont donnés et les élèves doivent inventer un énoncé de problème ;
4. à partir d'un texte descriptif contenant une formulation de comparaison (Léa a 3 fois plus de jetons que Tom), demander aux élèves de répartir des jetons de manière à ce que cela corresponde à la situation décrite dans le texte ; inversement à partir d'une répartition de jetons, produire une formulation correspondante. Faire correspondre formulations et simulations matérielles ;
5. conduire un travail sur les ordres de grandeur : une situation étant décrite, se demander qui est le plus grand, qui est le plus petit (ou bien qui a le plus, qui a le moins) ;
6. disposer d'une représentation (un schéma) et retrouver tous les énoncés qui lui sont associés en explicitant les choix effectués.

La démarche sous-jacente dans la proposition 1 s'inscrit dans les travaux de (Sander, 2018) relatifs au recodage sémantique. Elle diffère de celle proposée dans le dispositif « Faits reliés » qui correspondrait davantage à du « recodage mathématique » (Reydy, 2024).

Si la proposition 2 est pertinente pour accompagner les élèves dans la compréhension des énoncés de problèmes de comparaison, elle ne constitue toutefois pas une tâche langagière au sens où nous l'avons défini dans l'atelier.

Les propositions 3 à 6 sont proches de tâches langagières classiques mises en œuvre par des enseignants de notre collectif. Après les avoir explicitées assez brièvement, nous avons fait le choix de développer davantage la présentation de trois tâches qui n'avaient justement pas été anticipées par les participants. Pour ce faire, nous avons pris appui sur des productions d'élèves et des extraits vidéos tournés en classe.

III - D'AUTRES TÂCHES LANGAGIÈRES POSSIBLES

Comme indiqué précédemment, nous présentons ci-dessous les trois tâches qui ont été plus spécifiquement développées au cours de l'atelier.

1 Premier exemple : identifier le champ du problème

La première tâche langagière que nous présentons est celle que nous avons nommée avec les élèves « *Identifier le champ du problème* ». Il s'agit de prendre appui sur des mots ou expressions présents dans le texte de l'énoncé pour déterminer s'il s'agit d'un problème du champ additif ou du champ multiplicatif.

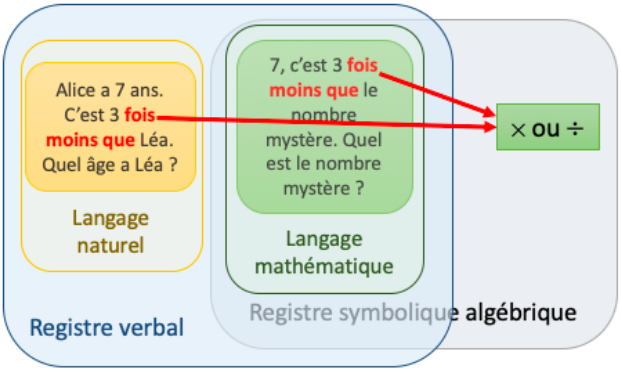


Figure 7. Identifier le champ du problème.

Les enseignants qui utilisent le dispositif « Faits reliés » ont pour habitude d'employer l'expression « *problème du champ additif* » (resp. « *problème du champ multiplicatif* ») avec leurs élèves pour ancrer en eux le fait qu'addition et soustraction sont des opérations liées : ainsi lorsqu'on est face à un problème du champ additif (resp. multiplicatif), on peut le modéliser soit avec une addition, soit avec une addition à trou, soit avec une soustraction, soit avec une soustraction à trou (resp. soit avec une multiplication, soit avec une multiplication à trou, soit avec une division, soit avec une division à trou). Toutes les écritures correctes qui peuvent être produite sont des écritures « reliées » que les élèves sont entrainés à retrouver grâce aux outils mis à leur disposition dans le dispositif (cf. paragraphe 2.2). En particulier, ils sont accoutumés au fait que l'on peut par exemple modéliser un problème à l'aide d'une soustraction à trou et qu'*in fine*, c'est une addition qui fournira le résultat à droite du signe « = ».

Dans la liste des problèmes exploités dans notre séquence (cf. annexe), nous avons travaillé le fait que les mots et expressions présents dans l'énoncé sont significatifs. En effet, les expressions « *de plus que* », « *de moins que* » et « *écart* » renvoient au champ additif alors que les expressions « *fois plus que* » et « *fois moins que* » renvoient au champ multiplicatif. De même, la présence de termes tels que « *demi* », « *tiers* », « *quart* », etc. renvoient aisément au champ multiplicatif. Les enseignants qui ont expérimenté la séquence précisent bien aux élèves qu'il n'en est pas de même pour tous les types de problèmes. De manière générale, ils savent qu'il faut « réfléchir sur le sens du problème » et se demander s'il y a « plusieurs paquets pareils » pour décider s'il s'agit ou non d'un problème du champ multiplicatif.

Dans la séquence que nous avons expérimentée, plusieurs mises en œuvre ont été proposées pour faire identifier aux élèves le champ du problème. Dans notre collectif, l'affiche de la figure 8 a été produite avec des élèves de CM1-CM2 de REP+ à la suite d'une activité de tri de problèmes (ceux du champ additif *vs* ceux du champ multiplicatif) suivie de leur résolution qui a permis de repérer le fait que l'on retrouvait systématiquement certaines expressions pour le champ additif et d'autres pour le champ multiplicatif.

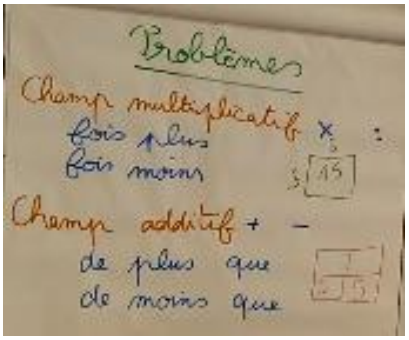


Figure 8. Exemple de mise en œuvre avec des élèves de CM1-CM2 de REP+.

2 Deuxième exemple : exprimer une relation entre deux quantités d'une même grandeur

Une deuxième tâche langagière consiste à proposer deux nombres entiers représentant deux quantités « contextualisées » d'une même grandeur comme l'illustrent les exemples de la figure 9. L'élève doit alors produire (à l'oral ou à l'écrit) une phrase en langage naturel reprenant le contexte évoqué et dans laquelle les deux quantités sont comparées ainsi qu'une phrase mathématique en langage mathématique mettant en relation ces quantités. Par exemple, si « Anne, 54 ans » et « Jules, 9 ans » sont proposés, l'élève peut produire « Anne est 6 fois plus âgée que Jules » et « 54, c'est 6 fois plus que 9 » ou encore « Jules a 45 ans de moins qu'Anne » et « 54 moins 45 font 9 », etc. L'objectif poursuivi avec cette tâche est que les élèves maitrisent la production et la compréhension de formulations en langage naturel mettant en jeu des comparaisons et sachent les associer à des formulations en langage mathématique.

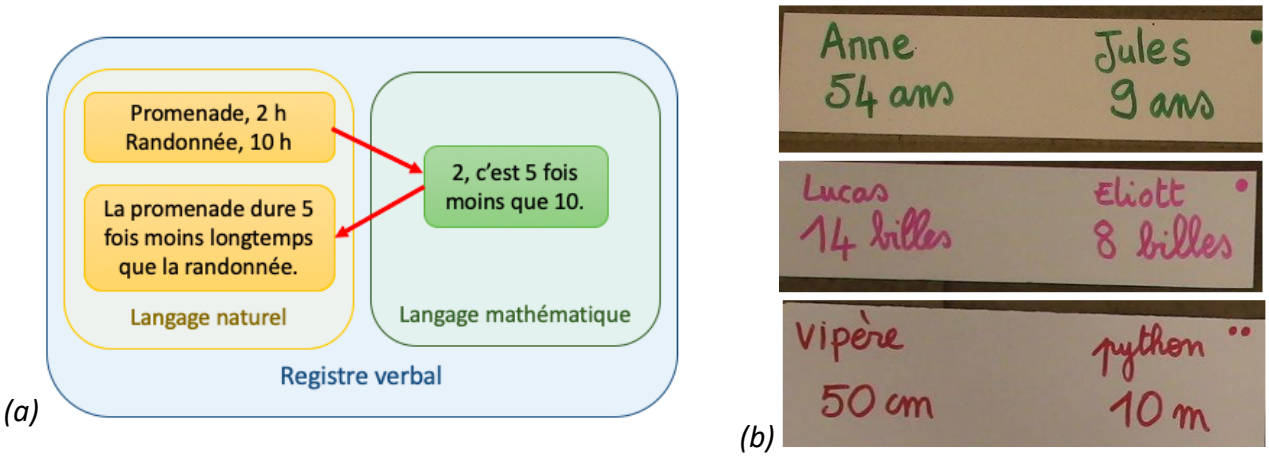


Figure 9. Exprimer une relation entre deux quantités d'une même grandeur.

Lors de la présentation de cette tâche aux participants, ils ont pu noter en visionnant un extrait vidéo réalisé dans une classe de CM1-CM2 que les élèves semblaient procéder de la manière suivante : ils considèrent les deux quantités proposées en langage naturel (par exemple, « Anne, 54 ans » et « Jules, 9 ans »), ils isolent les deux nombres entiers présents (54 et 9), ils déterminent une relation mathématique entre ces deux nombres (par exemple, 54 = 9 + 45) puis formulent cette relation en langage mathématique (« 54, c'est 45 de plus que 9 ») et de cette formulation, ils déduisent une formulation en langage naturel dans le contexte évoqué initialement (« Anne a 45 ans de plus que Jules »). Si les élèves ne le font pas eux-mêmes, l'enseignant verbalise systématiquement en langage mathématique la relation mathématique entre les deux nombres.

Comme le montrent les trois exemples de la figure 9b, il est possible de jouer sur plusieurs variables didactiques pour faire varier la difficulté : les nombres proposés peuvent être tels qu'il existe une relation multiplicative et une relation additive n'impliquant que des nombres entiers (c'est le cas pour 54 et 9) ou pas (le coefficient permettant de lier multiplicativement 14 à 8 n'est pas entier). La même unité (54 ans et 9 ans, 14 billes et 8 billes) ou deux unités différentes (50 cm et 10 m) peuvent être attribuées aux deux nombres. Selon la grandeur choisie, il existe des qualificatifs variés pour comparer les quantités en jeu (« long »/« court », « vieux »/« jeune », « lourd »/« léger », etc.), ce qui complexifie les formulations à produire (« 6 fois moins vieux » ou « 6 fois plus jeune » traduit la même situation).

3 Troisième exemple : le nombre mystère et le nombre mystère inversé

L'une des caractéristiques des énoncés retenus dans notre expérimentation (cf. annexe) réside dans le fait que les locutions en langage naturel utilisées dans les énoncés de problèmes pour comparer deux quantités d'une même grandeur (« *de plus que* », « *fois plus que* », « *prendre le quart de* », etc.) permettent aussi d'exprimer une relation entre des nombres en langage mathématique (« *7, c'est 3 fois moins que 21* », « *7, c'est le tiers de 21* », etc.). Partant de ce constat, nous avons élaboré deux tâches

langagières complémentaires qui ont pu être illustrées par des productions d'élèves et des extraits vidéos lors de l'atelier : il s'agit du « nombre mystère » et du « nombre mystère inversé ».

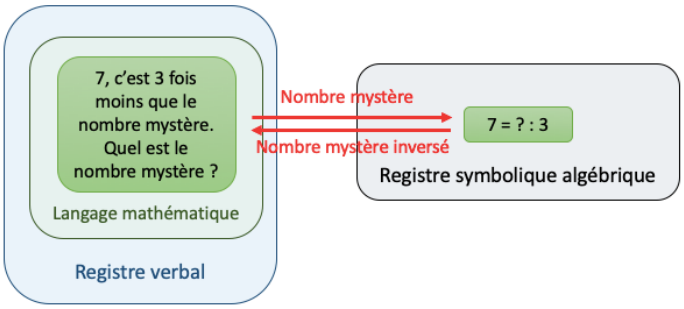


Figure 10. Nombre mystère et nombre mystère inversé.

3.1 Le nombre mystère

L'enseignant lit une devinette en langage mathématique qui exprime une relation entre deux nombres connus et le « nombre mystère ». Dans un premier temps, sur leur ardoise, les élèves doivent traduire cette relation par une écriture mathématique (une écriture pré-algébrique utilisant ces deux nombres et le symbole « ? » pour désigner le nombre mystère). Dans un second temps, ils doivent déterminer la valeur du nombre mystère.

Par exemple, à partir de la devinette « 60, c'est 3 de moins que le nombre mystère. Quel est le nombre mystère ? », on attend des élèves qu'ils produisent l'écriture « 60 = ? – 3 » puis qu'ils en déduisent que le nombre mystère vaut 63. La photo de la figure 11 illustre une erreur classique lorsque les élèves commencent à pratiquer cette activité : on constate en effet que l'élève a produit l'écriture « 60 = 3 - ? » qui correspondrait à la formulation « 60, c'est 3 moins le nombre mystère. Quel est le nombre mystère ? ». Lors de la mise en commun, l'enseignante attire l'attention des élèves sur le fait que si les deux énoncés ne diffèrent que par les mots « de » et « que », cette nuance est fondamentale car les nombres mystères qui en découlent ne sont pas les mêmes.

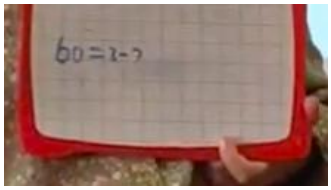


Figure 11. Écriture mathématique erronée produite par un élève

La situation du nombre mystère présente un intérêt évident pour préparer les élèves à résoudre les problèmes de l'annexe à l'aide d'une écriture pré-algébrique. Les élèves sont en effet mis en situation de produire de telles écritures, mais à partir d'un énoncé mathématique décontextualisé, exempt de difficultés liées à l'interprétation du contexte ou du lexique et, de ce fait, plus facile à comprendre et à traduire qu'un énoncé de problème classique.

Cette tâche langagière s'inscrit pleinement dans les préconisations des nouveaux programmes pour l'école primaire sur le développement d'une pensée algébrique au cycle 3. Ceux-ci indiquent notamment que l'un des objectifs, en CM2, est de développer la capacité des élèves à « *résoudre des problèmes en raisonnant sur des nombres sans connaitre leur valeur. Les élèves apprennent à désigner ces nombres par des symboles ou par des lettres et à raisonner en écrivant avec ces symboles des relations mathématiques.* » (M.E.N., 2025, p. 12). Elle est également présente dans les programmes du collège où elle est citée à plusieurs reprises sous le nom de « programme de calcul » (M.E.N., 2020, p. 128-134) dans des situations de calcul plus complexes.

3.2 *Le nombre mystère inversé*

Lorsque la tâche du « nombre mystère » est bien connue des élèves, la tâche relative au « nombre mystère inversé » consiste à leur propose de formuler à l'oral ou à l'écrit des devinettes de type « nombre mystère » à partir d'une écriture pré-algébrique donnée. Par exemple, l'écriture « 50 = ? – 3 » étant donnée, l'élève peut produire la devinette « *50 est la différence entre le nombre mystère et 3* », ou bien « *50, c'est 3 de moins que le nombre mystère* », ou encore « *50, c'est le nombre mystère moins 3* ».

Cette tâche permet de mettre en avant différents termes qui pourront être utilisés pour s'exprimer en langage mathématique comme l'illustre la photo de la figure 12. Elle permet en particulier de travailler les objectifs d'apprentissages suivants fixés par les programmes nouveaux de mathématiques pour le cycle 2 : « Comprendre et utiliser les mots 'terme', 'somme' et 'différence' » et « Comprendre et utiliser les mots 'facteur', 'produit' et 'multiple' » (M .E.N., 2024, p. 21).

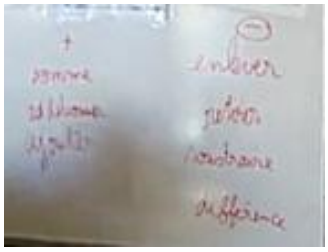


Figure 12. Termes du langage mathématique répertoriés par l'enseignante.

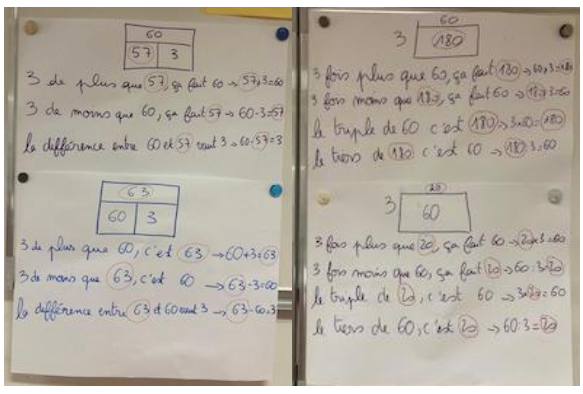
IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet atelier, nous avons proposé aux participants d'étudier des problèmes de comparaison du champ additif ou du champ multiplicatif et des problèmes faisant appel à une fraction d'une quantité destinés à des élèves de CM1 et CM2. L'atelier a permis d'identifier des difficultés langagières spécifiques à ces types de problèmes et de proposer en conséquence des tâches langagières dans une perspective d'accessibilisation (conduites en amont, ces tâches ont pour but d'aider les élèves à résoudre ces problèmes). Nous avons en particulier développé trois exemples de tâches issus d'expérimentations menées dans le cadre d'un projet collaboratif réunissant un collectif d'enseignants et de chercheurs.

À l'issue des séquences conduites par les enseignants de CM1 et CM2 de notre collectif, tous les élèves ont réussi à identifier le champ (additif ou multiplicatif) lors de la résolution des problèmes de l'annexe, ce qui n'était pas le cas au début de la séquence. Ces progrès mettent en évidence l'intérêt de la tâche langagière décrite au paragraphe III.1.

L'une des enseignantes ayant expérimenté les tâches a produit avec ses élèves des affiches d'aide (figure 13a). La démarche de conception de cet outil collectif a rendu plus accessible la résolution de problèmes comme en témoigne la production d'une élève (figure 13b) signalée comme en difficulté par l'enseignante.

(a)



(b)

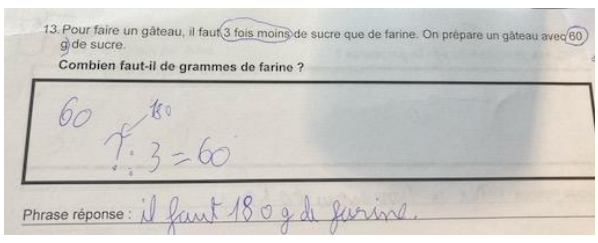


Figure 13. (a) affiches d'aide ; (b) production d'une élève

Toutefois, des erreurs persistent chez certains élèves dans l'identification de l'écriture pré-algébrique ou dans son traitement une fois le champ identifié.

Plusieurs questions animeront les travaux futurs de notre collectif : quelles pistes de différenciation sont envisageables dans le cadre d'une telle séquence ? Cette démarche d'accessibilisation de la résolution de problèmes en appui sur des tâches langagières est-elle généralisable à d'autres catégories de problèmes ? Dans ce cas, comment penser une articulation entre ces tâches langagières et les progressions sur les problèmes ?

Nous tenons à remercier tous les enseignants du collectif « Faits reliés » sans lesquels ce travail n'aurait pas été possible, en particulier Laetitia Dicharry, Mélanie Guillerot et Stéphane Théas qui ont contribué à cet atelier grâce à la mise à disposition de productions d'élèves ou d'extraits vidéo filmés en classe.

V - BIBLIOGRAPHIE

Barquero, B. (2022). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire : les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes du XLVIIIe colloque de la COPIRELEM*, 17-36.

Catroux, M. (2002). Introduction à la recherche-action : modalités d'une démarche théorique centrée sur la pratique. *Cahiers de l'Apliut*, *23*(3), 8-20.

Collectif Didactique pour enseigner. (2024). *Un art de faire ensemble. Les ingénieries coopératives*. Presses universitaires de Rennes.

Chesnais, A. et Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, 214, 85-121.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(3), 349-382.

Foulquier, L., Lambert, P., Laroche, C., Reydy, C. et Urruty, P. (2022). Un projet de formation-recherche sur la mémorisation et la mobilisation des faits numériques pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires. *Actes du XLVIIIe colloque de la COPIRELEM*, 352-365.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59-78.

Mendonca-Dias, C. et Millon-Fauré, K. (2023). *Mathématiques en français langue seconde et en langues étrangères.* Hachette FLE. Coll. F.

M.E.N. (2020). Programme d'enseignement du cycle des approfondissements (cycle 4). B.O. n°31 du 30 juillet 2020.

M.E.N. (2024). Programmes de mathématiques pour le cycle 2, applicables à la rentrée 2025. B.O. n°41 du 31 octobre 2024.

M.E.N. (2025). Programmes d'enseignement de français et de mathématiques du cycle de consolidation (cycle 3). B.O. n°16 du 17 avril 2025.

Prediger, S., Clarkson, P. & Bose, A. (2016). Purposefully relating multilingual registers : Building theory and teaching strategies for bilingual learners based on an integration of three traditions. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Setati-Phakeng, P. Valero, & M. Villavicencio (Eds.), *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI Study* (pp. 193- 215). Cham et al.: Springer.

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Reydy, C. (2024). Le dispositif « Faits reliés » : développer des habiletés de calcul au service de la résolution de problèmes basiques chez des élèves de 6 à 11 ans. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques*, *5*, 3-50.

Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S^3. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM,* 119-138.

Sensévy, G. (2021). Des sciences interventionnelles ancrées sur des alliances entre recherche et terrain ? Le cas des ingénieries coopératives. *Raisons éducatives*, *25*, 163–194.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

ANNEXE : LISTE DE PROBLÈMES SOUMISE AUX PARTICIPANTS

1. Lina effectue tous les jours un trajet de 30 min pour aller au travail. Adèle a besoin de 2 fois moins de temps que Lina pour aller à son travail. Quelle est la durée du trajet d'Adèle ?
2. À l'automne, Monsieur Blaise a récolté 60 kg de noix. Monsieur Hector a récolté une quantité de noix 3 fois plus petite. Combien de kg de noix a-t-il récolté ?
3. Mathias a parcouru 60 km dans la journée en vélo. Il a parcouru 3 km de moins que Léo. Combien de kilomètres Léo a-t-il parcourus ?
4. Sacha a parcouru 20 km à vélo. C'est un quart de la distance qu'il souhaite parcourir dans la journée. Quelle est la distance totale qu'il souhaite parcourir dans la journée ?
5. Gabriel a tracé sur une feuille, avec sa règle, un segment de 30 cm. C'est 2 cm de moins que le segment tracé par Jules. Quelle est la longueur du segment tracé par Jules ?
6. Paul pèse 60 kg. Alex pèse 3 kg de moins que Paul. Combien Alex pèse-t-il ?
7. Pierre a 30 ans. Il est 2 fois plus jeune que Paul. Quel est l'âge de Paul ?
8. Une bouteille contient 60 cL jus d'orange. Pierre a bu un tiers de la bouteille. Combien de cL de jus d'orange Pierre a-t-il bu ?
9. Alice a parcouru 30 km en vélo. Inès a parcouru une distance 2 fois plus courte. Quelle distance Inès a-t-elle parcourue ?
10. Maïa a dépensé 60 € dans le magasin. Sa copine Alicia a dépensé 3 fois moins. Combien Alicia a-t-elle dépensé ?
11. Jeudi dernier, Chloé a ramassé 20 kg de champignons. Alicia a ramassé 4 kg de plus que son amie Chloé. Combien Alicia a-t-elle ramassé de champignons ?
12. Dans une école, un tiers des élèves ne mange pas à la cantine. 60 élèves ne mangent pas à la cantine. Combien d'élèves y a-t-il dans l'école ?
13. Pour faire un gâteau, il faut 3 fois moins de sucre que de farine. On prépare un gâteau avec 60 g de sucre. Combien faut-il de grammes de farine ?
14. Un restaurateur avait 30 kg de pommes de terre dans sa réserve. La semaine prochaine, il aura consommé la moitié de sa réserve. Combien lui restera-t-il de pommes de terre ?

15. Lors d'une fête, les participants ont bu 20 bouteilles de jus d'orange. C'est 4 fois moins que le nombre de bouteilles de jus de pomme consommées. Combien de bouteilles de jus de pommes ont-ils consommées ?
16. En moto, Mathis roule 3 fois plus lentement que Théo. Mathis roule à 60 km/h. À quelle vitesse roule Théo ?

LES JEUX DE GRILLES DU CP À LA SIXIÈME UNE ENTRÉE DANS LE RAISONNEMENT EN MATHÉMATIQUES

Audrey CANDELORO
Formatrice académique/INSPE, Collège Twinger de Strasbourg
audrey.candeloro@ac-strasbourg.fr

Catherine THOMAS
PRAG, INSPÉ DE STRASBOURG
catherine.thomas@unistra.Fr

Résumé
Les jeux de grille (type sudoku), connus du grand public, permettent, une fois adaptés à l'enseignement, d'entrer dans le raisonnement mathématique. Cet atelier propose d'analyser ces jeux d'un double point de vue, celui de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et celui plus psychologique des fonctions exécutives (Favre, 2012), grâce à un scénario d'enseignement mis au point et maintes fois éprouvé dans les classes depuis le CP jusqu'à la sixième, et adapté à la formation initiale et continue des enseignants. L'expérimentation vécue de ce scénario par les participants en appui sur un premier jeu de grille, Nonogram (dit encore Hanjie ou Picross), permettra d'en dégager les potentialités didactiques et mathématiques et de questionner en parallèle les gestes professionnels qui s'y attachent. Plusieurs autres jeux de grille seront ensuite proposés afin d'enrichir la première version du scénario permettant de l'adapter aux particularités propres à chaque jeu.
Les différents niveaux d'activité demandés aux participants lors du scénario sont analysés grâce au cadre théorique développé en particulier par Guille-Biel Winder et que l'on trouve par exemple dans Bilgot et al. (2025).

INTRODUCTION

Nous sommes deux formatrices qui se sont rencontrées il y a bien longtemps à l'INSPE, l'une passionnée depuis longtemps par l'utilisation des jeux mathématiques, et l'autre par la didactique des mathématiques. La première a créé un scénario de formation autour des jeux de grille du commerce, stabilisé au fur et à mesure des années et des différents publics auquel il s'adressait. Ce travail prend en particulier appui sur les travaux du groupe IREM auquel elle participait, groupe suivi par Sonia Lorant, maîtresse de conférences en psychologie cognitive à l'INSPE de Strasbourg. La seconde, en y participant la première fois, y a vu l'opportunité de l'analyser et l'utiliser comme illustration du modèle didactique de la Théorie des Situations Didactiques (désormais TSD) (Brousseau, 1998) en formation initiale. En effet, non seulement Brousseau a fondé sa théorie sur celle des jeux, mais le scénario en question propose en acte de véritables *dialectiques de l'action*, *de la formulation et de la validation* (termes issus de la TSD que nous expliciterons dans le paragraphe I.1.1). Il ne resterait finalement plus qu'à les rendre explicites afin de permettre à des enseignants débutants (ou confirmés) d'entrer dans la TSD. Il s'est avéré que le prisme de la TSD n'était pas si simple à utiliser pour illustrer ce scénario de formation, en particulier parce qu'aucune phase du scénario initial n'était entièrement *a-didactique*. L'objectif de l'utiliser comme introduction à la TSD est donc à questionner.

Enfin, ce scénario de formation a pour point de départ une véritable série d'activités d'enseignement, destinées aux élèves de l'école primaire (à partir du CP) et du début du collège ; et qui ont toutes le même

squelette ; comme toute situation de formation de type homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996), il ne cesse de jouer avec les différentes postures des participants. Nous avons donc été tentées d'utiliser le cadre d'analyse des situations de formation développé par un collectif issu de la COPIRELEM (dont on trouve un exposé par exemple dans Bilgot et al., 2025) , et repris en particulier à l'occasion de la deuxième conférence du présent colloque (Guille-Biel Winder, 2026).

Dans ce dernier cadre, une activité proposée aux élèves est qualifiée d'amorce à la situation de formation. Celle que nous avons choisie s'appuie sur un jeu de logique sur grille dont le nom est multiple et d'origines multiples. On le nomme selon les pays et les éditeurs hanjie, picross, nonogram ou logigram… Nous choisissons dans le reste du texte l'appellation nonogram.

Nous avons choisi ce jeu particulier pour initier la formation car il dispose de la caractéristique suivante, qui lui est commune avec le célèbre sudoku : la progression dans le jeu n'est pas linéaire, il n'est pas possible (à moins d'avoir une très bonne mémoire) de revenir en arrière en cas d'erreur. Ainsi, la procédure par essai et réajustement est très pénible, voir hasardeuse, et le raisonnement devient la seule méthode efficace pour résoudre le problème. Or, c'est bien cela la finalité de l'activité-élève. Nous le répèterons à plusieurs reprises, comme un réel point de vigilance : l'objectif n'est pas de devenir des experts dans la résolution de certains jeux, mais bien de permettre aux élèves de développer des compétences mathématiques en les résolvant, en particulier celles propres au raisonnement. Nous proposerons d'autres jeux dans la dernière partie du scénario de formation. Il s'agira de s'interroger en priorité sur les compétences mathématiques que chacun d'entre eux permet de développer et d'envisager des variantes du déroulé et des modalités proposées dans la première partie, pour une utilisation en classe.

Cet article est le fruit de nos réflexions, enrichies par celles des participants à notre atelier.

I - CADRES THÉORIQUES

1 Quelques éléments de la Théorie des Situations Didactiques (TSD)

1.1 Situation didactique et processus d'institutionnalisation

Une situation didactique est une situation d'apprentissage où existe une intention d'enseigner, et, partant, une construction d'un scénario d'enseignement, qui se distingue d'un apprentissage spontané.

Brousseau, en fondant sa théorie des situations didactiques, s'est inspiré de la théorie des jeux, et de la notion d'apprentissage par invention et mise à l'épreuve de stratégies pour réussir une partie. On apprend parce que le milieu réagit aux stratégies mises en place lors du jeu, et que l'on est contraint de tenir compte de ces réactions ainsi que de modifier sa stratégie si l'on souhaite gagner.

Dans le cadre de l'apprentissage des savoirs mathématiques, il s'agit donc de trouver des « jeux » qui permettent l'invention de stratégies fondées sur des concepts mathématiques, que l'enseignant aura pour charge de dégager après le déroulement des différentes phases du jeu. Ce moment privilégié de l'enseignant se nomme « processus d'institutionnalisation », et s'avère indispensable pour que les connaissances construites dans le contexte du jeu puissent être dégagées et se transformer en savoir institutionnel. L'institutionnalisation procède de la généralisation, la décontextualisation et la dépersonnalisation des connaissances construites en contexte. Pour qu'elle soit efficace, il est nécessaire que les élèves aient pris conscience et soient intimement persuadés que les connaissances construites par eux sont valides. C'est tout l'enjeu des différentes dialectiques à mettre en place dans les moments didactiques qui précèdent l'institutionnalisation.

1.2 Situation a-didactique : les dialectiques de l'action, de la formulation et de la preuve

La TSD est une théorie constructiviste des apprentissages, l'hypothèse fondamentale étant que ceux-ci se construisent en situation d'action de résoudre un problème, en l'occurrence ici : gagner des parties en suivant les règles du jeu. Ceci impose à l'enseignant de se retirer de la situation d'action, qui ne doit agir sur l'élève que par des effets de rétroactions. Ce moment de la situation est alors qualifié de a-didactique. En effet, la situation reste didactique car l'enseignant, en la proposant aux élèves, a une intention de leur enseigner des savoirs, et elle a été choisie dans ce but précis, mais il évite d'interagir avant la fin du jeu, seuls les effets sur le jeu, et les éventuelles actions des autres élèves agissent sur l'élève en retour de ses actions.

La première dialectique est celle de *l'action*, elle se joue entre l'élève et le milieu avec lequel il interagit. L'élève applique les règles du jeu, le milieu réagit, l'élève adapte ses stratégies et, ce faisant, il construit implicitement un modèle du jeu. Bien que, spontanément, certains joueurs formulent à haute voix tout ou partie du modèle, cette formulation n'est pas nécessaire pour jouer, et développer une stratégie efficace.

Ainsi, pour rendre le modèle du jeu explicite, on doit plonger les élèves dans une situation qui rend nécessaire une dialectique de la *formulation*. On peut par exemple proposer une évolution de la situation de type émetteur-récepteur, dans lequel l'élève est contraint de formuler une stratégie (partielle ou totale) ; la dialectique se joue alors entre cette formulation, qui rend explicite le modèle du jeu construit par l'élève, et la réaction des autres élèves, qui peuvent, en appliquant cette stratégie, perdre, ou gagner, ou bien ne pas la comprendre. Il s'agit de créer un langage commun à la classe. Lors de cette explicitation du modèle, il peut arriver que, spontanément, des élèves cherchent à se convaincre eux-mêmes, ou convaincre d'autres élèves, de la validité de leur modèle. Mais cette quête de la preuve n'est pas nécessaire pour expliciter le modèle. Or, d'après Brousseau, l'activité mathématique ne commence réellement que lorsque l'on raisonne et l'on cherche à prouver ce que l'on affirme.

Il est donc nécessaire de créer un troisième type de situation d'action, dans laquelle se développe une *dialectique de la validation*, si l'on reprend le terme historique de Brousseau, auquel on substituera le terme choisi par Kuzniak (2005) de *dialectique de la preuve*, qui nous semble moins ambiguë. Dans ce type de situation, un élève doit proposer une stratégie (partielle ou totale), une règle, un théorème, comme le dit Brousseau, soumis à la validation par les autres élèves. Pour qu'un élève soit en mesure de proposer un théorème du jeu, il est nécessaire qu'il en ait éprouvé la fiabilité, et qu'il soit convaincu de sa validité ; la dialectique de la preuve ne peut exister avant d'avoir construit puis expliciter un modèle du jeu, donc après avoir vécu les dialectiques de l'action et de la formulation. Elle se joue entre la formulation du théorème proposé par un élève et sa confrontation avec les modèles construits par les autres élèves, qui peuvent coïncider ou non.

Une partie de notre propos est d'analyser les différentes phases du scénario en termes de dialectiques de l'action, de la formulation, et de la preuve, sachant que la condition initiale pour cela est que ces phases soient entièrement a-didactiques. Nous avons dit en introduction que ce n'était pas toujours le cas. Serait-il possible de faire vivre ces différentes dialectiques avec l'intervention, même légère de l'enseignant ?

2 Un apport des sciences cognitives

Les fonctions exécutives sont les capacités cognitives dites de « haut niveau », situées au niveau des lobes frontaux. Elles permettent notamment de comprendre et d'analyser une situation ou un problème inédit, de raisonner et d'enclencher une suite d'actions pour réagir voire élaborer une solution. Présenter à l'élève un jeu, comme celui proposé ici, lui donne l'occasion de mobiliser et donc « d'entrainer » ses fonctions exécutives.

Balayons certaines de ces fonctions exécutives sous l'angle de la proposition faite dans cet atelier. Il est difficile de les évoquer de façon linéaire, toutes étant en réalité mobilisées en même temps.

La flexibilité permet d'échapper à la répétition. L'élève est tenté d'essayer de calquer des stratégies déjà existantes. Parmi elles, certaines deviennent inopérantes et devront être modifiées voire abandonnées au profit de nouvelles à construire. Un exemple lié au jeu pour illustrer la flexibilité est d'accepter de commencer par traiter la 3e ligne avant la 2e alors qu'il est installé de manière automatique que l'on commence par la 1ère ligne, puis la 2e, puis la 3e…. Être capable de modifier ou d'abandonner une stratégie est nécessaire pour apprendre mais peut être déstabilisant du point de vue des émotions et c'est d'ailleurs une autre fonction qui entre alors en jeu : la régulation des émotions.

La capacité d'initiative permettant de déclencher une ou plusieurs actions qui n'ont pas été automatisées est à l'œuvre particulièrement dans des moments de recherche de la solution. Le temps et l'autonomie laissés à l'élève sont des aspects importants pour permettre à l'élève d'être seul décideur et d'expérimenter seul les effets de ses décisions, décisions qu'il sera peut-être amené à modifier (et nous retrouvons alors la nécessité de la flexibilité !).

La planification, qui permet d'élaborer un programme d'actions et de l'exécuter, se retrouve une première fois lors de la phase de jeu, au service de l'élaboration de la solution, puis elle est présente une seconde fois lors de la phase de justifications : être capable d'apporter une preuve nécessitant un enchainement de raisonnements « élémentaires » demande d'avoir compris l'ordre de ces enchainements et d'être capable de les suivre.

3 Un modèle d'analyse d'une situation de formation

Lors du 51ème colloque de la COPIRELEM , où nous présentions cet atelier, le hasard a voulu que la veille, la première conférence, présentée par Claire Guille Biel-Winder (2026), soit précisément sur l'exposition d'un modèle d'analyse des situations de formation, modèle que nous connaissions bien car il a fait l'objet de plusieurs publications de la COPIRELEM, en particulier la plus récente, celle de Bilgot et al (2025). Nous avions d'ailleurs déjà tenté de l'appliquer à notre scénario, sans résultat vraiment satisfaisant. La conférence de Claire Guille Biel-Winder nous a réengagées dans cette tâche, un peu trop tard pour l'atelier, mais pas pour cet article.

Il s'agit, pour résumer, d'une classification par paliers des différentes phases d'un scénario de formation, paliers définis par la nature de l'activité des participants. Cette activité se caractérise selon trois critères : la posture des formés, le type de connaissances mobilisées et leur degré de décontextualisation. Les formés peuvent se trouver tour à tour en posture d'élève, d'élève-enseignant, d'enseignant ou de praticien-chercheur. Les connaissances mobilisées lors de leurs différentes activités peuvent être d'ordre mathématiques, didactiques ou pédagogiques. Et enfin, ces mêmes connaissances peuvent être implicites en contexte, explicitées en contexte, ou décontextualisées. Pour plus de lisibilité, nous synthétisons ces trois critères et leurs développements dans le tableau 1 :

	mathématiques	**didactiques**	**pédagogiques**
Types de connaissances convoquées	Les mathématiques nécessaires à l'enseignant. Ne se réduisent pas aux mathématiques à enseigner.	Spécifiques au contenu mathématique à enseigner. Transposées des recherches en didactique des mathématiques.	"savoir d'expérience" Plus indépendants des contenus
Degré de décontextualis	**mobilisée en contexte**	**explicitée en contexte**	**décontextualisée**

ation des connaissances	implicitement (en acte)			
	Math : Outils (au sens de Douady, 1986) dans l'activité mathématiques **Dida/péda** : identification par le formé des choix dida/péda effectués dans l'activité math.	**Math** : Formulation de leur utilisation en tant qu'outil **Dida/péda** : analyse des implications de ces choix	**Math** : Objets, lors d'un moment d'institutionnalisation **Dida/péda** : explicitation des concepts dida/péda	
	élève	**élève-enseignant**	**enseignant**	**praticien-chercheur**
Posture attendue du formé dans la formation	Par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser une tâche mathématique ou s'intéresser aux mathématiques décontextualisées mobilisées dans la tâche.	Étude d'activités à destination des élèves, de productions d'élèves, analyse de conditions de mise en œuvre de la tâche mathématique.	Questionnement sur des pratiques de classe ou enjeux d'apprentissage.	Problématisation d'une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage

Tableau 1. Explicitation des critères définissant la nature de l'activité des formés

Dans la situation de formation, les participants sont au **palier 0** lorsqu'ils sont en posture d'élève, et que leur activité est purement mathématique ; cette activité est typiquement *l'amorce* de la situation de formation, au sens où elle engage les formés dans la tâche (ce que la TSD nomme la *dévolution*) et sert d'appui aux analyses mathématiques, didactiques et éventuellement pédagogiques qui se développeront dans les phases suivantes. Les connaissances mathématiques mobilisées sont alors nécessairement contextualisées, et peuvent rester implicites. Dans le cadre d'une formation par homologie-transposition, comme c'est le cas ici, les participants commencent par vivre une situation de classe, autrement dit, ils résolvent un problème de type mathématique tel que le feraient des élèves, tâche qu'ils analyseront ensuite pour la transposer dans leurs propres classes ou leurs formations.

L'analyse de l'activité mathématique que les participants viennent de vivre constitue les paliers suivants. Dans les différentes phases d'un scénario de formation, le changement de palier s'effectue soit lorsque les participants changent de posture, soit lorsqu'ils modifient un degré de décontextualisation d'au moins un type de connaissances. Plus précisément,

- le **palier 1** décontextualise les connaissances mathématiques du palier 0, ce qui correspond le plus souvent à un moment d'institutionnalisation. Les participants restent alors en posture d'élèves ; cependant, ce faisant, ils peuvent déjà utiliser en contexte des concepts didactiques ou pédagogiques en acte, et donc s'engager dans la posture suivante, celle d'élèves-enseignants ;
- le **palier 2** explicite les connaissances didactiques et pédagogiques utilisées implicitement au palier 0, et modifie ainsi la posture des participants, qui deviennent des élèves-enseignants ;
- le **palier 3** procède de la décontextualisation et donc de l'institutionnalisation des connaissances didactiques et pédagogiques, le formé est donc alors en posture d'enseignant ;
- enfin, le **palier 4** modifie à nouveau la posture du formé, en le plaçant dans le rôle d'un praticien-chercheur, par la problématisation d'une question professionnelle en lien avec l'activité vécue.

Nous avons cherché à analyser notre propre scénario de formation en tentant d'expliciter, pour chaque phase, à quel palier on se situe, et expliciter, pour chacun de ces paliers, quelles sont les activités mathématiques, didactiques ou pédagogiques en jeu.

II - L'ACTIVITÉ « AMORCE » DE LA SITUATION DE FORMATION

Nous supposons que les lecteurs connaissent le jeu Nonogram, et n'ont pas besoin de l'analyse des tâches du paragraphe III pour comprendre la description de l'amorce. Toutefois, si tel n'était pas le cas, nous suggérons de « jouer » soi-même et de se créer ainsi un modèle implicite du jeu, qui devrait s'expliciter au fur et à mesure de la lecture.

Il s'agit de découvrir la règle du jeu, à partir d'une grille indicée et de sa solution, puis de mettre à l'épreuve cette règle avant de jouer effectivement et de développer des stratégies efficaces. L'objectif mathématique visé majeur est le raisonnement déductif.

1 Phase 1 : en collectif, découverte de la règle du jeu par présentation d'une grille indicée et de sa solution

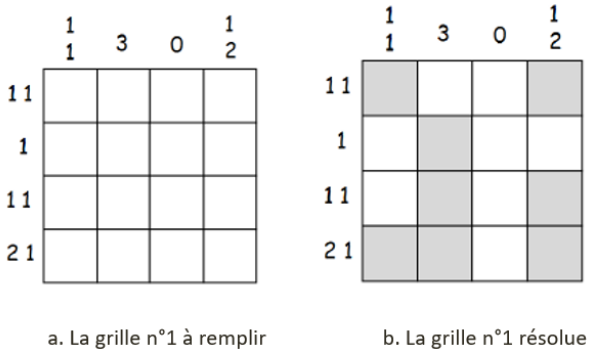


Figure 1. La première grille pour découvrir la règle

La figure 1 est projetée au tableau avec la consigne suivante : « À gauche se trouve une grille à remplir, et à droite, la même grille remplie, en respectant les règles du jeu de Nonogram. Vous devez retrouver ces règles. »

Des relances éventuelles de l'enseignant permettent de pointer certaines spécificités de la grille, et de préciser des éléments de la règle, si ceux-ci n'émergent pas spontanément des élèves. Les 5 règles du jeu doivent être explicitées avant le passage à la phase 2. Les voici :

Règle 1 : Les indices en tête de ligne et de colonne correspondent au nombre de cases coloriées dans une ligne ou une colonne

Règle 2 : un espace entre deux nombres devant une rangée signifie qu'il existe un espace entre deux blocs de cases coloriées.

Règle 3 : l'ordre des indices compte : ils sont donnés dans l'ordre d'apparition des blocs, de gauche à droite pour les lignes horizontales, de haut en bas pour les colonnes verticales.

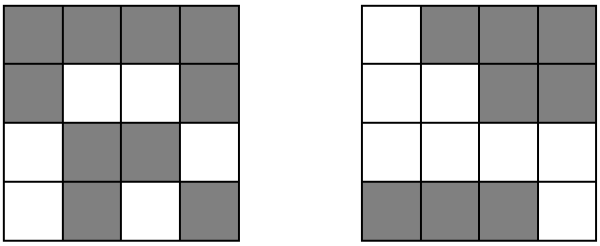
Règle 4 : la taille de l'espace entre les blocs n'est pas renseignée.

Règle 5 : le premier bloc ne commence pas nécessairement en début de ligne ou de colonne.

Les règles 4 et 5 ne sont pas exactement des règles du jeu, mais découlent implicitement des trois premières. Elles doivent toutefois être explicitées pour permettre aux élèves de jouer correctement.

2 Phase 2 : en individuel, puis collectif, indiçage d'une grille déjà remplie

On distribue à chacun une pochette transparente dans laquelle est insérée une feuille avec deux grilles muettes (fig. 2) et on distribue également une ardoise accompagnée d'un feutre.



a. Grille n°2 b. Grille n°3

Figure 2. Deux grilles muettes à indicer

La consigne est la suivante : « Vous allez, seul, trouver et écrire les indices de chaque grille ; vous utilisez votre feutre et pouvez effacer les indices si vous pensez vous être trompé. »

Les deux grilles sont ensuite affichées successivement au tableau pour une correction collective.

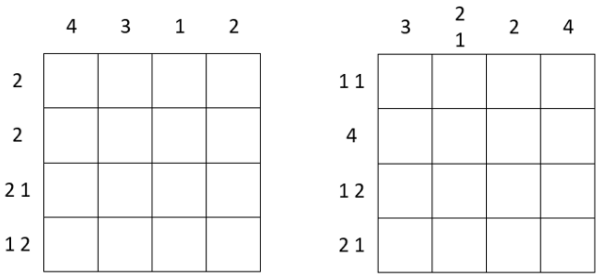
La correction de la première grille s'organise selon un système de vote : l'enseignant montre la première tête de ligne et demande que chaque élève écrive sur son ardoise l'indiçage de cette ligne. Au signal, tous les élèves montrent leur ardoise. L'enseignant note la bonne réponse au tableau et la commente au regard de la règle. Il poursuit par les lignes suivantes, puis les colonnes de gauche à droite.

On laisse ensuite un temps pour que les élèves puissent compléter, rectifier ou contrôler les indices de leur deuxième grille. La consigne est la suivante : « Maintenant que nous avons corrigé les indices de la première grille, et que vous avez mieux compris les règles, je vous laisse du temps pour changer les indices de la deuxième grille si vous le souhaitez. »

La correction de la seconde grille est un peu différente : un élève propose l'indiçage de la première ligne, l'enseignant demande aux autres élèves, à son signal, de lever la main s'ils sont d'accord. Il écrit alors la bonne réponse sur la grille. La correction se poursuit dans le même ordre que pour la première grille.

Au terme de cette phase, les indiçages sont validés pour les deux grilles, et la règle du jeu doit être comprise par tous les élèves.

3 Phase 3 : en individuel, résolution de deux grilles et auto-validation



a. Grille n°4 b. Grille n°5

Figure 3. Premières grilles à résoudre en autonomie

Les grilles de la figure 3 sont distribuées ensemble dans une pochette transparente, avec la consigne suivante : « À vous de jouer ! Coloriez les cases en respectant les indices donnés. Une fois terminé, c'est vous qui validez votre grille. Vous m'appelez si vous rencontrez un problème ».

L'enseignant circule sans intervenir. Si une question lui est posée, il renvoie systématiquement aux règles.

Les deux grilles corrigées de la phase précédente (voir fig. 10) restent volontairement affichées au tableau. Au bout de quelques minutes, l'enseignant demande l'attention de la classe pour proposer une procédure de contrôle de l'indiçage : en utilisant la grille n°2 indicée, il explicite qu'il faut contrôler les 4 indices devant les lignes et les 4 indices devant les colonnes, et, ce faisant, entourer au fur et à mesure chaque indice une fois que la rangée correspondante a été vérifiée. Il résume cette procédure en précisant : « quand tous les indices sont entourés et donc vérifiés, la solution proposée est validée ».

4 Phase 4 : en individuel puis collectif, correction d'une grille résolue individuellement

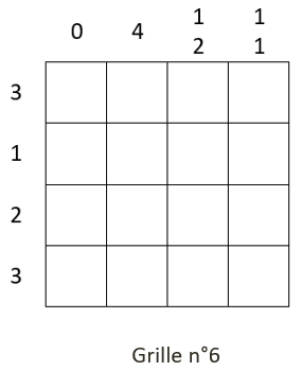


Figure 4. Grille à corriger collectivement, après résolution individuelle

La grille de la figure 4 est distribuée aux élèves et glissée dans leur pochette transparente, avec la même consigne que la phase précédente. L'élève résout seul la grille.

En revanche, contrairement à la phase précédente, une correction collective est organisée, à la charge des élèves. La grille est alors affichée au tableau. La consigne est la suivante : « Vous allez donner la solution de cette grille. Je suis secrétaire, je ferai ce que vous me décrirez. Qui veut commencer à faire une proposition ? Si quelqu'un n'est pas d'accord avec cette proposition, il peut réagir. Une fois que la grille est remplie, vous contrôlerez tous les indices pour la valider ».

L'enseignant prend bien soin de prendre la parole de l'élève à la lettre et de favoriser les interactions entre les élèves. Il rythme la correction et rappelle qu'il faut contrôler tous les indices, une fois que la grille est remplie.

Une fois la phase 4 terminée, il est possible de clore la séance, et de poursuivre les phases suivantes en activités décrochées.

5 Phase 5 : Phase d'entraînement, et de consolidation des stratégies

Les trois grilles de la figure 5 sont proposées aux élèves, cette fois-ci à traiter directement sur la feuille de papier. L'effacement au feutre n'est plus possible.

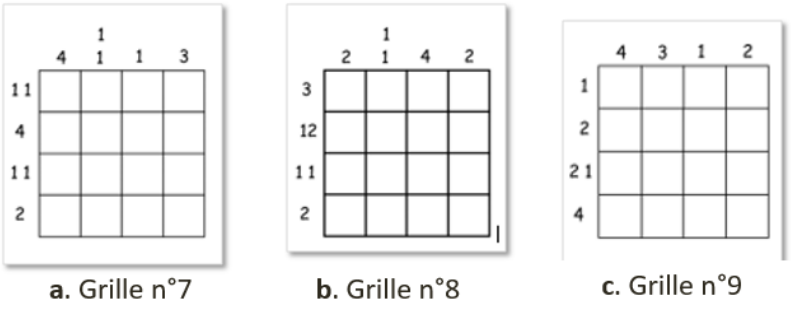


Figure 5. Grilles à résoudre en autonomie

6 Phase 6 : Résolution collective d'une grille

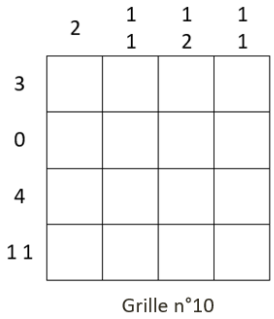


Figure 6. Grille à résoudre collectivement

Dans cette phase, la grille n°10 (voir fig. 6) est proposée directement au tableau avec la consigne suivante : « Vous allez résoudre cette grille tous ensemble. L'un d'entre vous va commencer en proposant un coloriage, et un autre va devoir dire s'il est d'accord ou non, en justifiant sa réponse. Je joue encore le rôle de secrétaire, et colorie les cases que vous m'indiquez. ».

Les élèves sont interrogés à tour de rôle jusqu'à ce que la grille soit remplie, avec l'assentiment de toute la classe. La vérification est alors effectuée, indice par indice. Si la solution est correcte, on annonce que la classe a gagnée. Dans le cas contraire, on recommence.

On fait ensuite noter aux élèves quelques raisonnements issus de l'activité, comme trace institutionnelle.

7 Phase 7 : en individuel, réinvestissement avec des grilles 5 × 5

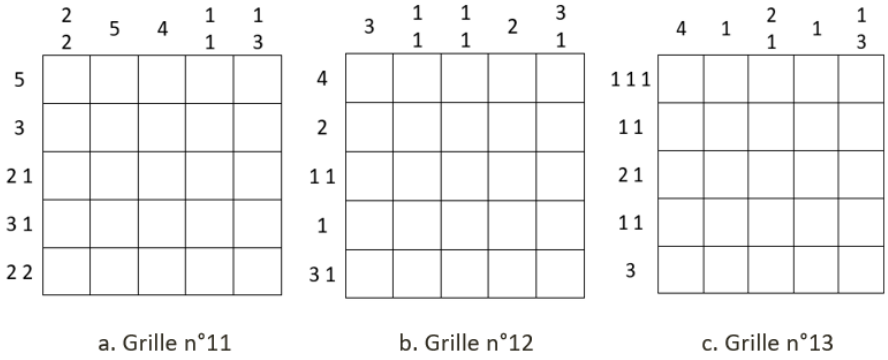


Figure 7. Nouvelles grilles à résoudre en autonomie, avec changement de taille

Les grilles 11, 12 et 13 (voir fig. 7), de taille différente, sont données aux élèves, pour les résoudre en autonomie.

Les modalités sont les mêmes que lors de la phase 5.

Aucune correction collective n'est prévue.

8 Phase 8 : en individuel, création d'une grille à résoudre par un pair

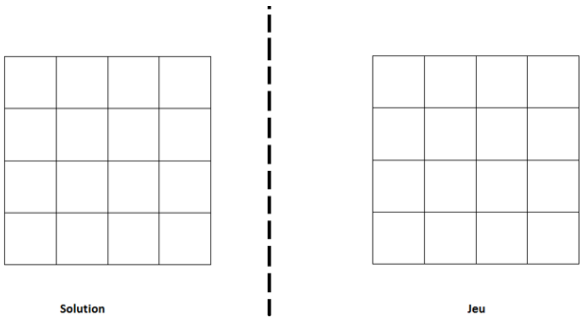


Figure 8 - Support pour création de grilles

L'enseignant distribue la feuille de la figure 8, avec pour consigne : « vous allez créer votre propre grille en coloriant les cases que vous souhaitez dans la grille de gauche. Une fois terminé, vous indicez votre grille, toujours à gauche, puis vous reportez les indices, et seulement les indices, sur la grille de droite. Vous pliez ensuite la feuille selon les pointillés, avec les grilles à l'extérieur du pliage, puis vous donnez votre feuille, côté « grille non coloriée » à votre voisin pour qu'il puisse la résoudre. Vous vérifierez ensuite avec votre binôme si la grille proposée correspond à votre première grille. Vous chercherez la cause d'erreurs éventuelles. »

III - ANALYSE DIDACTIQUE ET PÉDAGOGIQUE DES DIFFÉRENTES PHASES DE L'ACTIVITÉ « AMORCE »

Pour plus de visibilité, nous reprenons parfois les figures du paragraphe II.1.

1 Phase de découverte de la règle du jeu

Nous rappelons que l'on montre aux élèves deux grilles, l'une correspondant au problème, et l'autre à sa solution, avec pour consigne d'en déduire la règle du jeu.

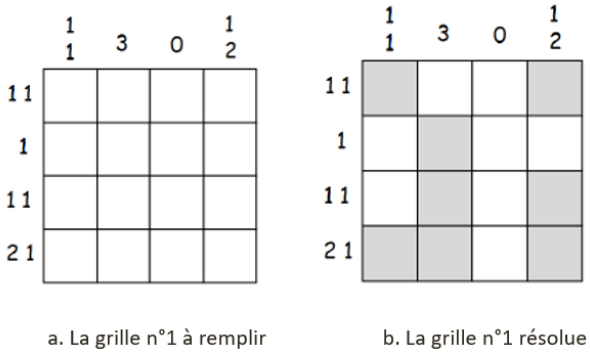


Figure 9. La première grille pour découvrir la règle

La grille proposée pour mettre en place la règle du jeu (fig. 9) a été construite de façon à permettre la découverte de tous les éléments de cette règle :

- Les colonnes verticales indicées (3) et (0) permettent de comprendre la première règle :

  Règle 1 : Les indices correspondent au nombre de cases coloriées dans une ligne ou une colonne

- Les colonnes verticales indicées (3) et (1 2) permettent de faire la différence de codage entre un bloc de 3 cases consécutives, et celui de 3 cases séparées en deux blocs respectivement de 1 et 2 cases. Ainsi :

Règle 2 : un espace entre deux nombres devant une rangée signifie un espace entre deux blocs de cases coloriées.

- La ligne horizontale indicée (2 1) et la colonne verticale indicée (1 2) permettent de rendre compte de l'importance de l'ordre dans l'indiçage. Ainsi :

  Règle 3 : les indices sont donnés dans l'ordre d'apparition des blocs : de gauche à droite pour les lignes horizontales, de haut en bas pour les colonnes verticales.

Les deux règles suivantes ne sont pas à proprement parlé des éléments de la règle du jeu et ne sont pas nécessaires dans un premier temps, puisqu'elles explicitent plutôt ce qui n'est pas dit dans cette règle. Il se trouve qu'elles émergent souvent à ce moment-là du déroulé du scénario. Si ce n'est pas le cas, elles apparaîtront plus tard, lors de la phase de validation ou d'invalidation de procédures des élèves.

- Les deux lignes horizontales codées toutes les deux (1 1) ne rendent pas compte d'un même coloriage. Ainsi :

  Règle 4 : la taille de l'espace entre les blocs n'est pas renseignée.

  Règle 5 : le premier bloc ne commence pas nécessairement en début de ligne.

Lors des travaux de groupe, les participants, en position d'élèves-enseignants, doivent en déduire que le choix de cette première grille correspond à un geste professionnel de l'enseignant, elle est construite dans une intention didactique et n'est pas identique à une grille du commerce. Il en est d'ailleurs de même pour toutes les autres grilles.

Commentaires du point de vue de la TSD

Cette manière originale de découvrir la règle du jeu est déjà une situation d'action ; l'enseignant n'expose pas les règles, ce sont les élèves qui les découvrent et les formulent, l'enseignant communique avec eux en validant ou relançant jusqu'à ce que toutes les règles soient découvertes. Le milieu est constitué des deux grilles indicées, des réactions des autres enfants et de celle du professeur, qui réagissent aux formulations des élèves qui interviennent. Cette façon de procéder est beaucoup plus efficace qu'un simple exposé des règles car elle permet aux enfants d'intérioriser les règles. Elle peut être mise en parallèle avec la découverte de la consigne de la course à 20 (Brousseau, 1998), où un élève joue une partie avec le professeur devant toute la classe, afin de faire vivre la règle du jeu.

Commentaires du point de vue cognitiviste

Faire découvrir les règles plutôt que de les donner permet aux élèves, puisque qu'ils sont actifs mais aussi parce que l'accès aux règles est « résistant », une meilleure qualité d'encodage. Ils vont ainsi mieux se souvenir des différentes règles et cela ne fera pas obstacle pour entrer ensuite dans la résolution des grilles.

2 Phase de stabilisation de la règle

L'objectif de cette phase est de vérifier si tous les élèves ont bien compris la règle du jeu, afin qu'ils puissent ensuite jouer en autonomie, et valider eux-mêmes leurs productions.

Là encore, le choix de l'emplacement des cases noires n'est pas anodin. D'expérience, les élèves commencent par indicer ligne par ligne. Elles sont construites en tenant compte de cette habitude.

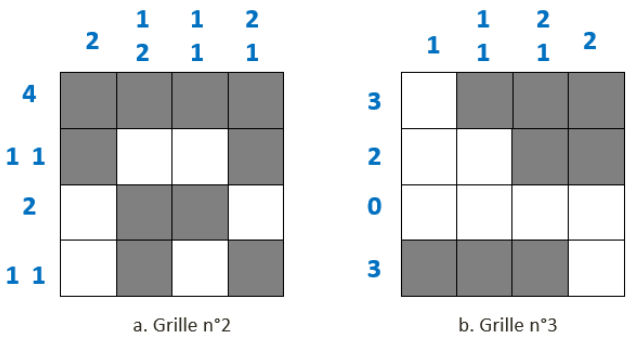


Figure 10. Solution des deux grilles muettes à indicer

Analyse didactique

Dans la *grille n°2* (fig. 10.a), la première ligne est simple à indicer, il n'y a qu'un seul indice (4), sans ambiguïté.

Les 2e et 3e lignes sont l'occasion de rediscuter de la règle 2 en faisant la différence entre les indiçages (1 1) et (2), et mettre l'accent sur la différence entre deux cases consécutives et deux cases séparées.

La 4e ligne requestionne, en comparaison à la 2 e ligne, les règles 4 et 5. L'indiçage est le même, (1 1) et pourtant, les cases noires ne sont pas au même endroit.

Les 2e et 4e colonnes permettent de mettre à l'épreuve la règle 3, concernant l'ordre donné par l'indiçage, la 2e colonne étant indicée (1 2) alors que la 4e est indicée (2 1).

La grille n°3 (fig. 10.b) permet un renforcement de l'appropriation des règles, et est essentielle pour que les élèves les plus en difficulté puissent reprendre leurs éventuelles erreurs commises sur la grille n°2. D'expérience, les élèves ont tous compris le principe de l'indiçage à la fin de la correction de la grille n°3, ce qui ne signifie pas que les connaissances soient stabilisées. Il faudra les mettre à l'épreuve en jouant, dans la phase 3.

Commentaires du point de vue de la TSD

Cette phase 2 est dans la continuité de la phase 1, où l'objectif est de comprendre les règles du jeu. Il y a bien une situation d'action, avec un milieu qui réagit aux actions des élèves, mais encore validée par l'enseignant, puisqu'il est le garant de la règle.

Analyse pédagogique

L'utilisation de l'ardoise pour voter permet un engagement de chaque élève ; le support permettant d'effacer facilement, l'élève a moins peur de se tromper et essaie davantage.

La modalité « vote » permet également à l'enseignant d'évaluer rapidement la compréhension de la règle et à la classe de discuter de propositions éventuellement divergentes. Les élèves sont en général assez rapidement d'accord et en réussite. Elle permet de gagner en rapidité et d'éviter la lassitude des élèves. En effet, il y a 16 votes successifs. Pour dynamiser ce temps, il y a la nécessité de mettre en place une routine de vote, du type « top, allez-y, votez ! »

L'enseignant choisit à qui il donne la parole, et n'insiste pas quand tout le monde est d'accord. Il choisit les réponses qui permettent le rappel de certaines règles.

Donner deux grilles permet de gérer la différence des rythmes d'exécution de la tâche ; on corrige quand tous les élèves ont rempli la première grille. Avant de corriger la seconde grille, ceux qui ne l'avaient pas terminé (ou commencé) s'y mettent, tandis que les autres peuvent contrôler, modifier et valider leurs indices.

Ne pas oublier d'orienter la feuille, en donnant par exemple un titre, et éviter de donner des grilles prédécoupées sans titre, car dans ce cas, il y a quatre orientations possibles, et donc quatre réponses différentes[1].

3 Phase de découverte des stratégies : résolution individuelle de deux grilles

3.1 Analyse didactique des deux grilles à résoudre

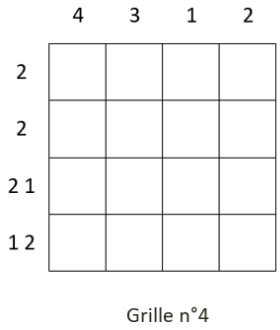


Figure 11. Première grille à jouer individuellement

La grille n°4 (fig. 11) est choisie pour ne présenter aucune difficulté.

Un premier réflexe fréquent chez les élèves est de procéder d'abord ligne par ligne, en commençant par la première case, puis s'arrêter sans vérifier les colonnes. Or, l'indiçage choisi permet que cette stratégie erronée fonctionne momentanément (tableau 2). Il s'agit de mettre en confiance les élèves pour leur première grille.

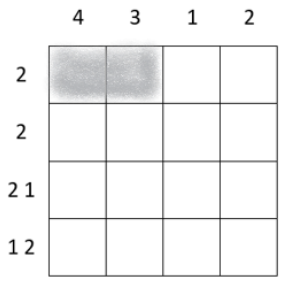
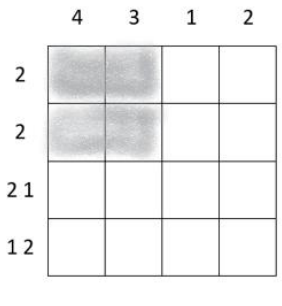
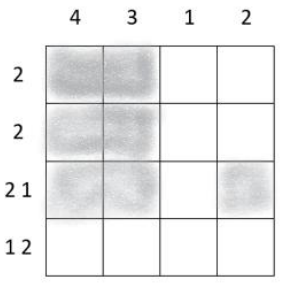
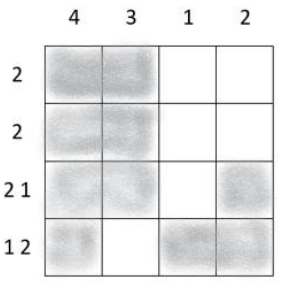
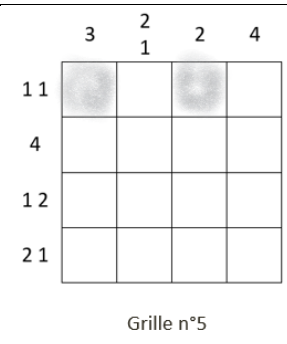
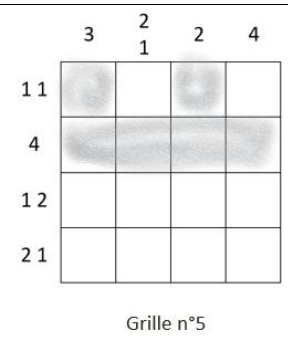
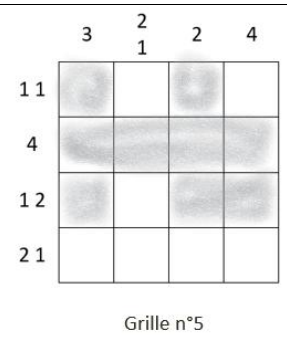
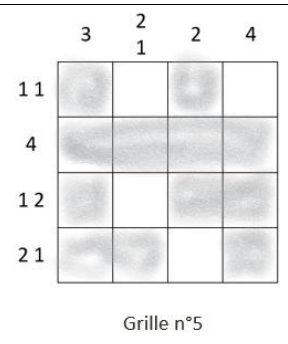
			

Tableau 2. Une stratégie ligne par ligne, sans se préoccuper des colonnes

Cette stratégie ne fonctionne plus pour leur deuxième grille en autonomie (tableau3) :

			
Première ligne Choix erroné ici de colorier la première case	Deuxième ligne Indiçage (4) : on colorie toutes les cases	Troisième ligne	Quatrième ligne

[1] situation vécue un jour en classe !

		La stratégie de colorier la première case fonctionne ici	La stratégie de colorier les deux premières cases fonctionne ici

Tableau 3. Stratégie ligne par ligne avec solution erronée

Lorsque, après vérification, les élèves se rendent comptent que les indices des colonnes ne correspondent pas, il est difficile de revenir en arrière (bien que très faisable avec une grille 4 × 4). Imaginons un élève ayant procédé comme dans le tableau 3 qui, après contrôle des indices, se rend compte, dès la première colonne, que sa grille est invalide.

Il remet nécessairement sa stratégie en question (dialectique de l'action), et peut développer une autre stratégie basée sur le conflit certitude/incertitude.

Pour la ligne 2, on a la certitude que le coloriage est correct car il n'y a pas le choix. C'est un théorème-en-acte qui sera formulé plus tard, une fois qu'il aura agi plusieurs fois. Assez vite, les élèves commencent à repérer les rangées indicées (4) et commencent par elles. Ainsi, la stratégie « on commence par la première case de la première ligne » est invalidée.

Certains élèves, mais pas tous, vont réaliser que les coloriages des lignes 3 et 4 sont certains, alors que celui de la ligne 1 est incertain, puisqu'il existe plusieurs possibilités.

Un autre théorème-en-acte apparaît vite : la stratégie basée sur la certitude du coloriage est plus efficace que la stratégie par essai et réajustement.

3.2 Analyse pédagogique de la phase 3

Pour permettre aux élèves de se rendre compte de leur erreur tout seul, ou de valider eux-mêmes leur grille, il faut obtenir une rétroaction du milieu, il est alors nécessaire que l'enseignant donne un moyen de vérification de la grille, ce qu'il fait au bout de quelques minutes avec la solution de la grille n°2 restée affichée au tableau.

À ce stade, les élèves n'ont pas encore l'habitude d'être en autonomie et appellent souvent l'enseignant pour valider leur grille. Il faut savoir se retenir et leur rappeler plutôt comment la contrôler eux-mêmes.

Il arrive aussi souvent que des élèves terminent les deux grilles sans les avoir contrôlées. Lorsque leur résolution est erronée, il est nécessaire de les pousser à entamer la procédure de contrôle, mais jamais à pointer leurs erreurs. Il est possible de les accompagner dans la procédure de contrôle avec un questionnement : quel est l'indice de cette ligne ? le coloriage correspond-il ?

Lorsque les élèves se sont trompés (et le savent), pour éviter une démotivation, il faut que l'élève se rende compte tout seul qu'essayer de modifier partiellement sa grille ne l'aide pas davantage, car tout changement a des répercutions à la fois sur les lignes et les colonnes. L'enseignant peut alors lui dire que recommencer sa grille depuis le début sera plus rapide. Il est alors prêt à accepter de tout effacer pour recommencer sans frustration. L'enseignant évitera d'effacer lui-même la grille.

Les spécialistes de Nonogram pourraient arguer que la technique de contrôle ligne par ligne et colonne par colonne n'a pas de sens puisqu'en réalité, on se contrôle au fur et à mesure du remplissage de la grille. Il est toutefois bon de rappeler que l'objectif n'est pas de devenir expert en Nonogram, mais bien de faire des mathématiques.

Commentaires du point de vue de la TSD

Cette phase est le début du moment a-didactique de la séance : l'enseignant se retire du milieu pour laisser les élèves jouer en autonomie. Les élèves commencent à développer des stratégies et à se créer un modèle implicite du jeu. La validation des indices les contraint à modifier leur stratégie en cas de coloriage erroné. Une dialectique de l'action se met donc en route. L'enseignant se contente de vérifier que les élèves aient bien le réflexe de valider leur grille avant de passer à la suivante ; pour les plus fragiles,

il contrôle encore éventuellement que les règles sont bien installées. Les grilles ne seront d'ailleurs pas corrigées en classe entière, afin de laisser chaque élève construire son propre modèle du jeu, à son rythme. Il sera mis à l'épreuve dans la phase suivante.

4 Phase de formulation collective de la correction d'une grille résolue individuellement

Nous rappelons que la grille n°6 est distribuée aux élèves pour une résolution individuelle de quelques minutes, suivie d'une correction collective.

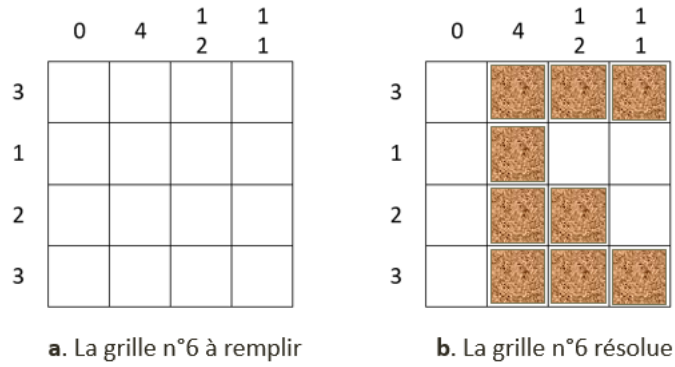


Figure 12. Grille n°6 distribuée pour une résolution individuelle, avec correction collective

4.1 Résolution individuelle : dialectique de l'action

Cette grille a été choisie pour ses capacités d'inhibition (fig. 13.a).

Nous avons souligné que les habitudes des élèves consistent en général à commencer en haut à gauche ; ainsi, un réflexe courant est de colorier les trois premières cases de la première ligne horizontale (fig. 13.b).

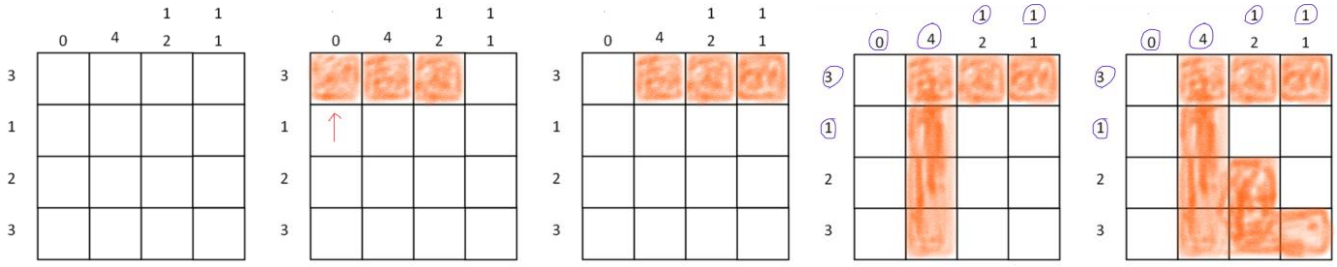


Figure 13. Analyse de la résolution de la grille n°6

L'autre réflexe est de demander à l'enseignant de valider sa grille. Ici, il est simple de demander à l'élève de vérifier lui-même tous les indiçages. La première ligne verticale, indicée (0) permet immédiatement de s'apercevoir de l'erreur.

Ainsi, dans ce cas, il ne reste plus qu'une seule possibilité pour la première ligne (fig. 13.c).

En acte, se profilent des débuts d'un raisonnement déductif tels que : « Puisque la première ligne verticale est indicée (0), elle est vide, DONC les lignes horizontales ne peuvent pas commencer à la première case ».

La deuxième ligne verticale, indicée (4), permet de montrer l'intérêt de commencer par des rangées dites « certaines », quelle que soit leur position et orientation dans la grille. Ainsi, dans ce cas, on sait que cette ligne est entièrement remplie, ce qui permet de valider certains indiçages (fig. 13.d).

Les deux dernières lignes horizontales, indicées respectivement (2) et (3), se remplissent ensuite aisément si l'on se rappelle le premier résultat trouvé (i.e. pas de cases coloriées dans la première colonne), et il ne reste plus qu'à valider la grille en vérifiant les indiçages verticaux (fig. 13.e).

À condition d'avoir vérifié que tous les élèves connaissent le principe de vérification de l'indiçage, le milieu est maintenant réactif et les élèves peuvent commencer à développer des stratégies, non encore formulées puisqu'ils jouent seuls, et sans doute pas toujours conscientisées. L'enseignant doit veiller à ne pas intervenir autrement qu'en posant éventuellement des questions telles que : « as-tu vérifié les indices ? tous les indices ? les as-tu entourés au fur et à mesure ? es-tu sûr de toi ? as-tu colorié des cases dont tu es sûr qu'elles sont pleines ?… ».

Ces propositions respectent les critères de Julo (2002) en matière d'aide non intrusive. Au moment de la mise en commun, la plupart des élèves ont rempli correctement la grille, ou bien savent que leur grille n'est pas correcte. La formulation de la correction peut désormais commencer.

4.2 Correction collective : dialectique de la formulation

Cette phase contraint les élèves à rendre explicite tout ou partie de leur appropriation du jeu, en formulant leur solution. La réaction des autres élèves peut les contraindre à justifier leur proposition ou non. Par exemple, un élève peut dire « dans la première ligne, on ne colorie pas le premier, on colorie les trois suivants », sans que les autres élèves réagissent, parce que tout le monde est d'accord. Auquel cas, la preuve n'est pas nécessaire. La formulation est suffisante. Il peut également spontanément dire : « dans la première ligne, il n'y a pas de case noire, donc comme il ne reste que 3 cases, on est contraint de les colorier », ce qui relève ici de la preuve. C'est bien la dialectique de la formulation qui joue ici, sans que la preuve soit nécessaire. L'absence d'intervention de l'enseignante permet de maintenir l'a-didacticité de la situation. Dans cette phase, l'enseignant doit résister à la tentation de poser des questions du type : « pourquoi ne colorie-t-on pas la première case dans la première ligne ? ».

Si cela s'y prête déjà ici (mais pas avant cette phase), l'enseignant pourra faire constater qu'on est parfois certain que des cases resteront blanches et qu'il est difficile de se souvenir de facto que les cases sont blanches (puisqu'elles sont blanches !). La classe conviendra d'un signe (un point, une croix, un trait oblique…) à placer dans une case pour indiquer qu'elle est, et doit rester, blanche.

5 Phase de consolidation des stratégies : nouvelles résolutions individuelles

Plusieurs grilles sont ensuite proposées aux élèves (fig. 5), au fur et à mesure de leur avancement dans la résolution des précédentes. Il est nécessaire d'avoir préparé un certain nombre de grilles, de difficultés différentes et croissantes, permettant aux élèves, selon leur niveau, de découvrir différents théorèmes du jeu (au sens de Brousseau). Nous revenons à une situation d'action pure, dans laquelle les élèves ont augmenté leurs compétences du jeu. Ils peuvent éprouver l'efficacité de leurs stratégies dans des cas déjà rencontrés, et les adapter à de nouveaux problèmes. Un contrôle plus systématique des indices permet une rétroaction du milieu, et la dialectique de l'action.

Il existe différentes modalités de jeu, que l'on fait évoluer en fonction du degré de confiance que les élèves finissent par s'accorder :

- proposer des grilles sur papier avec des étiquettes colorées et des étiquettes blanches à placer ;
- placer des grilles dans des pochettes cristal, avec possibilité d'effacer ;
- écrire directement sur les grilles au crayon à papier, avec possibilité de gommer ;
- écrire directement sur la grille avec un stylo bille, sans plus de correction possible.

La contrainte du stylo, en enlevant la possibilité du gommage, empêche une stratégie par essai-erreur, parfois encore utilisée par certains élèves. Ils ne peuvent plus remplir les cases qu'à coup sûr, et doivent

donc anticiper leur action par un raisonnement plus poussé. C'est celle que nous avons proposée aux participants.

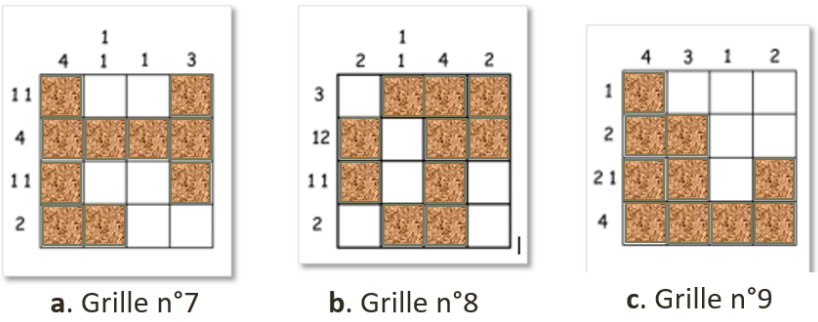


Figure 14. La solution des grilles n°7, 8 et 9

Toutes les grilles proposées comportent encore des lignes ou des colonnes indicées (4), ce qui les rend faciles à résoudre, à condition d'avoir consolidé le théorème « S'il y a un indice (4), alors la rangée est entièrement coloriée ». La figure 15 montre l'application de ce théorème pour initier la solution des grilles.

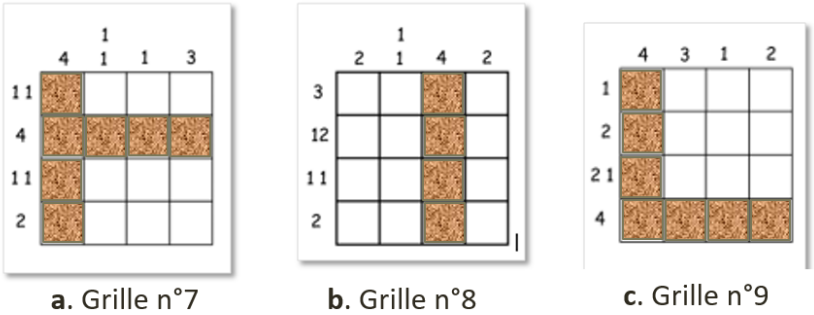


Figure 15. Le remplissage des lignes et des colonne indicées (4), comme stratégie initiale

Un contrôle intermédiaire des indices permet de valider des lignes ou colonnes indicées (1) (fig. 16)

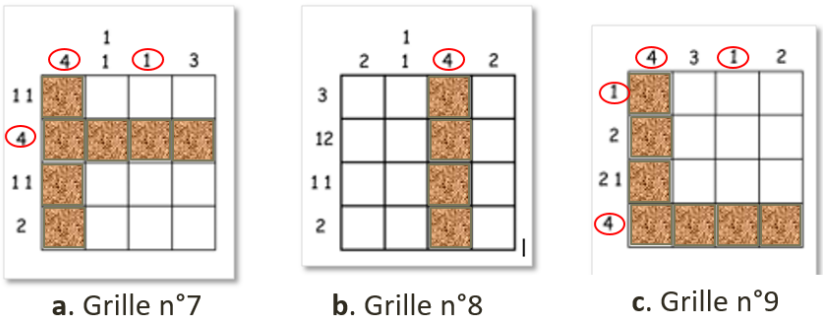


Figure 16. Contrôle intermédiaire des indices

Les stratégies peuvent ensuite différer, il ne s'agit pas d'en enseigner une en particulier, ni de devenir un expert de ce jeu, mais de développer des capacités de raisonnement.

Par exemple, le théorème suivant : « Les rangées déjà entamées en début ou fin, avec un seul indice, peuvent être remplies à coup sûr » peut être mis en œuvre, encore une fois sans nécessité de le formuler, ni même parfois d'en avoir encore conscience. On reste au niveau du modèle implicite, qui sera explicité dans la phase suivante. Voici ce que peut donner l'application de ce théorème (fig. 17) :

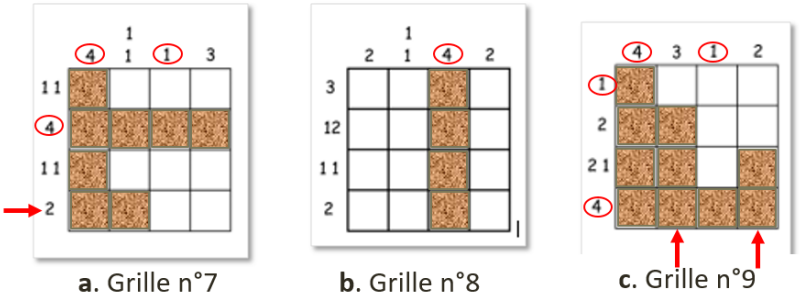


Figure 17. Complétion des lignes ou rangées déjà entamées en début ou fin de rangée

C'est ainsi que l'on peut se rendre compte du degré de difficulté d'une grille. La grille n°8 semble *a priori* plus difficile à résoudre que la grille n°9, qui est terminée, suite à l'application de ce deuxième théorème. Il serait souhaitable de vérifier ce point expérimentalement, et d'être attentif à donner des grilles de difficulté croissante à chaque élève.

D'autres théorèmes peuvent être mis en jeu, pour terminer les grilles n°7 et n°8, par exemple :

« Les indiçages (1 2) et (2 1) ne permettent qu'une seule possibilité de coloriage », ce qui permet de poursuivre la résolution de la grille n°8 (fig. 18) :

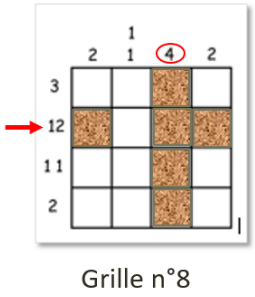


Figure 18. L'indiçage (1 2) n'offre qu'une seule possibilité

« L'indiçage (3) permet de colorier à coup sûr les deux cases centrales de la rangée », ce qui fait avancer le remplissage des grilles n°7 et 8 (fig. 19) :

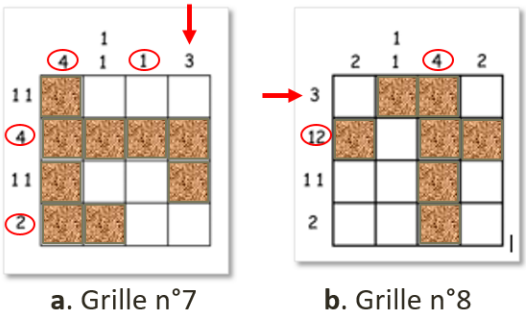


Figure 19. L'indiçage (3) permet de colorier les cases centrales

Le contrôle intermédiaire des indices permet de terminer la grille n°7 car il ne reste plus qu'une rangée horizontale et une verticale auxquelles il manque à chacune une case à colorier (fig. 20.a). Il n'y a donc plus le choix. En revanche, malgré l'avancée, on ne valide aucune rangée supplémentaire dans la grille n°8 (fig. 20.b.). On laisse au lecteur le plaisir de terminer cette grille, en explicitant d'autres théorèmes de ce jeu, moins importants pour notre objectif de raisonnement (mais fondamentaux pour qui souhaite devenir expert).

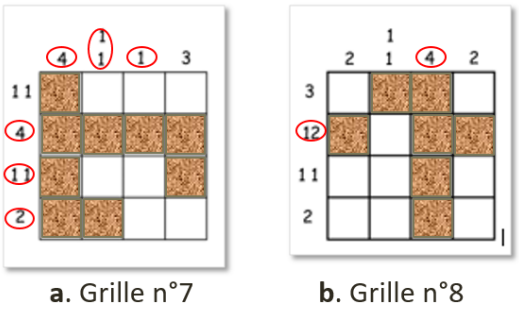


Figure 20. Contrôle intermédiaire des indices

Cette phase de consolidation des stratégies des élèves leur permet d'acquérir des convictions sur leur validité, et le pouvoir de les défendre efficacement dans une situation permettant une dialectique de la preuve. C'est l'objectif de la phase suivante.

6 Phase de justification de la résolution d'une grille collective : dialectique de la preuve

La phase 6 a pour objectif de faire justifier aux élèves, qui ont tous résolu seuls des premières grilles, certaines stratégies qu'ils ont mises en place pour cela, ce que Brousseau appelle les théorèmes du jeu.

On leur propose donc une grille projetée au tableau, à résoudre tous ensemble. Voici sa solution (fig. 21) :

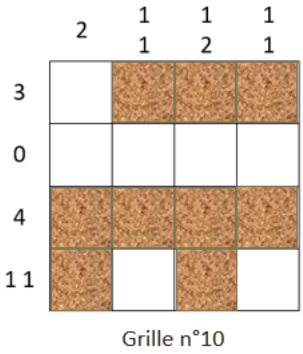


Figure 21. La solution de la grille n°10

Afin de contraindre les élèves à formuler leur stratégie, un élève ou le professeur joue le rôle de secrétaire au tableau, ce qui signifie qu'il colorie les cases selon les indications verbales des élèves, et seulement selon ces indications, sans inférer quoi que ce soit.

Il s'agit d'abord de contraindre les élèves à formuler précisément les actions : non pas « là, on met 3 » accompagnée d'une gestuelle, mais bien « on se place dans la première ligne … », ce qui a déjà été travaillé lors de la phase 4.

Mais ici, on va plus loin. Les élèves doivent formuler non seulement des actions, mais également des stratégies puisque les autres doivent approuver le choix de celui qui a la parole.

La grille est choisie pour utiliser et justifier les théorèmes que l'on a développés lors de la phase 5. Nous en évoquons ici quelques-uns, formulés sous une forme plus canonique, et accompagnés d'une justification possible pour les élèves. La liste est loin d'être exhaustive.

- **Si l'indice est (0), alors aucune case n'est coloriée.**
  La justification est évidente, elle vient de la définition même de l'indiçage.
- **Si l'indice est (4), alors toutes les cases sont coloriées.**
  La justification pourrait là encore être évidente, mais en réalité, ce théorème n'est vrai que lorsque l'on dispose d'une grille 4 × 4. Nous verrons dans la phase suivante qu'il se transforme en : « Si l'indice est (5), alors la ligne est pleine », parce que l'on travaille sur une grille 5 × 5.

Ici, la justification serait donc : comme il y a 4 cases dans une rangée, et qu'il faut en colorier 4, alors, elles sont toutes coloriées.

- **Si l'indice est (2 1), alors les deux premières cases sont coloriées, la troisième ne l'est pas, la quatrième l'est.**
  La justification vient du fait qu'il y a 2 + 1 = 3 cases coloriées, séparées par un espace. Or, on ne dispose que de 4 cases ; cet espace ne peut donc être que de 1 case, ce qui ne laisse que la possibilité « 2 cases coloriées – 1 case vide – 1 case coloriée ».
- **Si l'indice est (1 2), alors la première case est coloriée, la deuxième ne l'est pas, les deux suivantes le sont**.
  La justification est la même que précédemment.
- **Si l'indice est (3), alors les deux cases centrales sont coloriées**.
  On peut justifier ce théorème en utilisant un raisonnement par exhaustion : comme le montre la figure 22, il y a deux possibilités de coloriage, et deux seulement, et, dans les deux cas, les cases centrales sont coloriées



Figure 22. Les deux possibilités correspondant à l'indiçage (3)

Du point de vue de la TSD, cette phase met-elle réellement en place une dialectique de la preuve ? La question se pose car c'est l'enseignant qui relance les interventions des élèves et valide leurs raisonnements, par un jeu de questions-réponses. La situation n'est pas réellement a-didactique, dans la mesure où la motivation de la preuve ne vient pas du jeu, mais d'une consigne de l'enseignant. Le dialogue se noue entre l'enseignant (au tableau ou distribuant la parole dans la salle) et l'élève qui raisonne, plutôt qu'entre les élèves eux-mêmes. Ceci n'implique pas nécessairement que les élèves ne progressent pas, mais il faudra s'interroger sur ce qu'ils auront appris.

C'est lors de cette phase que l'on commence vraiment à faire des mathématiques. Il est important que les élèves en comprennent l'enjeu : il ne s'agit pas de devenir expert, mais de savoir raisonner, et justifier ses convictions.

Nous pouvons mettre en place quelques règles du débat mathématique après cette phase, lors d'un moment d'institutionnalisation. Nous renvoyons le lecteur au paragraphe IV.1. pour des traces écrites possibles.

Selon le niveau de classe, l'enseignant peut proposer aux élèves d'écrire les « tactiques », une manière de nommer auprès des élèves ce que nous avons nommé ici théorèmes du jeu. L'explicitation d'une tactique peut prendre la forme de « si…alors », mais comme elle est adossée à ce que vit l'élève sur un plan logico-math en résolvant une grille, il en comprend bien le sens (« quand je vois l'indice 4 alors c'est sûr, c'est obligé, je colorie toutes les cases » - parole d'élève).

7 Phase de mise à l'épreuve des stratégies par changement de la taille des grilles

On revient à une situation d'action pure, où les stratégies précédentes doivent une nouvelle fois être adaptées, cette fois-ci à la nouvelle taille de la grille. Les théorèmes précédents ne sont plus tous valides.

Certains d'entre eux s'adaptent facilement. Par exemple,

- L'indiçage (5) indique que toutes les cases de la rangée sont coloriées.
- L'indiçage (4) indique que les trois cases centrales sont coloriées (adaptation un peu moins évidente).

La figure 23 montre comment on peut commencer à résoudre ces grilles par l'application de ces deux théorèmes. On laisse au lecteur le soin de poursuivre la résolution et de trouver de nouveaux théorèmes.

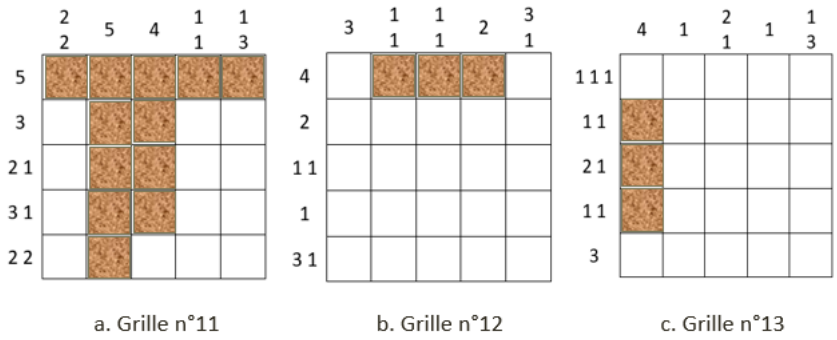


Figure 23. Début de résolution des grilles 5 × 5 par adaptation des théorèmes 4 × 4

Cette phase, selon son organisation, qui va dépendre du niveau de la classe, peut donner lieu à de nouvelles dialectiques de formulation et de preuve, allant jusqu'à la généralisation de certains théorèmes.

On peut alors y voir une utilisation de l'algèbre. Par exemple,

- Pour une grille de taille n × n, l'indiçage (n) indique qu'il faut colorier toutes les cases de la rangée.
- Pour une grille de taille n × n, l'indiçage (n-1) indique que, soit la première, soit la dernière case de la rangée est vide, et toutes les autres sont coloriées. On peut donc colorier les n – 2 cases centrales à coup sûr.
- Pour une grille de taille n × n, si p est inférieur à la moitié de n, l'indiçage (n-p) indique que, soit les p premières, soit les p dernières cases de la rangée sont vides, et toutes les autres sont coloriées. On peut donc colorier les n – 2p cases centrales à coup sûr.

Nous ne développons pas ici les modalités d'enseignement pour arriver à ce genre de formulation, le déroulement reste à imaginer. Encore une fois, n'oublions pas que l'objectif n'est pas de devenir expert à ce jeu, mais bien de faire des mathématiques.

Notons que cette phase permet aux élèves, qui avaient entendu les formulations des autres peut-être un peu trop tôt par rapport à leur propre progression, d'avoir une nouvelle occasion de penser et de dire des théorèmes de jeu.

8 Phase de réinvestissement : création de nouvelles grilles

La situation continue à évoluer, par une nouvelle phase d'action, puis de communication avec le binôme. Pour le premier élève, le milieu est dans un premier temps muet, il utilise ses connaissances de l'indiçage pour créer sa grille et reporter les indices. Il n'a pas besoin de connaître de stratégie. Il peut se contenter de colorier des cases sans réflexion particulière, puis indicer sa grille, avant de recopier les indices sur l'autre grille et de plier sa feuille. Il peut même créer un indiçage *ex nihilo*, auquel cas, il n'aura pas la solution *a priori*.

C'est plus intéressant pour le second élève, qui doit résoudre une grille dont la solution se trouve au dos. Le milieu devient plus réactif lorsque les deux élèves ne sont pas d'accord. On entre alors dans une dialectique de la formulation, voire de la preuve, selon le degré de maîtrise du jeu des deux élèves. La situation est entièrement a-didactique.

Les causes d'un désaccord peuvent être multiples :

1. l'élève 1 se trompe en indiçant sa grille ;
2. l'élève 1 se trompe en recopiant ses indices ;
3. l'élève 2 se trompe en résolvant la grille ;
4. la grille a plusieurs solutions, et chacun en propose une différente de l'autre ;

5. la grille n'a pas de solution.

Les trois premiers cas se résolvent grâce au modèle développé et explicité dans les phases précédentes.

Le cas 4 arrive lorsque la grille proposée présente, par exemple, peu de cases noires (fig. 24).

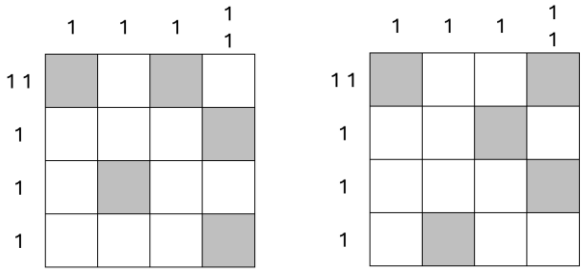


Figure 24. Deux grilles différentes pour un même indiçage

Le cas 5 est plus rare, et ne peut arriver que si le premier élève indice une grille vierge, sans même en imaginer le coloriage.

Ces erreurs donnent un nouveau regard sur les grilles, et permettent un effet de rupture de contrat propice au raisonnement scientifique : tous les problèmes n'ont pas de solution, et certains problèmes en ont plusieurs.

Notons que, si le cas 5 ne se présente pas, l'enseignant peut fournir aux élèves une grille sans solution. Les élèves signaleront une erreur d'indiçage à l'enseignant qui aura, lui, une belle occasion d'expliquer que cette grille n'a pas de solution, et par extension : tous les problèmes n'ont pas toujours une solution.

IV - LE SCÉNARIO DE FORMATION PRÉSENTÉ EN ATELIER

Nous avions prévu de faire d'abord vivre aux participants l'activité telle qu'elle est proposée à des élèves, en les situant donc clairement au palier 0, puis au palier 1, lors des moments d'institutionnalisation.

En théorie, il ne devait donc y avoir, lors de cette phase, aucune analyse d'aucun ordre didactique, ni pédagogique, ce qui, dans les faits, s'est trouvé difficile à réaliser, car les interactions spontanées entre les formés et les formatrices nous ont fait monter à plusieurs reprises dans les paliers 2 et 3.

Ce phénomène aurait pu être prévu, le public de l'atelier étant composé de formateurs. Le scénario ne peut donc pas produire les mêmes effets sur ces participants éclairés, déjà en attente d'un palier supérieur, que sur des élèves ou des étudiants en formation initiale.

1 Les paliers 0 et 1 – Les participants vivent l'activité-amorce

Le premier temps de l'atelier a consisté à vivre l'activité-amorce en entier. Comme nous l'avons signalé en introduction, la séquence telle que nous l'avons présentée n'est pas celle qui a été réellement vécue puisqu'elle a été entrecoupée à de nombreuses reprises d'analyse mathématique et didactique des tâches.

Aux paliers 0 et 1, les participants à l'atelier sont placés en position d'élève afin de vivre l'activité amorce. Elle a été décrite au paragraphe II et analysé au paragraphe III. Nous pouvons brièvement la compléter en posant la question suivante : leur activité est-elle réellement mathématique, et, dans l'affirmative, de quelles mathématiques s'agit-il ?

Essentiellement, la séquence élève, telle qu'elle est conçue, a pour objectif de développer certaines compétences dans le raisonnement déductif. Plus précisément, les phases 4 et 6 permettent d'expliciter certaines règles du raisonnement mathématique dont la première, qui nous semble essentielle :

- **en mathématiques, on n'a pas besoin de l'enseignant pour savoir si on a raison ou pas, à condition d'avoir des moyens de contrôle et de les utiliser ;**
- justifier qu'une tactique est fausse peut se faire à l'aide d'un **contre-exemple ;**
- en revanche, pour montrer qu'une stratégie (plus largement un théorème) est exacte, un seul exemple ne suffit pas ; il faut faire une déduction, et il y a plus d'efforts à fournir ;
- ce n'est pas le nombre de personnes d'accord avec un raisonnement qui en fait sa validité ;
- une déduction peut se faire grâce à une propriété générale, du type « Si …, alors … » ; par exemple, dans une grille 4 × 4, « Si l'indice d'une ligne ou d'une colonne est 4, alors je dois colorier 4 cases qui se suivent ; si je dois colorier 4 cases qui se suivent dans une grille 4x4 alors toutes les cases de la ligne ou de la colonne sont coloriées » ;
- …

Selon les niveaux de classe où l'on enseigne, il peut être fécond d'expliciter d'autres points, sans forcément les institutionnaliser. La liste ci-dessous n'est pas exhaustive :

- formuler quelques implications propres au jeu sous la forme : Si …, alors … », comme « Si le codage est (1 2) ou (2 1), alors on connaît le coloriage de la rangée à coup sûr », accompagné de sa preuve : 1+2=3 auquel on ajoute la place de l'espace, cela fait 4 ; or, il n'y a que 4 places … ;
- éprouver une argumentation en deux implications successives, en comprenant que les deux implications sont nécessaires, et qu'il y a un ordre entre les deux ;
- travailler la dépendance entre les lignes et les colonnes, qui permet cette implication double ;
- énumération de toutes les possibilités données par un indiçage et pour cela avoir une logique qui permet d'avoir toutes les possibilités ;
- prendre conscience, formuler des modèles construits implicitement, et savoir les défendre, ou les invalider ;
- passer d'un raisonnement particulier à un raisonnement général en modifiant la taille des grilles (voir phase 7). Des théorèmes peuvent se transformer de « Si le codage est (4), alors …. » à « Si le codage correspond à la taille de la grille, alors … » ou encore « Si le codage est (n), où n est à la taille de la grille, alors … »

Nous avons exposé certains de ces moments d'institutionnalisation aux participants.

2 Les paliers 2 et 3.

La suite du déroulement théorique de l'atelier était le suivant : après avoir vécu le scénario en position d'élèves, les participants à l'atelier étaient invités, par groupe, à en analyser les différentes phases, d'un point de vue didactique et pédagogique. Nous avions prévu d'attribuer à chacun des 4 groupes l'analyse particulière de deux phases (phases 1 et 3 pour le groupe 1, phases 2 et 5 pour le groupe 2, phases 4 et 8 pour le groupe 3, et phases 6 et 7 pour le groupe 4), avec les questions suivantes :

- Quelles modalités/choix pédagogiques sont à effectuer pour cette phase ?
- Quels gestes professionnels sont mis en œuvre ?
- Quelles sont les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer ?
- Quelles sont les particularités des grilles proposées ?
- Quels enseignements mathématiques peut-on espérer transmettre ?

Les participants étaient alors positionnés en tant qu'enseignants (ou élèves-enseignants), tout à tour au palier 2 ou 3 du scénario de formation, selon que les choix pédagogiques et didactiques étaient

contextualisés à la situation-amorce, ou bien décontextualisés, puis institutionnalisés par les formatrices, lors de la phase d'institutionnalisation.

L'analyse du paragraphe III, qui devait servir d'institutionnalisation, a finalement alimenté les échanges lors de la passation de l'activité-amorce. En effet, cette dernière ayant finalement pris beaucoup plus de temps que prévu, nous avons préféré annuler les premiers travaux de groupe.

3 Le palier 4 : adaptation de l'activité à d'autres jeux

Une fois l'analyse du scénario terminée, nous avons proposé aux participants de découvrir quatre autres jeux de grilles, en atelier tournant. Les jeux étaient installés sur des tables au fond de la salle, et les participants, par groupe de 4 ou 5, sont restés 5 minutes par table. Leur consigne était de découvrir des stratégies pour chaque jeu, en situation d'action.

A la dernière table, chaque groupe devait, en plus de jouer, se poser les questions suivantes :

- Quelles sont les notions mathématiques qui peuvent être travaillées à travers l'utilisation de ce jeu ?
- Que peut-on garder du scénario initial ? Que doit-on modifier et pourquoi ?

La formation se situe clairement alors au palier 4. Les participants sont soumis à la problématisation d'une question professionnelle : comment adapter une séquence de classe à un autre contexte ?

Il s'agit ici de faire une brève analyse *a priori* d'un jeu, puis d'adapter le scénario initial à ses spécificités. Une mise en commun permet à chacun de découvrir tous les autres jeux.

Nous présentons en annexe rapidement les différents jeux travaillés, les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer pour chacun d'entre eux, ainsi que les différences notables que l'on peut mettre en évidence par rapport au premier.

Cette dernière partie de l'atelier a permis aux participants d'éprouver les différents jeux, et d'en comprendre rapidement les enjeux, grâce à l'analyse faite précédemment sur le Nonogram.

V - CONCLUSION

Pour conclure, nous souhaitons mettre en valeur plusieurs points concernant le scénario de formation proposé dans l'atelier, du point de vue des formateurs et des enseignants plutôt que du point de vue des élèves eux-mêmes.

Toutefois, nous souhaitons commencer par rappeler le point suivant : l'objectif n'est pas d'apprendre à jouer aux élèves, encore moins à les entraîner au jeu.

Du point de vue des gestes professionnels, cela signifie qu'un enseignant de mathématiques, quand il utilise un jeu, doit savoir s'arrêter de l'utiliser lorsqu'il a fini de l'exploiter mathématiquement.

Plus généralement, ce scénario de formation permet à l'enseignant de revoir des attitudes ou gestes professionnels, souvent connus, mais peu, pas ou encore mal exploités : permettre à l'élève de se corriger seul, ne pas expliciter à sa place, ne pas donner la réponse, faire confiance à la réactivité de la situation, accepter que les élèves se trompent…

De plus, comme le jeu n'a probablement jamais été testé en classe, les enseignants ne sont pas en position de comparer les propositions des formateurs par rapport à leur propre pratique, ils ne se sentent pas jugés et sont plus ouverts pour participer.

C'est donc un premier avantage pour le formateur. Le second, et non le moindre, est que le scénario propose un objet d'enseignement construit, justifié, amusant (il est quand même temps de le dire). Le plus souvent, disposant des documents, les enseignants réinvestissent la séquence dans les jours qui suivent la formation, ce qui en prolonge les bénéfices. Les retours au formateur sont fréquents et le plus souvent enthousiastes.

Le formateur a toutefois un choix à faire : présente-t-il, comme nous l'avons fait, le scénario « élève », au risque que les grilles proposées, adaptées à des élèves, soient parfois trop faciles pour un public adulte, ou rend-il la tâche plus problématique pour les formés, par exemple en cachant certains indices, en évitant l'indiçage (4), en augmentant la taille des grilles, ... permettant ainsi de faire vivre aux formés une véritable situation constructiviste, mais en en perdant le bénéfice d'une activité-élève « clé en main » ? Nous pensons que ce choix dépend de l'objectif de la formation. S'il s'agit d'initier des enseignants ou des formateurs à la TSD, alors, il faudrait sans doute travailler avec des grilles plus complexes, s'astreindre à réellement faire vivre des situations a-didactiques, en particulier lors de la dialectique de la preuve, et ce scénario reste encore à être créé et testé.

RÉFÉRENCES

Bilgot, A., Billy, C., Celi, V., Grau, S., Guille-Biel Winder, C., Laurençot-Sorgus, I., Mangiante-Orsola, C., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. et Thomas, C. (2025). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses.* Tome 3. ARPEME

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. En ligne : https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Favre, D. (2012). Les neurosciences inspirent l'enseignement. *Cerveau & Psycho. L'Essentiel*, 11, 40-47.

Guille-Biel Winder, C. (2026). Savoirs en jeu dans des situations de formation des professeurs des écoles : quelle articulation ? *Actes du 51e colloque de la COPIRELEM*, Strasbourg 2025. ARPEME.

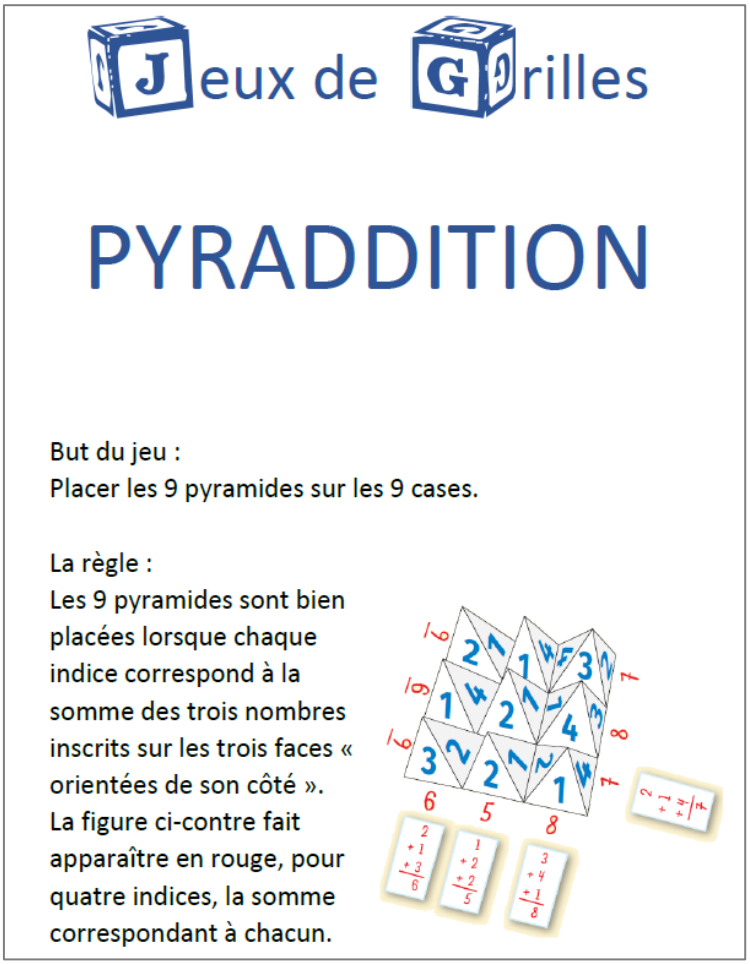
Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maitres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 289-322.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?. *Grand N*, 69, 31-52

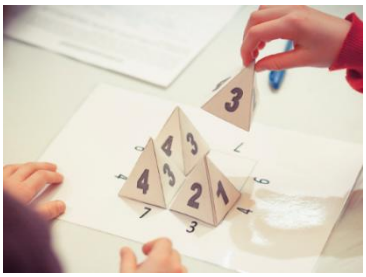
Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères-IREM*, 61, 19-35.

ANNEXE 1 (JEU PYRADDITION)

Voici l'affiche permettant aux participants de découvrir la règle du jeu :



Variantes par rapport au scénario et aux modalités donnés :



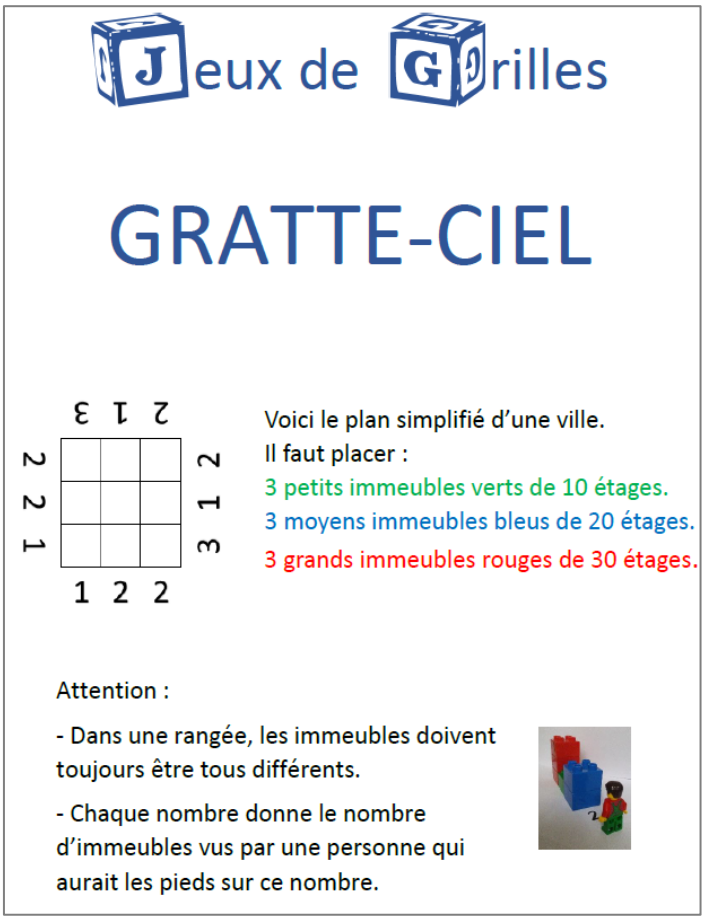
Alors que les jeux de grilles se jouent, au moins au début, en individuel, ce jeu peut être joué par 4 personnes (une devant chaque côté du plateau). Le premier joueur pose 2 pyramides et explique pourquoi, le 2e pose une 3e pyramide et justifie à son tour, le 3e pose la dernière pyramide et justifie également. Le dernier (le 4e) contrôle la cohérence des indices avec l'ensemble du plateau. Au tour suivant, le rôle de chacun change.

De manière décrochée, l'enseignant peut proposer aux élèves d'examiner toutes les façons de faire une somme du plateau, comme il avait été proposé précédemment d'étudier toutes les manières de colorier une rangée avec l'indiçage (1 1).

Prenons par exemple « faire 7 ». Ce sera une occasion d'inhiber certaines décompositions automatisées (type « la maison du 7 ») L'élève sera tenté de proposer 5 + 2 qui ne peut être retenu ici, ne disposant que des nombres de 1 à 4.

ANNEXE 2 (JEU GRATTE-CIEL)

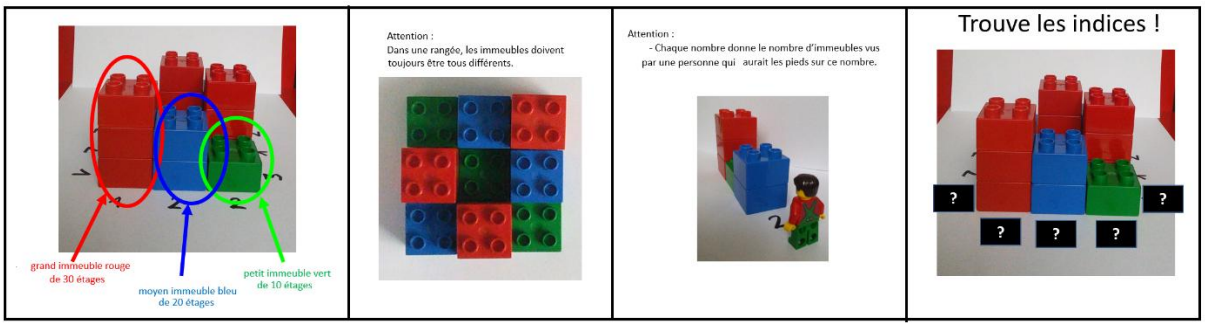
Voici l'affiche permettant aux participants de découvrir la règle du jeu :



Variantes par rapport au scénario et aux modalités donnés :

La difficulté première réside dans la compréhension de la règle. Ce jeu intègre en réalité une double règle, qui demandera d'ailleurs une flexibilité en jouant. Il y a la règle connue du sudoku (les immeubles doivent tous être différents dans une rangée) et celle de l'indiçage qui, elle, demande de comprendre un point de vue, utilisant la 3D, et nécessite de se représenter mentalement les objets tout en se déplaçant sur le plateau.

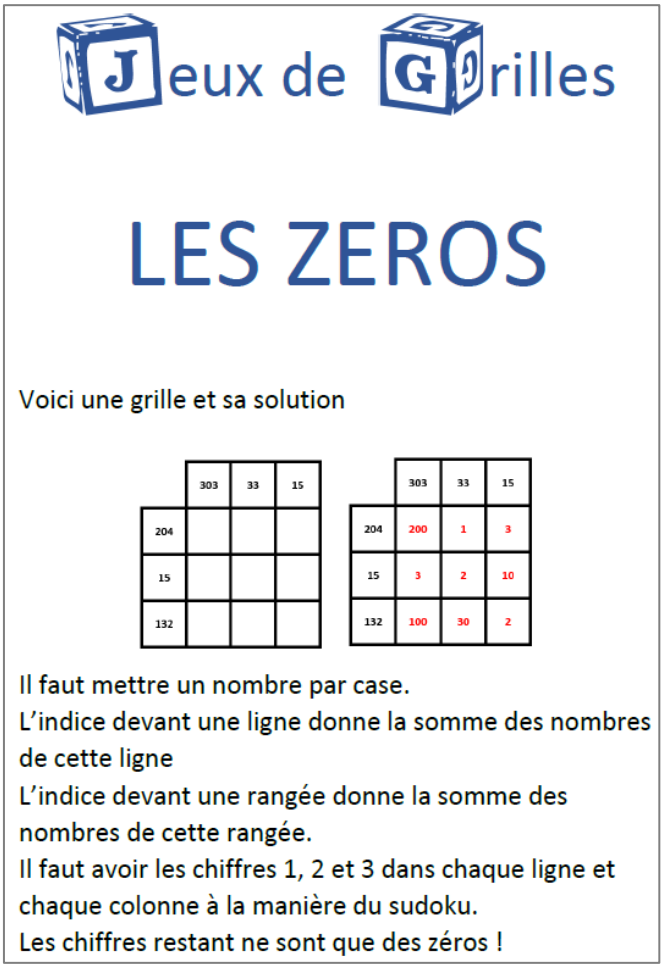
La proposition, testée de nombreuses fois en classe, est d'utiliser les briques pour représenter les immeubles sans pour autant donner une ville entière à manipuler. Les photos des immeubles, de la ville, d'une rangée sont utilisées dans un diaporama pour expliquer les règles :



L'enseignant circulera également avec un immeuble de chaque sorte, fait en brique, pour permettre aux élèves de vérifier lorsqu'ils seront en difficulté (en effet les grilles sont aux dimensions des briques).

ANNEXE 3 (JEU LES ZEROS)

Voici l'affiche permettant aux participants de découvrir la règle du jeu :



<u>Variantes par rapport au scénario et aux modalités donnés :</u>

Ce jeu présente une difficulté de compréhension de la règle. Les participants sont invités à trouver une nouvelle manière de présenter la règle, la règle écrite ci-dessus n'étant pas facile à comprendre.

Une modalité performante est de présenter à la classe la construction d'une grille comportant des 1, 2 et 3 dans chaque rangée. De proposer ensuite d'ajouter des zéros, ou non, après chaque chiffre puis de faire la somme des nombres de chaque rangée et d'indiquer, pour finir, cette somme en début de rangée.

À noter qu'en plus de raisonner, ce jeu permet de travailler les décompositions des nombres qui ne sont pas nécessairement en centaines, dizaines, unités. Il y aura par exemple 123 = 20 + 3 + 100 mais aussi 402 = 100 + 300 + 2.

Ce jeu permettra également des raisonnements qui comparent les nombres, par exemple : on ne peut pas mettre 200 dans la colonne qui comporte un indice 30 (voir grille ci-contre).

	420	150	33
132	100	30	2
150	20	100	30
321	300	20	1

Il demandera aussi d'inhiber de faire correspondre, pour une case, son indice en ligne avec son indice en colonne ; en effet, ci-contre, les indices 150 et 132, ne permettent pas de placer 100 à l'intersection de leurs deux rangées.

ANNEXE 4 (JEU EUROSOMME)

Voici l'affiche permettant aux participants de découvrir la règle du jeu :

Jeux de Grilles

EUROSOMME



Il faut mettre une pièce par case.

Le nombre devant une ligne donne la somme des pièces de cette ligne.

Le nombre au-dessus d'une colonne donne la somme des pièces de cette colonne.

Placez les pièces !

	0,70€	2,70€	2,10€
1,10€			
3,10€			
1,30€			

<u>Variantes par rapport au scénario et aux modalités donnés :</u>

Ce jeu diffère des autres jeux proposés car il permet de varier les modalités, et faciliter ainsi une véritable différentiation. L'enseignant pourra proposer, selon les élèves, de jouer :

- avec les 9 bonnes pièces de la grilles ;
- avec des pièces ;
- avec un feutre effaçable ;
- avec un stylo.

Une erreur fréquente, en jouant sans pièce, est de proposer une décomposition qui n'existe pas comme 30 cts + 50 cts + 50 cts. De la même manière, les décompositions se verront limitées en considérant l'existence des pièces.

Ce jeu permettra, comme le jeu des zéros, des raisonnements qui comparent les nombres, comme par exemple : on ne peut pas mettre 2 € dans la colonne qui comporte l'indice 0,70 €.

DE SITUATIONS DE REPRODUCTION DE FIGURES PAR PLIAGE D'UN PLIOX À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE À L'ÉLABORATION D'UNE RESSOURCE À DESTINATION DES ENSEIGNANTS

Claire GUILLE-BIEL WINDER
Maîtresse de conférences, Aix-Marseille Université
IRES Aix-Marseille, AMPIRIC, COPIRELEM
Claire.winder@univ-amu.fr

Christophe DRACOS
Conseiller pédagogique départemental en mathématiques, DSDEN13
IRES Aix-Marseille, ADEF
Christophe.dracos@ac-aix-marseille.fr

Stéphane GINOUILLAC
Maitre de Conférences, INSPÉ de l'Académie de Versailles
Laboratoire LMV, UVSQ
Stephane.ginouillac@uvsq.fr

Christine MANGIANTE-ORSOLA
Maîtresse de Conférences, INSPÉ Lille HdF
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@univ-lille.fr

Barbara STRBA
Conseillère pédagogique de circonscription Hautes-Alpes 05
Barbara.strba@ac-aix-marseille.fb

Sylvie BLANQUART
PRAG, INSPE-Université de Bordeaux
Lab E3D, IREM de Bordeaux
sylvie.blanquart@u-bordeaux.fr

Résumé
Cet atelier prend sa source dans une recherche portant sur le développement de séquences de reproduction de figures par pliage d'un artefact particulier, le Pliox. Elle s'inscrit dans le cadre d'un travail collaboratif en cours entre chercheurs, formateurs et enseignants (le projet J2MA). Les séquences élaborées dans ce cadre sont destinées aux élèves des différents niveaux de l'école élémentaire (du CP au CM2, de 6 à 11 ans) et mettent en scène des situations d'action et de communication. Afin d'assurer la diffusion de ces travaux, le groupe de recherche a conçu une ressource à destination des enseignants, qui vise des enjeux de développement professionnel. L'atelier vise à interroger les choix liés à la conception de cette ressource (situations didactiques proposées, indications relatives à leur mise en œuvre, savoirs en jeu, gestes professionnels requis). Les analyses produites dans l'atelier mettent en évidence des enjeux à prendre en compte dans la production d'une ressource à destination des enseignants et fournissent des points d'appui pour enrichir le document, tant au niveau du fond que de la forme.

Dans le cadre d'un travail collaboratif (le projet J2MA[1]) entre chercheurs, formateurs et enseignants, nous avons développé plusieurs séquences de géométrie à destination d'élèves des différents niveaux de l'école élémentaire (du CP au CM2, de 6 à 11 ans). Ces séquences mettent en scène des situations d'action et de communication (Brousseau, 1998). Nous avons rendu compte de ce travail lors d'un précédent atelier (Guille-Biel Winder et al., 2025). Afin d'assurer la diffusion de nos travaux, nous avons ensuite conçu une ressource à destination des enseignants, qui vise à permettre une reprise de ces situations en classe, ainsi qu'à apporter aux enseignants des éléments contribuant à leur développement professionnel[2]. L'objectif de cet atelier est de faire produire aux participants une analyse de cette ressource (identification des contraintes, des besoins et des leviers), afin d'interroger les choix effectués.

Après être revenus sur les situations de reproduction de figures ainsi que brièvement sur les situations de formulation (partie I), nous présentons la ressource que nous avons élaborée ainsi que les choix qui y ont présidés (partie II). Nous exposons ensuite le déroulement de l'atelier (partie III). Dans les deux parties suivantes, nous restituons les productions, analyses, réflexions et apports des participants à propos des situations didactiques (partie IV) puis de la ressource elle-même (partie V). Une synthèse clôt ce compte-rendu (partie VI).

I - SITUATIONS DE REPRODUCTION DE FIGURES PAR PLIAGE D'UN PLIOX

Un Pliox est un artefact (Rabardel, 1995), c'est-à-dire une « chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité » (Houdement et Kuzniak, 2006, p. 186). Il prend la forme d'un carré de papier qui présente sur une face quatre zones colorées, également carrées, l'ordre des couleurs étant jaune, rouge, vert, bleu quand on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 1a). Cet ordre de couleurs est important et fait partie intégrante de l'artefact. Le Pliox possède également un ensemble de douze plis autorisés qui correspondent aux axes de symétrie du carré principal et des carrés « secondaires » (figure 1b) – trois plis dans chaque direction parallèle à un des côtés ou à une des diagonales. Le verso du Pliox est laissé blanc.

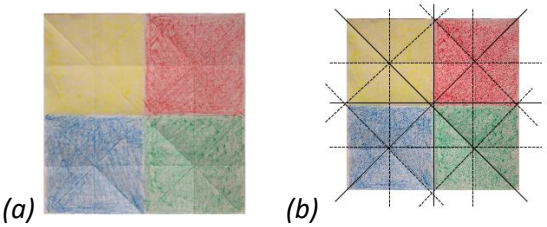


Figure 1. Recto du Pliox (a) ; plis autorisés (b)

À partir de cet objet, nous avons conçu un ensemble de situations didactiques d'action et de situations de formulation (Brousseau, 1998) qui peuvent être mises en œuvre du cycle 2 (voire de la fin du cycle 1) au cycle 3. Nous les présentons rapidement dans ce qui suit – en renvoyant pour plus de détails à (Guille-Biel Winder, 2014a, 2014b, 2021, 2025 ; Guille-Biel Winder et al., 2025).

[1] Le projet J2MA (*Jeux et Manipulations en Mathématiques pour Apprendre*) s'inscrit dans les travaux communs de l'équipe pilote Maths-Ampiric du PIA3-AMPIRIC et de l'IRES d'Aix-Marseille. Les membres impliqués en 2024-2025 au niveau national dans le projet sont : Émilie Blanchetier (Groupe mathématiques des Landes, IREM de Bordeaux), Sylvie Blanquart (LabE3D, IREM de Bordeaux, Université de Bordeaux), Christophe Dracos (ADEF, IRES d'Aix-Marseille, DSDEN des Bouches-du-Rhône), Stéphane Ginouillac (LMV, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines), Claire Guille-Biel Winder (ADEF, AMPRIRIC, IRES d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université), Clémence Larcher (IRES d'Aix-Marseille), Christine Mangiante-Orsola (LML, Université de Lille), Émilie Mari (IRES d'Aix-Marseille, INSPE), Anne Prouha (IRES d'Aix-Marseille), Barbara Strba (IRES d'Aix-Marseille).

[2] Mais comme des participants l'ont indiqué dans l'atelier, si le public visé par cette ressource est prioritairement celui des enseignants, il est certain qu'elle sera également lue et utilisée par des formateurs !

1 Des situations d'action

Exemples de situations de reproduction

Les situations d'action associées au Pliox consistent à demander la reproduction de figures modèles par pliage effectif d'un Pliox selon les plis autorisés. Nous présentons ci-dessous des éléments d'analyse sur les enjeux mathématiques et cognitifs de ces situations d'action, ainsi que sur l'adéquation de ces enjeux aux instructions officielles françaises actuelles. Voici trois exemples parmi les premières figures que nous proposons de reproduire dans la brochure :

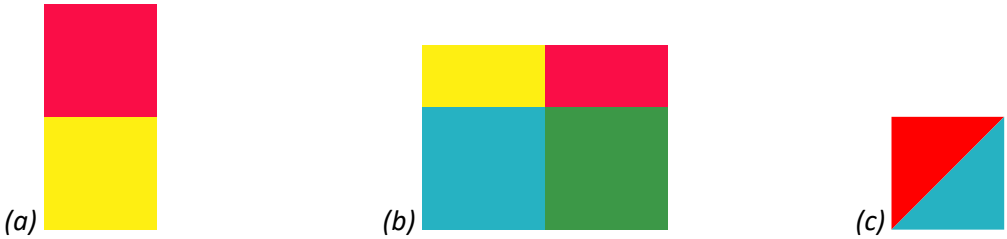


Figure 2. Exemples de figures modèles à reproduire

Les figures modèles 2a et 2b sont parmi les plus simples, parce qu'elles nécessitent chacune un seul pli. Pour autant, elles ne présentent pas le même niveau de difficulté, le pli à effectuer pour reproduire la figure modèle 2b étant moins évident à identifier. Par ailleurs, il est plus difficile de produire des formulations permettant de reproduire la figure modèle 2b que la figure modèle 2a. Enfin la figure modèle 2c introduit de nouvelles difficultés : au moins trois pliages sont nécessaires pour la reproduire ; les deux figures juxtaposées sont des sous-figures de carrés monochromes (rouge et bleu) n'ayant aucun côté commun sur le Pliox (autrement dit, les figures modèles 2a et 2b correspondent à des sous-figures du Pliox, alors que ce n'est pas le cas de la figure modèle 2c). Nous retrouverons plus loin les deux figures modèles 2a et 2c, que nous avons utilisées dans l'atelier.

Éléments d'analyse

Un premier enjeu cognitif associé à l'ensemble de ces situations didactiques est le fait d'acquérir de manière progressive une sorte de flexibilité quant à la reconnaissance des formes, qui peuvent se présenter dans différentes positions, et être détachées ou intégrées dans d'autres figures (Guille-Biel Winder, 2014).

Les connaissances mises en jeu sont de différentes natures : géométriques, spatiales et langagières. Certaines sont en cours d'apprentissage en CP et CE1 (élèves de 6 à 8 ans) et d'autres sont plus anciennes. Les connaissances géométriques peuvent concerner, selon le choix des figures modèles à reproduire, des quadrilatères particuliers (le carré, le rectangle, voire le trapèze), certaines de leurs propriétés (nombre de côtés, égalités de longueurs, angles droits notamment), des triangles isocèles-rectangles, d'autres polygones (en particulier des pentagones ou hexagones) ainsi que des relations entre différentes formes, telles par exemple que la relation entre le rectangle « demi-carré » et le carré (cas de la figure modèle 2a) ou celle entre le triangle isocèle rectangle et le carré (cas de la figure modèle 2c). Les droites particulières du carré (médianes, diagonales, axes de symétrie) peuvent également être mises en évidence. Par exemple, la médiane commune des carrés jaune et rouge, qui est utilisée dans la reproduction de la figure modèle 2b, peut être effectivement perçue comme une droite lorsqu'on la regarde du verso (donc détachée des côtés des carrés).

Un premier enjeu langagier se situe dans l'introduction et l'utilisation progressive de termes géométriques. Le vocabulaire géométrique est ainsi introduit et utilisé en situation, sans brider l'expression spontanée des élèves. Les termes de la vie courante peuvent être acceptés s'ils permettent et facilitent une bonne communication, et peuvent être repris si besoin par l'enseignant à un moment ultérieur pour les remplacer progressivement par des termes spécifiques du langage géométrique.

Les connaissances spatiales[3] en jeu sont relatives à l'orientation et à la position des différentes sous-figures dans les figures modèles. Les connaissances liées à la position sont en jeu dans l'identification de la position des figures internes les unes par rapport aux autres, ainsi que dans l'explication des actions à effectuer sur le Pliox pour obtenir la figure modèle. Les connaissances relatives à l'orientation sont convoquées lors du passage au plan fronto-parallèle du modèle affiché au tableau au Pliox posé sur la table de l'élève, qui dans certaines classes n'est d'ailleurs pas assis face au tableau, ainsi que dans les explicitations de procédures en lien avec l'orientation du Pliox. Ces connaissances spatiales, liées à l'orientation et la position, sont implicites au moment de l'action. Elles peuvent être explicitées ensuite lors de mises en commun, en incitant à évoluer vers des formulations adaptées. Elles concernent donc également l'usage adéquat du vocabulaire.

Adéquation aux instructions officielles françaises

Ces situations didactiques sont particulièrement adaptées aux élèves de cycle 2 (CP-CE1-CE2, élèves de 6 à 9 ans). En effet, les nouveaux programmes, applicables en septembre 2025[4], stipulent qu'au CP et au CE1 les connaissances géométriques qui portent sur le carré, le rectangle et le triangle « s'acquièrent à partir de manipulations, de descriptions et de résolutions de problèmes » (BOEN 41 du 31/10/2024, p. 34) et que « les concepts généraux de la géométrie plane (droite, point, segment) sont introduits en situation, sans faire l'objet de définitions formelles » (ibid.). De même, au CE2, « l'acquisition des connaissances sur les figures de référence se poursuit à partir de descriptions, de constructions et de résolutions de problèmes. » (ibid., p. 35). L'acquisition du vocabulaire lié aux positions relatives se poursuit également. De manière générale, concernant les compétences langagières, le programme indique :

> *Il est particulièrement important [au cycle 2] que le professeur s'exprime dans un langage précis, utilisant le vocabulaire géométrique approprié, et qu'il encourage les élèves à se l'approprier et, progressivement, à l'utiliser. Ce vocabulaire prend son sens grâce aux manipulations et aux situations d'action proposées.* (ibid., p. 32)

2 Des situations de formulation

Nous avons proposé aux participants de l'atelier d'analyser un extrait du début de la ressource, qui porte sur les situations d'action, accessibles aux élèves à partir du cycle 2. De ce fait, nous ne développons pas longuement dans ce compte-rendu l'analyse des situations de formulation, qui viennent ensuite dans la ressource. Nous en donnons tout de même quelques éléments ici, dans la mesure où ces situations permettent de mettre plus clairement en évidence les dimensions langagières également présentes dans les situations d'action.

Les situations de formulation consistent à émettre (par un émetteur) et interpréter (par un récepteur) des messages, qui peuvent être produits à l'oral ou à l'écrit, visant à permettre au récepteur de reconstruire une figure modèle par pliage d'un Pliox sans voir cette figure. Lors de la phase d'interprétation du message, les émetteurs peuvent être incités à observer les récepteurs en train de décoder le message qu'ils ont produit, ce qui procure une forme de rétroaction. En effet, ces situations visent tout d'abord à confronter les élèves à leurs propres messages – à les amener à avoir un regard critique sur leurs productions – et à argumenter en utilisant des connaissances mathématiques. Elles mettent en jeu de nouveau des connaissances géométriques, spatiales et langagières. Les connaissances géométriques et spatiales sont similaires à celles identifiées plus haut pour les situations d'action. Une particularité des situations liées au Pliox réside dans la nécessité de conjuguer l'emploi de termes géométriques et de

[3] « Par connaissances spatiales, nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de : reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets ; déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ; reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement. » (Berthelot et Salin, 1999-2000, p. 38)

[4] https://www.education.gouv.fr/bo/2024/Hebdo41/MENE2415135A

termes spatiaux : il est en effet très difficile de produire des messages en employant uniquement du vocabulaire géométrique. Ceci met en évidence des connaissances géométriques et spatiales en interaction. Par ailleurs, l'explicitation des connaissances spatiales nécessite que celles-ci soient perçues, acceptées et reconnues comme des connaissances « valides » par l'enseignant, ce qui passe par leur institutionnalisation.

Concernant les connaissances langagières, ces situations de formulation confrontent les élèves à la nécessité de développer un langage qui soit à la fois commun et précis. Les élèves sont en effet obligés de se mettre d'accord sur un vocabulaire et sur des formulations afin de « parler la même langue ». Par ailleurs, ces situations les amènent à devoir qualifier complètement les objets géométriques en jeu, c'est-à-dire à indiquer, dans la désignation de l'objet, la nature des relations que celui-ci entretient avec d'autres objets au moment de cette désignation (les termes employés pouvant alors relever du langage géométrique ou du langage courant). Nous disons qu'un objet est *complètement qualifié* quand sa désignation donne à voir la relation complète qu'il entretient avec d'autres objets du milieu. Nous parlons de qualification *partielle* quand une partie de la relation est implicite ou qu'un terme est manquant. Ainsi, l'expression « le milieu » permet une qualification partielle d'un élément de dimension 0D (un point), alors que l'expression « le milieu du segment [AB] » correspond à une qualification complète de ce point. La construction d'un répertoire de formulations (vocabulaire et syntaxe) est ainsi au cœur de ces situations. Ce répertoire se met en place progressivement, à la fois par l'action, dans l'action et pour l'action. Le contexte de la situation et les dimensions pragmatiques peuvent conférer une efficacité au moment de l'échange aux qualifications incomplètes. Identifier que des qualifications sont incomplètes et apprendre à les compléter sont également des enjeux d'apprentissage.

Ces situations de formulation supposent une certaine familiarité ou une fréquentation préalable des situations d'action. Elles sont particulièrement adaptées pour des élèves de début de cycle 3 (CM1-CM2, de 9 à 11 ans), notamment en lien avec l'objectif de CM2 « Élaborer un programme de construction ».

3 Pourquoi proposer des situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox ?

Nos observations de pratiques ordinaires d'enseignants, en tant que formateurs et chercheurs, nous amènent à estimer que l'enseignement de la géométrie est généralement centré sur l'acquisition d'un vocabulaire, la connaissance de certaines propriétés et la maîtrise des instruments usuels. Les situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox sont alors d'abord un moyen de travailler la géométrie autrement. Par ailleurs, un autre intérêt de ces situations est lié au fait qu'elles « plaisent » aux enseignants qui les ont essayées dans leur classe, ainsi qu'aux élèves dont elles provoquent l'adhésion, et qu'elles permettent des rencontres géométriques. Cet engouement est confirmé par l'implication des acteurs que nous avons pu observer à chaque mise en activité, quel que soit le contexte (élèves, étudiants, enseignants en formation initiale ou continue, participants au colloque).

Les activités géométriques suscitées par ces situations mettent en jeu des actions matérielles sur des objets matériels, qui sont le seul type d'activité géométrique envisageable au CP selon Perrin-Glorian et al. (2013). Elles reposent en outre sur l'usage d'un matériel peu onéreux et aisément réalisable dans une classe. Les connaissances mises en jeu sont conformes aux instructions officielles. Enfin, il ne s'agit pas d'un travail papier-crayon, qui serait plus formel, ce qui rend ces situations moins stressantes pour les enseignants et plus « accessibles » pour les élèves, et ce dès le CP. Nous avons notamment constaté que les élèves habituellement en difficulté en mathématiques ne le sont pas forcément dans ces situations. La simplicité de la consigne, la validation instantanée (visuelle) du résultat, le côté attrayant, concret et motivant, sans pour autant être facile, permettent en effet un enrôlement des élèves. Enfin, l'aspect ritualisé conduit rapidement à une autonomie des élèves, ce qui facilite la mise en œuvre. Ces situations, pas très éloignées *a priori* des pratiques enseignantes, sont alors susceptibles de faire « un peu bouger » ces pratiques.

Les nombreuses potentialités d'apprentissage, le lien avec l'usage d'un langage géométrique, le rôle implicitement joué par les connaissances spatiales, ainsi qu'une certaine « robustesse » quant à la circulation des savoirs dans la classe, sont des éléments que nous avons constatés lors de différentes mises en œuvre de ces situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox, et qui nous ont incités à vouloir les diffuser auprès des enseignants. Or, comme en attestent certaines de nos recherches (Mangiante-Orsola et Leclercq, 2014 ; Guille-Biel Winder, 2017), les enjeux d'enseignement sont parfois difficilement perçus par les enseignants et, par suite, ces derniers peuvent alors avoir du mal à cerner les savoirs à institutionnaliser. Ces éléments nous ont conduit à réfléchir aux accompagnements à donner dans la diffusion de ces situations, afin d'aider les enseignants à aller « au-delà » d'une dimension d'enrôlement ou de jeu, et à exploiter les savoirs mathématiques mis en jeu. L'enjeu que nous visons par ces accompagnements est d'aider les enseignants à « exercer une vigilance didactique » (Guille-Biel Winder, 2025), c'est-à-dire à « pilot[er] prioritairement [la classe] par les mathématiques, 'au plus près' des apprentissages visés » (Charles-Pézard, 2010, p. 211). La réalisation d'une brochure concrétise cette réflexion. Sa présentation fait l'objet de la partie suivante.

II - PRÉSENTATION DE LA RESSOURCE ET DE NOS POINTS D'APPUI POUR SA CONCEPTION

Avant de présenter la ressource elle-même, nous revenons sur les choix que nous avons faits pour élaborer une première version, en explicitant les points d'appui, les tensions entre différents écueils ou différents choix possibles, visant des besoins ou des publics différents, ainsi que les clés de compréhension.

1 Points d'appui pour la conception

Plusieurs éléments ont présidé aux choix opérés dans la réalisation de la première version de la ressource.

Tout d'abord, nous prenons en compte les résultats de recherches, menées à la fois en didactique de la géométrie (Duval, 1988, 1995, 2005 ; Duval et Godin, 2005 ; Duval et al., 2005), sur les pratiques enseignantes et la formation des enseignants de l'école primaire (Butlen et al., 2011, 2017 ; Charles-Pézard, 2010; Charles-Pézard et al., 2012), notamment en lien avec la géométrie (Allard et al., 2019 ; Mangiante-Orsola et Leclercq, 2014 ; Blanquart et al., 2024), ainsi que sur les ressources (Tricot et al., 2003) et les enjeux de formation qui leurs sont associés (Goigoux, 2007).

Nous prenons également en considération le contexte institutionnel français dans lequel s'inscrit ce travail : les instructions officielles et leurs rapides évolutions (six changements en vingt-deux ans), en particulier concernant l'enseignement de la géométrie (dont la place dans les programmes tend à se réduire), ainsi que les nombreuses modifications dans la formation des enseignants (Bilgot et al., 2024).

Par ailleurs, les situations didactiques (d'action et de formulation) reliées aux reproductions de figures par pliage d'un Pliox ont été testées à tous les niveaux de classes de l'école élémentaire (du CP au CM2, élèves de 6 à 11 ans), voire en maternelle (en GS, élèves de 5 à 6 ans). Nous souhaitons donc prendre en considération ces différents niveaux de classes possibles dans notre ressource. À cette fin, nous avons fait le choix de produire deux brochures, présentées selon la même organisation, l'une concernant les niveaux CP-CE1 (et abordant la GS), l'autre les niveaux CE2-CM1-CM2 (à venir). L'annexe 1 présente les extraits de la première version de la brochure CP-CE1 que nous avons donnés à analyser aux participants de l'atelier.

Enfin, dans l'élaboration de la ressource, nous avons également pris en compte deux « niveaux » différents de nos expérimentations. Le premier correspond à des mises en œuvre des situations didactiques dans différentes classes, qui ont abouti à une version préliminaire de la ressource. Le second correspond à des expérimentations menées par des enseignants non-concepteurs, qui se sont appuyés sur cette version préliminaire pour implémenter les situations dans leurs classes. En appui sur ces éléments, l'aspect collaboratif de notre recherche, menée dans le cadre d'une équipe pluri-catégorielle,

s'est révélé fondamental dans l'élaboration de la brochure. Cette collaboration a en effet permis d'apporter des solutions aux « points de tensions » qui ont accompagné ce travail, et sur lesquels nous revenons dans ce qui suit.

Arbitrer entre en dire trop ou pas assez

De nombreuses questions ont balisé notre travail. Une première série concerne les indications à fournir. Quel degré de précision doit-on viser dans les indications données ? Que choisir de préciser ou au contraire de laisser libre ? Que choisit-on de présenter dans le cadre d'une situation, de façon contextualisée, ou en-dehors d'un tel cadre, de façon décontextualisée ? Faut-il choisir d'en dire plus, au risque d'en dire trop et que le texte ne devienne surchargé ou ne donne plus envie de lire ? Faut-il en dire moins, au risque de ne plus en dire assez et de ne pas aider suffisamment les enseignants ? Où trouver un juste équilibre entre trop et pas assez ? Entre cadrage et liberté ?

Nos expérimentations ont montré que certaines étapes nécessitent des gestes professionnels spécifiques et particulièrement précis qu'il importe de respecter. Cependant, cadrer toute la gestion des situations proposées n'assurerait pas une reprise similaire à ce qui est proposé : il est important que les enseignants saisissent les enjeux d'enseignement, mais ils ont dans tous les cas besoin de disposer de marges de manœuvre et de possibilités d'adaptation. Pour chaque élément, se pose la question de ce qu'il convient d'indiquer aux enseignants — sans pour autant les contraindre au point de les freiner dans leur capacité d'adaptation — et de ce qu'il faut laisser libre — tout en veillant à ce que les indications données permettent d'éviter que les situations soient dénaturées. Cette recherche d'équilibre entre indications à donner et marge de manœuvre à laisser est d'autant plus complexe que les besoins varient considérablement d'un enseignant à l'autre, rendant difficile la formulation d'une réponse unique adaptée à tous. Par conséquent, il s'agit d'opérer des arbitrages permettant de baliser suffisamment le chemin — afin que les enseignants, divers dans leurs pratiques et leurs conceptions, puissent conduire leurs élèves vers les apprentissages visés, notamment en rendant visibles les enjeux qui ne le sont pas de prime abord — tout en maintenant des marges de manœuvre indispensables.

Gérer la présentation et la mise en lien d'éléments de différentes natures

Une deuxième série de questions récurrentes porte sur la présentation de la ressource. Qu'est-ce qui doit venir avant ou après ? Tel élément peut-il être présenté avant tel autre, ou bien nécessite-t-il d'être placé après ? Mais dans ce cas ne vient-il pas trop tard ? Et peut-on lire effectivement sans lui les éléments qui sont placés avant ? Par exemple, doit-on présenter d'abord les choix qui sont faits, et ensuite les raisons qui les justifient, ou bien retenir l'ordre l'inverse ? De même, doit-on présenter d'abord des éléments d'ordre généraux, avant d'aller vers le détail des séances, ou bien l'inverse ?

La difficulté réside dans le fait que des éléments de natures différentes sont souvent en interaction entre eux, et que parfois chacun d'eux peut servir d'aide, voire de prérequis, pour mieux comprendre l'autre. Or, une présentation sous forme de texte oblige à agencer linéairement des éléments. Par ailleurs, si regrouper des éléments liés peut sembler une approche plus efficace, cela peut aussi conduire au risque de produire des textes longs et peu digestes. *A contrario,* séparer des éléments ayant des liens entre eux, mais des natures différentes, peut certes faciliter la lecture, mais présente le risque de produire un texte morcelé ou qui limite l'identification des liens qui existent entre ces éléments (par exemple entre les choix et leurs justifications, ou entre les tâches de manipulations à proposer aux élèves et les savoirs qu'elles visent à construire à plus long terme). Il s'avère alors nécessaire d'arbitrer des choix entre associer ou dissocier des éléments théoriques et pratiques, de trouver un équilibre entre la présentation de gestes professionnels et celle de contenus didactiques, de prendre en compte les enjeux de formation en mathématiques : il s'agit de faire bouger les pratiques, mais pas trop, afin de rester dans la « zone proximale de développement des pratiques professionnelles » (Abboud-Blanchard et Robert, 2015), qui par ailleurs n'est pas la même pour tous les enseignants destinataires de la brochure.

Par ailleurs, on peut souligner une diversité entre des besoins pour une première lecture, et des besoins pour des relectures ultérieures. En effet, une brochure pédagogique n'est pas un document qu'on lit en une seule fois comme un livre, mais a vocation au contraire à être relue, éventuellement plusieurs fois au cours d'une première année, et également ensuite au fil d'années successives. Il s'agit donc de proposer des modes de circulations dans le texte, qui permettent de répondre aux besoins différenciés des différentes personnes auxquelles on s'adresse.

Ces points d'appui et ces tensions ont des incidences aussi bien sur le fond que sur la forme de la ressource produite, dont l'extrait donné à analyser dans l'atelier est présenté en annexe 1. Les échanges issus de ces analyses, présentés dans la partie V, confirment par ailleurs la nécessité de prendre pleinement en compte ces tensions dans le travail de conception de notre ressource.

2 Présentation et clés de compréhension de la ressource

La première version de la brochure se structure en quatre grands chapitres : une présentation générale du Pliox (chapitre 1) ; la description d'une séquence relative aux situations de reproduction de figures (situations d'action) (chapitre 2) ; la description d'une séquence relative à des situations d'échanges de messages (situations de communication) (chapitre 3) ; et enfin un chapitre présentant des compléments relatifs à la gestion de classe ou destinés à la formation personnelle des enseignants (figure 3). Rappelons que notre brochure poursuit un double objectif : d'une part, fournir à l'enseignant des repères clairs sur les éléments essentiels à respecter ; d'autre part, lui proposer des pistes concrètes susceptibles de faciliter la mise en œuvre en classe. Nous explicitons plus en détail les raisons de ces choix dans ce qui suit.

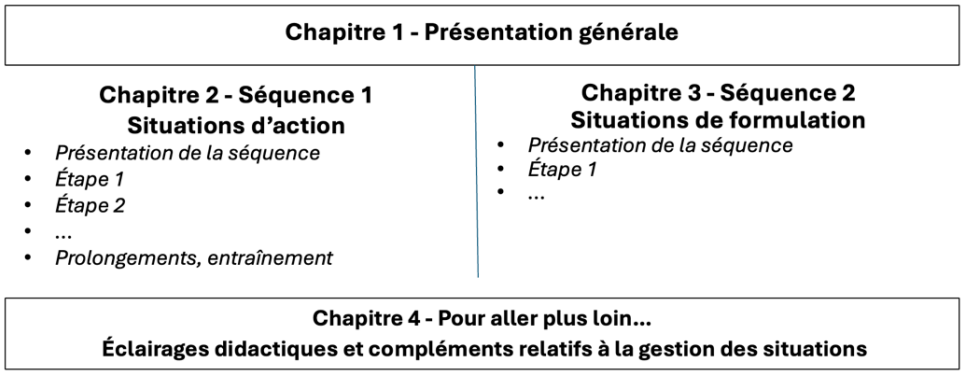


Figure 3. Organisation de la brochure CP-CE1

Concernant la forme de la brochure, nous avons pris en compte les questions d'ergonomie en respectant la chronologie des séquences, en cherchant avant tout à faciliter la lecture. Nous avons fait le choix de commencer par une présentation générale de la brochure, suivie d'une présentation détaillée de chaque séquence (correspondant successivement aux deux types de situations didactiques, situations d'action et de formulation). Pour cela, nous avons adopté un mode de présentation commun, en deux colonnes. Une première colonne plus large, à gauche, sur fond blanc, occupe les trois-quarts de l'espace. Elle présente les détails du déroulement prévu pour les séances et l'essentiel des éléments qui permettent de les mettre en œuvre. Cette description principale est accompagnée parallèlement à droite d'une deuxième colonne, plus étroite, sur fond grisé, qui occupe environ un quart de l'espace. Elle présente différents éléments visant à accompagner ce qui est proposé, permettant par exemple d'apporter du recul ou d'attirer l'attention sur certains points de vigilance. De façon simplifiée, la colonne principale (à gauche) vise à présenter les situations elles-mêmes, et la colonne d'accompagnement (à droite) s'attache à la présentation des éléments permettant d'accompagner l'enseignant *via* des conseils complémentaires. Cette disposition permet différents niveaux de lecture, et autorise les enseignants à ne pas tout lire de manière linéaire. Dans le même but, nous avons choisi de placer certains compléments en fin de document (notamment des éclairages didactiques et des compléments relatifs à la gestion des situations) – il aurait été également possible de les placer au début du document ou au fil de l'eau.

Nous avons aussi fait le choix de ne pas proposer un découpage habituel en séances, mais de présenter des *étapes* bien identifiées, afin de laisser plus de liberté aux enseignants (figure 3). Nous avons retenu un format papier plutôt que numérique. Enfin, des choix typographiques visent à faciliter la lecture (lisibilité, niveaux de titres, couleurs, illustrations, liens) (voir annexe 1).

Concernant le contenu de la brochure, nous cherchons à aider à la mise en œuvre des situations, et notamment à l'exercice d'une vigilance didactique par les enseignants. Dans une précédente recherche (Allard et al., 2019), nous avons identifié cinq éléments constitutifs de l'exercice d'une telle vigilance au cours du processus d'institutionnalisation, dans le cadre de l'enseignement de la géométrie (figure 4) : prendre en compte les productions et les explicitations des élèves ; veiller à faire émerger un discours sur les procédures ; identifier les savoirs à institutionnaliser ; penser l'institutionnalisation en termes d'un processus, qui ne se réduit pas à un moment particulier de la séance, et l'organiser en tant que tel ; veiller à articuler les actions sur le matériel et les connaissances géométriques en jeu – ce qui suppose que l'enseignant soit lui-même au clair sur cette articulation – lors de séances de géométrie, certains enseignants restent centrés sur les aspects manipulatoires de la tâche, au détriment des connaissances visées par cette tâche (Guille-Biel Winder, 2017).

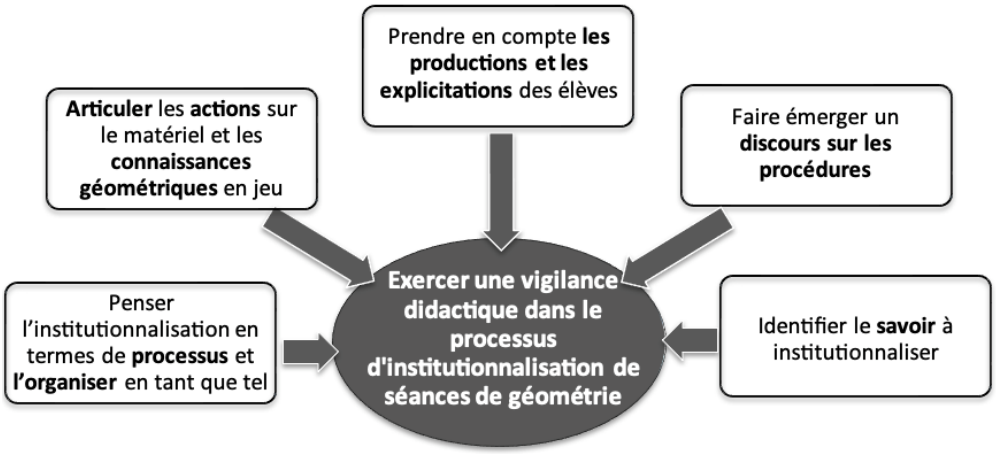


Figure 4. Des éléments constitutifs de l'exercice d'une vigilance didactique dans le processus d'institutionnalisation en géométrie (Allard et al., 2019, p. 310)

Voici, à ce stade de notre travail, comment nous avons cherché à prendre en compte ces cinq éléments (dans une ressource encore en cours d'élaboration).

Prendre en compte les productions et les explicitations des élèves. L'organisation même des séances vise à déclencher la discussion autour des productions des élèves. De plus, la ressource propose des exemples de mises en commun qui partent des productions des élèves ainsi que des appuis concrets pour aider les enseignants à accompagner ces moments, comme l'usage de formulations communes à installer : par exemple, nommer les faces du Pliox « recto/verso » ou « face blanche/face colorée » peut en effet faciliter les échanges. Les conseils donnés s'appuient sur des observations réalisées lors des expérimentations et portent sur l'explicitation de gestes professionnels et notamment sur ceux à mettre en œuvre pour mener un temps de mise en commun.

Veiller à faire émerger un discours sur les procédures. Dans la ressource, des conseils sont donnés à ce sujet et certaines formulations sont proposées visant à verbaliser des gestes précis, par exemple : « Le pliage se fait bord sur bord en ajustant les deux sommets opposés l'un sur l'autre. ». D'autres exemples concernent les décompositions et recompositions de figures : « Deux petits carrés côte à côte forment un rectangle. ». Ces éléments visent à favoriser un travail sur l'explicitation des procédures, en fournissant aux enseignants des exemples précis de formulations sur lesquels ils peuvent s'appuyer. Les discours

proposés permettent en outre de f*aire le lien entre les actions sur le matériel et des connaissances géométriques.*

Identifier les savoirs à institutionnaliser. Dans la ressource, les objectifs d'apprentissage sont clairement explicités. Ces objectifs peuvent porter sur des propriétés de figures (par exemple, « Le carré et le rectangle possèdent quatre côtés et quatre sommets. »), sur des relations entre figures (décompositions, recompositions), ou sur le langage associé aux actions. Il ne s'agit pas d'imposer un parcours unique – des marges de manœuvre sont laissées aux enseignants pour qu'ils choisissent les objectifs à travailler, selon le contexte ou le niveau de leurs élèves – mais les objectifs sont indiqués. Des « garde-fous » sont également proposés afin d'éviter certaines formulations inadéquates (par exemple, « Les termes devant/derrière sont à éviter car ils dépendent du point de vue du locuteur. »), et de clarifier les savoirs visés.

Penser l'institutionnalisation comme un processus (non réduit à un moment). Ce point est peu traité dans l'état actuel de la ressource. Si certains moments comme la synthèse ou l'exposition de connaissances sont évoqués, ils sont présentés comme des phases ponctuelles. Or l'institutionnalisation est envisagée ici comme un processus progressif, qui s'élabore au fil des échanges, des retours sur les productions, des reformulations et des phases de structuration. Il s'agit d'un axe de travail à approfondir, en s'appuyant notamment sur les travaux existants sur les difficultés rencontrées par les enseignants à mener ce processus à bien (Allard, 2015).

Ainsi, nous avons élaboré cette ressource en veillant à favoriser l'exercice d'une vigilance didactique par les enseignants. Néanmoins, si certains des cinq éléments présentés au-dessus sont bien pris en compte dans la ressource, d'autres restent à approfondir. Il nous semble important de poursuivre cette réflexion en élargissant notre questionnement à l'ensemble du travail de l'enseignant, et non uniquement au moment d'institutionnalisation. Cela nous permettra de mieux repérer les apports et les manques de la ressource au regard de l'exercice d'une vigilance didactique (que ce soit dans la présentation du déroulement ou dans les conseils annexes donnés dans la colonne), et ainsi d'enrichir son contenu.

III - PRÉSENTATION DE L'ATELIER

L'explicitation, dans les parties précédentes, des situations didactiques ainsi que de la ressource et de son élaboration permettent d'éclairer les choix que nous avons faits concernant le déroulement de l'atelier comme du document à proposer à l'analyse. Nous revenons sur ces deux points dans ce qui suit.

1 Déroulement de l'atelier

L'atelier, d'une durée de deux heures et demie, réunit douze participants, parmi lesquels quatre ne connaissent pas les situations de reproduction de figure par pliage d'un Pliox.

Après un tour de table de présentation des participants, de l'équipe pluri catégorielle de cette recherche et de l'atelier, les participants sont répartis en quatre groupes de trois personnes (A, B, C et D). L'atelier se déroule alors en deux parties. La première porte sur la (re)découverte des situations didactiques impliquant le Pliox, la seconde vise l'analyse de la ressource à partir d'un extrait de celle-ci. Il nous semble en effet essentiel que les participants possèdent une expérience préalable des deux types de situation didactique leur permettant une appréhension des savoirs en jeu et des enjeux visés (notamment les enjeux de langage partagés), pour qu'ils puissent s'engager dans l'analyse de la ressource. Ainsi la première partie, d'une durée approximative d'une heure, se décompose elle-même en deux temps alternant travail en groupe et discussion collective, chacun correspondant à un type de situation didactique : situation d'action (temps 1), puis situation de formulation (temps 2). L'analyse des productions et retours des participants fait l'objet de la partie IV (les messages réalisés lors du temps 2 figurent en annexe 2).

La seconde partie de l'atelier se déroule sur trois temps. Elle débute par un temps de réflexion en groupes d'une dizaine de minutes, portant sur ce que les participants attendent *a priori* d'une ressource visant à présenter les deux types de situations qu'ils viennent de vivre (temps 3). Les réponses apportées à cette question par les groupes sont présentées dans l'annexe 3 et analysées dans la partie V.1. En collectif, nous présentons ensuite la ressource élaborée ainsi que l'extrait à analyser dans l'atelier (temps 4). Puis cet extrait (annexe 1) est distribué et, toujours par groupes, les participants sont invités à en réaliser une analyse (temps 5). Il s'agit pour eux d'identifier les points positifs du document comme ceux qui leur semblent devoir être modifiés, en précisant leurs raisons. Les participants doivent également expliciter les points d'appui pour les enseignants et ce qu'ils mettraient eux-mêmes en avant en formation, notamment en termes de points de vigilance. De nouveau, leurs propositions doivent être justifiées. Ce temps d'analyse a duré environ quarante-cinq minutes (les analyses réalisées par trois groupes figurent en annexe 4). L'atelier se conclut par une restitution collective des analyses suivi d'un échange avec les concepteurs de la ressource visant à mettre en lien les réflexions produites par les groupes avec celles que notre groupe de recherche a menées tout au long de la conception de la ressource. Les échanges et apports des groupes issus de ces analyses sont présentés et analysés dans la partie V.2.

La figure 5 reprend les grandes lignes du déroulement de l'atelier.

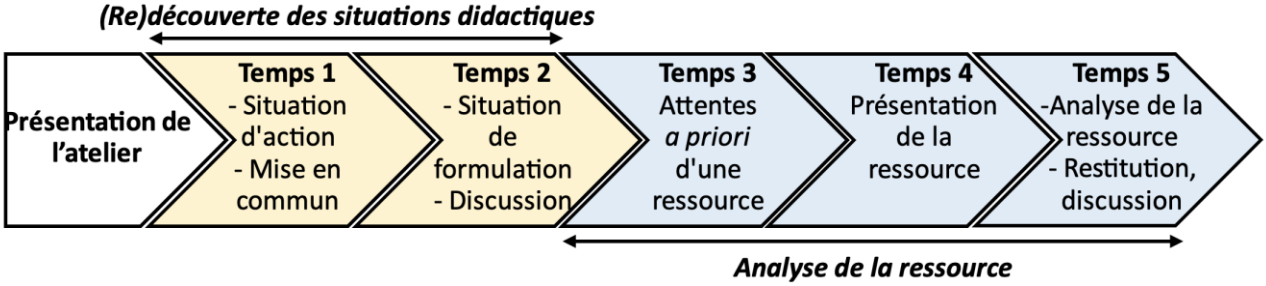


Figure 5. Les grandes lignes du déroulement de l'atelier

2 Choix du document à analyser

L'extrait de la brochure qui a été retenu (annexe 1) porte sur les situations d'action et correspond à une partie du chapitre 2 de la brochure. Il comprend la présentation d'ensemble de la séquence, l'étape 1 et l'étape 2. Les deux autres étapes du chapitre n'y figurent pas car elles reprennent le même déroulement que celui de l'étape 2. La description générale de la séquence est constituée de la présentation du Pliox, des grandes lignes du déroulement de la séquence, des remarques sur la planification du temps, l'organisation de la classe et le matériel à préparer, de l'indication de variables didactiques fournissant des critères sur le choix des figures modèles à reproduire. L'étape 1 concerne l'introduction du Pliox dans la classe. Les expérimentations que nous avons menées montrent en effet à quel point cette étape s'avère importante et sensible[5]. Cette étape se compose de quatre temps : la présentation et l'observation du Pliox dans la classe ; un premier travail d'appropriation du pliage ; la réalisation de son propre Pliox par chaque élève ; un temps de synthèse. L'étape 2 propose une première reproduction d'une figure modèle (la figure modèle 2a) à l'aide du Pliox. Elle s'avère proche de la situation vécue par les participants durant le temps 1 de l'atelier. Elle se déroule selon les quatre temps suivants : présentation et analyse de la figure modèle ; moment de recherche individuel ; mise en commun collective ; synthèse.

IV - (RE)DÉCOUVERTE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Cette partie présente rapidement les productions et retours des participants concernant les deux types de situation didactique : les situations d'action et les situations de formulation.

[5] Cette étape correspond à une étape d'appropriation de l'objet et de la situation que les participants n'ont pas vécue dans l'atelier et qui a conduit, comme nous nous y attendions, à des échanges importants avec les participants.

1 Situation d'action (temps 1)

Afin que les participants puissent se confronter aux mêmes tâches que celles proposées aux élèves, ils sont amenés dans ce premier temps de l'atelier à reproduire individuellement des figures modèles avec un Pliox. Deux tâches de reproduction de niveaux différents sont successivement proposées avec les figures modèles 2a et 2c (figure 2). Si la reproduction de la première, qui ne nécessite qu'un pli, est immédiate pour tout le monde, la deuxième demande un temps de réflexion plus long. Pour chacune de ces figures, les participants sont ensuite incités à expliciter leurs manières de procéder, ce qui permet de faire apparaitre des formulations spontanées parfois imprécises ou peu mathématiques (« je suis partie du truc d'avant », une participante) et conduit à des échanges sur les questions de langage et de formulations. De fait, la production et le questionnement des formulations sont déjà présentes dans la mise en œuvre des situations d'action, parce que ce sont les formulations qui permettent de décrire les actions réalisées, dans une finalité de communication aussi bien avec l'enseignant qu'avec d'autres élèves.

Après la réalisation de ces deux pliages, nous demandons aux participants d'indiquer les enjeux qu'ils perçoivent dans ces situations didactiques et l'intérêt qu'ils lui associent. Les participants soulignent d'abord l'intérêt des rétroactions ainsi que les dynamiques entre essais, erreurs, analyses et ajustements. La discussion fait ainsi émerger le rôle du Pliox en tant que matériel, utilisé d'abord pour créer les premières expériences de la situation, puis pour valider ou invalider des procédures (rétroaction du milieu), ce qui favorise la possibilité de chercher par essai-erreur. Les compétences nécessaires pour reproduire les figures modèles (analyser les figures planes qui les composent et leurs positions relatives, identifier des pliages permettant de faire apparaitre ces figures planes…), ainsi que des variables didactiques sur lesquelles l'enseignant peut s'appuyer (présence ou non des plis sur le Pliox, modèle disponible ou pas, nombre de plis nécessaires, nombre et position relative des figures, le fait que la figure à produire représente ou non une sous-figure de la figure initiale), sont également mises au jour. L'enjeu cognitif de la situation, les connaissances géométriques ou spatiales comme leur mobilisation simultanée, la difficulté et l'intérêt du travail sur les formulations associées aux connaissances langagières (dont celles portant sur le vocabulaire nécessaire) sont explicités, en appui sur les exemples traités. Les participants notent par ailleurs que le fait de pouvoir facilement faire, défaire, refaire, jusqu'à parvenir à une solution, favorise l'enrôlement et limite les risques de démotivation chez les élèves. Enfin ils relèvent des éléments de gestion à prendre en compte, notamment le fait que travailler sur un Pliox orienté de la même manière pour tous permet de comparer ce que chacun fait.

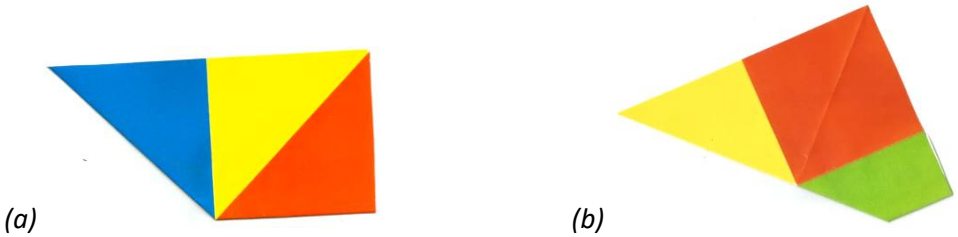
Ce premier temps se termine par la présentation de l'ancrage de la séquence relative à la reproduction de figure par pliage d'un Pliox dans les programmes du cycle 2, applicables en septembre 2025. Le programme insiste notamment sur le fait que l'introduction des notions doit être réalisée en situation, ce que permet précisément cette séquence. De plus, elle favorise l'introduction du vocabulaire de façon progressive et en situation. Au travers du temps 1, les participants acquièrent une première maitrise des situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox et de ses enjeux avant de vivre une situation de communication.

2 Situation de communication (temps 2)

Dans un deuxième temps, les groupes travaillent sur une situation de communication. Il s'agit d'amener les participants à approfondir leur analyse des connaissances mobilisées et de leurs enjeux, notamment en termes de langage. Toujours par groupes de trois, les participants rédigent un message écrit ne comportant pas de dessin et devant permettre à un autre groupe de réaliser une figure identique à la figure modèle sans l'avoir vue. Chaque groupe est muni d'une figure-modèle et d'une seule feuille A3 sur laquelle il doit rédiger son texte, afin d'inciter d'abord des échanges oraux au sein du groupe avant le passage à l'écrit. Deux figures modèles différentes sont fournies (figure 6), chacune d'elle étant donnée à

deux groupes. Ces deux figures sont de difficultés essentiellement comparables (notamment chacune d'elle peut être réalisée à l'aide de deux plis).

Nous constatons que les textes produits (annexe 2) portent des traces de réflexions, de repentirs et d'ajustements, y compris lors de la phase de finalisation des textes et de passage à l'écrit. Et il est à noter que lors du temps 2, nous observons une procédure commune dans les quatre groupes qui constitue une spécificité intéressante des situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox : la réalisation du message s'accompagne toujours de la manipulation du Pliox. En effet, pendant qu'un des membres du groupe écrit les différentes actions, les deux autres les réalisent, validant ainsi en même temps avec le matériel la pertinence des étapes et celle des formulations écrites – ce que ne permet pas un travail avec papier et crayon.



(a) *(b)*

Figure 6. Figures modèles du temps 2

À la fois pour des questions de gestion du temps et parce que les participants ont saisi les enjeux travaillés, nous ne procédons pas à un échange de ces messages entre les groupes, qui aurait permis de mettre ces textes à l'épreuve de la réalisation effective d'une figure. Nous affichons seulement les messages produits au tableau et étudions collectivement les textes proposés. Le moment d'échange qui suit révèle le ressenti des participants. Ceux-ci soulignent en particulier les négociations de formulations qui ont eu lieu au sein des groupes ainsi que la facilité de manipulation du Pliox qui permet d'associer systématiquement la (re)-production des gestes à chaque formulation proposée.

Un bilan conclut cette partie en mettant notamment en exergue : l'interaction constante entre les connaissances géométriques et les connaissances spatiales ; la nécessité de proposer des formulations qui intègrent et prennent en compte ces deux types de connaissances ; le fait que ces situations didactiques accordent une véritable place aux connaissances spatiales ; et enfin le plaisir manifeste ressenti par les participants dans la réalisation des échanges et de l'activité (que l'on retrouve de façon absolument identique du côté des élèves). Nous confirmons finalement certains enjeux didactiques : la nécessité de produire et de mutualiser un langage commun et précis par la construction d'un répertoire de formulations ; l'importance de qualifier complètement les objets géométriques.

V - ATTENTES, ANALYSE DE LA RESSOURCE ET DISCUSSION

La première partie de l'atelier a permis aux participants d'appréhender les différentes dimensions des situations de reproductions de figures avec un Pliox, véritables points d'appui pour analyser la ressource. Nous présentons dans ce qui suit les attentes des participants concernant une ressource à destination des enseignants qui présenterait la séquence relative aux situations d'actions expérimentées, puis leurs analyses de la ressource elle-même (tout au moins d'un extrait de celle-ci).

1 Attentes des participants pour la conception d'une ressource (temps 3)

Les participants sont invités à expliciter, en le justifiant, ce qui leur parait incontournable dans une telle ressource. Dans l'atelier, nous ne proposons pas une mise en commun de cette réflexion, mais demandons plutôt aux groupes d'en rédiger les principaux éléments, afin qu'ils puissent s'y référer dans la suite – et aussi pour nous permettre de les prendre en compte dans une visée d'amélioration de la ressource. Nous livrons une synthèse des réponses produites par les groupes (présentées dans l'annexe 3).

Les groupes formulent des attentes portant principalement sur le contenu à inclure dans la brochure à différents niveaux, plus que sur sa présentation, sa mise en forme et son ergonomie (alors que ces éléments prendront une place importante dans les analyses ultérieures). On peut faire l'hypothèse que le temps relativement court de cette première phase (dix minutes) ne permet pas d'entrer dans une analyse suffisamment développée pour aller jusqu'à des réflexions sur l'ergonomie, alors que bien entendu, ces éléments sont perçus de façon immédiate dans une confrontation à un extrait.

Seul le groupe A indique que tous les éléments qu'ils ont identifiés leurs semblent incontournables en raison de leur complémentarité, les autres groupes n'abordant pas ce point. On peut supposer que cette réponse pourrait sûrement être partagée par d'autres groupes. Les analyses réalisées par les quatre groupes révèlent en effet la présence d'éléments complémentaires de différentes natures, répondant à des besoins différents mais en interaction entre eux, dont l'articulation rend complexe la tâche d'élaboration d'une ressource.

Ainsi tous les groupes attendent des descriptions détaillées des séances proposées, comprenant des éléments d'accompagnement qui permettent d'assurer la mise en œuvre pratique des séances : le détail des phases ; les activités attendues des élèves et de l'enseignant ; des indications de durées, avec la précision des moments où il est important d'attendre ; des exemples de procédures et de traces écrites ; des formulations explicites de consignes et d'institutionnalisation ; des éléments permettant d'assurer la différenciation, à partir d'une identification et d'une explicitation du rôle des variables didactiques. Les groupes souhaitent également des éléments permettant de construire ou d'élaborer des progressions – progressions internes au sein de la séquence, possibilités de prolongement, ou éléments d'articulation à d'autres types d'activités de géométrie. Ils attendent aussi une explicitation de ce qu'apportent spécifiquement les situations didactiques utilisant le Pliox par rapport à d'autres approches. Tous les groupes désirent en outre des éléments permettant de donner du recul sur les enjeux et les savoirs visés par les situations présentées, en commençant par l'indication des liens avec les programmes. Ils souhaitent aussi des précisions sur la façon dont les savoirs visés sont mis en jeu dans les situations proposées, sur les enjeux didactiques et pédagogiques de chaque phase, ainsi que sur la façon d'établir des liens entre ce qui a été effectué dans la manipulation et les éléments théoriques sous-jacents, dans une progression vers l'abstraction. D'autres éléments sont évoqués de façon plus isolée par certains groupes. Ainsi le groupe B insiste sur l'importance des indications sur le matériel, avec la proposition d'inclure dans la ressource du matériel « prêt à l'emploi » pour en faciliter l'appropriation. D'un point de vue ergonomique, ce même groupe évoque des modes de présentation possibles de la ressource, en souhaitant l'inclusion d'exemples de productions d'élèves, de retours d'expériences vécues en classe, voire de témoignages d'enseignants, et en envisageant qu'une brochure au format papier puisse être accompagnée de parties en format vidéo, afin notamment de présenter des extraits de déroulements en classe ou des simulations numériques. Le groupe C souhaite quant à lui des précisions sur ce qui peut être évalué dans ces situations, ainsi que l'indication d'une progression en termes d'attentes. Enfin le groupe D insiste particulièrement sur des attentes en termes de langage et de formulations, en demandant des exemples de formulations pouvant être produites par les élèves ou proposées par l'enseignant, et en insistant sur l'importance et les moyens d'une construction graduelle du vocabulaire et du langage visés.

2 Analyse de la ressource par les participants (temps 5)

Dans ce dernier temps, les participants disposent d'un extrait de la brochure par personne, plus un extrait supplémentaire par groupe à nous rendre à la fin de l'atelier sur lequel ils peuvent porter des annotations. Ils reçoivent aussi une feuille sur laquelle nous leur demandons de rédiger une synthèse de leurs réflexions (trois feuilles de synthèse, remises par les groupes A, B et D figurent en annexe 4). Les questions posées pour l'analyse sont les suivantes :

Vous avez à votre disposition un extrait de la première version de la ressource.

- *Quels sont, selon vous, les points positifs et ceux à modifier, et pour quelle raison ?*

- *Sur quoi les enseignants peuvent-ils prendre appui ?*
- *Quels manques identifiez-vous et pour quelle raison ?*

Nous rendons compte dans cette partie à la fois des éléments figurant sur les documents qui nous sont remis (feuilles de synthèse et/ou annotations directes de l'extrait, selon les groupes), des éléments mis en avant dans la mise en commun et des échanges qui s'ensuivent.

Contrairement à ce qu'il s'est produit lors du temps 3 (explicitation des attentes pour la réalisation d'une ressource), les analyses produites par les groupes à partir de l'extrait (annexe 4) portent aussi bien sur le fond que sur la forme de la ressource, ces deux dimensions étant par ailleurs souvent mises en relation.

Un nombre important de points jugés positifs

Les participants commencent par souligner les éléments positifs qu'ils ont pu relever. Dans l'ensemble, la brochure leur semble répondre pour une large part à leurs attentes (temps 3). Les groupes pointent de façon unanime l'intérêt des situations proposées ainsi que l'intérêt général de la brochure et la plupart des choix faits pour la présentation. Ils apprécient notamment la présentation en deux colonnes, qui autorise plusieurs niveaux de lecture ainsi qu'une appropriation progressive de la brochure. Ils estiment que la brochure permet effectivement aux enseignants de s'emparer des situations, tout en leur laissant des marges de manœuvre, et qu'elle apporte des éléments de développement professionnel. Les groupes jugent également que la brochure fournit des aides importantes et utiles aux enseignants, correspondant aux apports qu'ils attendent, notamment sous forme d'illustrations, d'exemples de productions d'élèves, de procédures et de traces écrites, mais aussi en proposant des formulations compréhensibles dont l'enseignant peut s'emparer (même si des formulations plus imprécises ou des éléments implicites sont parfois observés), et en explicitant l'appui sur des observations menées dans des classes. Enfin sur le plan de la mise en forme, les groupes apprécient la présence de divers types d'encadrés, proposant plusieurs niveaux de lecture et permettant des approches différenciées, ainsi que l'effort fait pour penser, organiser et classer les informations.

Une fois ces premiers points d'ensemble globalement positifs soulignés, les participants pointent par ailleurs un certain nombre de difficultés et des manques sur lesquels la discussion s'engage. Les échanges se focalisent sur des pistes d'améliorations possibles et les suggestions que les participants peuvent proposer en ce sens. Comme nous l'avons signalé, ces points d'amélioration formulés à partir de la confrontation avec un extrait de brochure, portent à présent à la fois sur le fond et sur la forme, dimensions souvent examinées conjointement et en interaction. Nous y revenons dans ce qui suit.

Des demandes de précision quant à la structuration des séquences

Dans l'ensemble, les participants jugent que la présentation de la brochure est globalement dense. De plus, certains d'entre eux ont fait part de difficultés rencontrées à la lecture des premières pages de la brochure, qui présentent notamment les grandes lignes du déroulement avant d'entrer dans le détail des séances. Selon eux, la compréhension ne devient réellement effective qu'à partir de la section « Introduction du Pliox ». De même plusieurs participants ont indiqué qu'il leur avait été difficile de comprendre, dès le départ, l'organisation générale de la séquence. Le fait d'entrer tout de suite dans le détail de chaque étape, avec beaucoup de précisions, ne leur a pas permis de bien saisir les intentions globales et ils souhaiteraient une première présentation de l'ensemble de ce qui est proposé (la progression de la séquence et les grandes lignes). Les participants proposent alors d'adjoindre une première partie visant à présenter ces éléments globaux à grande échelle avant d'entrer dans des indications à un grain plus fin. En termes de forme, ils suggèrent d'ajouter au début de la séquence un tableau synoptique présentant une vue globale et synthétique de l'ensemble du parcours proposé. Ces remarques amènent à repenser l'ordre de présentation de la brochure. Il est aussi suggéré de faire un saut de page entre certaines parties afin de mieux marquer les changements et rendre l'ensemble plus lisible.

De fait, la rédaction de la brochure n'est pas encore achevée, et il sera plus facile d'introduire cette présentation synthétique une fois que toutes les séances auront été rédigées. Mais l'insistance que montrent les participants sur ce point dans l'échange révèle l'importance que peut prendre cette présentation synoptique et l'aide qu'elle peut apporter pour faciliter l'entrée dans la brochure. On peut aussi penser que ce tableau est important pour des enseignants qui, après une première appropriation, souhaitent se repérer rapidement en engageant une nouvelle lecture.

Notons néanmoins que l'analyse des participants sur ce point prend appui sur une première lecture de la brochure et est soumise aux effets de l'ordre dans lequel ils ont reçu les différents éléments. Or une brochure de ce type ne se lit pas une seule fois, de façon linéaire comme un livre, mais engage nécessairement différentes lectures et relectures qui peuvent avoir lieu la même année ou au fil d'années successives. Par ailleurs les lecteurs et leurs besoins évoluent aussi au fur et à mesure de ces différentes relectures. La conception de la brochure nécessite donc la prise en compte des besoins différenciés et d'une évolution de ces besoins au cours du temps.

Des demandes de clarification du statut des éléments présentés dans la colonne grisée

Les groupes pointent parfois certaines répétitions ainsi que des inhomogénéités dans la façon dont les choses sont présentées dans les différentes étapes. En particulier, après avoir relevé l'intérêt du principe de la colonne grisée, qui présente des compléments en parallèle d'une description pratique des séances, les participants soulignent que les éléments qui figurent dans cette colonne sont de natures extrêmement diverses, et que leurs différents statuts pourraient gagner à être explicités. En effet, cette colonne réunit des éléments qui peuvent être d'ordre mathématique, didactique et pédagogique : compléments mathématiques ; aides pour la mise en œuvre (précisions sur le matériel, indications sur les durées, indications sur le vocabulaire à employer) ; propositions d'alternatives, de variantes, de prolongements, d'adaptations pour des publics particuliers ; justifications des choix effectués ; retours d'expérimentations menées ; conseils ou mises en garde sur des points de vigilance. La variété de ces apports souligne bien les différentes dimensions et la diversité des besoins que peut nécessiter l'exercice d'une vigilance didactique (Guille-Biel Winder, 2025) et nous encourage à poursuivre notre réflexion à ce sujet. Les participants remarquent ainsi que, si tous ces éléments relèvent bien de formes d'accompagnement, et sont placés à juste titre dans la colonne grisée, leur hétérogénéité de natures et de fonctions en rend l'appropriation difficile. Ce point met en évidence la difficulté, précédemment relevée, à mettre en lien des éléments indispensables mais de différentes natures. Les participants proposent alors de chercher un codage ou une signalétique permettant d'identifier de façon plus visible les différents statuts des accompagnements proposés. Ils souhaitent également l'explicitation du statut à donner à cette colonne (est-il possible de mener la séance sans la lire ? Présente-t-elle des éléments dont on ne peut se dispenser, mais que l'on peut lire dans un second temps ?). Enfin les participants ont pointé de façon ponctuelle certains éléments qui gagneraient à être déplacés, de la colonne blanche à la colonne grise ou dans l'autre sens.

Des demandes d'explicitation

Des remarques sont également formulées concernant la présentation des variantes proposées, en particulier les ajustements possibles entre le CP et le CE1. Elles soulignent l'importance d'éclairer toutes les « zones d'ombre » afin de permettre une meilleure appropriation des situations didactiques par les enseignants. Ces demandes portent non seulement sur les adaptations possibles, mais aussi sur le sens et la portée des choix pédagogiques proposés. Dans cette perspective, plusieurs participants ont exprimé le souhait de voir davantage explicitée la plus-value de la séquence, notamment en ce qui concerne l'engagement des élèves et les apprentissages mobilisés, en lien avec l'utilisation du matériel. Une remarque est faite à propos de l'exploitation du verso du Pliox, jugée très riche par les participants, mais

encore insuffisamment développée dans la ressource. Ces éléments mettent en évidence le besoin d'une analyse avec prise de recul pour permettre aux enseignants de saisir pleinement le potentiel didactique de la séquence et de ses différentes adaptations.

Des remarques mettant en lumière des dilemmes de formateurs

D'autres remarques mettent en lumière des dilemmes de formateurs. En effet, alors que certains participants regrettent que les éléments de planification du temps et de l'organisation pratique de la classe ne soient pas présentés de façon plus explicite, d'autres estiment au contraire ce point positif, dans le but de ne pas contraindre trop fortement les enseignants et de permettre des adaptations. Est notamment questionné le choix de présentation sous la forme d' « étapes », constituées elles-mêmes de « temps » successifs, et non sous la forme plus habituelle de séances. Ce choix s'éloignant des habitudes du métier, des participants s'interrogent sur le risque de difficulté qu'il engendre pour des enseignants à s'emparer des situations proposées : présenter les situations en termes habituels de séances et de phases avec un découpage minuté de façon précise peut en effet favoriser des reprises en se rapprochant des questions du métier. D'autres voient en revanche un intérêt à ce choix : celui d'ouvrir des marges de manœuvre en termes de programmation aux enseignants et de permettre une adaptation plus fine des séquences à leurs propres besoins et à ceux de leurs classes.

Des réflexions sur les publics visés par la brochure

Des participants soulignent également qu'en plus des enseignants à qui s'adresse la brochure, un autre public probable et non négligeable est celui des formateurs (académiques ou universitaires ; en formation initiale ou continue). Ces derniers jouent en effet un rôle de relai important dans la transmission et la diffusion de propositions et de résultats issus de la recherche en direction des enseignants. Il est probable qu'un certain nombre d'enseignants découvriront la ressource par l'intermédiaire de formateurs qui les leur présenteront lors de séances de formation et pourront contribuer à sa diffusion en y ajoutant leurs propres accompagnements dans ce cadre. Si notre objectif principal reste que la brochure puisse être lue et appropriée directement par les enseignants, le public des formateurs pourrait également être pris en compte dans la conception de la ressource, par exemple en incluant des éléments et compléments à son intention.

Des discussions sur une étape particulière de la séquence

Enfin, un échange long et intéressant concerne l'étape 1 (présentation et introduction du Pliox dans la classe). De fait, cette étape essentielle vise de très nombreux enjeux, et les expérimentations menées en ont confirmé son importance comme sa spécificité. Les participants soulignent notamment que dans sa présentation actuelle (annexe 1), cette étape mélange des tâches qui visent des enjeux mathématiques (observation et description du Pliox, repérage de l'ordre des couleurs, introduction des plis, introduction de vocabulaire, éléments de synthèse), et d'autres qui ne le font pas (la tâche matérielle de coloriage du Pliox notamment, nécessaire pour permettre à chaque élève une appropriation en réalisant son propre Pliox, mais qui n'engage pas véritablement de savoirs sur le plan mathématique ni sur celui des arts visuels). Une discussion s'engage alors sur l'explicitation des savoirs mathématiques effectivement travaillés dans cette étape, et les moyens de les dissocier du travail de réalisation de l'artefact, en particulier du travail long de coloriage. Les participants identifient en effet un enjeu lié au repérage de l'ordre des couleurs qui pourrait être travaillé de façon plus approfondie. Ils suggèrent alors de conduire les élèves à expliciter des critères permettant de déterminer si un Pliox reproduit est ou non colorié « comme le Pliox modèle ». En effet, la possibilité de faire tourner le Pliox fait que le critère à respecter porte sur des positions relatives : il faut que les couleurs s'enchainent dans le même ordre lorsque l'on parcourt le Pliox en tournant dans un sens donné (par exemple dans le sens horaire). Il est possible de ramener ce critère à un critère plus simple de positions absolues si l'on choisit de placer l'un des quatre carrés au même endroit que sur le modèle. Les participants proposent alors de travailler ces savoirs liés à

des conditions d'orientation et de position, sous la forme d'une situation didactique de résolution de problème visant à faire placer les quatre couleurs « comme sur le modèle », puis à faire identifier des critères permettant de valider ou d'invalider une répartition proposée. Il serait possible de faire désigner dans un premier temps l'emplacement visé pour chaque couleur par de simples points de crayon ou des gommettes (afin ne pas perdre de temps à ce moment-là sur des tâches de coloriage), et une fois les emplacements validés, de reporter la finalisation du Pliox et la phase de coloriage à des moments de temps libre ou autonome.

VI - SYNTHÈSE ET CONCLUSION

En conclusion, nous souhaitons mettre en avant des éléments de synthèse, d'une part pour souligner les apports des échanges pour l'amélioration de la brochure, et d'autre part pour pointer des éléments plus généraux relatifs à l'élaboration de ressources à destination des enseignants.

1 Apports de l'atelier pour une amélioration de la brochure

Au-delà de l'intérêt reconnu par les participants aux situations présentées et à la brochure, les échanges ont apporté de nombreuses pistes d'amélioration concernant à la fois le contenu, l'organisation et la présentation de la ressource. Nous faisons l'hypothèse que les nombreux retours contribueront à rendre l'outil plus accessible, notamment pour des enseignants débutants ou peu familiers avec ce type de situations. Parmi les principaux points que nous retenons de ces échanges figurent en particulier : l'ajout d'un tableau synoptique pour présenter l'ensemble de la séquence avant d'entrer dans le détail des étapes ; l'organisation d'une progression allant du général au particulier, qui commence par présenter l'intérêt de ces situations avant d'entrer dans des détails plus précis ; le besoin de clarifier les statuts des différents éléments d'accompagnement présentés dans les colonnes grises, qui initialement devaient correspondre aux dimensions relevant de l'exercice d'une vigilance didactique mais qui sont à requestionner ; et enfin l'enrichissement de l'étape d'introduction du Pliox, en distinguant plus clairement ce qui relève d'un enjeu mathématique (qualifier l'ordre des carrés colorés pour reproduire le Pliox), du travail proprement dit de coloriage.

2 Éléments de synthèse sur l'élaboration d'une ressource en général

De façon plus générale, nous retenons des échanges produits dans l'atelier la question des enjeux à prendre en compte dans l'élaboration d'une ressource à destination des enseignants. Dans cette direction, les participants ont souligné qu'il ne peut pas exister une brochure qui serait « idéale » ou « parfaite », compte-tenu de la diversité des publics auxquels elle s'adresse et de leurs besoins, et que chaque choix effectué correspond nécessairement à des compromis. De fait, les échanges qui ont eu lieu au sein de l'atelier se sont souvent rapprochés, voire ont pu parfois reproduire des discussions qui se sont tenues à plusieurs reprises au sein du groupe de recherche dans l'élaboration de la ressource. Ces échanges pointent des questions auxquelles nous avons nous-mêmes été régulièrement confrontés, et qui n'ont pas nécessairement de réponses idéales, chaque décision prise dans un sens engageant en général des effets ou des contreparties non souhaités pouvant ultérieurement nous conduire à remettre en question ces premières décisions prises.

La conception effective de la brochure nécessite ainsi des arbitrages fréquents entre plusieurs options divergentes, qui possèdent chacune leurs intérêts et leurs inconvénients propres, et qui peuvent toutes être remises en question pour d'excellentes raisons, tout aussi valables que celles qui ont présidé à leur choix. Ces interrogations émergent dans le cours du travail à partir de questions tout à fait matérielles et pratiques : que choisit-on d'écrire ? De ne pas dire ? À quoi choisit-on de renoncer et pourquoi ? Comment formule-t-on ce qu'on veut dire ? Avec quels niveaux de détails et de précision ? À quel endroit et dans quel ordre place-t-on les éléments que l'on veut présenter ? Tel point particulier peut-il et doit-il venir avant tel autre ou bien après ? Qu'est-ce qui a besoin d'être précisément cadré et qu'est-ce qui peut être

laissé libre ? Où choisit-on de laisser des marges de manœuvre indispensables aux enseignants ? Il s'agit à chaque fois de trouver des compromis, qui ne cherchent pas à viser un « idéal » par nature impossible à atteindre, mais au moins à minimiser ou limiter autant que possible les risques d'effets potentiels non souhaités. Les échanges qui ont eu lieu dans l'atelier peuvent ainsi être articulés avec l'expérience constamment vécue par le groupe de recherche tout au long de l'élaboration de la ressource. Une analyse plus fine de la prise en charge par la ressource de l'exercice d'une vigilance didactique pourrait nous aider à clarifier ce qui est important à dire, à hiérarchiser les contenus et à affiner les choix (Allard *et al.*, 2019 ; Guille-Biel Winder, Mangiante-Orsola, 2023). Cette piste de travail pourrait nous aider non seulement à affiner notre ressource mais aussi à prévoir un accompagnement des enseignants en formation.

3 De nouvelles questions à propos de l'accompagnement des enseignants

Les analyses, productions et échanges réalisés durant l'atelier confortent une grande partie de nos choix, et viennent nourrir la finalisation de notre brochure tout en enrichissant notre questionnement. Cependant de nouvelles interrogations se font jour à propos de l'accompagnement à prévoir pour favoriser l'appropriation par les enseignants de nos propositions. Les premières concernent l'accompagnement de la ressource : celle-ci se suffit-elle à elle-même ou bien son appropriation par les enseignants nécessite-elle malgré tout une formation ? Si son appropriation est accompagnée par un formateur, celui-ci doit être capable de déterminer et d'expliciter les gestes professionnels spécifiques (par exemple, faire justifier l'identification des objets géométriques), de faire le lien entre les différents enjeux, d'accepter que les enseignants prennent des directions différentes… Or tous les enjeux des situations d'action et de formulation utilisant le Pliox ne sont pas forcément visibles au premier abord pour les formateurs, leur identification pouvant aussi différer selon les personnes. Par ailleurs, au vu de la richesse des situations proposées, les formateurs seront amenés à faire des choix. Faut-il alors apporter d'autres éléments à destination des formateurs dans la brochure, et si oui lesquels ? Cela nous conduit à une deuxième série de questions à propos de la formation. Quelle formation (initiale ou continue) proposer ? Et en quoi un travail sur le Pliox peut-il faire bouger des conceptions ou les représentations de la géométrie et de son enseignement chez les enseignants ? Ces questionnements ouvrent de nouvelles pistes de travail que nous envisageons dans le prolongement de notre recherche.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Abboud-Blanchard, M. et Robert, A. (2015). Former des formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire : un besoin, une expérience et une question d'actualité. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 181-206.

Allard, C., Guille-Biel Winder, C. et Mangiante, C. (2019). Étude des pratiques enseignantes en géométrie et des possibilités d'enrichissement de ces pratiques. Dans S. Coppé et E. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques* (301-328). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Berthelot, R. et Salin, M-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, 65*, 37-59.

Bilgot, A., Petitfour, E. et Tempier, F. (2024). 50 ans d'activités de la COPIRELEM… et toujours pas la retraite en vue ! Dans C. Guille-Biel Winder (dir.), *Mathématiques et diversité à l'école : aider les élèves, accompagner les enseignants, Actes du 49e colloque COPIRELEM* (13-24). Paris : ARPEME.

Blanquart, S., Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (2024). Knowledge and reasoning in circulation during a situation of figures reproduction by folding. Dans T. Lowrie, A. Gutiérrez et F. Emprin (dir.) *Advances in geometry education, Proceedings of the 26th ICMI study* (313-320). Reims : IREM de Reims.

Brousseau, G., (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen, D., Charles-Pézard, M. et Masselot, P. (2011). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Dans

Le travail enseignant au XXIe siècle. Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle. http://www.inrp.fr/ archives/colloques/travail-enseignant/contrib/70.pdf

Butlen, D., Mangiante-Orsola, C. et Masselot, P. (2017). Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des professeurs des écoles en mathématiques. *Recherches en didactiques, 2017*(2), 25-40.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(2), 197-261.

Charles-Pézard, M., Butlen, D. et Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants enseignant en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 1*, 57-74.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de Sciences cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Duval, R., Godin, M. et Perrin-Glorian, M-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. Dans C. Castela et C. Houdement (dir.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2004* (5-89). Paris : Irem de Paris 7.

Goigoux, R. (2007). Un modèle d'analyse de l'activité des enseignants. *Éducation et didactique, 1*(3), 47-69.

Guille-Biel Winder, C. (2014a). Étude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19*, 103-128.

Guille-Biel Winder, C. (2014b). Une situation de reproduction de figures au cycle 2 : mises en œuvre et analyses Dans S. Coppé (dir.), *Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives. Actes du 40e colloque COPIRELEM* (1-15). Nantes : IREM de Nantes.

Guille-Biel Winder, C. (2017). Changement de regard sur les figures. Une étude de cas. Dans T. Barrier, T. et C. Chambris (dir.) *Actes du séminaire national 2016 de recherche en didactique des mathématiques* (188-210). Paris : IREM Paris 7.

Guille-Biel Winder, C. (2021). Impact du langage de l'enseignant sur les relations entre les élèves et le milieu dans une situation d'action en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, 41*(1), 55-96.

Guille-Biel Winder, C. (2025). *Point de vue systémique sur l'enseignement et la formation des professeurs des écoles en mathématiques : modélisations, analyses, développement de ressources*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Marseille : Aix-Marseille Université.

Guille-Biel Winder, C., Blanquart, S., Blanchetier, E. et Dracos, C. (2025). À la découverte de la situation PLIOX du cycle 2 au cycle 3. Dans F. Tempier (dir.), *Mathématiques et diversité à l'école : aider les élèves, accompagner les enseignants. Actes du 50e colloque COPIRELEM* (57-80). Paris : ARPEME.

Guille-Biel Winder, C. et Mangiante-Orsola, C. (2023). Contribution à l'étude de l'exercice de la vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 43*(2), 199-240.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

Mangiante-Orsola, C. et Leclercq, R. (2014). Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ? Dans S. Coppé (dir.), *Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives. Actes du 40e colloque COPIRELEM*. Nantes : IREM de Nantes.

Perrin-Glorian, M-J., Mathé, A-C. et Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères IREM, 90*, 5-41.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G. et Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. Dans C. Desmoulins, P. Marquet et D. Bouhineau (dir.), *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (391-402). Paris : ATIEF/INRP.

ANNEXE 1 : EXTRAIT DE LA BROCHURE PROPOSÉ AUX PARTICIPANTS

Présentation générale de la séquence 1

Objectif

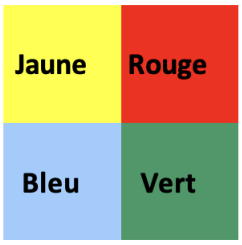
L'objectif de cette séquence est d'amener les élèves à analyser une figure complexe : être capable de **décomposer une figure en sous-figures simples** ou de **recomposer plusieurs figures pour obtenir une nouvelle figure**. Elle permet un travail spécifique sur le carré, mais d'autres figures sont en jeu, notamment des rectangles et des triangles (rectangle isocèle) et quelques autres polygones.

Aucun travail papier/crayon n'est exigé, aucun instrument classique de géométrie n'est utilisé : l'activité est centrée sur l'analyse de la figure pour sa reproduction, et non pas sur le tracé.

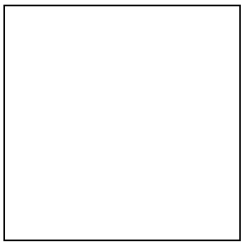
Cette séquence peut être proposée dès le CP.

Description

Un PLIOX est un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones comme ci-dessous.

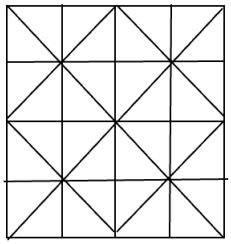


Le PLIOX - recto



Le PLIOX - verso

À partir d'un PLIOX, il est possible de réaliser différentes figures colorées selon un ensemble de pliages autorisés. Les lignes de pli possibles sont les suivantes :



La situation PLIOX correspond alors à la situation suivante :

Reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX.

Grandes lignes du déroulement

La séquence décrite se déroule en plusieurs étapes.

Dans la première étape, les élèves fabriquent leur propre PLIOX. Pour ce faire, ils doivent reproduire le modèle sur la feuille distribuée en suivant les instructions de l'enseignant pour les pliages, puis en situant les zones colorées les unes par rapport aux autres.

Dans les étapes suivantes, les élèves doivent plier leur PLIOX dans le but de reproduire chacun des modèles successivement présentés.

Le déroulement associé à chaque reproduction est identique et se présente comme suit :

Accessibilité universelle. Afin de prendre en compte les élèves ayant des problèmes de vue, il est envisageable d'adapter le Pliox en jouant sur du bigraphisme, par exemple :



Dans ce cas, une double qualification des zones est à envisager, par exemple : vagues/bleu, soleils/jaune, rugueux/rouge, petits pois/vert.

Caractéristiques des lignes de pli.

Les lignes de pli correspondent aux axes de symétrie du carré (ses diagonales et ses médianes, c'est-à-dire les deux médiatrices des côtés opposés), ainsi qu'aux axes de symétrie des quatre carrés de couleur (leurs diagonales et leurs médianes).

- *Temps 1 : Analyse justifiée du modèle présenté (collectif)*
  Il s'agit de mettre en évidence certaines figures, leur position, voire leur orientation, ainsi que certaines de leurs propriétés.
- *Temps 2* : *Réalisation du pliage (individuel)*
- *Temps 3* : *Mise en commun (collectif)*
  Il s'agit de rendre explicites des techniques de pliages et de mettre en évidence de nouveaux objets géométriques : des sous-figures à l'intérieur du PLIOX (monochromes ou polychromes), mais également des droites (sous formes de plis) que le verso du PLIOX permet de voir, voire des points.
- *Temps 4* : *Synthèse (collectif)*
  À partir de la synthèse des constats effectués au cours de l'activité, il s'agit de mettre en évidence certaines propriétés géométriques ou relations entre des figures planes (décontextualisation).

Ce déroulement est détaillé dans la description de l'étape 1.

Planifier le temps et organiser sa classe

Prévoir au moins trois séances pour réaliser les quatre étapes.

L'étape 1 peut faire l'objet d'une séance préalable. On peut alors envisager une deuxième séance comprenant l'étape 1 ainsi que l'étape 2, ou le début de celle-ci. Les différentes phases associées à la reproduction d'une figure modèle (étapes 2, 3 …) se déroulent sur une plage comprise entre quinze et trente minutes.

Matériel à préparer avant la séquence

Matériel collectif à prévoir pour toute la durée de la séquence : un PLIOX, ainsi que quelques feuilles blanches supplémentaires pour les élèves maladroits ou distraits.

Pour l'étape 1 ***en CP***, prévoir pour chaque élève :

- des feutres (ou crayons) de couleur bleue, rouge, verte et jaune ;
- une feuille blanche unie de forme carrée de 21 cm de côté.

Pour l'étape 1 ***à partir du CE1***, prévoir pour chaque élève :

- des feutres (ou crayons) de couleur bleue, rouge, verte et jaune ;
- Une feuille blanche unie de format A4.

Pour les étapes suivantes, chaque élève doit être en possession de son PLIOX.

Un PLIOX pouvant s'user rapidement, prévoir quelques exemplaires supplémentaires.

On prévoira également des affiches et quelques exemplaires de PLIOX pour une trace écrite collective[1].

Modalité de présentation de la figure modèle

Deux modalités de présentation de la figure modèle sont envisageables : sous forme d'un PLIOX effectivement plié et accroché au tableau (ou éventuellement disposé sur la table de travail de l'élève), ou bien figure vidéoprojetée.

Rôle de la justification dans les analyses de figure. Demander aux élèves la justification de la reconnaissance d'une figure les conduit à l'explicitation de certaines de leurs propriétés.

Rôle de la verbalisation. Verbaliser ce que l'on voit et expliquer sa procédure conduisent à faire fonctionner le vocabulaire géométrique (notamment carré, rectangle, triangle, sommet, côté, diagonale) et spatial lié à l'orientation ou aux positions relatives des différentes figures (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de, en haut, en bas). ***Veiller à l'usage d'un vocabulaire idoine.***

Durée des différentes phases. Plus on avance dans la séquence, plus les phases de recherche sont courtes, mais plus celles de verbalisation sont longues.

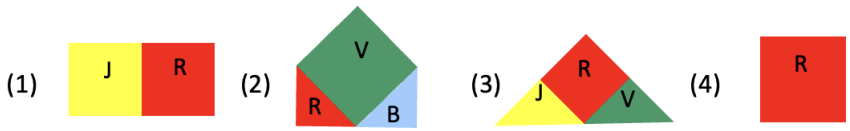
Pourquoi un PLIOX de 21 cm de côté ? Un carré de 21 cm de côté peut facilement s'obtenir à partir d'une feuille A4. Cette taille permet en outre que les figures résultant des différents pliages proposés ne soient pas trop petites ; elles sont même suffisamment visibles lorsqu'elles sont affichées au tableau.

Choix du papier. Préférer du papier grammage normal. Les plis sont trop marqués sur un papier trop épais.

[1] Il est aussi envisageable d'utiliser des « mini-PLIOX » déjà coloriés et à coller pour faire réaliser des traces écrites individuelles.

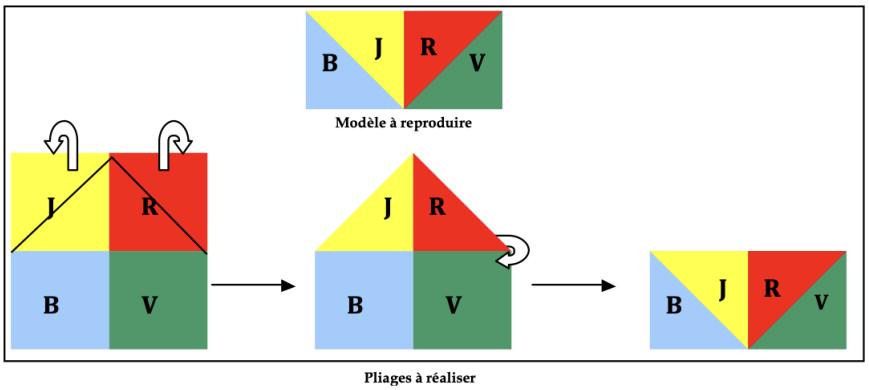
Quelques éléments pour choisir ses modèles

Selon le modèle que l'on choisit, l'activité est rendue plus ou moins difficile. Le nombre de plis peut être un premier facteur de difficultés ; mais le nombre de sous-figures, leurs positions relatives, ainsi que la position qu'elles occupent interviennent également. Par exemple, le modèle (1) est plus simple à reproduire que le modèle (2), qui nécessite trois pliages ; mais le modèle (3), qui nécessite un seul pliage, est plus difficile que modèle (4), qui en nécessite deux.



Si l'on doit prendre en compte les parties repliées au verso du PLIOX, l'activité est rendue plus difficile.

Exemple :



Enfin, l'activité est plus difficile lorsque que les plis nécessaires à la réalisation du modèle n'apparaissent pas sur le PLIOX.

Étape 1 : introduction du PLIOX dans la classe

Pourquoi cette étape ? Cette étape correspond à une phase d'*appropriation du matériel.* Les élèves prennent conscience que le PLIOX est un carré partagé en quatre zones carrées des couleurs différentes. De plus, le pliage apparaît comme une modalité de reproduction qui sera utilisée tout au long de la séquence.
Durée de l'étape : 25-35 minutes

Temps 1 : Présentation et observation du PLIOX (collectif)

Présenter le PLIOX et l'afficher au tableau durant toute l'activité pour qu'il reste visible, mais à distance.

Après un temps d'observation, faire verbaliser les élèves sur ce qu'ils voient.

Il est possible d'indiquer aux élèves la fonctionnalité du PLIOX : c'est un instrument qui va permettre de réaliser des figures.

Distribuer une feuille carrée unie blanche à chaque élève.

Variante (à partir du CE1) : réalisation du plus grand carré

Proposer aux élèves la résolution du problème suivant : réaliser le carré « le plus grand possible » à partir d'une feuille A4. Puis présenter le PLIOX.

Présentation sous forme de PLIOX plié. Cette modalité permet d'une part la perception des plis déjà effectués, et d'autre part peut favoriser la comparaison de longueur entre le modèle et la figure réalisée.

Présentation vidéoprojetée. Cette modalité facilite la vision (plus grande échelle) et peut permettre de proposer des « figures fausses ». La validation nécessite soit la présence d'une figure modèle effectivement réalisée et placée dans une pochette plastique (pour éviter que les élèves déplient), soit l'usage d'une cordelette pour vérifier les égalités de longueurs.

Importance de l'étape 1. Cette étape s'avère fondamentale dans la fabrication des premiers schèmes des pliages. Ne pas la proposer peut alors faire obstacle à la reproduction des premières figues.

Faire verbaliser les élèves sur ce qu'ils voient leur permet d'effectuer une première analyse du PLIOX en vue de sa reproduction. Pour l'enseignant, il s'agit également de faire dissocier vocabulaire de la vie courante et vocabulaire géométrique (par exemple, un sommet d'une figure peut être « en bas », ce n'est pas le cas du sommet d'une montagne).

Temps 2 : Pliages bords sur bords (travail individuel)

Donner la première consigne en montrant comment procéder : « *Nous allons plier le carré en deux, très précisément, comme je vous le montre : vous superposez un côté contre un autre côté. Vous appuyez sur le pli quand vous êtes contents de votre pliage.* »

Les élèves observent d'abord le geste du professeur qui explique en même temps, puis reproduisent le geste.

Les élèves doivent parvenir à un pli bien net. Passer dans les rangs pour vérifier ce premier pliage ; quelques carrés supplémentaires sont nécessaires pour les élèves parfois maladroits ou empressés.

> *Observations*
> Le geste est difficile notamment en CP car il faut (avec de petites mains) tenir les côtés et les sommets bien superposés et plier en même temps (un élève observé se sert de son menton) ; mais finalement la très grande majorité des élèves réussit plutôt bien. L'enseignant peut ainsi aider les quelques autres.

Faire remarquer que l'on a bien obtenu un rectangle.

Donner la deuxième consigne en réalisant l'action : « *Vous ouvrez le pli pour revenir au carré. Maintenant vous tournez votre feuille d'un quart de tour et vous effectuez un second pli de la même façon que tout à l'heure.* »

Terminer en faisant remarquer aux élèves que quatre carrés sont apparus sur le PLIOX lorsqu'il est déplié.

Temps 3 (travail individuel) – Coloriage

Distribuer les feutres et demander aux élèves de repérer la position des couleurs d'après le modèle affiché au tableau en réalisant une petite tâche de couleur au milieu de chaque carré correspondant.

Vérifier et faire vérifier, par confrontation visuelle au modèle, qu'il n'y a pas d'inversion gauche/droite dans les coloriages (notamment au niveau des carrés bleus et verts) : il s'agit pour la suite que tous les élèves aient le même support !

Après vérification, inviter les élèves à colorier les quatre carrés en respectant le code couleur.

À la fin de cette séance, chaque élève dispose d'un PLIOX identique au modèle et qui porte en outre le marquage de deux plis *(ou de trois plis, dans la variante où on part d'une feuille A4, avec le premier pli en diagonale qui a permis de produire le carré.)*

> *Observations*
> Pendant le temps du coloriage, on peut inciter les élèves à garder le grand carré toujours plié en quatre, ce qui permet de ne pas « dépasser ». Si besoin, le temps nécessaire pour terminer le coloriage peut être différé dans la journée.

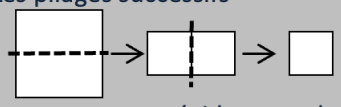
Temps 4 (collectif) – Synthèse

Rappeler le nom de l'instrument construit (le PLIOX) puis revenir sur les différents éléments ci-dessous, en s'appuyant sur les propositions des élèves et en les illustrant sur le PLIOX :

- les relations entre les différentes figures, par exemple : « *Dans un carré, il y a d'autres figures* » ; « *Dans un carré, il y a des carrés plus petits* » ; « *Deux petits carrés côte-à-côte forment un rectangle* » ; « *Les quatre petits carrés forment le grand carré* » ; « *Le pliage en deux parties superposables du*

Les plis qui apparaissent sur le PLIOX correspondent à deux droites qui sont axes de symétrie du carré (les deux médianes). Leur intersection est un point qui correspond au centre du carré. Celui-ci correspondra, après coloriage, à un sommet commun aux quatre carrés de couleur.

Relations et propriétés géométriques
Les pliages successifs



mettent en évidence des relations entre le carré et le rectangle demi-carré, ainsi que certaines propriétés du rectangle et du carré (ils ont quatre côtés, les longueurs des côtés sont égales ou pas).

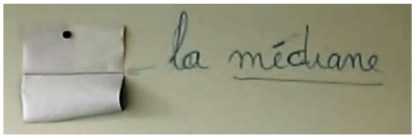
Des compétences spatiales sont en jeu dans la phase de coloriage. Ce travail nécessite que les élèves situent les zones colorées les unes par rapport aux autres.
Il faut veiller au respect de la disposition des couleurs sur le Pliox.

Marquage des plis. Les différentes lignes de pli ne sont pas à marquer à cette étape : elles se construiront au fur et à mesure de l'avancée dans la séquence.

grand carré permet d'obtenir deux rectangles » ; « *Un carré se partage : en quatre petits carrés identiques, en deux rectangles identiques* » ;

- les différences et ressemblances entre carré et rectangle, par exemple : « *Le carré et le rectangle possèdent quatre côtés et quatre sommets* » ; « *Le carré possède quatre côtés de même longueur* » ; « *Le rectangle possède deux grands côtés et deux petits côtés* »
- éventuellement les deux droites qui permettent d'obtenir un rectangle demi-carré à partir d'un carré : la médiane.

Exemple de trace écrite dans une classe de CE1



Étape 2 : reproduction d'un premier modèle par pliage

Pourquoi cette étape ? Cette étape organise la première confrontation à un problème de reproduction de figure par pliage du PLIOX. Pour l'enseignant, il s'agit de s'assurer de la bonne compréhension de la consigne et de ce type de problème.
Durée de l'étape : 15-20 minutes

Temps 1 : Présentation et analyse du modèle 1 (collectif)

Préparer le modèle 1 (en pliant le PLIOX) hors de la vue des élèves, puis l'afficher au tableau.

Modèle 1



En collectif, solliciter des élèves pour dire ce qu'ils voient, ce qu'ils reconnaissent, et pourquoi.

L'analyse peut porter sur les couleurs, les formes et leurs positions :

- présence ou absence de certaines couleurs ;
- identification du contour (un rectangle) ainsi que des deux carrés monochromes ;
- explicitation des positions relatives de ces deux carrés (« *Le rouge est à droite et le jaune à gauche.* »).

La demande de justification concernant la reconnaissance d'un carré ou d'un rectangle amène les élèves à expliciter certaines des propriétés suivantes : « *Tous les côtés du carré sont de même longueur* » ; « *Un rectangle a quatre côtés* » ; « *Un carré a quatre côtés (comme le rectangle, c'est une ressemblance !)* » ; « *Dans le rectangle, certains côtés sont de la même longueur.* ».

Temps 2 : Recherche (individuel)

Donner la consigne : « *Chacun doit réaliser par pliage une figure identique à celle qui est affichée à partir de son PLIOX* ».

Individuellement, les élèves font des essais de pliage et réalisent la figure. Le modèle reste visible mais à distance des élèves.

La validation est perceptive par comparaison visuelle entre le modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué. Il est même possible pour les élèves de venir juxtaposer leur production et le modèle, par exemple pour comparer les longueurs des côtés.

Différence entre carré et rectangle. À ce stade de la scolarité, le carré n'est pas encore perçu par les élèves comme un rectangle particulier.

Le terme « médiane ». L'emploi de ce terme, même s'il ne figure pas dans les attendus des programmes du cycle 2, s'avère très utile durant cette séquence. C'est pourquoi son emploi est encouragé ici, mais ne doit pas faire l'objet d'une évaluation. La médiane peut y être définie comme une droite qui permet de partager le carré en deux rectangles superposables.

Attention à ne pas réaliser le modèle devant les élèves, au risque de réduire l'activité à une reproduction de geste !

Il n'est pas nécessaire de forcer le regard des élèves. Il s'affinera au fur et à mesure de l'activité.

Formulations. L'analyse conduit à employer des formulations pouvant nécessiter le vocabulaire géométrique et/ou spatial. S'il n'est pas employé par les élèves, ce vocabulaire ou les expressions langagières associées pourra faire l'objet de reformulations de la part de l'enseignant.

Nombre de pliages nécessaires pour réaliser la figure. Il n'est pas indiqué dans la consigne, mais ce premier modèle est choisi de façon que les élèves puissent résoudre facilement le problème : il nécessite un seul pliage selon un pli déjà marqué

Temps 3 : Mise en commun (collectif)

Il s'agit de mettre en évidence *comment* on plie et *sur quoi*.

Solliciter quelques élèves pour expliquer leur procédure à la classe. S'ils n'y parviennent pas, les laisser la montrer et les aider pour la formuler ou apporter du vocabulaire.

La réalisation du pliage en même temps que l'explication peut être effectuée par celui qui explique ou par les autres élèves.

> *Observation dans une classe de CP*
>
> Élève : Je, j'ai, j'ai mis les quatre côtés sur ma table, je l'ai plié, j'ai regardé, j'ai regardé dans quel côté qu'il fallait mettre, j'ai retourné / j'ai plié.
>
> Enseignante : D'accord. Tu as plié quoi ?
>
> Élève : Ben - la feuille.
>
> Enseignante : La feuille, on avait dit que c'était quoi ? (…)
>
> Élève : Un carré.
>
> Enseignante : C'est un carré. Donc tu as plié ton carré//
>
> Élève : En deux.
>
> Enseignante : En deux, d'accord.

Il est également possible de faire expliciter par les élèves les raisons d'une production erronée.

La validation de l'explication est double : sur le fond par la réalisation effective du pliage en parallèle au discours, et sur la forme (le vocabulaire) par l'enseignant.

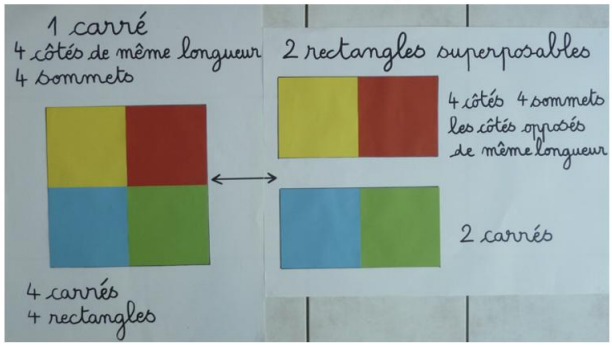
Temps 4 : Synthèse et conclusion (collectif)

Revenir sur les modalités de pliage.

Reprendre le vocabulaire rencontré : carré, rectangle, côté.

Conclure : « *Quand on plie le carré en deux, on obtient deux rectangles* ». Plier et déplier son PLIOX selon une médiane permet d'illustrer cette observation.

On peut également ajouter : « *Quand on place deux carrés superposables côte à côte, on obtient un rectangle* ».

> *Exemple de trace écrite réalisée à l'issue de l'étape 2 dans une classe de CP :*
>
> 
>
>
> *Exemple de trace écrite dans une classe de CE1 :*
>
> « Quand on plie le carré quadricolore côté opposé sur côté opposé, on obtient deux rectangles bicolores. On fait un pliage par médiane. »

lors de l'étape précédente (une médiane) ; il est composé des deux carrés rouge et jaune mis en évidence par coloriage dans l'étape 1.

Élèves sollicités. Les élèves sont choisis par l'enseignant en fonction de leurs procédures et/ou de leurs erreurs.

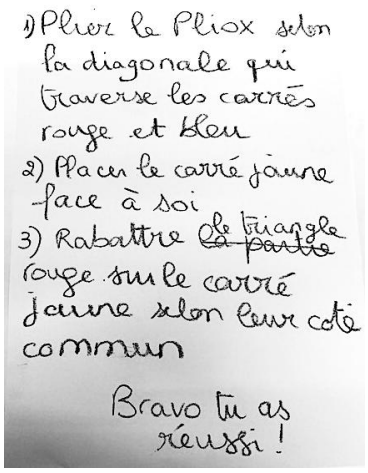
Nommer les faces. Nommer les faces « recto/verso » ou bien « face blanche/face colorée » peut faciliter la discussion. En revanche, les termes « devant/derrière » sont à éviter car ils dépendent du point de vue du locuteur.

ANNEXE 2 : MESSAGES PRODUITS PAR LES PARTICIPANTS (TEMPS 2)

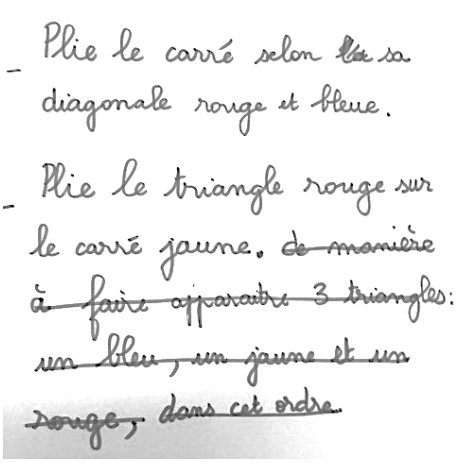
Deux groupes ont travaillé sur la figure modèle 6a et deux sur la figure modèle 6b. Les messages produits permettent de se rendre compte des modifications et réflexions encore opérées au sein du groupe au moment de leur finalisation.

Messages correspondant à la figure modèle 6a

Groupe 1

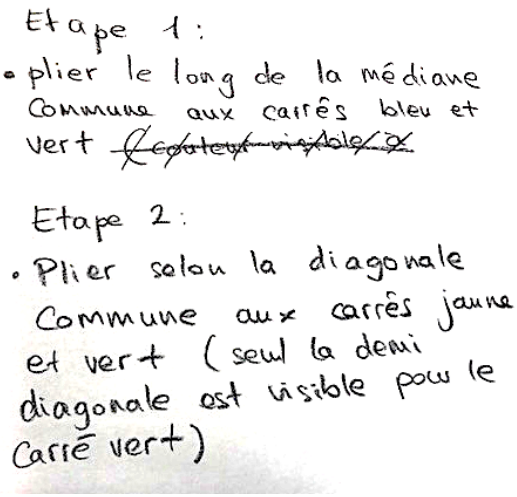


Groupe 2

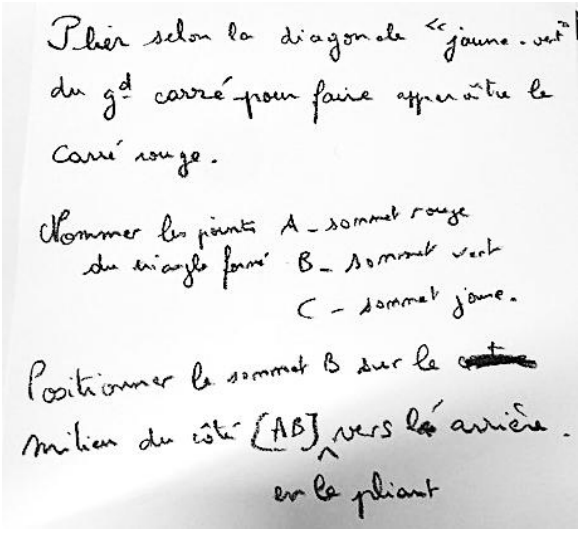


Messages correspondant à la figure modèle 6b

Groupe 3



Groupe 4



Dans ces textes, les constructions proposées sont toutes formées de deux pliages. Des éléments de variation, à la fois en termes de procédures et de description apparaissent toutefois. Pour la figure modèle 6a, les deux procédures proposées sont identiques, tandis que pour la figure modèle 6b, elles sont différentes : la deuxième proposition commence par un pliage selon la diagonale, alors que la première proposition le fait dans un second temps. Nous constatons également une réflexion importante sur les choix de formulations, que l'on peut observer sur les photographies par des ajouts, rayures et corrections.

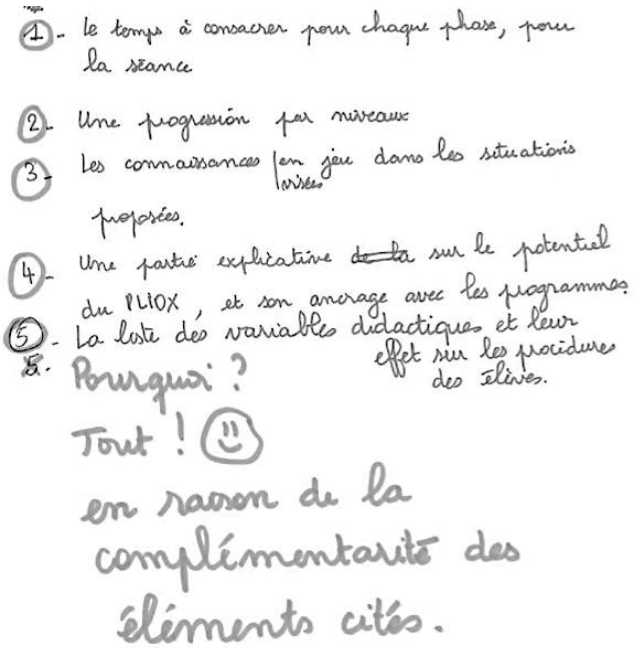
Dans l'ensemble des textes, nous remarquons l'emploi de vocabulaire issu du langage courant (« qui traverse », « rabattre »), ainsi que d'indications spatiales correspondant à des positions ou des orientations (« face à soi », « sur », « vers l'arrière »), mais peu de vocabulaire mathématique (« diagonale », « médiane », « carré » dans tous les groupes ; et de façon plus spécifique, « sommet », « milieu » et « côté » dans le groupe D, qui recourt à plus de notations mathématiques). Nous observons également un appui important sur des éléments de perception visuelle (indication de rétroactions et de contrôles visuels).

Enfin, le groupe 4 a fait le choix d'introduire des noms de lettres pour désigner des points, mais au risque de se tromper dans la désignation. En effet ce message contient une coquille : le groupe a écrit dans la dernière phrase : *« Positionner le sommet B sur le milieu du côté [AB] en le pliant vers l'arrière »,* mais, compte-tenu des notations proposées, il s'agit en fait du milieu du côté [CB] et non [AB].

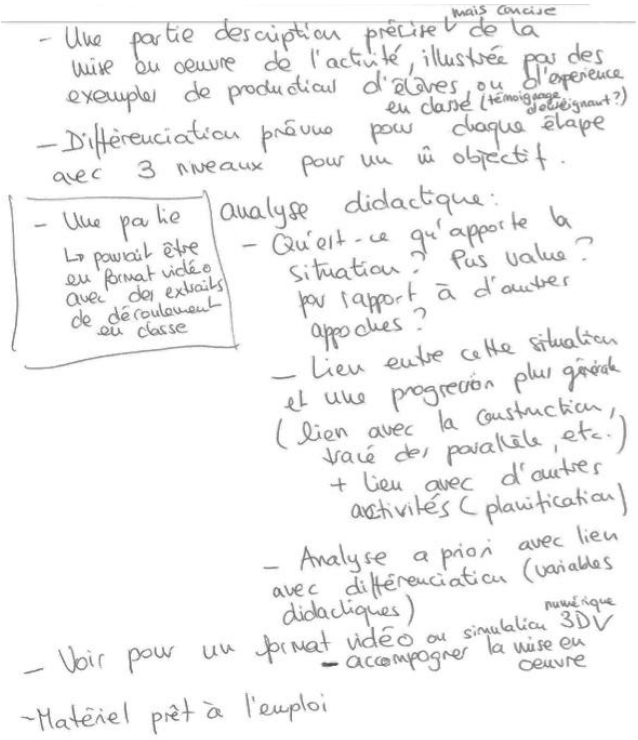
ANNEXE 3 : ATTENTES DES GROUPES POUR L'ELABORATION D'UNE BROCHURE (TEMPS 3)

Nous utilisons ici une nouvelle désignation des groupes par les lettres (A, B, C, D) parce qu'il ne nous est pas possible d'établir la correspondance avec les productions de l'annexe 2.

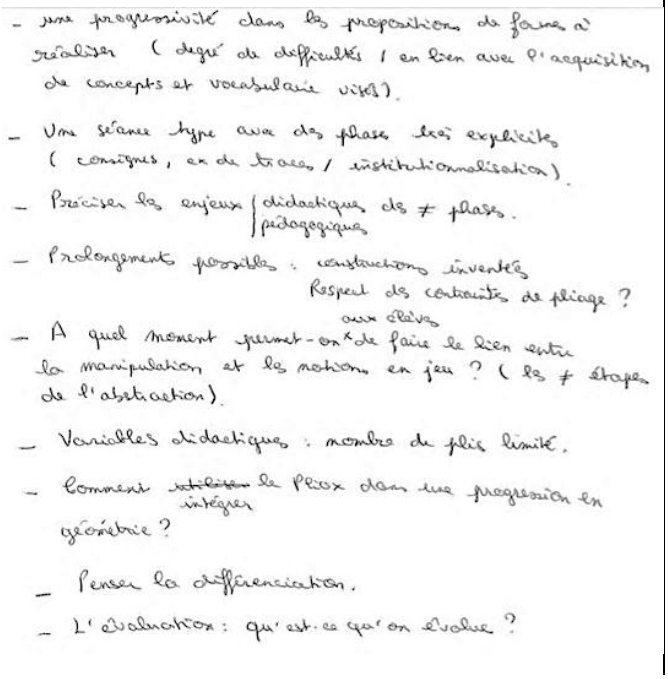
Groupe A



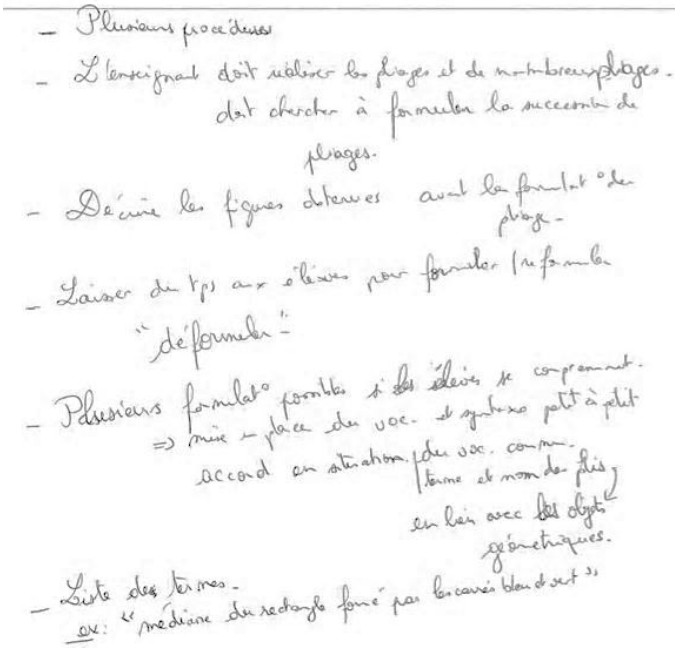
Groupe B



Groupe C



Groupe D



- Quels attendus au niveau du voc selon les niveaux de classe ?
- Quels liens avec grandeurs et mesures ? Notion d'aire ? Fractions d'aire.

- Progressivité de situation -
- Importance du temps de la situation "en amont / réception" avec aller-retour

ANNEXE 4 : ANALYSE DU DOCUMENT PAR LES GROUPES (TEMPS 4)

Parmi les quatre groupes de l'atelier, trois nous ont remis les fiches de synthèse (A, B et D). Les groupes A et D ont également porté des annotations sur l'extrait de la ressource. Le groupe C a uniquement annoté le document. Nous présentons ici les trois fiches de synthèse, les annotations étant plus difficiles à reproduire.

Groupe A

1)

POINTS POSITIFS	A MODIFIER / AJOUTER ?
x le paragraphe sur l'accroche x les éléments dans la colonne grise x les consignes bien détaillées	x Ajouter un tableau pour une vue globale de la séquence, ajouter le terme séance (on s'y perd dans les étapes...) x Sortir la fabrication du PLIOX pour en faire une séance à part.

2) + les modèles donnés et les variables indiquées

3) + éléments donnés
+ ajouter les objectifs langagiers, en tout cas les rendre plus visibles

Groupe D

on aurait aimé que les el. soient moins guidés pour le coloriage. On aurait laissé les el colorier et se tromper, pour les amener à constater la similitude de deux pliox orientés différemment
Consigne :
" Les couleurs ne sont pas placées au hasard, tu dois respecter leur position les unes par rapport aux autres "
(et on laisse un modèle colorié sur la table pour pouvoir le faire tourner, le manipuler)
" On doit tous avoir le même à la fin, pour la suite c'est important "

La colonne grise à droite : on trouve ça super, ça précise les intentions didactiques au fur et à mesure sans surcharger la lecture.

La présence des illustrations est très appréciable, le détail du pliage ...

Le 2e encadré bleu (pourquoi cette étape ?) = on ne voit pas l'intérêt de la 2e phrase - (formuler de manière plus explicite qu'il s'agit de s'assurer de la compréhension des critères de réussite)

Groupe B

(+)

+ les notes dans la marge grisée
Lo ajouter des logos pour distinguer les infos (pratique, didactique ...)
+ Pourquoi cette étape Lo bien
+ présence de consignes détaillées pour l'enseignant (bien pour gestion vocabulaire)
+ Synthèses décrites en détail + mise en commun.

(-)

- 1ère partie du document "grande ligne du déroulement"
- Consigne pour la réalisation de Pliox ne sont pas très clairs.
"en suivant les instructions de l'enseignant pour les pliages" → qu'est-ce qui est attendu.
- manque une vision synthétique de l'ensemble (tableau, schema ...)
L→ étapes, temps → apporte confusion
- la variante p. 3 à mettre à part
Lo apporte confusion
- titres peu explicites (Plier bord à bord)

→ il faudrait hiérarchiser les infos et proposer un visuel qui permet de comprendre le statut des différentes infos.

UNE RESSOURCE POUR FORMER À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3

Édith PETITFOUR
MCF, INSPE de Normandie Rouen-Le Havre
Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France
COPIRELEM, IREM de Rouen
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé
Cet atelier s'appuie sur une recherche en cours menée à l'IREM de Rouen dans un groupe de personnes formatrices de professeurs des écoles. Le projet du groupe est de concevoir une situation de formation à l'enseignement de la géométrie pour des élèves de cycle 3, en prenant en compte la diversité des élèves en classe et celle des professeurs des écoles en formation initiale ou continue (enseignement spécialisé). Les problèmes de construction de figures constituent la situation d'enseignement. La situation de formation associée vise à outiller l'identification et l'explicitation des connaissances en jeu de la situation d'enseignement en s'appuyant sur les actions instrumentées des élèves.

L'atelier s'appuie sur une recherche menée par le groupe « Géométrie au cycle 3 » de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Rouen dont les membres sont professeurs des écoles maîtres formateurs (PEMF) et formatrices en mathématiques de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques de collège à l'institut national supérieur du professorat et de l'éducation (INSPE) de Normandie Rouen-Le Havre. L'atelier, comptant 22 participants[1], a été animé par Isabelle Bailly-Purnu, professeure de mathématiques à temps partagé en collège et formatrice à l'INSPE sur le site d'Evreux, et par Édith Petitfour, enseignante-chercheure en didactique des mathématiques et formatrice à l'INSPE sur le site de Mont-Saint-Aignan.

Le projet[2] du groupe IREM est de concevoir une *situation de formation* (Guille-Biel Winder et al., 2019) à l'enseignement de la géométrie pour des élèves de 9-11 ans (cycle 3), en prenant en compte la diversité des élèves en classe et celle des professeurs en formation initiale ou continue. Ce projet s'inscrit dans la continuité des travaux de Petitfour (2017a, 2017b, 2018, 2022, 2024) sur l'enseignement de la géométrie par la construction instrumentée dans le cadre de l'inclusion scolaire. Il est fondé sur le droit de tous à une éducation inclusive et équitable de qualité, qui réponde aux besoins de tous les apprenants, ainsi que le rappelle l'Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture (UNESCO, 2017). Nous nous intéressons en particulier à l'*accessibilité didactique* des savoirs mathématiques enseignés, au sens d'Assude et al. (2014), c'est-à-dire à l'ensemble des conditions qui permettent aux élèves, aux étudiants et aux enseignants en formation continue d'accéder à l'étude des savoirs.

Nous présentons d'abord le processus d'élaboration de la *situation de formation* et la structure sous-jacente à l'élaboration de scénarios de formation (partie I), puis nous introduisons des outils didactiques pour l'analyse d'une construction instrumentée (partie II). Nous nous intéressons ensuite à la tâche de construction instrumentée choisie comme support de la formation (partie III). Nous cherchons alors à comprendre les difficultés et évaluer les besoins des étudiants ou enseignants en formation, ainsi que les difficultés et réussites des élèves en classe (partie IV), avant de dresser un bilan (partie V).

[1] Les participants sont issus des académies de Aix-Marseille, Montpellier, Rennes, Strasbourg et Versailles et des universités de Aix-Marseille, Grenoble-Alpes, Lyon 1, Strasbourg et Toulouse 2.

[2] Projet *A³ Géom* soutenu par le PIA3 100 % IDT (inclusion, un défi, un territoire) et par l'INSPE Normandie Rouen-Le Havre.

I - SITUATION DE FORMATION : ÉLABORATION ET STRUCTURE

1 Processus d'élaboration de la situation de formation

Nous présentons dans cette partie les étapes du processus d'élaboration de la *situation de formation* exploitée lors de l'atelier. La figure 1 les récapitule et informe des publics impliqués dans les expérimentations d'enseignement et de formation au cours de l'année 2024-2025.

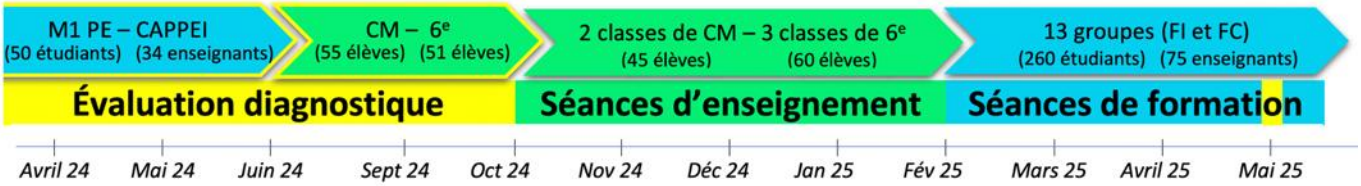


Figure 1. Étapes du processus d'élaboration de la situation de formation

La première étape de notre projet de conception d'une *situation de formation* à l'enseignement de la géométrie a été de faire une évaluation diagnostique. Nous avons évalué les connaissances mises en jeu dans des tâches de construction instrumentée par des élèves de fin d'école primaire-début de collège. Nous avons aussi évalué les compétences d'étudiants et d'enseignants en formation à anticiper des difficultés ou erreurs d'élèves dans la résolution de ces tâches de construction. Les étudiants étaient en formation au professorat des écoles en première année de master (M1 PE) et les enseignants préparaient le certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive[3] (CAPPEI).

Nous avons ainsi repéré les difficultés et les réussites des élèves, et identifié les besoins en formation des étudiants et des enseignants pour un enseignement s'adressant à la diversité des élèves et contribuant à lever les obstacles à la conceptualisation en géométrie. Cet état des lieux, réalisé d'avril à septembre 2024, révèle des besoins tant du côté de l'enseignement de la géométrie que du côté de la formation à cet enseignement, ce qui établit le bien-fondé de notre projet de production de ressources (Petitfour, 2025b).

La deuxième étape du projet a consisté en la conception d'un scénario d'enseignement et ses implémentations en classe. Notre groupe IREM expérimente, depuis septembre 2024, des séquences d'enseignement de la géométrie dans des classes de cours moyen et de sixième à partir d'une trame commune, issue d'une proposition de mise en œuvre d'un *dispositif de travail en dyade* (Petitfour, 2017b). Ce dispositif a été élaboré dans le cadre d'une recherche visant à enseigner la géométrie à des élèves dyspraxiques[4], autrement qu'en les mettant en situation d'échec par la manipulation d'instruments pour réaliser des constructions géométriques. La trame d'enseignement a été déclinée en un scénario propre à chacun des deux professeurs des écoles expérimentateurs en cours moyen et chacune des deux professeures de mathématiques expérimentatrices en sixième, qui se sont emparés de la proposition d'enseignement en l'intégrant dans leur pratique de classe, tout en tenant compte des besoins spécifiques de leurs élèves. Les scénarios se sont mutuellement enrichis au fur et à mesure des retours d'expérimentation et premières analyses au sein du groupe. Nous avons filmé les séances de classe et récolté les productions des élèves. Les captations vidéo et productions graphiques font partie de nos données de recherche, certaines ont constitué un matériau pour produire des supports d'étude exploités en formation.

[3] Ce certificat atteste la qualification des professeurs du premier degré et du second degré qui exercent auprès d'élèves à besoins éducatifs particuliers liés à une situation de handicap, de grande difficulté scolaire ou à une maladie et qui contribuent à la mission de prévention des difficultés d'apprentissage et d'adaptation de l'enseignement. (*Extrait de la circulaire du 12-2-2021* https://www.education.gouv.fr/bo/21/Hebdo10/MENE2101543C.htm)

[4] Nous employons le terme « dyspraxiques » pour désigner les élèves porteurs d'un trouble développemental de la coordination (TDC) se manifestant dans les habiletés gestuelles et affectant les performances scolaires (INSERM, 2019).

La troisième étape du projet a consisté en l'élaboration de scénarios de formation associés à la situation d'enseignement, et leur expérimentation de janvier à mai 2025 dans les trois sites de l'INSPE de Normandie Rouen-Le Havre (Évreux, Le Havre, Mont-Saint-Aignan), avec différents groupes d'étudiants ou d'enseignants. La formation vise à outiller les étudiants ou enseignants à l'identification et l'explicitation des connaissances en jeu dans la résolution de problèmes géométriques d'une part, et à aider les élèves à surmonter leurs difficultés, le cas échéant, afin de conduire chacun à des apprentissages en géométrie d'autre part. Le travail de l'atelier s'est centré sur le premier objectif de la formation.

2 Situation de formation : éléments constitutifs et structure

Dans une *situation de formation* (Guille-Biel Winder et al., 2019), les *formés* sont amenés à développer dans leur activité différents types de connaissances : des *connaissances mathématiques* (à enseigner ou pour enseigner), des *connaissances didactiques* (spécifiques au contenu mathématique enseigné et correspondant à des transpositions de savoirs didactiques conçus initialement dans le cadre de la recherche) et des *connaissances pédagogiques* (relevant de l'organisation et de la gestion de la classe et relevant de conceptions de l'apprentissage). Les *formés* sont aussi amenés à entrer dans différentes *postures*. Pour notre situation, nous avons retenu les trois postures suivantes :

> *Le formé est placé dans une **posture d'élève** par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser la tâche mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées mobilisées dans la réalisation de cette tâche.*
>
> *Il est placé dans une **posture d'élève-enseignant** lorsqu'il étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, ou lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe de la tâche mathématique considérée.*
>
> *Il est placé dans une **posture d'enseignant** lorsqu'il entre dans un questionnement plus large sur les pratiques de classe ou les enjeux d'apprentissages mathématiques*. (Guille-Biel Winder et al., 2019, p. 12)

Pour présenter notre *situation de formation* aux participants de l'atelier, nous avons opté pour une stratégie de formation de type homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996), consistant à leur faire vivre ce que vivent les formés (étudiants ou enseignants) lors de la mise en œuvre de la *situation de formation*, avec des éléments de transposition. Lors de l'atelier, les participants ont donc pu être placés dans différentes postures (*élève, élève-enseignant, enseignant*), auxquelles nous avons ajouté la ***posture de formateur***, lorsque nous avons fait un pas de côté pour expliciter nos intentions et choix de formation, ainsi que les différentes variantes de la *situation de formation*.

Notre *situation de formation* à l'enseignement de la géométrie par la construction instrumentée démarre par un temps d'étude de la tâche de construction instrumentée (temps 1). S'ensuit un temps pour comprendre les difficultés et évaluer les besoins des élèves (temps 2) et un temps pour répondre aux besoins et prendre en compte la diversité des élèves (temps 3). L'atelier a suivi ce déroulement. Les participants ont pu vivre une mise en situation en expérimentant certaines modalités de mise en œuvre (partie III.2) et réaliser une analyse de la tâche mathématique (partie III.1). Le deuxième temps d'analyse des besoins des élèves (partie IV.2) a été complété par une analyse des besoins des étudiants ou enseignants en formation (partie IV.1). Les formateurs ont ainsi été invités à s'intéresser aux besoins des formés, de même qu'en formation on invite les étudiants ou enseignants à s'intéresser aux besoins des élèves. Une courte présentation du temps 3, relative à la mise en œuvre d'un dispositif de travail en dyade (Petitfour, 2022, 2023, 2025a), a été réalisée pour terminer l'atelier, elle ne sera pas développée dans ce compte-rendu, mais fera l'objet d'un atelier ultérieur. L'annexe 1 récapitule la trame de la *situation de formation*, structurée en trois temps et différentes phases, avec les différentes modalités et variantes.

Nous présentons maintenant des outils pour l'analyse d'une construction instrumentée. Ces outils didactiques, issus de la recherche, sont utiles aux formateurs pour conduire la *situation de formation*. De plus, certaines *connaissances didactiques* peuvent être exposées aux *formés* lors de la phase de synthèse du temps 2.

II - OUTILS D'ANALYSE D'UNE CONSTRUCTION INSTRUMENTÉE

Petitfour (2017a) définit une *action instrumentée* comme une action d'un sujet qui, dans son environnement de travail (papier-crayon ou numérique), utilise avec son corps (ses mains, ses yeux, etc.) un objet technique (l'instrument de géométrie) pour produire ou analyser un objet graphique (dessin) représentant un objet géométrique. La figure 2 modélise les relations (représentées par des doubles-flèches) entre l'environnement, le corps, les objets techniques, graphiques et géométriques. Ces relations sont associées à des connaissances activées lors de la réalisation d'une action instrumentée.

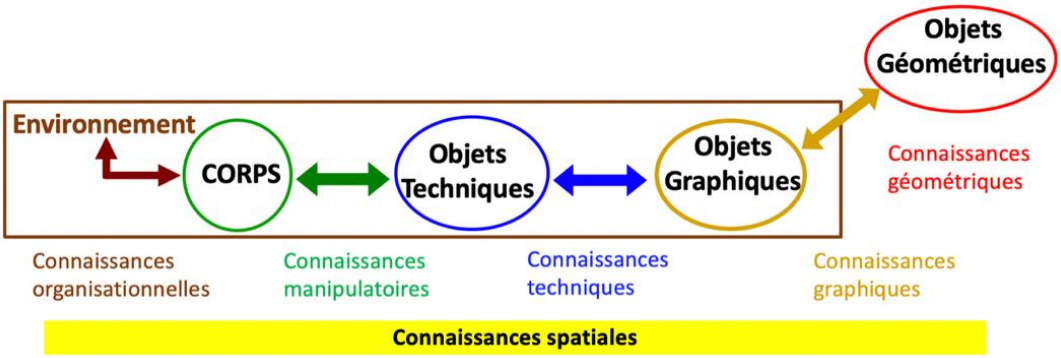


Figure 2. Modélisation de l'action instrumentée

L'expertise en construction instrumentée se traduit par l'articulation de différents types de connaissances, en lien avec deux critères d'évaluation : la *précision* et la *justesse* (Petitfour, 2017a). Nous présentons ces critères et en donnons des illustrations pour des tâches de construction instrumentée dans l'environnement papier-crayon.

1 Précision d'une construction

La *précision* d'une construction est liée aux relations entre l'instrument et le corps de celui qui le manipule dans son environnement de travail (figure 2) lors de la mise en œuvre des actions instrumentées. Elle dépend de la précision permise par l'instrument matériel utilisé (épaisseur de la mine du crayon, diamètre de la pointe du compas, etc.) et de l'habileté de l'utilisateur. Elle s'évalue sur le dessin produit : plus l'écart entre l'objet graphique produit et l'objet à produire est petit, meilleure la *précision* est. Celle-ci se vérifie par un contrôle instrumenté des propriétés géométriques ou par superposition d'un calque du dessin attendu (fourni par l'enseignant, un manuel, etc.). La réalisation d'une construction *précise* s'obtient par une bonne mise en œuvre de connaissances spatiales, manipulatoires et organisationnelles.

Les *connaissances spatiales* sont relatives à la sélection perceptive d'informations spatiales et à leur interprétation, à l'anticipation, par une représentation mentale, de la construction, de transformations (agrandir, réduire, plier…) et de déplacements (glisser, tourner, retourner). La mise en œuvre de ces connaissances relève de *compétences visuo-spatiales* du sujet qui produit ou analyse un dessin géométrique. Avant la construction, elles permettent d'anticiper la place que prendra le dessin sur le support afin d'exploiter au mieux l'espace à disposition pour qu'il soit lisible (choix d'un point départ, choix des dimensions le cas échéant, etc.). Après la construction, elles permettent de repérer l'imprécision d'un dessin de façon perceptive, lorsqu'elle est importante. Sur la figure 3a, on peut par exemple repérer que le quadrilatère tracé n'est pas un carré en le comparant, après rotation mentale, à la représentation globale d'un carré en position prototypique stockée en mémoire. Le contrôle au calque (carré en pointillé sur la figure 3b) n'est pas utile dans ce cas. On pourrait aussi repérer visuellement que des côtés ont des longueurs différentes ou que certains angles ne sont pas droits si le regard porte sur les propriétés géométriques de la figure. Le point O peut sembler au milieu du segment [AC] : une vérification à la règle graduée met en défaut cette perception visuelle (figure 3c) : la longueur AO dépasse 4 cm de quelques millimètres tandis que OC est inférieure à 4 cm de quelques millimètres.

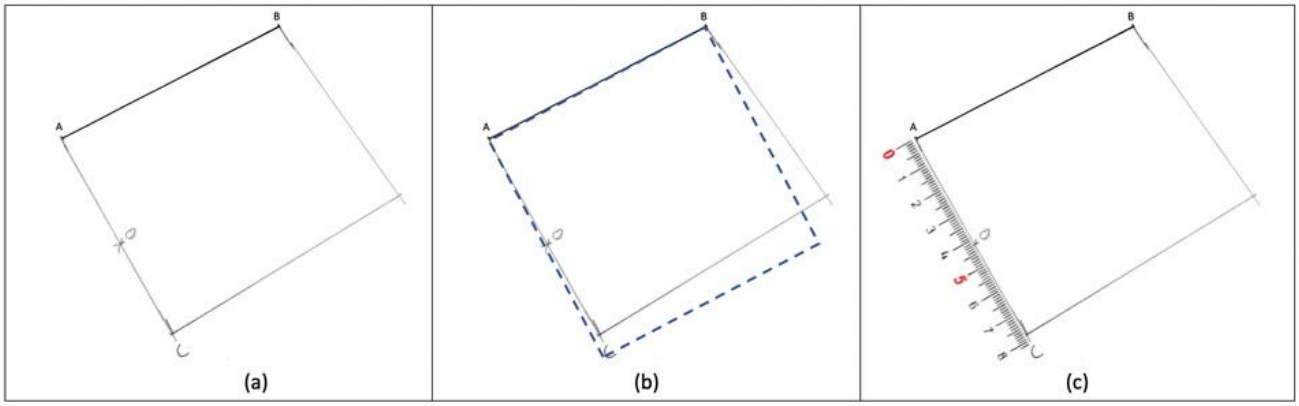
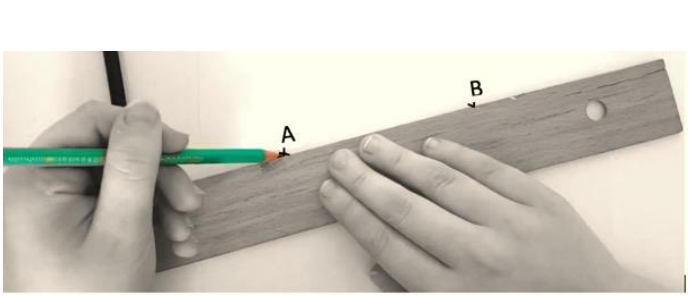
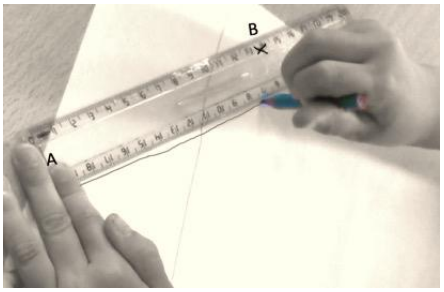


Figure 3. Évaluation de la précision d'une construction (tracé d'un carré)

Des *connaissances manipulatoires* liées aux aspects matériels des instruments et aux aspects corporels de leur manipulation sont utiles pour obtenir de façon efficace un *dessin précis*. Il faut par exemple tenir compte de l'épaisseur de la mine du crayon lorsque l'on relie deux points à la règle, en la décalant un peu des points. Pour cela, on peut placer la mine du crayon tenu par la main dominante sur un des points, amener la règle contre, puis la pivoter autour de la mine jusqu'au second point, en respectant un décalage analogue à celui du premier point. Ensuite, tout en maintenant la règle avec la main centrée sur l'instrument, on trace en appuyant plus fort sur la règle que sur la mine. La figure 4a illustre une position relative des mains, de la règle, du crayon et des points A et B en vue du tracé d'un segment [AB] susceptible d'être précis. Sur la figure 4b, on peut remarquer un maintien de la règle à son extrémité et un tracé le long de son bord inférieur avec une main crispée sur le crayon tenu verticalement. La conduite du tracé n'est pas efficace, elle se fait au prix de douleurs musculaires et de fatigue. Dans le cas observé, le crayon s'est écarté de la règle et la règle a bougé : le trait produit n'est pas droit. Le tracé manque ainsi de précision. Remarquons aussi que le point B ne pouvait être atteint avec le positionnement de la règle choisi puisqu'il ne se situe pas sur le même bord que le point A. Notons ainsi que des *compétences visuo-spatiales* sont aussi en jeu dans la manipulation d'instruments pour les orienter et les positionner sur des éléments du dessin en coordonnant ses mouvements et ajustements posturaux dans l'espace dans lequel se déroule l'action.



(a) Manipulation favorable à un tracé précis



(b) Manipulation non favorable à la précision

Figure 4. Tracé d'un segment [AB] à la règle et au crayon

Des *connaissances organisationnelles* concernant la planification des actions et l'organisation matérielle du tracé sont utiles pour obtenir de façon efficace un *dessin précis*. La planification des actions est relative à un choix de gestes réalisés successivement (par exemple prendre l'instrument, le positionner, tracer) ou simultanément (maintenir l'instrument, réguler sa vitesse tout en traçant, etc.). Au niveau matériel, il s'agit de se placer dans de bonnes conditions de tracé, en apprêtant les instruments (tailler le crayon, régler la hauteur des branches du compas, etc.) et en orientant le support afin d'éviter un tracé risquant d'être imprécis. On peut observer sur la figure 5 des exemples d'organisation non optimale de tracé le long d'une équerre.



Figur 5. Exemples d'organisation non optimale de l'action instrumentée

2 Justesse d'une construction

La *justesse* d'une construction est liée aux relations entre instrument, objets graphiques et géométriques (figure 2) au niveau théorique. Elle porte sur les actions instrumentées, repérées à travers la procédure mise en œuvre, et sur le dessin obtenu.

Au niveau de l'action instrumentée, la *justesse* est déterminée par le choix de l'instrument approprié et par la mise en œuvre de l'usage spécifique de cet instrument pour produire ou analyser un tracé. Par exemple, pour le tracé du second côté d'un angle droit de sommet B, nous pouvons observer une construction *juste* d'un angle droit en B sur la figure 6a : un côté de l'angle droit de l'équerre est le long du segment [AB] et le sommet de l'angle droit est sur le point B. Les deux autres constructions, en revanche, ne sont pas *justes* : l'équerre est bien un instrument approprié pour obtenir un angle droit, mais elle est orientée de façon perceptive dans le cas présenté en figure 6b ; le trait de la graduation 0 de l'équerre, utilisé pour former un angle droit en B avec le bord gradué, est détourné de son usage, l'angle droit de l'instrument n'est pas non plus utilisé (figure 6c).

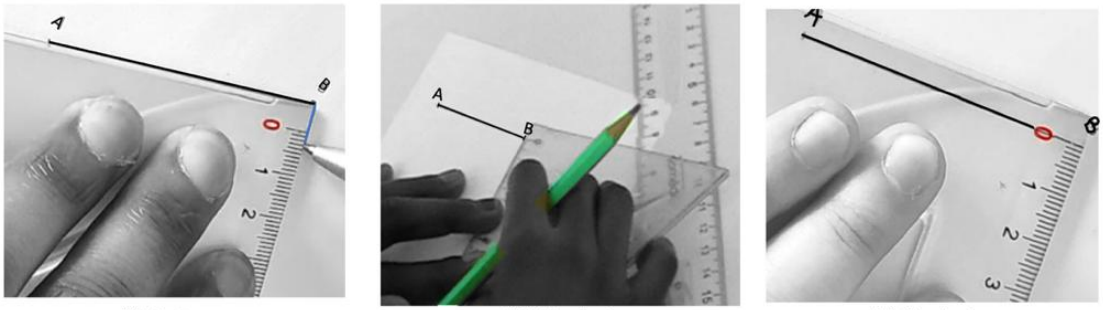


Figure 6. Évaluation de la justesse d'une construction

Les constructions (b) et (c) ne sont pas *justes*, mais elles peuvent être *précises* si l'instrument est visuellement bien orienté. *A contrario*, la construction (a) est *juste*, mais elle peut manquer de *précision* si le tracé se poursuit par un prolongement à la règle. On peut en effet donner plusieurs directions à la règle le long d'un petit trait épais d'un millimètre lorsque l'on veut faire un prolongement.

Au niveau du dessin obtenu, la *justesse* est apparente si les propriétés géométriques qui se déduisent de la construction instrumentée (les inférences) sont vérifiées sur le dessin. Par exemple, si on trace un quadrilatère ayant deux angles droits consécutifs et les côtés de ces angles de même longueur, on pourra apprécier la *justesse* du dessin comme représentant d'un carré, à la *précision* permise par les instruments, en vérifiant à l'équerre que les deux autres angles sont droits et au compas que le quatrième côté est de même longueur que les trois autres. Notons qu'une construction *juste* au niveau de la procédure, mais *non précise*, ne permet pas d'obtenir un dessin *juste*. La mise en œuvre de connaissances géométriques sur les inférences permet à celui qui trace de rectifier son dessin pour qu'il soit *juste*, quitte à perdre en précision (épaissir certains traits pour visualiser des points de concours, etc.).

Des connaissances géométriques, graphiques, techniques et spatiales permettent la réalisation d'une construction *juste.* Les *connaissances géométriques* portent sur les objets géométriques (point, segment, carré, cercle, etc.), sur les propriétés et relations géométriques (appartenance, alignement, perpendicularité, etc.). Les *connaissances graphiques* portent sur les informations graphiques pertinentes du dessin (tracé, codages, notations) à produire ou à interpréter géométriquement. Sur la figure 7 par exemple, on peut observer un manque de connaissances graphiques quant à la manière de représenter un point O sur un segment et celle de nommer un sommet C d'un quadrilatère.

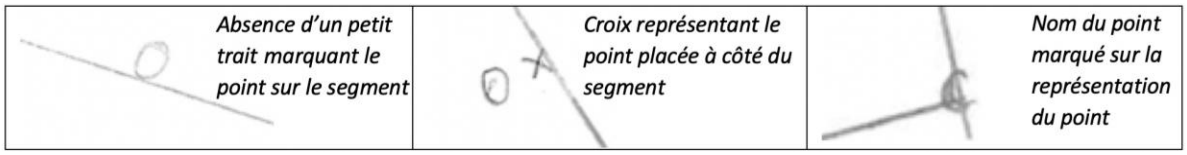


Figure 7. Manque de connaissances graphiques relatives au nom d'un point

Des *connaissances techniques* sur les instruments, à savoir sur leurs fonctions et usages spécifiques, sont nécessaires pour réaliser une construction *juste.* Elles s'expriment dans l'action et peuvent se formuler dans un *langage technique,* par la mention de l'instrument adéquat, l'expression des relations entre certaines de ses parties et des éléments du dessin et par la mention de l'objet à tracer. Par exemple, pour tracer le segment [AB] à partir des points A et B donnés, on prend la règle qui a comme fonction le tracé d'une ligne droite, on place un bord droit sur les points A et B et on trace un segment en allant du point A jusqu'au point B le long de la règle. Le tableau 1 récapitule les fonctions, usages (représentés par le positionnement des instruments) et concepts géométriques associés aux instruments usuels de l'environnement papier-crayon (règle, compas, équerre).

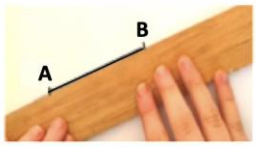
	Instrument	RÈGLE	COMPAS	ÉQUERRE
	Utilisation			
FONCTIONS	Analyser	Alignement de points Appartenance d'un point à une droite	Égalité de longueurs Égalité de distances entre deux points	Comparaison d'un angle à l'angle droit
	Produire	Ligne droite : droite, demi-droite, segment	Ligne circulaire : cercle, arc de cercle	Ligne droite perpendiculaire à une droite donnée : côté d'un angle droit

Tableau 1. Fonctions et usages spécifiques des instruments de géométrie usuels

Les critères de *précision* et de *justesse* tels que nous venons de les définir permettent d'évaluer les constructions instrumentées en observant les procédures de construction et le dessin obtenu. La procédure est correcte si elle met en jeu une technique de construction valide du point de vue mathématique, avec des instruments appropriés. Le dessin obtenu convient si les inférences sont vérifiées (dessin précis) ou rectifiées (dessin non précis). Dans ces cas, la construction est *juste*. Une procédure correcte peut mener à un dessin non précis. Une procédure incorrecte peut donner un dessin précis ou non. Le tableau 2 récapitule les différents cas.

	Juste	Non juste	
Précis	Procédure correcte Dessin attendu	Procédure incorrecte Dessin attendu	
Non précis	Procédure correcte Inférences rectifiées	Procédure incorrecte Dessin non attendu	Procédure correcte Dessin non attendu

Tableau 2. Catégorisation des constructions selon les critères de précision et de justesse

Nous en venons maintenant à la présentation de la *situation de formation* avec le premier temps.

III - ÉTUDE DE LA TÂCHE DE CONSTRUCTION INSTRUMENTÉE

La *situation de formation* démarre par une phase initiale visant à réaliser la construction géométrique choisie comme support de la formation et à entrer dans son analyse *a priori*. Nous présentons d'abord l'analyse *a priori* de la tâche de construction instrumentée choisie, puis la mise en situation proposée dans l'atelier, ainsi que les différentes variantes expérimentées en formation des professeurs des écoles.

1 Analyse *a priori* de la tâche

La tâche de construction instrumentée proposée consiste à « convertir » (Duval, 2005) le texte suivant en un dessin : « Complète le carré ABCD. *On a déjà commencé à tracer le côté [AB].* Place le point O, milieu du segment [AC]. Trace le cercle de centre O passant par le point A. ». Règle graduée, équerre et compas sont à disposition, ainsi qu'une feuille sur laquelle est écrit le texte et tracé le côté [AB] comme amorce de la construction (figure 8).

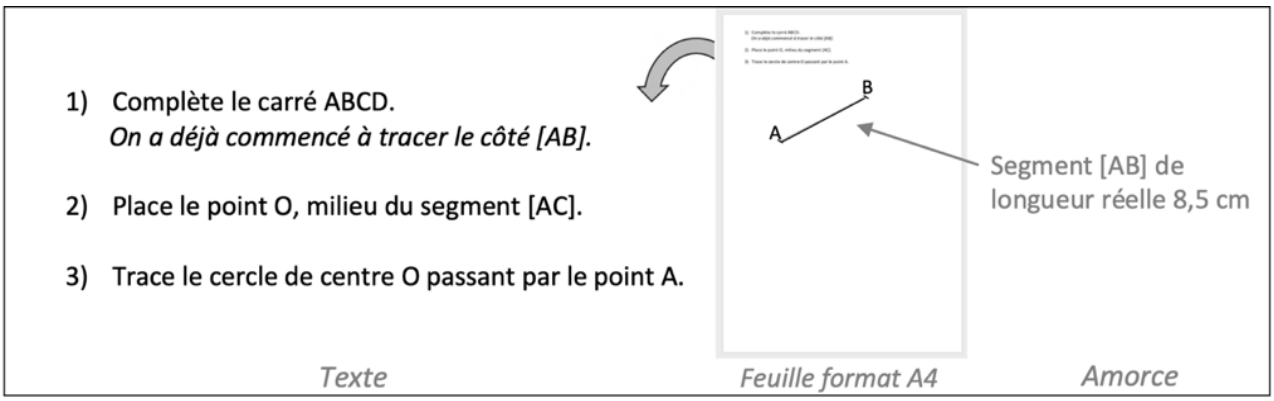


Figure 8. Support de travail

Le texte est un programme de construction géométrique. Il se présente en effet comme une suite d'instructions ordonnées chronologiquement et respectant une certaine syntaxe propre au langage géométrique (« point…, milieu du segment… », « cercle de centre…, passant par le point… »). Les étapes sont numérotées, elles ne peuvent être réalisées que dans l'ordre donné : le point O dépend du point A (déjà placé) et du point C, sommet de carré, placé dans l'étape 1 ; le cercle dépend du point A (déjà placé) et du point O, milieu de segment, placé dans l'étape 2.

Le côté [AB] déjà tracé contraint l'orientation du dessin sur le support : le carré ne peut être tracé en position prototypique sur la feuille (avec des côtés horizontaux ou verticaux). De plus, le support est uni. Ce choix de variables vise à favoriser la mise en jeu de propriétés géométriques obtenues avec les instruments plutôt qu'un unique appui sur une représentation mentale globale du carré.

Deux tracés de carré ABCD sont possibles à partir du côté [AB] donné, l'un dans le sens direct (en dessous de [AB]), l'autre dans le sens indirect (au-dessus de [AB]). La position de [AB] dans la partie haute du support et proche du texte ne laisse qu'une possibilité de tracé si l'on veut que le carré soit contenu en entier dans la feuille sans empiéter sur le texte : ABCD dans le sens direct.

La longueur du côté [AB] du carré est choisie de telle sorte que la diagonale [AC] ait une mesure entière suite à un mesurage (AC ≈ 12 cm à un millimètre près), pour éviter de potentielles difficultés liées au calcul de la moitié d'un nombre si la technique choisie pour placer le milieu du segment [AC] s'appuie sur la mesure (étape 2). La mesure n'est pas utile si le point O est obtenu comme point d'intersection des diagonales [AC] et [BD] du carré ABCD.

Quatre techniques de construction du carré ABCD sont possibles (T_1, T_1^*, T_2 et T_3) sans appui sur le tracé des diagonales et en utilisant l'équerre pour obtenir des angles droits[5], la règle graduée ou le compas pour

[5] La construction de la médiatrice au compas n'est pas abordée au cours moyen, elle l'est seulement en début de collège.

les reports de longueur et le compas pour des tracés d'arc de cercle. Le tableau 3 en donne une représentation par des dessins codés.

La technique T_1 consiste à tracer d_A, demi-droite d'origine A perpendiculaire à la droite (AB), puis à reporter la longueur AB sur cette demi-droite à partir du point A pour obtenir le point D. On trace ensuite la demi-droite d_B perpendiculaire à la droite (AB) d'origine B, du même côté de (AB) que le côté [AD] (ou alors la demi-droite d_D perpendiculaire à la droite (AD) d'origine D), et on place le point C sur d_B en reportant la longueur AB à partir du point B. On trace enfin le segment [CD]. Le dessin est *juste* si CD = AB et si les angles sont droits en C et D.

La technique T_1^*, variante de la technique T_1, consiste pour la dernière action à tracer d_C perpendiculaire à la droite (BC) en C. Le dessin est *juste* si d_C passe par le point D, CD = AB et l'angle en D est droit.

La technique T_2 consiste à tracer d_B et d_D se coupant au point C. Le dessin est *juste* si l'angle en C est droit et si DC = CB = AB.

La technique T_3 consiste à tracer deux arcs de cercle de rayon AB, l'un de centre B et l'autre de centre D, se coupant en un point, sommet C du carré, puis à tracer les segments [CD] et [CB]. Le dessin est *juste* si les angles en B, C et D sont droits.

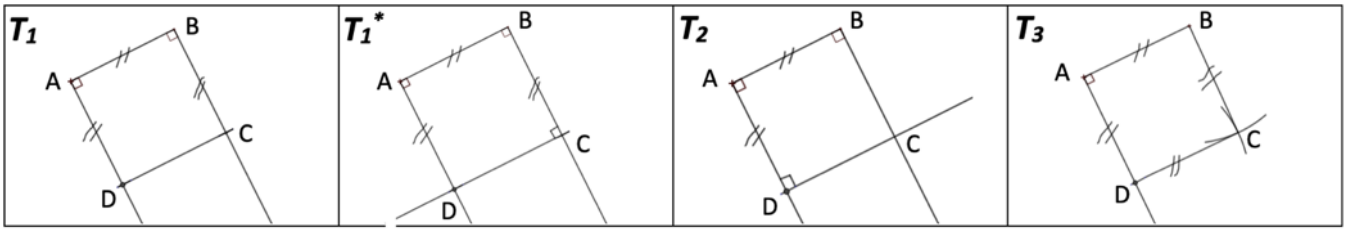


Tableau 3. Dessins codés selon les différentes techniques de construction instrumentée du carré ABCD.

2 Mise en situation et analyse

Dans une phase de travail préliminaire (phase 0), les formés sont mis en situation de réaliser la tâche de construction instrumentée (figure 8) dans une modalité choisie par le formateur, dépendante du public auquel il s'adresse (étudiants de master en formation initiale première ou seconde année, enseignants en formation continue) et de contraintes de la formation comme le format du cours – cours magistral ou travaux dirigés –, l'effectif des formés, la durée de la formation, la possibilité ou non de communiquer avec les formés avant la séance de formation. S'ensuit la demande d'une analyse *a priori* de la tâche mathématique (phase 1).

Nous présentons dans ce qui suit les différentes modalités expérimentées en formation : production d'un dessin instrumenté ou à main levée, avec ou sans handicap ; production d'une capsule audio ou vidéo. Notons que la mise en situation place les formés en *posture d'élève* par rapport aux connaissances géométriques à mettre en jeu et aussi en *posture d'enseignant* par rapport aux connaissances didactiques pour les modalités « capsule ». Elle permet ainsi au formateur de faire une évaluation diagnostique des besoins en formation des formés.

2.1 Modalité « construction avec handicap »

Nous utilisons la modalité « construction avec handicap » dans la formation des enseignants préparant le CAPPEI, ainsi que dans la formation à l'enseignement des mathématiques des professeurs des écoles et de collège, lorsque nous souhaitons les sensibiliser à la prise en compte des élèves à besoins éducatifs particuliers scolarisés en classe ordinaire. Les formés sont mis en situation de handicap par différents artifices (figure 9) pour lire, écrire, voir ou manipuler. Pour provoquer de faibles compétences manipulatoires et organisationnelles, nous leur demandons de réaliser la construction en mettant des gants (ou en utilisant leur main non dominante pour les tracés) et de se servir du matériel fourni (crayon très petit, mine cassée, compas sans pointe avec branches mal serrées, équerre abîmée, etc.). Pour

amoindrir les compétences visuo-spatiales, nous leur proposons de chausser des lunettes de chantier striées par des bandes de scotch opaques ou encore de retirer leurs lunettes de vue le cas échéant. Pour rendre difficile l'accès à ce qui est attendu pour certains, l'énoncé est donné sous forme écrite avec un texte nécessitant des efforts et de la concentration pour accéder au sens (voir figure 9, énoncé a ou énoncé b). Enfin, pour mettre une certaine pression dans la réalisation de la tâche, nous simulons un contexte d'évaluation individuelle en géométrie en durée limitée (5 minutes).



Énoncé a

Com plaitle carrai à beédé. Ona Étaj comm anssea tarcéle cotais ab é palce le piont O milli EUX du seguemant assé TARCE le crelce desan treux haut passan pra le piong a.

Énoncé b

DCBA carré le complète. *[AB] côté le tracé à commencer déjà à on.* [AC] segment du milieu O point le place. A point le par passant O centre de cercle le trace.

Figure 9. Éléments pour une mise en situation de handicap en géométrie

Un temps d'échanges sur les ressentis après la mise en situation permet l'expression de prises de conscience sur le vécu d'élèves en situation de handicap en classe ordinaire lorsqu'aucune adaptation n'est proposée. Lors de l'atelier, certains participants n'ont pas réussi à comprendre le texte ou l'ont mal interprété ; ils ont eu du mal à garder l'ensemble des consignes en mémoire, ils se sont inquiétés lorsqu'ils ont vu que d'autres démarraient rapidement les tracés alors qu'ils ne parvenaient pas à comprendre ce qu'il fallait faire ; ils se sont inspirés discrètement des tracés de leurs voisins pour produire quelque chose. D'autres participants n'ont pas eu le temps de terminer, ils ressentent de la fatigue ; ils n'ont pas réussi à faire les tracés précis qu'ils tentaient de produire ou ont abandonné car ils ne parvenaient pas à surmonter les obstacles matériels. D'autres encore ont ressenti un besoin de grande concentration pour manipuler le matériel le plus précisément possible et ont accordé une attention moindre à la lecture (« j'ai mal lu, j'ai d'abord placé O, milieu de [AB] »). Un participant enfin témoigne d'un manque de temps et de « difficultés à gérer la pression générée par [ses] voisins en situation de handicap moteur qui avaient terminé avant [lui], car [il] ne savait pas qu'[il] était [lui] aussi en situation de handicap (difficultés à remettre les mots dans l'ordre pour comprendre les phrases) ».

Nous abordons alors en formation les conséquences de troubles des apprentissages qui empêchent la réussite de tâches géométriques sans que ce soit lié à un manque de connaissances géométriques : difficulté de compréhension d'un texte écrit (dyslexie) et/ou de lecture (troubles visuo-spatiaux), difficulté à produire des tracés précis avec les instruments (dyspraxie). Nous recensons également des adaptations possibles[6].

Nous engageons ensuite les formés dans une *posture d'élève-enseignant* en leur demandant d'analyser la tâche mathématique (phase 1), à savoir : identifier les connaissances géométriques en jeu, répertorier les techniques de construction possibles et envisager des difficultés possibles non encore abordées, en lien avec les connaissances géométriques en jeu.

[6] Pour la dyslexie, voir par exemple le site Dix sur Dys [https://sites.google.com/site/dixsurdys/comment-aider-mon-eleve-dyslexique/aides-au-college-et-lycee-par-matiere/mathematiques] et le site https://www.cartablefantastique.fr/ pour la dyspraxie.

2.2 Modalité « production d'une capsule »

Nous utilisons la modalité « production d'une capsule » dans la formation lorsque nous avons l'opportunité de voir les étudiants ou enseignants avant la séance de formation à proprement parler. Nous avons fait le choix de capsules vidéo pour des étudiants ayant déjà une expérience d'enseignement en stage (M1 en fin d'année scolaire, M2) ou pour des enseignants en formation continue, et le choix de capsules audio pour des étudiants de M1.

Concrètement, les capsules vidéo sont réalisées parallèlement à une séance de travaux dirigés. Les étudiants vont un à un dans une autre salle (ou le couloir) pour la captation. Des instruments de géométrie sont à disposition, ainsi que le support de travail de la figure 7. La consigne suivante est donnée : « Produire une capsule destinée à des élèves de cours moyen comme correction ou aide à la construction instrumentée. » La formatrice filme les mains du premier étudiant en train de réaliser la construction en apportant des explications à haute voix, ce dernier filme ensuite un deuxième étudiant réalisant la même tâche, et ainsi de suite. Les étudiants se filment ainsi à la chaîne, ils ne voient pas leurs collègues effectuer la tâche avant de la faire eux-mêmes. Pour ce qui est des capsules audio, nous avons demandé aux étudiants de les produire chez eux et de les déposer sur l'espace numérique de travail avant la séance de formation. La consigne était la même que celle donnée pour la production d'une capsule vidéo. Les étudiants pouvaient préparer le contenu de leur discours avant d'enregistrer leur voix, mais ils ne pouvaient s'appuyer sur des images, contrairement à ceux qui avaient produit une capsule vidéo.

Au début de la séance de formation, les formés réalisent en binôme une analyse de la tâche mathématique, dont ils ont proposé une correction sous forme de capsule, en identifiant les connaissances en jeu, les techniques de construction possibles et en envisageant des difficultés possibles pour les élèves (phase 1).

2.3 Modalité « construction instrumentée ou à main levée »

Nous utilisons la modalité « construction à main levée » en particulier dans le cas d'un cours magistral destiné à un grand nombre de formés ou lorsque les formés ne disposent pas de matériel de géométrie. La modalité « construction instrumentée ou à main levée » permet aux formés de s'approprier la tâche qui sera analysée le jour même de la formation. Le support de travail (figure 8) leur est donné au début de la séance. Les formés doivent réaliser la construction avec leurs instruments de géométrie et/ou produire un dessin à main levée (phase 0). Ils doivent ensuite, par deux ou trois, produire une « grille d'évaluation » destinée à évaluer dans des productions d'élèves ce qui est acquis et ce qui ne l'est pas (phase 1). Cette tâche met les formés dans une *posture d'élève-enseignant* en les conduisant à s'interroger sur les connaissances en jeu dans la réalisation de la tâche mathématique et sur les difficultés possibles pour les élèves. C'est une autre façon de travailler sur l'analyse *a priori* de la tâche mathématique. Quelques « grilles » proposées par les participants de l'atelier figurent en annexe 2.

Pour ce premier temps de la situation de formation (temps 1 : Étude de la tâche de construction instrumentée), composé d'une mise en situation (phase 0) et d'une analyse de la tâche (phase 1), le formateur peut donc choisir une modalité parmi les modalités proposées et leurs variantes en fonction des aspects sur lesquels il souhaite axer la formation : travail sur le handicap (modalité « construction avec handicap »), travail sur l'explicitation par le langage et les gestes (modalité « production d'une capsule »), travail sur l'évaluation (modalité « réalisation d'une grille d'évaluation »). Dans notre présentation, nous avons à chaque fois précisé les contraintes et le public à qui s'adressait telle ou telle modalité de formation dans les scénarios expérimentés. Le formateur pourra choisir la modalité qui convient en fonction de ses propres objectifs et contraintes.

Nous en venons maintenant au deuxième temps de la *situation de formation* sur la compréhension des difficultés et l'évaluation des besoins.

IV - COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS, ÉVALUER LES BESOINS

Nous nous sommes intéressés, lors de l'atelier, à analyser les difficultés et évaluer les besoins en géométrie du côté des étudiants d'une part, et du côté des élèves d'autre part.

1 Du côté des étudiants

La phase 0 de la *situation de formation* permet au formateur de faire un état des lieux sur les besoins en formation des étudiants. Nous avons proposé à l'analyse des formateurs de l'atelier des productions d'étudiants en formation initiale au professorat des écoles. Ces productions sont issues d'une phase 0 vécue par deux cohortes d'étudiants de M1 selon les modalités « construction à main levée » et « production d'une capsule vidéo ». Les dessins à main levée ont été réalisés au début d'un cours magistral en mai 2025 pour l'une des cohortes, à partir de l'énoncé présenté et analysé dans ce texte (figure 8). Pour l'autre cohorte, les capsules vidéo ont été réalisées « à la chaîne » en parallèle d'une séance de travaux dirigés en avril 2024. L'énoncé global était différent, mais la première tâche était commune à celle du texte de la figure 8, avec une longueur de 6 cm pour le côté [AB] déjà tracé et une équerre graduée comme seul instrument à disposition.

1.1 Analyse de dessins à main levée

L'analyse des dessins à main levée produits permet d'évaluer des connaissances géométriques, graphiques et visuospatiales des étudiants. La figure 10 donne à voir un représentant de chaque type de dessins à main levée, avec ou sans codage, recueillis parmi les productions de 62 étudiants. La production Dml_1 représente 52 % des productions et les trois autres (Dml_2, Dml_3 et Dml_4) chacune 16 %.

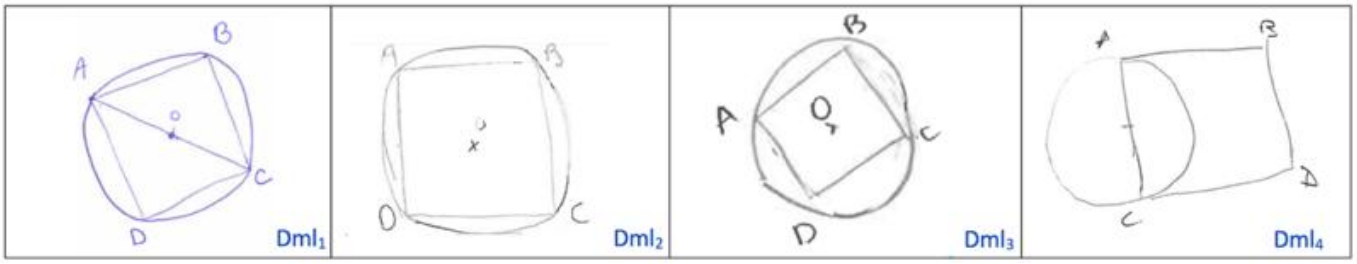


Figure 10. Différents types de dessin à main levée (produits par des étudiants de M1, mai 2025)

La production Dml_1 présente le tracé d'un carré ABCD, celui du segment [AC], sur lequel est placé le point O visuellement au milieu de ce segment, et le tracé du cercle de centre A passant par le point C. Ce cercle passe aussi par les sommets B, C et D du carré, ce qui montre la mise en œuvre de connaissances géométriques : des inférences ont été réalisées à partir des données de l'énoncé. Les étudiants ont pu, par exemple, produire le raisonnement suivant : « O est le milieu du segment [AC] et [AC] est une diagonale du carré ABCD donc O est le centre du carré. Le cercle de centre O passant par A est donc circonscrit au carré. »

La production Dml_2 est analogue à la production Dml_1 excepté le segment [AC] non tracé. L'alignement des points A, O et C n'est donc pas représenté. Le point O semble visuellement au centre du carré. On peut aussi remarquer la mise en œuvre d'une connaissance graphique, à savoir le fait que l'orientation du segment [AB] sur le support n'a pas d'importance : il est orienté à l'horizontal et non pas incliné comme sur l'amorce.

Sur la production Dml_3, le carré ABCD est représenté, le point O semble au centre du carré et l'alignement des points A, O et C n'est pas représenté comme dans la production Dml_2. On peut voir que le cercle passe bien par le point C (déduit du fait que O est le milieu du segment [AC]), mais les inférences concernant l'appartenance des points B et D au cercle de centre O passant par A ne sont pas faites : le dessin dénote une *figure impossible* (Houdement et Petitfour, 2022). Cela témoigne d'un manque de connaissances géométriques.

Un manque de connaissance graphique apparaît sur la production Dml_4 dans la façon de nommer les sommets du carré, probablement dans le sens conventionnel de l'écriture d'un texte : c'est un carré se nommant ABDC qui est représenté et non ABCD. On a bien ensuite à partir du carré ABDC la marque du milieu du segment [AC] (sans que le nom « O » soit indiqué) et le cercle passant par A qui passe aussi par le point C (inférence du fait que le point O est le milieu du segment [AC]).

1.2 Analyse de capsules vidéo

L'étude des 50 capsules des étudiants de M1 révèle un *manque de justesse* pour 36 % des constructions (Petitfour, 2025b). Lors de l'atelier, nous en avons analysé trois (celles de Doris, Lory et Zoé). Pour chaque étudiante, nous relatons le processus de construction à partir du discours, des actions instrumentées, des gestes et des dessins produits, puis en déduisons des connaissances, acquises ou non.

Doris utilise l'angle droit de l'équerre pour produire l'angle droit de sommet B du carré, elle le code, puis elle inscrit « C » à l'extrémité du trait qu'elle a tracé (voir tableau 4). Elle procède de même pour obtenir l'angle de sommet A et le point D. Elle trace ensuite le segment [CD], contrôle avec l'équerre l'angle de sommet D, puis de sommet C. Elle rectifie ce dernier en retraçant le côté [CD].

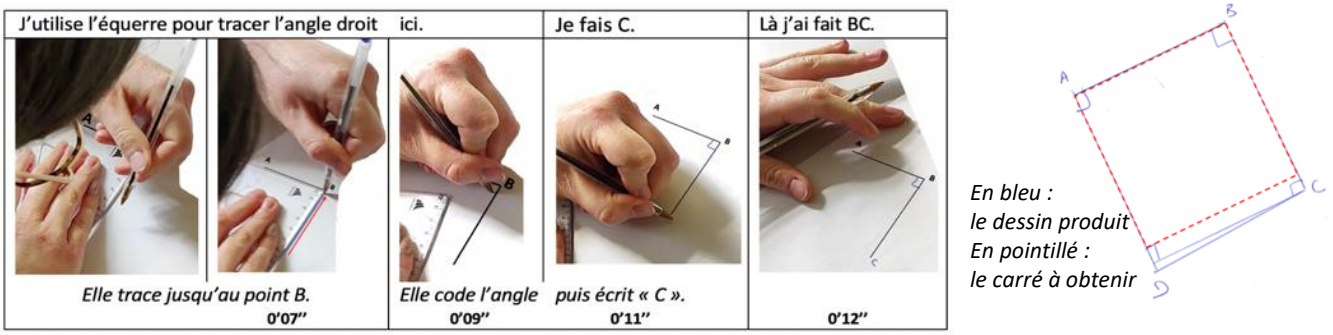


Tableau 4. Tracé du début du carré et production finale (Doris, étudiante de M1, avril 2024)

Nous constatons donc que Doris sait qu'un carré a quatre angles droits, mais ne sait pas qu'il a aussi quatre côtés de même longueur (manque de *connaissances géométriques*). Elle possède de bonnes *connaissances techniques* pour le tracé d'un angle droit : elle formule l'instrument à utiliser et sa fonction (0'07''), et elle utilise l'équerre correctement. Elle manifeste des difficultés manipulatoires pour le maintien de l'équerre tout en traçant : on peut observer que ses mains se croisent lors du tracé (0'07''), de plus, elle signale à la fin de la capsule qu'elle « n'arrive jamais à tenir l'équerre ou la règle correctement ». Des *connaissances organisationnelles* pourraient la conduire à tourner sa feuille d'un quart de tour pour réaliser le tracé de façon confortable, sans croisement de mains. Le défaut de *connaissances géométriques* sur le carré conduit à une construction *non juste*. En outre, le dessin produit n'est *pas précis*, en atteste la superposition du carré en pointillé sur le carré obtenu (tableau 4). Doris ne semble pas l'avoir repéré visuellement (*absence d'une bonne représentation spatiale* d'un carré).

Lory (tableau 5) sait qu'un carré a quatre côtés de même longueur, *connaissance géométrique* qu'elle formule de façon imprécise en parlant de « restant du carré qui va faire la même mesure ». Dans son action, elle utilise les graduations de l'équerre pour mesurer le segment [AB] (0'13'') et deux côtés du carré (0'24'', 0'30''). Elle a une bonne représentation spatiale du carré, qu'elle trace assez précisément sans appui sur l'angle droit de l'équerre pour produire les angles droits. Elle fait ainsi preuve de bonnes *connaissances spatiales*, mais d'une absence de *connaissances techniques* associées à cette propriété géométrique du carré. La construction n'est *pas juste* car son usage de l'équerre n'est pas approprié pour le tracé des angles droits (0'24'', 0'30''). Elle manque un peu de *précision* au niveau de l'angle de sommet D. On peut noter aussi un manque de *connaissances graphiques* dans sa façon de nommer les sommets du carré (ABDC au lieu de ABCD).

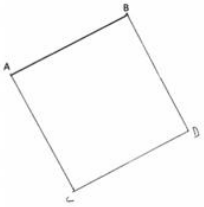
On mesure le segment [AB]. Il fait 6 cm.	On va faire le restant du carré qui va faire la même mesure.			Tous les côtés font six centimètres
				
0'13''	0'24''	0'30''	0'40''	0'52''

Tableau 5. Tracé du carré (Lory, étudiante de M1, avril 2024)

Zoé positionne son équerre pour tracer l'angle droit en B en commentant : « On va prendre l'équerre avec son angle droit pour aller chercher le bout du segment pour compléter ». Elle s'interrompt alors pour mesurer le segment [AB] : « d'abord je vais peut-être regarder la longueur, ce sera mieux ! … Six centimètres, on ne peut jamais vraiment être sûr avec les instruments de mesure, mais bon, on fait ce qu'on peut. » Elle cherche ensuite (tableau 6) à faire le côté [BC] en un seul tracé avec son équerre graduée, en prenant en compte à la fois la direction du côté et sa longueur de six centimètres.

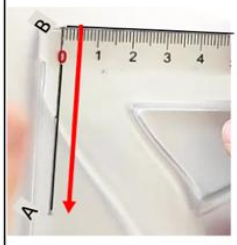
Alors, l'angle droit	ça fait longtemps que j'ai pas fait ça, moi !	Six centimètres	Faut faire pareil de c'côté-là.	
				
Glisse l'équerre pour mettre graduation 0 sur [AB]		*Trace de 0 à 6*	*Glisse l'équerre pour mettre la graduation 0 sur A*	
0'21''	0'25''	0'32''	0'34''	0'36''

Tableau 6. Tracé du côté [BC] du carré (Zoé, étudiante de M1, avril 2024)

Nous observons que Zoé manifeste des *connaissances géométriques* relatives aux propriétés du carré en cherchant à mettre en œuvre la technique T_1. Elle témoigne de *connaissances manipulatoires* en évoquant probablement la précision permise par les graduations lorsque l'on mesure une longueur (« on ne peut jamais vraiment être sûr avec les instruments de mesure »). Elle manque de *connaissances techniques* pour les tracés des segments perpendiculaires à la droite (AB) au point B, puis au point A. Pour le côté [BC], elle s'appuie sur l'angle droit formé par la graduation 0 avec le côté de l'équerre (tableau 6, 0'25''). Le glissement de l'équerre ne lui permet pas d'en faire autant pour le côté [AD] (tableau 6, 0'36''). Elle tourne sa feuille d'un quart de tour et retente le positionnement de l'équerre en la plaçant sur l'angle de sommet B et en la glissant (tableau 7). Elle peut constater que cela n'a rien changé, ce qu'elle n'avait pas anticipé (manque de *connaissance spatiale*). Faute de mieux, elle trace avec l'équerre orientée au jugé.

		Ça fait vraiment beaucoup d'années qu'j'ai pas fait ça.	
			
Glisse le sommet de l'angle droit de l'équerre jusqu'au point A		*Glisse l'équerre pour mettre la graduation 0 sur A.*	
0'50''	0'56''	1'01''	1'03''

Tableau 7. Tracé du côté [AD] du carré (Zoé, étudiante de M1, avril 2024)

2 Du côté des élèves

2.1 Analyse de productions, mise en commun et apports du formateur

Après l'analyse *a priori* ou la réalisation de la grille d'évaluation (phase 1), les formés sont invités à évaluer des productions d'élèves lors d'une phase 2.1. Une production est composée du dessin associé à une capsule vidéo de l'élève en train de réaliser la construction. Ces productions sont celles d'élèves de cours moyen 2 (fin d'année scolaire 2024) ou de sixième (début d'année scolaire 2025). Elles ont été réalisées dans le cadre de notre recherche. Les élèves sortaient un à un de leur classe, ils recevaient l'énoncé, disposaient d'une règle graduée, d'une équerre graduée, d'un compas, d'un crayon et d'une gomme, et nous filmions leurs mains sur le support lors de la réalisation du tracé.

Lors de la phase 2.1, les formés évaluent une production en binôme, ils échangent ensuite avec un binôme ayant évalué une autre production et doivent proposer ensemble une appréciation pour chaque production tel qu'ils le feraient pour leurs élèves. Une mise en commun est réalisée en grand groupe (phase 2.2). Elle permet de mettre en évidence les connaissances maîtrisées ou non et les difficultés des élèves. Dans une phase 2.3, le formateur fait des apports relatifs aux critères de *justesse* et de *précision*, ainsi qu'aux différents types de connaissances (voir partie II), en synthétisant et complétant ce qui a été dit lors de la mise en commun.

Concernant l'enchaînement des phases 2.1 et 2.2, une alternative consiste à donner d'abord les productions sans les vidéos (phase 2.1a), faire une mise en commun (phase 2.2a), puis compléter l'évaluation en appui sur le visionnage des vidéos (phase 2.1b), ce qui aboutit à une nouvelle mise en commun (phase 2.2b). Cette alternative vise à davantage faire ressentir aux formés la nécessité d'observer leurs élèves pour identifier précisément leurs sources de difficulté.

2.2 Analyse de quelques productions

Nous présentons l'analyse détaillée de deux des productions étudiées lors de l'atelier.

Production de l'élève A (annexe 3a)

Le carré produit par l'élève A est *précis*, à cela près que le trait reliant A à C n'est pas tout à fait rectiligne. Le cercle est également *précis*, il est bien centré sur le milieu du segment [AC], passe par le point A et par le point C. On en déduit que l'élève sait convertir un texte formulé en langage géométrique en un dessin. Il a des *connaissances géométriques* sur le cercle caractérisé par son centre et un de ses points, sur le carré caractérisé par un de ses côtés et sur le milieu d'un segment. On peut remarquer un manque de *connaissances graphiques* dans la façon de nommer les sommets du carré – ABDC au lieu de ABCD (ce qui a une incidence sur le placement de O et le tracé du cercle) – et dans celle d'indiquer le point O (lettre O écrite sur le segment [AC] sans marque du point ou « petit rond » pour marquer l'emplacement d'un point sur un segment sans indiquer son nom). On constate aussi une absence de codages sur le dessin concernant les angles droits et les égalités de longueurs.

La vidéo confirme les *connaissances géométriques* de l'élève sur les propriétés du carré : on le voit contrôler les quatre angles droits à l'équerre et donner une longueur de 8,5 cm aux côtés à l'aide des graduations de la règle. En revanche, on constate un problème de *justesse* dans la construction des angles droits, dû à un manque de *connaissances techniques* et *manipulatoires*. L'élève A met en effet plus de trois minutes pour tracer le côté [AD], dont il conserve le quatrième essai faisant suite à des ajustements successifs de différents positionnements d'instruments, une fois la mesure du côté [AB] effectuée. Il procède de la façon suivante. Premièrement, il place l'équerre orientée au jugé avec le sommet de l'angle droit sur le point A (tableau 8, 0'34'') et trace le long jusqu'à la graduation 8,5 tout en maintenant l'équerre. Notons qu'il ne tient pas compte du décalage de la graduation zéro pour sa mesure. Il contrôle l'angle à l'équerre, puis gomme le tracé. Deuxièmement, il réoriente l'équerre, toujours au jugé mais cette fois-ci avec la graduation 8,5 de l'équerre sur le point A, il place la règle contre ce côté gradué et trace

entre les deux instruments tout en maintenant la règle (tableau 8, 1’14’’), il contrôle à l’équerre l’angle obtenu, puis gomme le tracé. Troisièmement, il place l’équerre dans le positionnement attendu, mais sans contrôler l’ajustement du côté de l’angle droit le long du segment [AB] caché par sa main qui s’apprête à tracer, il met la règle contre l’autre côté de l’angle droit de l’équerre, avec la graduation zéro sur le point A, il trace comme précédemment entre la règle et l’équerre, l’équerre bouge lors du tracé (tableau 8, 1’44’’), il contrôle l’angle obtenu, puis il gomme le tracé. Quatrièmement, il réitère le positionnement précédent de la règle et de l’équerre, cette fois en ajustant bien l’équerre, qu’il maintient lors du tracé. Il suit les graduations de la règle pour aller jusqu’à 8,5 (tableau 8, 3’00’’), il contrôle l’angle obtenu et conserve le tracé. Il réinvestit ces derniers positionnements de l’équerre et de la règle pour le tracé de [DC], il achève le tracé en appui sur les graduations de la règle sans tenir compte du déport de la graduation zéro de l’extrémité de la règle : le côté tracé mesure en fait 9 cm. Il contrôle l’angle en D, relie B et C à la règle, contrôle l’angle en C qu’il constate non droit. Il efface [BC] et le retrace à l’équerre en réalisant l’angle droit en B, ce qui rétablit la bonne longueur pour le côté [DC]. Au final, sa construction suit la technique T_1 (tableau 3), elle est mise en œuvre de façon non efficace.

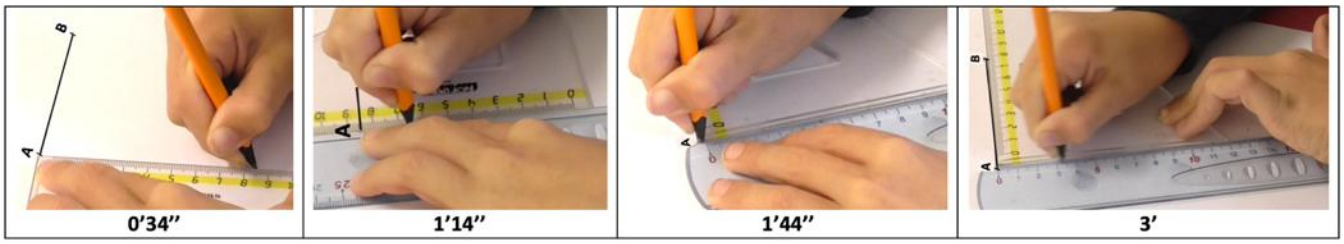


Tableau 8. Tracé d’un côté du carré (élève A, 6e, sept-oct 2024)

Pour chaque côté du carré à tracer, l’intention de l’élève est de réaliser un segment d’une direction perpendiculaire à une droite support d’un côté du carré en un sommet du carré et de longueur 8,5 cm, en un seul tracé (sans traits de construction). Ce serait possible si dans le quatrième positionnement (tableau 8, 3’), il retirait l’équerre tout en maintenant la règle dans la direction obtenue. On observe ici un manque de *connaissances organisationnelles* et *manipulatoires* de l’élève, qui trace avec des croisements de mains et entre deux instruments. En revanche, il sait organiser une séquence de gestes pour obtenir les angles droits par tracés et contrôles successifs et fait preuve de persévérance jusqu’à atteindre son but. Au niveau organisationnel, on peut observer aussi qu’il tourne sa feuille pour faciliter les tracés, mais qu’il n’enlève pas les gommures qui pourraient les gêner.

Pour la suite de la construction, on peut constater que l’élève marque les sommets du carré non encore nommés par une croix, ce qui n’est pas utile et dénote d’un manque de *connaissances graphiques*.

Production de l’élève B (annexe 3b)

Le carré produit par l’élève B est plutôt *précis*, si ce n’est le côté [BC] qui a 2 mm de trop. Il est bien nommé ABCD (bonnes *connaissances graphiques*). Le point placé dans la zone centrale du carré n’est pas aligné avec les points A et C, donc n’est pas, *a fortiori*, le milieu du segment [AC]. Il n’est pas non plus nommé O. Un point est placé sur le côté [AB], à 4 cm du point A. De plus, le cercle n’est pas tracé.

La vidéo permet de voir que l’élève trace les côtés du carré en orientant la règle au jugé et en leur donnant la même longueur que le côté [AB] mesuré (tableau 9). L’élève a une bonne représentation mentale du carré (*connaissances spatiales*) et des *connaissances organisationnelles* associées : il a orienté le support pour tracer le carré en appui sur une orientation prototypique. Il n’a cependant pas produit les angles du carré avec l’instrument approprié (manque de *connaissances techniques*). La construction n’est donc pas *juste*. L’élève témoigne seulement de façon instrumentée de *connaissances géométriques* relatives aux égalités de longueurs des côtés d’un carré.

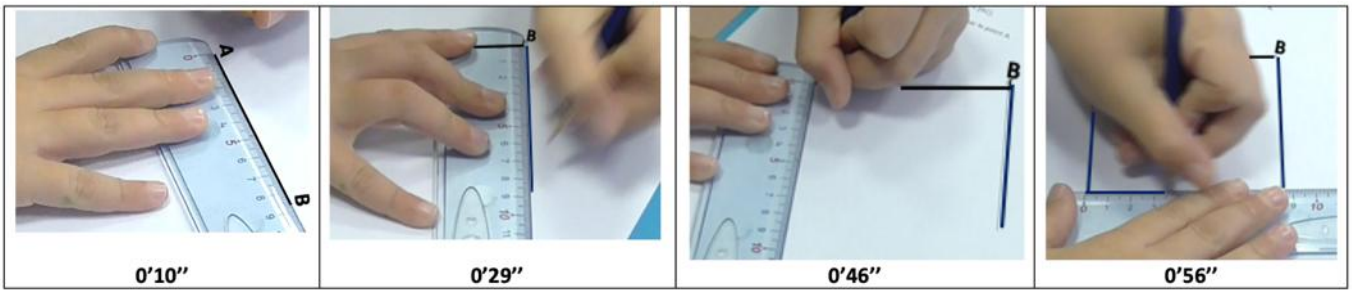


Tableau 9. Tracé du carré (élève B, CM2, sept 2024)

Pour obtenir le point O, l'élève place d'abord le côté non gradué de la règle sur les points A et C et met une marque approximativement au milieu (tableau 10, 1'24''). De la même façon, il met la règle sur les points B et D, puis prend un côté de l'équerre qu'il place sur le point A en l'orientant approximativement le long de la diagonale du carré pour refaire la marque (tableau 10, 1'39''). Il s'appuie ainsi, en acte, sur l'intersection des diagonales du carré pour placer le milieu du segment [AC] (*connaissance géométrique*). Il semble ne pas s'autoriser à faire des traits de construction.

Pour terminer, il place la règle verticalement sur le point O et met un point sur le segment [AB] au niveau du bord de la règle. Cela semble être son interprétation (erronée) de la consigne « Trace le cercle de centre O passant par le point A ».

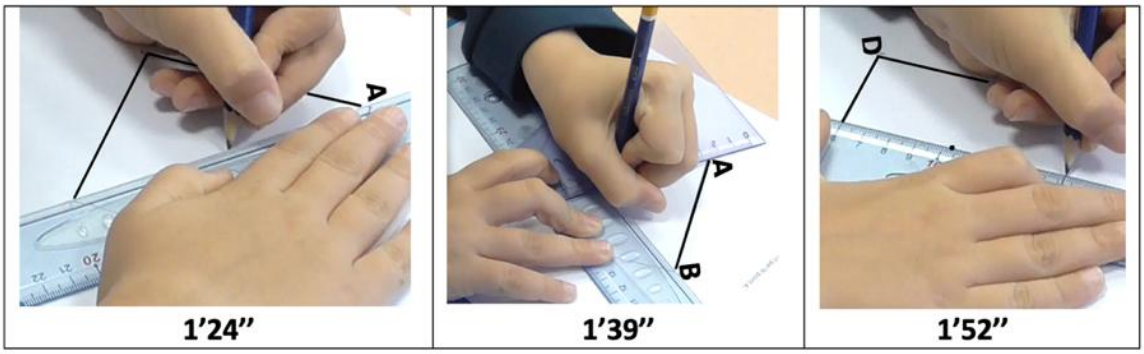


Tableau 10. Tracé du milieu du segment [AC] (élève B, CM2, sept 2024)

Nous terminons par quelques chiffres issus de nos évaluations diagnostiques concernant les critères de *précision* et de *justesse* des carrés produits par les élèves. Sur les 106 élèves de CM et de sixième, 16 produisent un carré ABCD *précis* et 90 un dessin *non précis*, 12 produisent une construction *juste* et 94 une construction *non juste*. Six élèves (dont l'élève A) ont procédé par ajustements successifs avec l'équerre et trente-huit ont procédé comme l'élève B, en tenant compte de façon instrumentée des égalités de longueurs des côtés du carré et en orientant leur règle au jugé pour obtenir une figure qui ressemble de façon globale à un carré.

V - BILAN EN VUE DE RÉPONDRE AUX BESOINS DE FORMATION

Les programmes scolaires du cycle 3 stipulent que les situations faisant appel à des types de tâches mettant en jeu des actions instrumentées visent à « faire émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et les enrichir » (MEN, 2020, p. 97). Résoudre des problèmes de construction instrumentée doit donc permettre le développement de connaissances géométriques et l'exercice du raisonnement. La tâche de construction instrumentée analysée dans notre évaluation diagnostique – compléter un carré à partir d'un de ses côtés – nous permet d'avoir un premier aperçu sur les acquis en géométrie d'élèves (55 élèves de cours moyen et 51 sixièmes), ainsi que sur les besoins en formation d'étudiants (50 étudiants de Master 1) se destinant au professorat des écoles et ceux d'enseignants (34) souhaitant exercer dans l'enseignement spécialisé.

Nous avons relevé principalement deux types d'actions instrumentées ne validant pas le critère de *justesse* : celles réalisées avec une orientation perceptive de l'instrument pour produire des angles droits, et celles où la fonction d'une graduation est détournée de son usage.

Le premier type d'actions témoigne d'un manque de connaissances géométriques relatives aux angles droits que possède un carré. C'est le cas pour 70 % des élèves et 12 % des étudiants. Ces étudiants (comme Lory, cf. tableau 5) et environ deux tiers de ces élèves (comme l'élève B, cf. tableau 9) se focalisent uniquement sur les égalités de longueur des côtés du carré, avec l'usage des graduations. Un moyen de contrer cette centration sur la mesure serait d'exclure les graduations des instruments à disposition pour travailler sur les grandeurs, à l'instar des situations de restauration de figure (Perrin-Glorian, 2024).

Le second type d'actions est réalisé par 5 % des élèves, 22 % des étudiants (comme Zoé, cf. tableau 6) et 6 % des enseignants. Il peut être motivé par une volonté de ne pas faire de trait de construction (manque de connaissances graphiques) ou par un souci d'économie gestuelle (Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006) pour tracer en seul geste le second côté d'un angle droit de la mesure voulue. L'orientation de l'instrument suivant le trait de graduation est peu visible, si bien que si cette procédure de tracé est présentée aux élèves, ces derniers peuvent facilement interpréter ce positionnement comme étant orienté « au jugé » et évacuer la propriété que doivent vérifier les angles d'un carré (cas de 7 élèves sur 10). Enseigner aux élèves cet usage ne nous semble pas propice aux apprentissages visés, d'autant plus si la verbalisation est du type : « J'utilise l'équerre pour faire un angle droit », « Je mets bien mon équerre » (extraits de capsules produites par des étudiants et enseignants).

Nous avons relevé des erreurs et difficultés pour une part importante d'élèves de cycle 3 lors de la réalisation de la construction instrumentée analysée, mais aussi pour certains étudiants et enseignants. La figure 11 présente les résultats de nos analyses des constructions instrumentées suivant le critère de *justesse* pour les élèves, les étudiants et les enseignants.

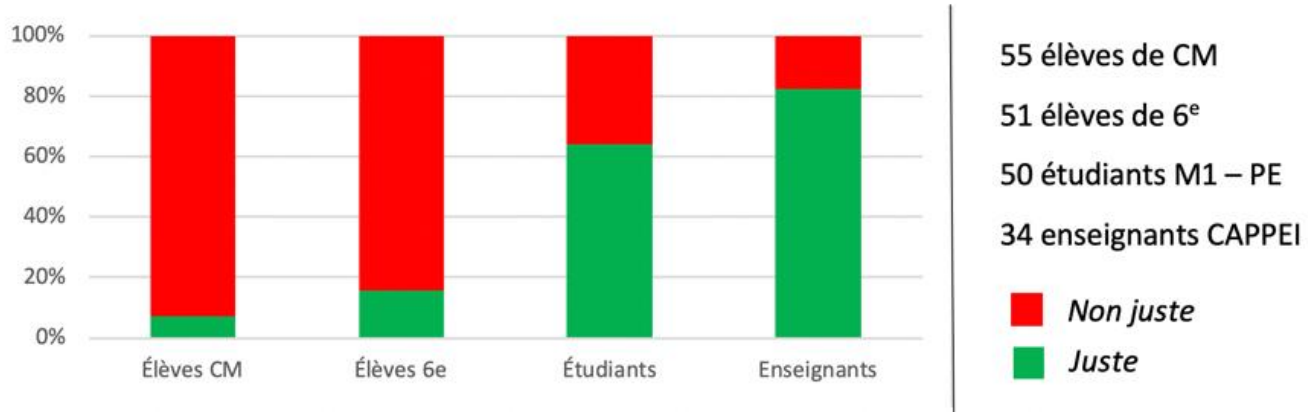


Figure 11. Justesse des constructions du carré (évaluations diagnostiques, juin-oct 2024)

Les explications données dans les capsules vidéo par les étudiants et les enseignants expriment peu de connaissances techniques qui pourraient mener les élèves à la réalisation d'une construction *juste*, notamment pour l'usage de l'équerre. Le troisième temps de notre *situation de formation* à l'enseignement de la géométrie cible donc le développement de ces connaissances associées à l'utilisation des instruments et aux connaissances géométriques dont ils sont porteurs. L'utilisation d'un langage technique accompagné de gestes associés aux actions instrumentées est un moyen que nous avons exploité pour permettre des apprentissages en géométrie aux élèves dyspraxiques (Petitfour, 2017b) et que nous expérimentons dans les classes des membres de notre groupe IREM. Ces expérimentations permettront d'alimenter la troisième partie de la *situation de formation*.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Verillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(1), 33-57.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations-Ressources-Analyses* (vol. 1). ARPEME.

Houdement, C., et Petitfour, E. (2022). Le dessin à main levée, un révélateur du rapport des élèves à la figure géométrique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22, 315-340.

INSERM - Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale (2019). *Trouble développemental de la coordination ou dyspraxie*. Collection Expertise Collective. Montrouge : EDP Sciences.

https://www.inserm.fr/expertise-collective/trouble-developpemental-coordination-ou-dyspraxie/

MEN (2020). Programmes du cycle 3, en vigueur à la rentrée 2020. D'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020. Ministère de l'éducation nationale, France.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J., et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7-34.

Perrin-Glorian, M.-J. (2024). Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans. *Revisita Matematica, Ensino e Cultura-REMATEC*, Belém/PA, 47, e2024001 https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/issue/view/51

Petitfour, E. (2017a). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 247-288.

Petitfour, E (2017b). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. Petit x, 103, 5-31.

Petitfour, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N*, 101, 45-70.

Petitfour, E. (2022). Quel accès aux apprentissages géométriques pour les élèves dyspraxiques ? *Au fil des Maths*, 545, 5-13.

Petitfour, E. (2023). Le travail en dyade pour enseigner la géométrie aux élèves dyspraxiques. *Tangente Éducation*, 64, 10-12.

Petitfour, E. (2024). Quel enseignement de la géométrie pour les élèves dyspraxiques ? Actes de la 46e rencontre CMESG/GCEDM 2022.

Petitfour, E. (2025a). Potentialité d'un dispositif de travail intégrant des outils numériques pour enseigner la géométrie aux élèves dyspraxiques. In E. Brayet, F. Dupré, I. Queval et S. Zorn (Eds.), *Critique de la raison inclusive : Formation, apprentissages, médiations* (p. 135-148). INSEI.

Petitfour, E. (2025b). État des lieux en vue de la conception d'une ressource inclusive pour former à l'enseignement de la géométrie. Dans F. Venant et S. Dumont (Eds.), *Actes du 9e colloque Espace Mathématique Francophone* (p. 1071-1081).

UNESCO (2017). *Un guide pour assurer l'inclusion et l'équité dans l'éducation*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259389

ANNEXE 1 – TRAME DE LA SITUATION DE FORMATION

Temps 1	**Étude de la tâche de construction instrumentée**
Phase 0 Posture d'élève Posture d'enseignant Posture d'élève	**Mise en situation** Trois modalités possibles et leurs variantes : (partie III.2) • Construction avec handicap • Production d'une capsule (audio ou vidéo) • Construction instrumentée ou à main levée
Phase 1 Posture d'élève-enseignant Posture d'élève-enseignant	**Analyse *a priori* de la tâche mathématique** Deux modalités : • Réalisation de l'analyse *a priori* (partie III.1) • Réalisation d'une grille d'évaluation de production •

Temps 2	**Comprendre les difficultés, évaluer les besoins des élèves**	
Posture d'élève-enseignant **Phase 2.1** **Phase 2.2** **Phase 2.3**	**Analyse de productions d'élèves** par binôme, puis par groupe de quatre **Mise en commun** (partie IV.2) **Synthèse,** apports théoriques (partie II)	***Alternative :*** **2.1a**. Analyse des dessins **2.2a**. Mise en commun **2.1b**. Analyse des vidéos **2.2b**. Mise en commun

Temps 3	**Répondre aux besoins des élèves, prendre en compte la diversité**
	En cours d'expérimentation (partie V)

ANNEXE 2 – GRILLES D'ÉVALUATION PRODUITES LORS DE L'ATELIER

- perceptivement carré / non carré
- orientation gérée par position non horizontale ou pas [AB]
- angles droits ? 1, 2, 3&4.
- report longueur 3 côtés
- Nommer les pts ↺ en écrivant
- construction 1 diag.
- O milieu mesure ou O intersection
- confusion point nom du point oui non
- support construction figure contour ou fig ens de points

Construct° du carré
- longueur
- angle droit
- nommer le carré
- carré perceptif

* Utilisat° des instruments (évaluable si on a la vidéo)

Construction de O
- tracé de [AC]
- placement cohérent du milieu (sur [AC])
- placement correct d'un milieu
- tracé d'un point mathématique (avec une croix)

Construction du cercle
- placement de la pointe du compas en O
- ouverture correcte du compas (entre A et O)
- manipulation du compas

0) Perceptif ou pas ?

1) Definition du carré → angles droits / côtés égaux

2) Nom du carré (ordre des sommets)

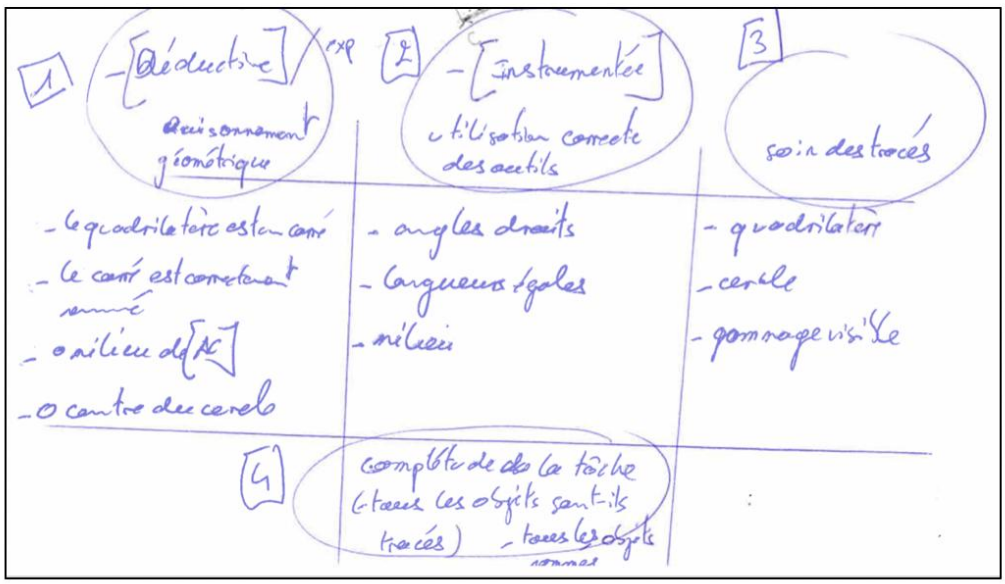
3) O milieu de [AC] → sur le Bon segment / Confusion point/nom du point

4) Cercle → centre / point A

3bis) Usage des instruments

- Respect des longueurs
- Respect des angles droits
- l'ordre des points
- Placement du point O.
- tracer le cercle
- des tâches indépendantes

- les 4 côtés ont la même longueur
- les côtés sont perpendiculaires (4 angles droits)
- la figure est bien ABCD (et pas ABDC).
- O est bien le milieu de [AC].
- Le cercle passe par les sommets du carré.



ANNEXE 3 – PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

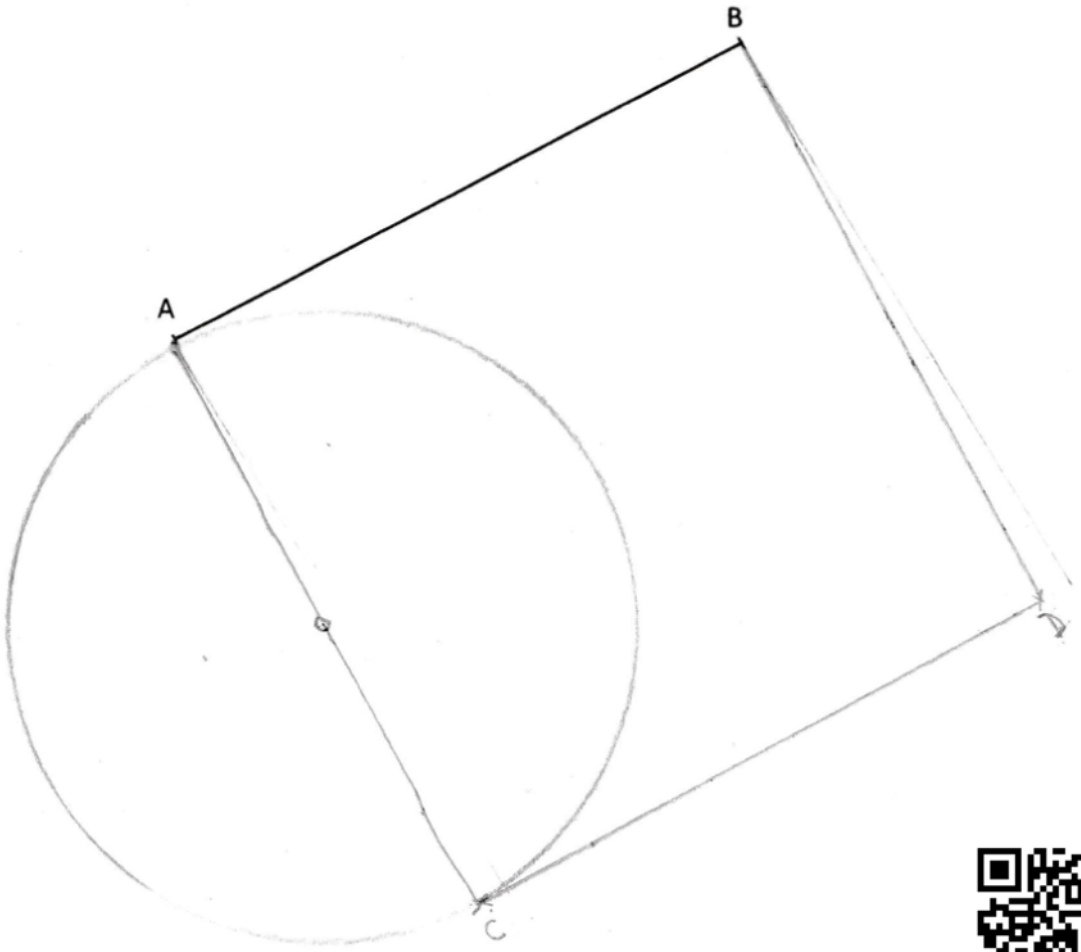
3a - Production de l'élève A

Élève A

1) Complète le carré ABCD.
On a déjà commencé à tracer le côté [AB].

2) Place le point O, milieu du segment [AC].

3) Trace le cercle de centre O passant par le point A.



https://webtv.univ-rouen.fr/videos/eleve-amp4/

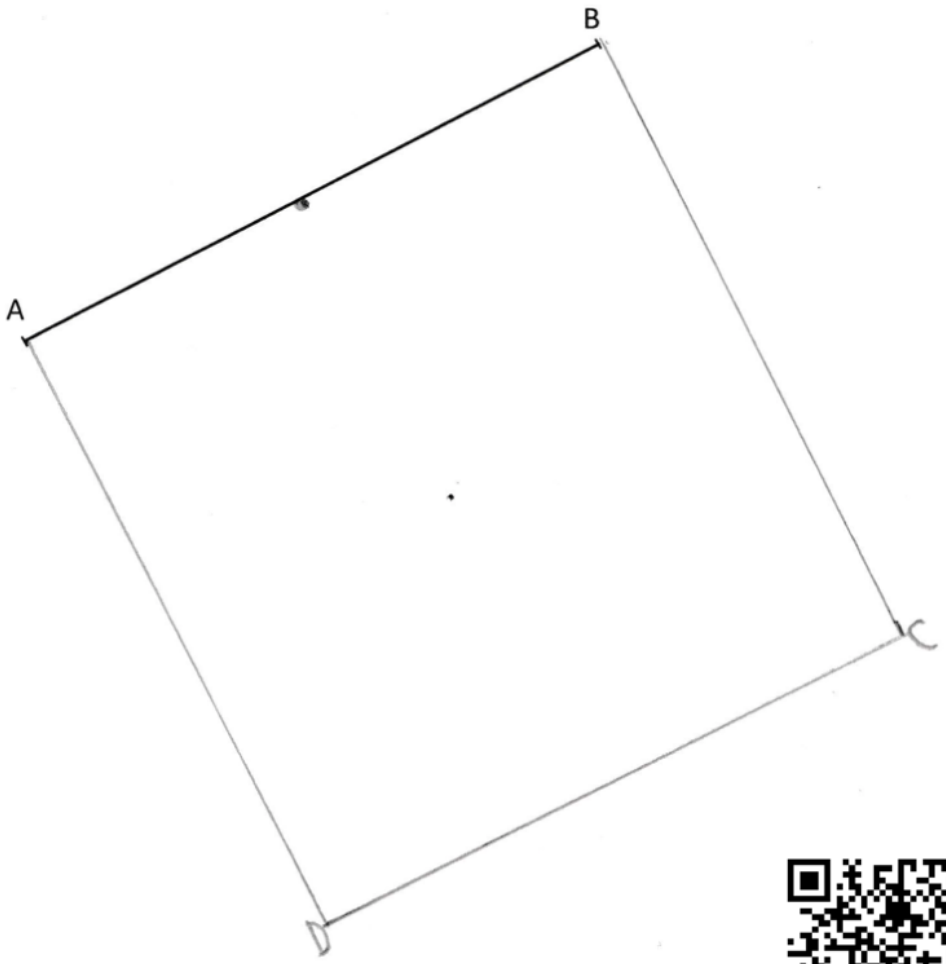
3b - Production de l'élève B

Élève B

1) Complète le carré ABCD.
On a déjà commencé à tracer le côté [AB].

2) Place le point O, milieu du segment [AC].

3) Trace le cercle de centre O passant par le point A.



https://webtv.univ-rouen.fr/videos/eleve-bmp4_680imtzbj1/

https://webtv.univ-rouen.fr/videos/eleve-bmp4_680imtzbj1/

QUELLE TRANSPOSITION DE CONCEPTS DE DIDACTIQUE EN FORMATION ? L'EXEMPLE DE LA SITUATION CONCERTUM

Anne BILGOT
Formatrice, INSPE de Paris, Sorbonne-Université
COPIRELEM
anne.bilgot@inspe-paris.fr

Christophe BILLY
Formateur, INSPE de Toulouse Occitanie Pyrénées - Site d'Albi
COPIRELEM
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Fabien EMPRIN
Université de Reims, INSPE~~E~~, IREM de Reims
COPIRELEM
fabien.emprin@univ-reims.fr

Isabelle LAURENÇOT-SORGIUS
Formatrice, INSPE de Grenoble – Site de Chambéry
COPIRELEM
isabelle.laurencot-sorgius@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé
Ce texte rend compte d'un atelier mené par des membres de la COPIRELEM lors du Colloque de Strasbourg, tout en intégrant des éléments d'un atelier proposé, sous une forme assez proche, au colloque de Bonneuil sur Marne en 2024. Il s'inscrit dans le cadre d'un travail de reprise de situations de formation développées il y a plusieurs années par la COPIRELEM, qui vise à interroger les potentialités de ces situations et à les adapter pour prendre en compte le contexte actuel de la formation des professeurs des écoles.
Les deux ateliers avaient comme point de départ la situation *Concertum*, initialement élaborée pour travailler en formation initiale la division tout en prenant appui sur des éléments de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998).
Le texte rend compte du déroulement de ces deux ateliers, en réunissant des traces du travail effectué par les participants des ateliers et des retours de formation des animateurs de l'atelier ; ces éléments portent sur les procédures de résolution mises en œuvre pour résoudre le problème autour duquel la situation est construite, puis sur des exploitations possibles en formation (de la licence à l'année de stage post CRPE, en passant par le master). Parmi elles, une attention est portée à la transposition en formation de concepts de didactique, dont plusieurs ont été récemment mis en avant dans une ressource institutionnelle sur l'enseignement des mathématiques en maternelle (MENJ, 2023) : variables didactiques, dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation, dévolution et institutionnalisation (Brousseau, 1998).

I - CONTEXTE ET OBJECTIFS DE NOTRE TRAVAIL

Ce texte rend compte d'un atelier mené par des membres de la COPIRELEM lors du Colloque de Strasbourg, tout en intégrant des éléments d'un atelier proposé, sous une forme assez proche, au colloque de Bonneuil sur Marne en 2024. Il s'inscrit dans le cadre d'un travail de reprise de situations de formation développées il y a plusieurs années par de précédents membres de la COPIRELEM, qui vise à interroger

les potentialités de ces situations et à les adapter pour prendre en compte le contexte actuel de la formation des professeurs des écoles (Guille-Biel Winder et al., 2019, Celi et al., 2022).

Plus précisément, il s'agissait dans ces deux ateliers d'étudier et de reconsidérer une situation de formation intitulée *Concertum* proposée par Péault et Butlen (2003), publiée dans l'ouvrage éponyme *Concertum* (COPIRELEM, 2003) qui recensait 20 ans de travaux de la COPIRELEM. Le texte de Péault et Butlen (ib.) reprenait celui publié dans les « Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Tome IV », documents issus du stage d'Angers de mars 1995. On trouve auparavant des traces de cette situation dans différentes ressources. Elle est mentionnée dans la brochure *Jeux 2* de l'APMEP[1] coordonnée par H. Péault en 1985 (Groupe Jeux, 1985). Ses origines sont attribuées à un professeur d'informatique, Michel LUCAS, qui l'utilisait dans le cadre de formations informatiques pour étudier les algorithmes correspondant aux stratégies retenues. Suzy Gairin-Calvo l'évoque sous le nom *Le compte est bon collectif* dans le compte-rendu d'un groupe de travail au colloque COPIRELEM d'Angers de 1987 (Gairin-Calvo, 1987).

La situation de formation *Concertum* était initialement pensée pour un travail sur la division en formation initiale et était analysée en référence à des éléments de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), que nous désignerons dans la suite de ce texte par TSD. Nous avons souhaité reconsidérer cette situation de formation en prenant en compte les éléments de contexte actuels suivants :

- Une réforme de la formation initiale permettant de déployer sur 5 ans la formation des professeurs des écoles et conduisant les formateurs à répondre aux questions suivantes : quelles situations de formation proposer ? À quel moment ? (En licence ? En master ? En formation continue ? avec quels objectifs ?)
- De manière indépendante, la parution récente d'un document ressource institutionnel sur la construction du nombre en maternelle, à destination des enseignants, prenant explicitement appui sur des éléments de la TSD dans un chapitre intitulé « Apports de la recherche en didactique sur les premiers apprentissages numériques » (MENJ, 2003). Nous avions appris au cours de l'année 2023-2024 que des formateurs s'étaient emparés de ces éléments pour proposer un cadre générique permettant de structurer des séances de mathématiques. Nous souhaitions réfléchir lors de l'atelier à la pertinence et à des écueils possibles d'une exploitation d'éléments de la TSD dans un scénario de formation en prenant comme point de départ la situation *Concertum.*

L'objectif commun des deux ateliers conduits en 2024 et 2025 pouvait donc être formulé ainsi : « Questionner une situation de formation pour identifier des exploitations possibles avec différents publics, de la licence à la formation continue. »

Nous avons cependant souhaité apporter deux colorations différentes à cet atelier :

- En 2024, nous avons travaillé avec les participants de l'atelier sur des exploitations possibles de la situation *Concertum* avec différents publics, de la licence à la formation continue, en considérant aussi bien des entrées disciplinaires que didactiques.
- En 2025, nous avons recentré la focale de l'atelier sur les concepts de didactique qui peuvent être travaillés en formation à partir de la situation *Concertum*, dans un premier temps de manière ouverte, puis dans un second temps en resserrant le questionnement sur la TSD : en quoi peut-

[1] Association De Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (https://www.apmep.fr/)

elle outiller des enseignants débutants ? Expérimentés ? Est-ce un outil pour l'enseignant, ou plutôt un outil pensé par la recherche, pour la recherche ?

Dans la suite du texte, nous rendons compte du déroulement des deux ateliers, en privilégiant, selon les paragraphes, des traces recueillies en 2024 ou en 2025.

Nous commençons par relater la mise en situation des participants (longue en 2024, courte en 2025), en confrontant les procédures de résolution envisagées par les participants à des retours de formation (en L3, en M1, en formation de PES) et à des travaux d'élèves recueillis dans une classe de CM2 au cours de deux années successives. Nous exposons ensuite des exploitations envisagées par les participants des deux ateliers, aussi bien d'un point de vue disciplinaire que didactique. Nous nous focalisons ensuite sur des exploitations possibles de la TSD en formation, en prenant comme point de départ la situation *Concertum*. Enfin, nous présentons rapidement les exploitations que nous, animateurs de l'atelier, avions envisagées avant ces ateliers, auprès de publics variés et que nous avons présentées succinctement en conclusion des deux ateliers.

II - LA SITUATION CONCERTUM : MISES EN SITUATION

1 Mise en situation des participants pendant l'atelier

Nous avons en 2024 et 2025 débuté l'atelier par une mise en situation des participants.

Nous les répartissons par groupes de trois (ou éventuellement quatre) participants. Chaque groupe est désigné par une lettre (de A à H en 2024 ; de A à C en 2025). Chaque participant reçoit un lot de dix étiquettes, numérotées de 0 à 9. La mise en situation se déroule en trois phases. Celle-ci exige que seulement trois membres du groupe lèvent une étiquette. Dans le cas de groupe de quatre, il faut assigner à une des personnes, un rôle d'observateur des procédures mobilisées par le trio ou demander une rotation au sein du groupe.

1.1 Phase 1

La consigne suivante est donnée :

> *Dans quelques instants, nous allons vous proposer un nombre entier, que nous appellerons le nombre-cible. Dans chaque groupe, chacun choisira une étiquette et une seule et l'objectif de chaque groupe sera que la somme des nombres écrits sur les trois étiquettes soit égale au nombre-cible. Nous allons faire un premier essai : êtes-vous prêts ?*

Pour les ateliers que nous avons mis en œuvre au colloque, nous avons choisi de ne pas donner, à ce stade du déroulement, davantage de consignes. Des participants ont alors spontanément posé des questions : « Doit-on lever les cartons tous en même temps ? », « Peut-on se parler ? ». Il leur a été répondu que rien ne l'interdisait.

Nous avons alors donné, successivement, les nombres-cibles suivants : 24 ; 14 ; 29. Les deux premiers permettent d'entrer dans la tâche et de constater qu'il est possible d'obtenir un nombre-cible de plusieurs manières (par exemple, $14 = 9 + 5 + 0 = 6 + 4 + 4 = 5 + 5 + 4$) ; le troisième, impossible à atteindre, permet de faire formuler que le nombre-cible est nécessairement compris entre 0 et 27.

Une contrainte a alors été imposée :

> *À partir de maintenant, il ne sera plus possible de se parler ni de se regarder quand le nombre-cible sera énoncé et il faudra lever les trois étiquettes simultanément.*

Des participants ont alors demandé s'ils pouvaient se parler avant que le jeu ne recommence : nous avons répondu que oui, il leur était possible de *se concerter* (et que c'était pour cette raison que la situation qu'ils étaient en train de vivre s'intitulait *Concertum*).

Après quelques minutes de concertation, nous avons donné successivement de nouveaux nombres-cibles en appliquant les nouvelles règles : les participants sont alors assis côte à côte, tous tournés vers le tableau, en silence, et, théoriquement, sans concertation possible entre deux nombres-cibles successifs. Cette dernière contrainte est fixée dans l'optique de faire éprouver les stratégies élaborées. En pratique, il est difficile d'empêcher que de brefs échanges n'aient lieu au sein des groupes entre deux nombres-cibles successifs : on voit alors parfois des stratégies se rectifier ou s'affiner au fil des tentatives.

Lors de l'atelier de 2024, les nombres-cibles proposés étaient, successivement, 2 ; 13 ; 12 ; 26 ; 5 et 21

Le nombre 2 est utile pour tester le recours au nombre 0. Le nombre 26 permet de tester la robustesse d'une des stratégies possibles (cf. paragraphe suivant) : la division par trois. En effet, dans ce cas, la stratégie qui consiste à faire afficher par chaque membre le quotient de la division euclidienne par 3 du nombre-cible et à attribuer à un des trois participants le reste est mise en défaut : la somme $10 + 8 + 8$ est bien égale à 26, mais ne peut pas être obtenue avec le lot d'étiquettes disponibles, qui s'arrête à 9.

Tout au long des tentatives, les décompositions proposées par les différents groupes sont notées au tableau, sans que leur validité ne soit commentée par les animateurs de l'atelier. On trouvera en annexe 1 une photographie des tableaux de relevés obtenus pendant les ateliers de 2024 et de 2025, ainsi qu'une photographie du tableau obtenu de manière similaire dans une classe de CM2. Nous avons remarqué que ce recensement des décompositions proposées par chacun des groupes offre un support propice à la régulation des stratégies utilisées au sein de chaque groupe : d'une part, la présence d'une décomposition invalide nourrit des discussions internes au groupe (erreur de mise en œuvre de la stratégie par l'un des membres du groupe ; erreur de calcul de l'un des membres du groupe ; stratégie défaillante) ; d'autre part, une stratégie fructueuse d'un groupe peut être identifiée par un autre groupe à partir de quelques exemples et être exploitée dès la phase 1 pour remplacer une stratégie défaillante par une stratégie opérationnelle, ou être exploitée en phase 3 (ci-après) pour élaborer une stratégie alternative plus facilement généralisable.

1.2 Phase 2

Pour cette phase, une feuille blanche est distribuée dans chacun des groupes et la consigne est la suivante :

> *Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant la stratégie choisie, de la façon la plus claire possible, afin que des membres d'un autre groupe soient capables de la mettre en œuvre pour atteindre les nombres cibles qui seront proposés tout à l'heure.*
>
> *Sur vos messages, il n'est pas nécessaire de réécrire la règle du jeu, tout le monde la connaît maintenant. Attention : il ne s'agit pas de mettre les autres en difficulté. Au contraire, les messages doivent simplifier au maximum la tâche des récepteurs.*

Les messages recueillis lors de cette phase pendant l'atelier de 2024 sont consignés en annexe 2. Ils seront analysés dans le paragraphe suivant.

Au bout de quelques minutes, chaque équipe transmet son message à une autre équipe ; la permutation des messages est décidée par les animateurs de l'atelier, en fonction des stratégies observées lors de la phase 1 ; il s'agit alors, dans la mesure du possible, de transmettre à chaque équipe un message fondé sur une stratégie différente de celle choisie par le groupe en phase 1.

Par exemple, au cours de l'atelier 2024, nous avons opéré les échanges suivants : A ←→ B ; C ←→ E ; D←→F ; G←→H.

La consigne est alors la suivante :

> *Vous allez recevoir un message d'une autre équipe. Vous allez vous concerter de façon à pouvoir jouer en utilisant la stratégie décrite sur le message reçu. Si vous estimez que le message que vous*

avez reçu n'est pas suffisamment clair, il est possible de demander des éclaircissements aux rédacteurs, mais uniquement par écrit.

Nous empêchons les échanges à l'oral entre groupes et imposons l'écrit comme mode de communication pour montrer comment l'écrit favorise le recours à des formulations précises pouvant engager la mobilisation de notions mathématiques (alors que des échanges oraux pourraient permettre des ajustements plus informels).

Quelques nouveaux nombres-cibles sont alors proposés aux participants, selon les mêmes modalités que pendant la phase 1 (sans se regarder, sans se parler, en levant les étiquettes simultanément). Les décompositions obtenues sont notées dans le tableau amorcé en phase 1 (cf. annexe 1, partie basse du tableau).

1.3 Phase 3

Une feuille blanche est distribuée dans chacun des groupes et la consigne suivante est donnée :

Dans un moment, vous allez jouer tous ensemble, avec un nombre-cible compris entre 0 et [9 × nombre de personnes], calculé par les animateurs de l'atelier : en 2024, avec 24 participants c'est donc 216]. Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant une stratégie, de la façon la plus claire possible, pour que le groupe entier puisse réussir à atteindre le nombre cible. Nous testerons ensuite quelques-unes des propositions.

Lors des ateliers 2024 et 2025, nous avons alors sollicité deux groupes ayant envisagé des stratégies différentes, en demandant de désigner un animateur pour expliquer oralement à l'ensemble du groupe la stratégie définie par le groupe et pour organiser sa mise en œuvre. Les messages obtenus en 2024 sont consignés en annexe 3 et analysés dans le paragraphe 3 ci-dessous.

2 Procédures observées en phase 2 pendant l'atelier et confrontation avec des retours de formation et une expérimentation en CM2

Nous avons rassemblé en annexe 1 des traces des procédures mises en œuvre par les participants de l'atelier 2024, en les confrontant à des procédures que nous avions auparavant observées en formation (en L1 à Reims, en L3 à Paris, en M1 à Annecy et à Albi, en formation de Professeurs des Écoles Stagiaires à Paris) ou dans une classe de CM2 de l'académie de Paris.

Nous les organisons en reprenant l'inventaire qui avait été dressé dans la ressource initiale (Péault et Butlen, 2003), où sont distingués les raisonnements suivants : division par 9 du nombre cible ; division par 3 du nombre cible ; disjonction de cas en fonction du nombre-cible, avec des « tranches » variées.

Il ressort de cette confrontation que les procédures envisagées par Péault et Butlen (ib.) coïncident exactement avec celles que nous avons observées pendant les ateliers (avec, donc, des formateurs), ainsi qu'avec celles que nous avons observées à chaque fois que nous avons mis en œuvre cette situation en formation initiale (que ce soit en L3, en master, ou en formation de PES). Un élément qui nous semble remarquable est que le spectre de procédures anticipées se retrouve dans nos observations d'élèves de CM2.

Les seules différences que nous constatons portent sur la rigueur, l'exactitude et la concision avec laquelle ces procédures sont formulées : sans surprise, les formulations adoptées par les formateurs au cours des ateliers sont plus précises et plus efficaces que celles des formés ou des élèves. Un élément qui nous semble intéressant est que cette nuance est beaucoup moins nette entre formés et élèves de CM2, ce qui nous laisse penser que des difficultés rencontrées par des étudiants ou des enseignants stagiaires peuvent être proches de celles rencontrées par des élèves de CM2. Cela resterait à confirmer par des expérimentations à plus grande échelle (en particulier dans d'autres classes de CM2), mais cela nous incite à penser que la situation *Concertum* se prête à une situation de formation par homologie.

3 Procédures observées en phase 3 pendant l'atelier et confrontation avec des retours de formation

Dans cette phase les participants doivent élaborer une stratégie pour permettre cette fois-ci à l'ensemble des participants d'atteindre collectivement un nombre cible. L'intention, en augmentant la taille du groupe, est d'éprouver les stratégies élaborées en groupe de trois et de les faire éventuellement évoluer « en faisant associer la notion de « bonne » stratégie à celle de stratégie généralisable » (Péault et Butlen, 2003). Le problème de la généralisation conduit à rechercher des formulations efficaces permises ici par l'utilisation de la division. Butlen et Péault (ib.) mentionnaient que la division par 9 est « la procédure qui, dans la plupart des cas, sera reconnue comme la plus facilement généralisable ».

Lors de l'atelier 2024, il y avait 24 participants répartis en 8 groupes, dont 6 ont effectivement eu recours à cette procédure (les productions recueillies lors de cet atelier sont rassemblées en annexe 3). Parmi eux, deux l'avaient déjà employée en phase 2 sans recourir explicitement au lexique de la division qui n'apparaît qu'en phase 3. Les quatre autres groupes ont abandonné la division par 3 (3 correspondant au nombre de membres d'une équipe dans la phase initiale) au profit de la division par 9 (9 correspondant à la valeur maximale qu'un joueur peut afficher, quelle que soit le nombre de joueurs). Autrement dit, ces 6 groupes ont modifié leur interprétation initiale de la situation comme un problème de division partition (dans laquelle chaque joueur prend en charge la même « part » du nombre cible, un ou des joueurs « faisant l'appoint » ensuite), pour adopter une interprétation de la situation comme un problème de division quotition (dans laquelle, en adoptant les notations de la Figure 1, q joueurs choisissent le nombre 9, le $(q+1)^e$ choisissant r). Ce changement d'interprétation permet d'apporter une réponse au problème de généralisation puisqu'elle ne dépend pas dans sa formulation du nombre de participants, comme on peut l'observer dans la production ci-dessous recueillie en formation initiale.

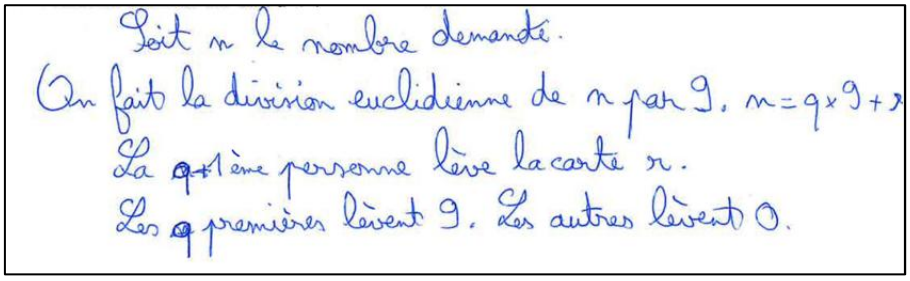


Figure 1 : un exemple de procédure pour jouer à Concertum avec n joueurs, dans laquelle la division par 9 est explicitement mobilisée.

III - CONCERTUM EN FORMATION : POUR QUOI FAIRE ?

Après avoir fait vivre la situation, nous avons proposé aux participants des ateliers de réfléchir en groupe à des exploitations possibles de CONCERTUM en formation.

1 Atelier 2024 : un questionnement ouvert

En 2024, nous avons posé les questions suivantes :

- *Utiliseriez-vous cette situation en formation ?*
- *Si oui pour quels objectifs ? Avec quel(s) public(s) ? Si non, pour quelles raisons ?*

La mise en commun a ensuite permis de recenser les éléments suivants :

- **Des objectifs disciplinaires**
  - Travailler sur les sens de la division euclidienne : interprétation du quotient et du reste dans un contexte interne aux maths ; passer d'additions itérées à la division par la recherche du plus grand multiple inférieur au nombre cible ; établir du lien entre « Concertum » et « la course à vingt » pour renforcer le concept de division ;

- Mobiliser du lexique mathématique pour communiquer sa stratégie ;
- Questionner la validation (ou l'invalidation) des stratégies...notamment lorsqu'on essaie de généraliser ;
- Exploiter le potentiel de la situation pour introduire la notion de preuve ; travailler sur le rôle des exemples et des contre-exemples ;
- Mobiliser des résultats en calcul mental.

- **Des objectifs didactiques**
  - Notion de variables didactiques d'une situation pour faire évoluer les procédures de résolution nombre cible, nombre de personnes, nombre d'étiquettes, levée simultanée ou non, ...) ; si la taille des groupes est fixée à 10, possibilité de travailler la numération ;
- Évoquer les phases de la TSD : action, formulation, validation, couple dévolution - institutionnalisation ;
- **Des objectifs transversaux**
  - Faire vivre une situation collaborative ;
  - Objectif de « faire des maths » décontextualisées ; situation permettant d'enrôler les étudiants ;
  - Résolution de problème atypique pour montrer qu'il n'y a pas qu'une seule stratégie pour résoudre un problème, éprouver leur efficacité respective et être capable d'en changer ;
  - Travailler sur une synthèse ;
  - Travailler sur « l'effet Topaze »[2]

2 Atelier 2025 : un premier questionnement resserré sur des concepts de didactique

En 2025, nous avons orienté la discussion en donnant dans un premier temps les consignes suivantes :

> *Quels concepts de didactique pourriez-vous envisager de travailler en formation à partir de cette mise en situation ? Avec quels objectifs de formation ?*
>
> *Les concepts peuvent relever de la TSD (sur laquelle on se penchera plus précisément ensuite) ou d'un autre cadre ; la formation peut être initiale (L3, Master) ou continue ; elles peuvent permettre une introduction ou un réinvestissement de notions de didactique.*

La mise en commun qui a suivi a permis de recenser les éléments suivants :

- Faire vivre la situation puis confronter les différentes stratégies pourrait permettre, ensuite, de travailler sur l'importance de l'analyse *a priori* dans la préparation d'une séance pour la classe.
- Faire vivre la situation puis faire analyser ses étapes pourrait permettre de travailler autour d'éléments de la TSD et, plus précisément, autour des concepts de dévolution, action, formulation, validation.
- La notion de variable didactique peut être illustrée à travers deux exemples issus de la mise en situation : la possibilité de communiquer ou non au sein des groupes et le nombre de participants. Les valeurs de ces variables influent sur les procédures des élèves et les placent dans différentes situations : l'interdiction de communiquer avant de lever les étiquettes au sein du groupe nécessite en amont, avant d'agir, de formuler une stratégie permettant d'atteindre le nombre cible sous cette contrainte. L'échange des messages entre les groupes conduit à une validation ou

[2] Nous reprenons ici une proposition d'un participant de l'atelier. Le lecteur souhaitant disposer d'éléments sur « l'effet Topaze » introduit par Brousseau peut se référer au texte suivant : Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *RDM 7.2.,* éditions La Pensée Sauvage. Grenoble.

non des propositions formulées. Un grand nombre cible à atteindre lorsque l'on joue à plusieurs amène à éprouver l'efficacité des stratégies élaborées lors de la phase à trois joueurs et peut conduire à les adapter, en particulier dans leur formulation : des savoirs mathématiques (associés ici à la division) peuvent alors être mobilisés.

- Enfin, l'un des groupes évoque la possibilité d'exploiter la situation pour envisager en formation des conditions et des contraintes associées à la mise en œuvre d'une situation émetteur/récepteur.

3 Des éléments qui confortent les intentions initiales des concepteurs de la situation

Les propositions des participants des deux ateliers sont cohérentes avec les intentions initiales des concepteurs de la situation *Concertum* (Péault et Butlen, 2003). Cette dernière s'insérait en effet dans une suite d'activités formant un tout d'un plan de cours principalement sur la division euclidienne Les auteurs définissaient des objectifs généraux (rappel de certains concepts de mathématiques autour de la division, euclidienne ou non, analyse des problèmes de division et des procédures de résolution, étude de notions élémentaires de didactique et apports d'éléments d'informations permettant la construction et l'analyse de séquences à l'école élémentaire). Plus précisément, les objectifs poursuivis à travers la situation *Concertum* étaient : *faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour la résolution d'un problème et donner du sens, à partir de l'analyse d'une activité, à des notions de didactique telles que dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation.* (Péault et Butlen, ib.).

Nous retrouvons ainsi deux axes proposés par les participants à l'atelier : un axe que l'on peut qualifier de « disciplinaire », consistant à reconnaître la division euclidienne comme procédure experte pour résoudre un problème formulé initialement dans le champ additif (la somme des trois nombres portés par les étiquettes doit être égale au nombre cible) et un deuxième axe dirigé vers l'étude de concepts de la TSD. Dans la phase suivante, nous nous sommes penchés de façon plus approfondie sur l'étude de cet axe.

IV - LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES EN FORMATION : QUELS ÉLÉMENTS ET POUR QUOI FAIRE ?

Pour l'atelier 2025, nous avons choisi de proposer un second temps de travail de groupe centré sur des exploitations possibles de la TSD en formation des professeurs des écoles, en prenant comme point de départ la situation *Concertum*.

1 Travail de groupe : étude de textes

Les participants étaient répartis en trois groupes. Nous avons mis à la disposition de chacun des groupes le même corpus de trois textes :

- Un extrait d'une ressource institutionnelle (MENJ, 2023), à destination des enseignants et des formateurs, mettant en avant des éléments de la TSD : il s'agit du chapitre « Apports de la recherche en didactique sur les premiers apprentissages numériques » du guide portant sur la construction du nombre en maternelle, p 30 à 44. Dans la suite, nous désignerons ce document par « le guide vert », comme il l'est souvent dans la communauté des formateurs et des professeurs des écoles.
- Un texte rédigé par Joël Briand en 1997, à destination des formateurs, intitulé « La didactique des mathématiques au service de la professionnalisation des enseignants » (Briand, 1997). Nous avons invité les participants à porter leur attention en priorité aux éléments développés en p. 13 et suivantes.

- Un texte rédigé par Guy Brousseau en 2005, à destination des enseignants, intitulé « Recherches en éducation mathématique »[3].

La consigne que nous avons donnée était la suivante :

- *Nous allons soumettre à chaque groupe quelques concepts. Pour chacun d'eux, identifiez ce que chaque texte en dit et confrontez ces trois points de vue.*
- *Qu'en dites-vous / qu'en diriez-vous en formation ? Avec quels objectifs pour outiller des PE ?*
- *La situation Concertum et les situations proposées dans le guide vert vous paraissent-elles pertinentes pour en parler ? Pensez-vous à d'autres situations plus pertinentes ?*

Les concepts confiés à l'étude de chacun des trois groupes étaient les suivants :

Groupe 1 : situations d'action ; de formulation ; de validation

Groupe 2 : variables didactiques ; saut informationnel

Groupe 3 : contrat didactique ; dévolution ; institutionnalisation

Ces concepts sont tous associés à des situations dites « adidactiques », qui peuvent être définies de la manière suivante :

> *Brousseau met au cœur de son approche de la didactique la notion de situation didactique. Le terme situation désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve et des relations qui l'unissent à son milieu. Une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner. Pour comprendre la conception privilégiée par Brousseau dans l'étude des situations, il faut associer à la notion de situation didactique celle de situation non didactique. Cette dernière est la situation rencontrée par le mathématicien ou l'usage des mathématiques lorsqu'il doit résoudre un problème dont la finalité première n'est pas l'apprentissage d'une quelconque notion mathématique. En s'inspirant de l'usage des connaissances mathématiques en mathématiques ou en dehors des mathématiques, Brousseau introduit la notion de situation adidactique pour l'élève : l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » préoccupé par la seule résolution du problème posé. Le problème devient son problème à l'issue d'un processus de dévolution fondamental dans cette conception de l'apprentissage où l'élève doit participer à l'élaboration de ses connaissances de manière active. (Kuzniak, 2005)*

2 Mise en commun et compléments

Nous rendons compte ici des principaux éléments relevés par chacun des trois groupes après une lecture rapide des trois textes et nous les complétons par des éléments apparus lors de la discussion ou que nous avions identifiés en préparant l'atelier.

2.1 Groupe 1 : situations d'action / de formulation / de validation

Le guide vert présente les situations d'action, de formulation et de validation dans un paragraphe intitulé « Cinq situations distinguées par Brousseau » incluant également la dévolution et l'institutionnalisation, de la manière suivante :

- *La situation d'action : les élèves cherchent à réaliser la tâche proposée par le professeur. Ils se confrontent aux contraintes et critères de réussite explicités lors de la dévolution. Si nécessaire, ils adaptent leurs procédures au fil des essais, montrant ainsi qu'ils se sont bien approprié ces contraintes et ces critères. Le professeur supervise leur travail et les encourage. Autant que nécessaire, il réexplique l'objectif, les contraintes et les critères de réussite (retour à la dévolution).*

[3] https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA05021.pdf

- *La situation de formulation : la tâche exige que l'élève communique oralement ou par écrit. Il doit, par exemple, demander à un autre élève d'aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour fermer toutes les bouteilles. Ce n'est alors pas seulement le nombre qui est mobilisé, mais aussi sa désignation orale ou écrite. L'élève apprend ainsi à les mettre en lien. Lorsque l'élève écrit le nombre de bouchons souhaités, il apprend aussi que l'écrit a une fonction de communication. Ce n'est pas seulement un entraînement au geste graphique.*
- *La situation de validation : le professeur conduit les élèves à établir (ou à réfuter) la validité des procédures mises en œuvre, c'est-à-dire que les contraintes sont respectées et que les critères de réussite sont satisfaits* (MENJ, 2023)

À propos de cet extrait, plusieurs éléments ont été soulevés pendant la discussion :

- Alors que dans Briand (1997), la « dialectique de l'action » met en relation uniquement l'élève et la situation, le guide vert octroie un rôle à l'enseignant ;
- A propos des situations de formulation, illustrées dans le guide vert par une phase de la situation des voyageurs au cours de laquelle l'élève doit passer une commande orale, des collègues signalent avoir observé à l'occasion d'échanges avec des collègues des confusions entre « formulation » et « verbalisation ». Ils rappellent qu'au sens de Brousseau les situations de formulation sont des nouveaux problèmes qui amènent à mettre en mot ce qui a été trouvé dans la situation d'action. Le texte de Briand le confirme en précisant ce que la TSD entend par dialectique de la formulation :

  > *Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite et que pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral*). (Briand, 1997).
- Une illustration d'une situation de validation est proposée dans le guide vert dans l'exemple de *L'escargot*, avec un paragraphe intitulé « La validation ».

  > *Cette situation est conçue pour rendre possible la validation des propositions des élèves. Les points rouge et bleu évitent toute ambiguïté sur l'origine du comptage et sur le numéro de chacune des cartes. La proposition « tu pars du point rouge et tu comptes quatre cartes » permet ainsi de désigner une carte avant de vérifier que l'escargot est bien sous cette carte en la retournant. [..] L'enseignant a un rôle important pour éviter que les élèves valident à tort certaines procédures. Si un élève indique que « l'escargot est sous la quatrième carte », l'enseignant invitera les élèves à repérer l'ambiguïté tout en maintenant, autant que possible, la validation par le matériel.* (MENJ, 2023)

  Avec l'appui des extraits suivants (Briand, 1997), il est relevé que les éléments qui sont mis en avant dans le guide vert semblent davantage relever d'une situation d'action (avec un milieu qui apporte des rétroactions) complétée par des interventions de l'enseignant, que d'une situation de validation au sens de la TSD.

  > *[La dialectique de l'action] consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :*
  > - *La solution est la connaissance visée ;*
  > - *L'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;*
  > - *La situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maitre.*
  >
  > *[…]*
  >
  > *La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une*

> *situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.* (Briand, 1997)

- La situation *Concertum* est repérée comme une situation permettant de faire vivre une situation d'action (phase 1) et une situation de formulation (phase 2). Pour ce qui est de la phase de validation, le groupe mentionne que la notion de contre-exemple peut être abordée par exemple dans le cas d'une stratégie qui n'a pas fonctionné pour un nombre donné même si elle a fonctionné pour un exemple précédent.
- Des collègues mentionnent travailler ces éléments en formation initiale dans des UE recherche, en prenant appui sur les situations « Voitures et garages » et « L'agrandissement du puzzle ».

Un autre extrait du guide vert fait l'objet d'une discussion :

> *Les cinq situations décrites précédemment contribuent à l'apprentissage mathématique des élèves, mais également à l'apprentissage de la conduite à adopter pour apprendre en mathématiques : agir pour atteindre l'objectif défini par la question ou la consigne, dire comment on a procédé, comprendre pourquoi on a réussi ou non, écouter les autres, et enfin savoir qu'il y a des connaissances à en apprendre qui pourront être réutilisées dans d'autres problèmes.* (MENJ, 2023)

Des participants rapportent des confusions observées lors d'échanges avec des collègues (nous avions de notre côté eu des échos similaires) : ce paragraphe laisse parfois penser que les situations d'action, de formulation et de validation sont des étapes à parcourir linéairement et impérativement après la dévolution et avant l'institutionnalisation.

Un extrait du texte de Briand (1997) permet de clarifier ce point :

> *Il faut bien être conscient que, dans la pratique, ces phases ne se succèdent pas aussi systématiquement. La plupart des séquences de classes qui prennent en compte cette approche vont se caractériser par la présence d'une ou de plusieurs de ces phases. En particulier, une erreur fréquente est de croire qu'en une séance de travail, ces phases devraient être systématiquement présentes. On peut concevoir une suite de deux ou trois séquences de travail au cours desquelles les seules phases d'action et de formulation sont présentes. Il faut que les élèves aient été plusieurs fois émetteurs puis récepteurs pour qu'ils puissent prendre clairement conscience du problème qui est en jeu. L'approche par la théorie des situations constitue un modèle théorique qui est une aide précieuse pour décomposer finement les processus d'apprentissage et analyser les phénomènes observés.* (Briand, 1997)

2.2 Groupe 2 : variables didactiques, saut informationnel

Le groupe 2 s'intéressait aux concepts de variables didactiques et saut informationnel. Tous deux sont définis dans le texte de Briand (1997) : les variables didactiques d'une situation sont des « *éléments d'une situation a-didactique qui peuvent être modifiés par le maitre et qui affectent la hiérarchie des stratégies de solutions par le coût, la validité, la complexité* », tandis qu'un saut informationnel est défini comme « *un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation, susceptible de provoquer un changement de stratégie* » (Briand, 1997).

Comme cela avait déjà été souligné lors de la première phase de travail de groupe autour d'exploitations possibles en formation de la situation *Concertum*, il est à nouveau mentionné que vivre la situation puis l'analyser permet d'illustrer le concept de variable didactique :

- L'évolution des types de communication autorisés provoque la nécessité de l'élaboration d'une stratégie ;
- Le changement de la taille du groupe entre les phases 1 et 3 a une influence sur les procédures mises en œuvre et sur leur formulation. Par exemple, comme nous l'avons relaté dans la partie II.3 (atelier 2024), le passage d'une résolution à 3 joueurs à une résolution à 24 joueurs a conduit des

participants à abandonner la division par 3 (correspondant à la taille initiale du groupe) au profit de la division par 9 (qui peut être utilisée quelle que soit la taille du groupe).

Des retours de formation nous conduisent néanmoins à nuancer ces observations : à plusieurs reprises, nous avons observé des étudiants continuer à recourir à des stratégies « par tranches », sans passer à la division. Cela a également été le cas pour certains groupes de formateurs lors de l'atelier 2024 (cf. annexe 3, « Autres procédures »).

Des participants mentionnent qu'en formation, il est possible d'exploiter la situation de la Course à *N* (Péault et Butlen, 2003) pour illustrer le concept de variable didactique.

À propos du guide vert, il est relevé que la notion de « variables didactiques » est introduite et illustrée à travers l'exemple de la « situation des Voyageurs », où elles sont définies comme « des leviers pour faire évoluer les procédures des élèves ».

2.3 Groupe 3 : contrat didactique ; dévolution ; institutionnalisation

« Petit à petit l'enseignant est pris en compte dans le modèle » (Briand, 1997). Cette phrase fait écho à la présentation faite par Brousseau de la genèse des concepts de dévolution, d'institutionnalisation et de contrat didactique :

> *J'ai cru pendant un certain temps que les modèles de situations utilisés pour décrire les rapports des élèves avec les mathématiques étaient suffisants pour décrire aussi ceux des professeurs avec leurs élèves. Pourtant, l'observation montrait que le professeur devait intervenir pour maintenir certains équilibres entre ce qui est connu, ce qui est dicible, ce qui est montré et ce qu'il est convenu de savoir.*
>
> *Par exemple, à plusieurs reprises, des professeurs n'ont pas voulu poursuivre des enseignements théoriquement satisfaisants car ils étaient formés de suites de situations d'action, de formulation, de preuves bien conçus et bien articulés. Il a bien fallu se demander pourquoi.*
>
> *Alors divers paradoxes sont apparus. Un élève peut développer une connaissance semblable à celle déjà établie dans la société, il ne peut pas savoir quelle est sa place, son importance, son avenir, etc. Le constructivisme radical peut convenir pour des sociétés isolées, mais pas pour l'enseignement. Nous avons dû admettre qu'un nouveau type d'interventions était indispensable : l'institutionnalisation des connaissances enseignées.*
>
> *L'observation d'enfants en difficultés a fait apparaître ensuite la nature des difficultés qu'un professeur rencontre lorsqu'il veut obtenir que l'élève agisse « de lui-même » sur un problème qu'il lui propose. Nous appelons ce transfert de responsabilité : dévolution. Poser une question, transmettre aux élèves un énoncé ou une consigne, faire entrer les élèves dans une situation donnée posait aux enseignants des problèmes d'un autre type. D'autre part l'élève doit produire personnellement ce qu'il dit ou fait comme s'il en était l'auteur et non pas citer ou réciter. Il doit donc accepter la responsabilité de résoudre des problèmes à l'aide de connaissances qu'il ignore encore et qu'on ne lui a pas enseignées, ce qui est formellement contradictoire. Aucun professionnel n'accepterait un tel contrat. Le professeur et l'élève entrent alors dans ce qui nous est apparu à l'époque comme la négociation d'une sorte de « contrat didactique », impossible à expliciter par ses contractants et même à tenir, toujours rompu et toujours renaissant, à travers lequel se crée la connaissance de l'élève.* (Brousseau, 2005)

Des participants questionnent la place dévolue au « contrat didactique » dans la formation des PE : alors que les mots « dévolution » et « institutionnalisation » semblent, de l'avis général, fréquemment utilisés, la notion de « contrat didactique » est décrite comme beaucoup moins fréquemment abordée.

C'est le cas aussi dans le guide vert, où il n'est pas question de l'établissement d'un contrat didactique entre l'élève et l'enseignant. En revanche, les notions de « dévolution » et « institutionnalisation » sont présentes et sont présentées comme des situations au même titre que les situations d'action, de formulation et de validation :

- *La dévolution : le professeur conduit les élèves à s'approprier la tâche et à s'engager dans sa réalisation. Pour cela, il les familiarise avec le matériel à utiliser, il leur fait comprendre les contraintes à respecter et leur précise les critères de réussite. Il n'hésite pas à les faire travailler collectivement sur un exemple pour s'assurer qu'ils se sont bien approprié ces éléments, ni à les rappeler si besoin.*
- *L'institutionnalisation : le professeur dégage la généralité des procédures rencontrées en classe. Il conduit les élèves à apprendre que des procédures utilisées pour résoudre un problème pourront encore être utilisées pour résoudre d'autres problèmes analogues.*

Des participants à l'atelier avancent que ces définitions correspondent sans doute à la manière dont la « dévolution » et l'« institutionnalisation » sont fréquemment évoquées en formation, en s'écartant des acceptions, plus complexes, qu'elles ont dans le cadre de la TSD et du contrat didactique associé. Selon certains participants, le terme « institutionnalisation » est même désormais entré dans le langage usuel, pour désigner, de manière dévoyée, n'importe quelle étape de fin de séance, en s'écartant ainsi de son sens initial :

> *L'institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle : celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles.*
>
> *Cette phase est indispensable pour assurer le passage d'une connaissance reliée à une situation vécue individuellement et très contextualisée à un savoir décontextualisé actif dans une institution donnée.* (Kuzniak, 2005)

À propos de la situation *Concertum*, les participants semblent s'accorder sur le fait que cette situation peut permettre de faire vivre une phase de dévolution. La pertinence de la situation pour travailler sur l'institutionnalisation est en revanche questionnée, rejoignant ainsi des débats déjà présents dans le compte-rendu d'un groupe de travail de formateurs en 1987 :

> *Une discussion a lieu au sujet de l'institutionnalisation. S. Gairin-Calvo pensait qu'on ne pouvait pas considérer qu'il y ait eu ici, pour les normaliens, institutionnalisation d'une connaissance :*
>
> - *Si l'on considère que le savoir mis en jeu est la stratégie pour gagner à ce jeu, elle n'a pas à être institutionnalisée puisque ce n'est pas un objectif d'enseignement.*
> - *Si l'on considère que le savoir est la division, il a déjà fait l'objet d'une institutionnalisation, il ne s'agit ici que de « retrouver » une ancienne notion.*
>
> *La discussion qui suit avec Régine Douady et Denis Butlen va permettre de préciser le concept d'institutionnalisation : en fait il ne s'agit pas d'un « point final » dans la construction d'une notion mathématique, il faut l'envisager dans la perspective d'une dialectique « outil-objet » : succession de phases où l'on se sert du savoir (pour résoudre un problème) et de phases où l'on considère ce savoir comme un objet d'étude en soi (phase d'institutionnalisation de la théorie de G. Brousseau). Ici, il y a donc bien eu une phase d'institutionnalisation : les normaliens ont reconnu dans ce qu'ils avaient utilisé un savoir qu'ils avaient déjà identifié comme « division », il y a eu une nouvelle réorganisation de leurs connaissances, enrichie du sens nouveau qu'ils venaient de construire dans cette situation particulière.* (Gairin-Calvo, 1987, p. 76).

V - MISE EN ŒUVRE EN FORMATION : NOS PROPOSITIONS

En 2024 comme en 2025, nous avons clôturé chacun des ateliers en présentant brièvement comment nous, animateurs de l'atelier, avions déjà exploité en formation la situation *Concertum.*

1 Vivre *Concertum* en L1

La formation des enseignants du premier degré évolue avec la réforme de la Licence Professorat des Écoles qui va entrer en vigueur à la rentrée 2026. Plusieurs universités et INSPÉ avaient déjà mis en place des licences de sciences de l'éducation pluridisciplinaires permettant aux étudiants de se préparer au métier dès les premières années post baccalauréat.

Pour les enseignants de ces licences mais aussi des nouvelles licences à venir se pose alors la question de ce que peuvent être des contenus mathématiques universitaires, de niveau licence, pour un étudiant qui veut devenir professeur des écoles. Refaire des cours de mathématiques est-il suffisant ? De quelles connaissances mathématiques un professeur des écoles a-t-il besoin pour enseigner ?

Pour tenter de répondre à cet enjeu nous nous appuyons sur le travail de Ma (2010) qui, à l'origine dans sa thèse de doctorat, a comparé les connaissances des enseignants chinois et américains. Elle a déduit de cette comparaison que les enseignants américains avaient des connaissances mathématiques de plus haut niveau mais que les enseignants chinois avaient des connaissances plus profondes des mathématiques qu'ils devaient enseigner. Cela l'a amenée à définir les Connaissances Approfondies des Fondements des Mathématiques (CAFM) (Profound Understanding of Fundamental Maths - PUMF)

> *Les enseignants ayant des CAFM affichent des attitudes mathématiques et sont particulièrement conscients des « concepts et principes de base simples, mais puissants des mathématiques » (par exemple, l'idée d'une équation). Cela signifie que les enseignants encouragent les enfants à explorer les idées liées à un problème plutôt que de se contenter de calculer la solution. Cela signifie que leur apprentissage et leur compréhension du sujet seront plus approfondis.* (MA, 2010, [traduction personnelle])

Ainsi les contenus des licences pourraient viser des CAFM mais peu d'études abordent réellement concrètement comment les définir. Davis et Renert (2013) proposent une vision des CAFM comme l'étude des concepts sous leurs différents aspects et de façon exhaustive :

> *…des définitions formelles (par exemple, la multiplication est un regroupement itéré), des algorithmes (par exemple, effectuer une multiplication par addition itérée), des métaphores (par exemple, la multiplication est une mise à l'échelle), des images (par exemple, la multiplication illustrée comme un saut le long d'une ligne numérique), des applications (par exemple, la multiplication utilisée pour calculer une surface), des gestes (par exemple, la multiplication exécutée dans un mouvement ascendant).* (Ibid. p 252, [traduction personnelle]).

En ce qui concerne le travail sur la division euclidienne, la situation *Concertum* permet d'évoquer aussi bien l'aspect partition que l'aspect quotition, là où la course à *N* relève uniquement de la division quotition.

Nos étudiants ont de plus un rapport majoritaire dégradé avec les mathématiques. Nous avons pu le montrer en réalisant un test de positionnement permettant de qualifier ce rapport aux mathématiques dans Emprin (2024). Notre hypothèse est que mettre les étudiants en position de résoudre des problèmes et de réussir peut contribuer à restaurer la qualité de leur rapport aux mathématiques.

Enfin l'étude ICMI (1998) met en évidence que les enseignants ont tendance à reproduire les pratiques et les modèles qu'ils ont connus. Grâce à une étude sur les pratiques en géométrie pour les premiers et l'algèbre pour le second, Barrantes et Blanco (2006) (complétés par Khattab (2020)) montrent que le

premier facteur influençant les pratiques des enseignants apparaît être ce qu'ils ont vécu en tant qu'élèves. En faisant vivre des situations de résolution de problème nous comptons faire entrer ces démarches dans les pratiques reproductibles par les enseignants. S'ils les ont vécues, notre hypothèse est qu'ils auront plus de facilités à les considérer comme possible et les adopter.

Pour ces trois raisons, la situation *Concertum* a été introduite dans la programmation des enseignements de L1 pluridisciplinaire dans sa forme prévue dans cet article. La séance dure deux heures et les réponses des groupes (38 étudiants répartis en groupes de 3) sont collectées au tableau. On voit en Figure 2 que la diversité des procédures est comparable à celle des élèves.

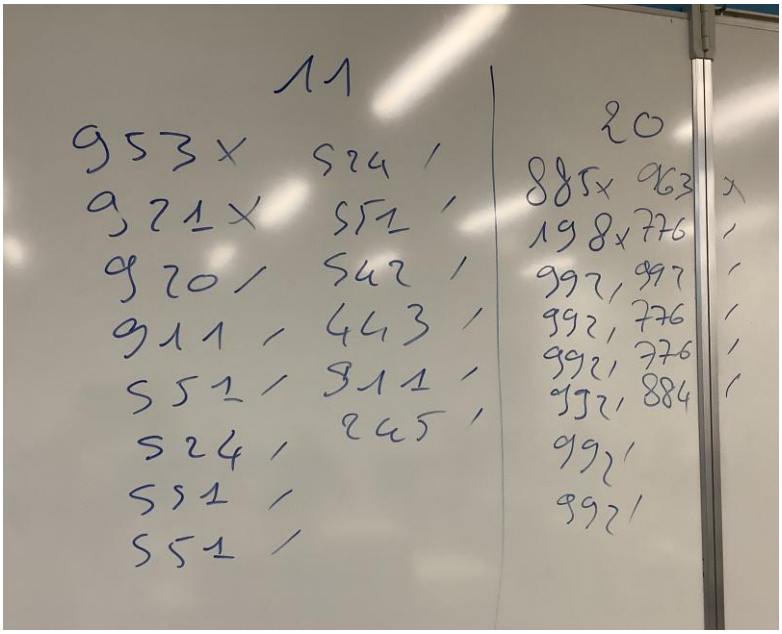


Figure 2 : Réponses des étudiants après la phase de découverte du problème pour les cibles 11 et 20

Lors de la phase de rédaction puis d'échange avec un autre groupe, plusieurs procédures apparaissent. Elles sont discutées publiquement. On voit sur la gauche de la Figure 3, que les procédures formulées en termes de « *si… alors…* » sont privilégiées par les étudiants. Enfin l'enseignant annonce que cette fois, toute la classe va jouer, ce jour-là à 38 et non plus à 3. La stratégie doit être écrite. Certains étudiants commencent à faire des cas… un ou deux groupes proposent la division euclidienne comme indiqué sur la droite de la Figure 3. Dans cette situation, c'est le passage d'un groupe de 3 à un groupe de 38 qui amène les étudiants à changer de procédure. Une étudiante qui n'avait pas identifié la division comme stratégie dit : « ha oui c'est le truc avec le q et le r qu'on avait au collège… » et les autres de reprendre pour se remémorer le lien entre ce qu'ils avaient vu au collège (et dont ils ne semblent avoir mémorisé que des aspects superficiels) et ce qui vient d'être vu.

En termes de bilan, l'enseignant ré-institutionnalise la division euclidienne.

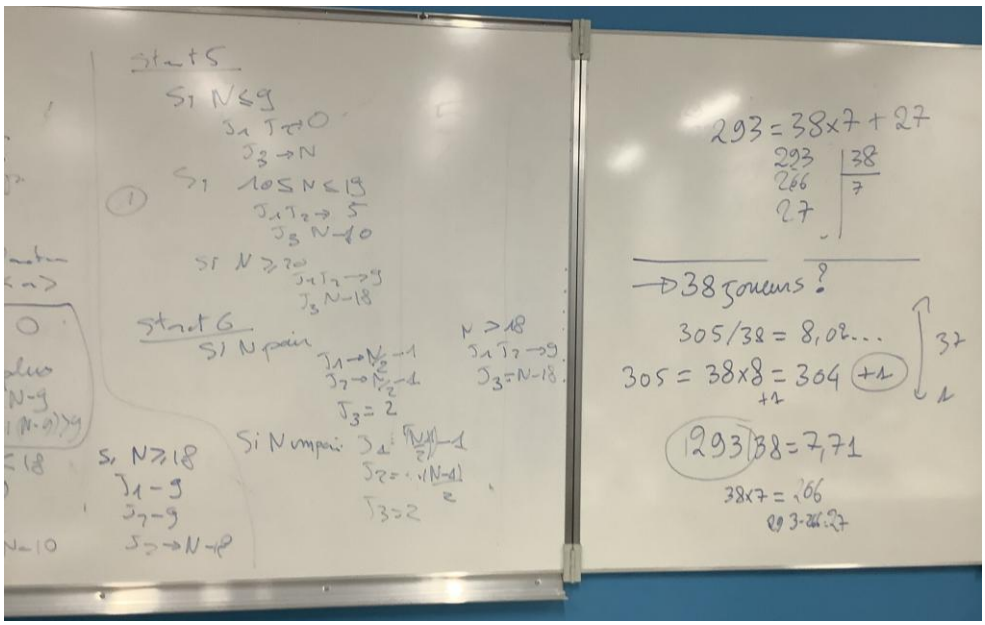


Figure 3 : photographie du tableau où sont inscrits la liste des procédures et le bilan de la mise en commun.

La mise en œuvre de cette situation nous permet donc d'institutionnaliser à nouveau des connaissances sur la division euclidienne.

Dans l'approche globale par les CAFM, il est trop tôt pour savoir si ces étudiants auront plus tendance à utiliser des situations d'apprentissage par résolution de problèmes que les autres mais nous avons pu re-tester leur rapport aux mathématiques à la fin de la L1, de la L2 et de la L3 sachant que ce cours n'est dispensé qu'en L1 et que les autres cours sont des cours de mathématiques « classiques ». Les résultats montrent des améliorations significatives statistiquement dans leur sentiment de compétence, leur affect positif par rapport aux mathématiques ainsi que leur capacité à réguler leurs émotions quand il s'agit de mathématiques entre le début et la fin de la L1 (Emprin, 2024). Ces améliorations restent acquises en L2 et L3 mais ne progressent plus.

2 Vivre *Concertum* puis observer sa mise en œuvre dans une classe en L3

Nous avons proposé la situation *Concertum* deux années de suite dans le cadre d'un module de préprofessionnalisation pluridisciplinaire en L3, en travaillant en deux temps :

- Un temps de mise en situation des étudiants, inclus dans une séance de deux heures, se déroulant comme dans les trois phases de mise en situation de l'atelier ;
- Un temps d'observation dans une classe de CM2, pendant lequel chaque étudiant ou binôme d'étudiants est chargé de l'observation d'un trinôme d'élèves de CM2 pendant la mise en œuvre des phases 1 et 2 (durant environ une heure), suivi d'un temps d'analyse (durant environ deux heures).

Lors de l'atelier 2025, nous avons partagé des traces de deux écrits réflexifs rédigés par des étudiants qui ont choisi de revenir sur ces deux séances :

> *J'ai apprécié le jeu qui consiste à donner un nombre à partir de l'addition de trois chiffres donnés. Pour quelqu'un de relativement réservée, j'aurais apprécié plus d'exercices de ce type durant ma scolarité puisque que c'est une manière idéale pour moi d'à la fois dialoguer et apprendre en collectif. Durant la séance, on a réfléchi par groupe de trois à une manière d'obtenir le numéro donné par le professeur en donnant chacun un chiffre. Par exemple, avec le numéro 12, nous devions trouver l'addition qui englobait les chiffres choisis par les trois participants, tout cela sans communiquer entre nous. En tenant compte d'une stratégie réfléchie au préalable, chacun avait un rôle qui permettait d'avoir le bon résultat. Pour notre part, nous avions choisi ensemble que deux personnes devraient montrer le même chiffre et que la*

dernière personne devrait montrer le chiffre qui manquait à l'opération : 12 ($6 + 6 + 0$). J'ai apprécié cet exercice ludique car contrairement à d'autres exercices, ce jeu permet à tout le monde de participer, de réévaluer la méthode ensemble si elle ne fonctionne pas, selon les difficultés de chacun. C'est un moyen de travailler en collectif mais aussi individuellement car cela demande une réflexion individuelle tout en respectant la stratégie choisie (afin de donner le bon chiffre). Cependant, nous avons vu ensemble le rôle de l'enseignant dans ce genre d'exercices : il doit veiller à ce qu'aucun élève ne soit mis à l'écart, éviter les faux leaderships en instaurant par exemple des rôles tournants (porte-parole, médiateur, garant du temps etc.)

Les élèves devaient résoudre des problèmes mobilisant des opérations (additions, soustractions, multiplications). Là encore, j'ai vu combien le travail en groupe, l'entraide, l'échange de stratégies étaient efficaces. Ils apprenaient de leurs erreurs, se corrigeaient mutuellement, s'encourageaient et se dépassaient. Le lien avec les contenus du cours m'a paru évident : on y trouve la dimension sociale de l'apprentissage, la place du langage et la coopération.

Il nous semble que ces extraits illustrent des pistes d'exploitation que des participants aux ateliers 2024 et 2025 avaient envisagées : une situation pour « faire des mathématiques autrement » et changer le rapport parfois anxieux qu'entretiennent certains étudiants avec les mathématiques ; une situation pour se pencher sur des processus d'apprentissage chez les élèves.

Nous avons ensuite prolongé chaque année ces expérimentations par une suite, sans les étudiants, consistant à retourner dans la classe de CM2 et à retravailler les messages spontanément produits par les élèves, pour les faire évoluer à la fois du point de vue des raisonnements engagés et de la formulation de ces raisonnements. Ces expérimentations, fondées sur la mise à l'épreuve collective de certaines stratégies et sur une recherche collective de moyens pour les faire évoluer, suivies par un temps de travail en groupe de reprise du texte initial, n'ont pour l'instant été conduites qu'à une échelle très réduite (deux classes de CM2 d'une trentaine d'élèves). Elles nous paraissent cependant ouvrir des pistes d'exploitation de la situation *Concertum* aussi bien pour la formation des étudiants en Licence et pour un travail sur la division avec des élèves de CM2.

3 Vivre *Concertum* et découvrir des éléments de la TSD en M1

Dans le cadre de la formation en master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) la situation est proposée aux étudiants au second semestre de la première année. Après avoir vécu le scénario, tel que décrit dans ce compte-rendu d'atelier, différentes phases d'une situation sont présentées très succinctement aux étudiants en donnant uniquement les qualificatifs d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation.

Il leur est ensuite demandé d'identifier dans la situation vécue ce qui, selon eux, relève de telle ou telle phase. À partir de ce recueil de conceptions quasi-spontanées, on précise ce que recouvre, au sens de la TSD, les différentes phases. L'occasion est donc donnée de définir et mobiliser en acte, après avoir recueilli ces conceptions initiales, des éléments de didactique des mathématiques en initiant les étudiants à discerner, au-delà des actions à réaliser dans la situation d'enseignement, différentes phases et leurs finalités respectives.

C'est souvent pour eux la première rencontre avec un cadre qui leur permettra de guider *a priori* et d'analyser *a posteriori* des choix de situations d'enseignement.

Des productions recueillies en formation sont montrées en annexe 4. Dans la production de la figure 4, l'étudiant manifeste sa prise de conscience de l'importance de variables (didactiques) pour faire évoluer les stratégies. De même dans la production de la figure 5, l'étudiant a perçu que des contraintes dans le dispositif conduisent à formuler des stratégies permettant de dépasser l'action.

Enfin la validation des stratégies soumises à l'épreuve des autres groupes telle qu'envisagée dans les figures 6 et 7 conduit à envisager « l'institutionnalisation [qui] produit la reconnaissance du savoir comme un élément échangeable entre élèves [étudiants ici]. » (Brousseau, 1984)

Ce travail d'analyse didactique à partir d'une situation vécue nous semble porteur de sens pour de futurs enseignants.

Il peut aussi être mené à d'autres moments de la formation après des apports magistraux en amont en questionnant par exemple la situation de la sorte :

- *Quel type de situation est-ce (au sens de la théorie des situations didactiques) ? Quelles sont les phases présentes (de la théorie des situations didactiques) ?*
- *Variables didactiques ? Évolution des valeurs ?*
- *Analyse dans le cadre de la dialectique outil-objet.*
- *Situation a-didactique ?*
- *Comment a été réalisée la dévolution ?*

4 Vivre *Concertum* et l'analyser en prenant appui sur des éléments de la TSD en UE recherche

En master MEEF 1er degré, dans le cadre d'une option de l'UE recherche, il est proposé une initiation aux concepts de didactique des mathématiques (les étudiants choisissent parmi plusieurs options, leur sujet de mémoire peut être dans d'autres domaines que les sciences). La TSD, en particulier les notions de dialectique de l'action, de la formulation, de la validation et de l'institutionnalisation, est introduite à partir de l'analyse d'une situation permettant de mettre en évidence la règle de conservation des écarts : « on ne change pas une différence si on ajoute le même terme à chaque terme de la différence » (situation issue de Oyallon, (2003)). Les notions de milieu didactique, de situation fondamentale, de situation adidactique, de dévolution sont introduites. Un approfondissement sur les notions de variables didactiques et d'institutionnalisation introduites dans une autre UE est aussi effectué. La situation « Concertum » est proposée lors d'une séance vers la fin de l'UE de façon à continuer à s'approprier ces concepts et en vue de préparer à l'évaluation (consistant en une analyse de documents comprenant une situation de classe en utilisant les outils des théories didactiques introduites). Lors de l'ensemble des séances d'autres concepts de didactique sont introduits : organisation praxéologique (théorie anthropologique du didactique), transposition didactique, dialectique outil-objet.

Lors de la séance, la première partie consiste à faire vivre la situation aux étudiants. La seconde partie consiste en l'analyse de la situation en posant les mêmes questions que celles que nous avons recensées dans le paragraphe précédent (exploitation en M1, après des apports magistraux).

Une mise en commun des réponses est réalisée, avec un retour sur la dialectique de l'action, de la formulation, de la validation.

VI - CONCLUSION

Les échanges entre participants lors des deux ateliers proposés aux colloques de 2024 et 2025 nous confortent dans l'idée que la situation *Concertum* recèle des potentialités certaines pour la formation en mathématiques des professeurs des écoles : elle permet d'aborder aussi bien des éléments disciplinaires (en lien avec la division) que didactiques (en lien avec des composantes de la Théorie des Situations Didactiques).

Cependant, à propos des situations élaborées et expérimentées au COREM, Brousseau écrivait :

> *La plupart de ces situations ne sont pas des modèles à reproduire dans les classes. En effet il n'est pas nécessaire de satisfaire toutes les conditions énumérées ci-dessus dans chaque leçon. Ce serait une perte de temps et d'efforts considérable. Les questions, les exercices, les problèmes classiques,*

> *etc. apparaissent comme des situations particulières de celles-ci, déduites et simplifiées par des « économies » qui les rendent pratiques. Les modèles de situations permettent par conséquent d'analyser les effets de ces économies systématiques.* (Brousseau, 2005).

La confrontation réalisée pendant l'atelier entre, d'une part, des textes de chercheurs ayant contribué au développement ou à la diffusion de la TSD et, d'autre part, des extraits de ressources institutionnelles et des témoignages de formateurs, montre que la question de la transposition en formation d'éléments issus de la recherche en didactique des mathématiques demeure une question complexe.

Pour clore ce compte-rendu, nous revenons sur les potentialités de la situation de formation : l'apparition dans les programmes 2025 de l'enseignement de la pensée algébrique nous a conduits à analyser des productions des formés pour les mettre en lien avec les savoirs à enseigner dans ce domaine. Nous livrons en annexe 5, à titre exploratoire, nos premières pistes d'exploitation de la situation *Concertum*.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Barrantes, M. et Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(5), 411-436.

Briand, J. (1997). *La didactique des mathématiques au service de la professionnalisation des enseignants.* Les cahiers du Formateur. T. 1. Documents pour la formation du professeur en didactique des mathématiques. En ligne : https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO99002.pdf

Brousseau, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. Dans *Recueil de textes et comptes rendus ; III^e école d'été de didactique des mathématiques* 2-13 juillet 1984 ; Olivet (Orléans).

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *Bulletin vert de l'APMEP*, *457*. En ligne : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA05021.pdf

Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2022). *Construire une expertise pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Outils du formateur, tome 2*. Paris : ARPEME.

COPIRELEM (2003). *Carnets de route de la COPIRELEM. Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* Paris : ARPEME.

Davis, B. et Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics : broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 245-265.

Emprin, F. (2024). Connaissances mathématiques pour enseigner au premier degré - analyse d'une proposition en première année de licence pluridisciplinaire -. *Grand N, 114*, 74-114.

Gairin-Calvo, S. (1987). Groupe A1 - Dans quelle mesure la didactique des mathématiques peut-elle devenir un objet d'enseignement en formation initiale ? Dans *Actes du XIV^e colloque Inter-IREM des PEN à Angers* (71 – 94).
En ligne : https://www.copirelem.fr/wordpress/wp-content/uploads/2024/05/1987_angers_brochure.pdf

Groupe Jeux (1985). *Jeux 2*. Paris : APMEP.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Outils du formateur, tome 1*. Paris : ARPEME.Khattab, Y.-R. (2020). *Influence of school memories on practicing mathematics teachers' teaching of algebra* [Doctoral dissertation]. Beyrouth : American University of Beirut.

ICMI (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion document for an ICMI study. Dans C. Mammana & V. Villani (éds*), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI Study* (pp. 337-345). Kluwer AcademicPublisher.

Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères IREM*, *61*. En ligne : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr05018_1704822460959-pdf

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

MENJ (2023). *La construction du nombre en maternelle*. Collection Guides fondamentaux pour l'enseignement. Eduscol.

Oyallon, J.-L. (2003), Exemple d'une situation liée à la soustraction. Jeu des règles et bracelets. Dans COPIRELEM, *Carnets de route de la COPIRELEM - Concertum*, *Tome 2*. Paris : ARPEME.

Péault, H. et Butlen, D. (2003). La division en formation initiale. Concertum. Dans COPIRELEM, *Carnets de route de la COPIRELEM - Concertum*, *Tome 2*. ARPEME. En ligne : http://www.arpeme.fr/documents/4550F1F8545AFD6641A8.pdf

Polotskaia E. (dir.) (2020). *La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire.* Université du Québec en Outaouais. En ligne : https://elenapolotskaia.com/wp-content/uploads/2019/11/Annexe-IV-Guide-FR.pdf

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires.* Québec : Livres en ligne du CRIRES. En ligne : https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-0

Wozniak, F. (2020). Les problèmes de généralisation à l'école élémentaire. Une étude française. Dans Squalli et al., Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires.* Québec : Livres en ligne du CRIRES. Chapitre 2.

ANNEXE 1 - DÉCOMPOSITIONS OBTENUES PENDANT LA MISE EN SITUATION

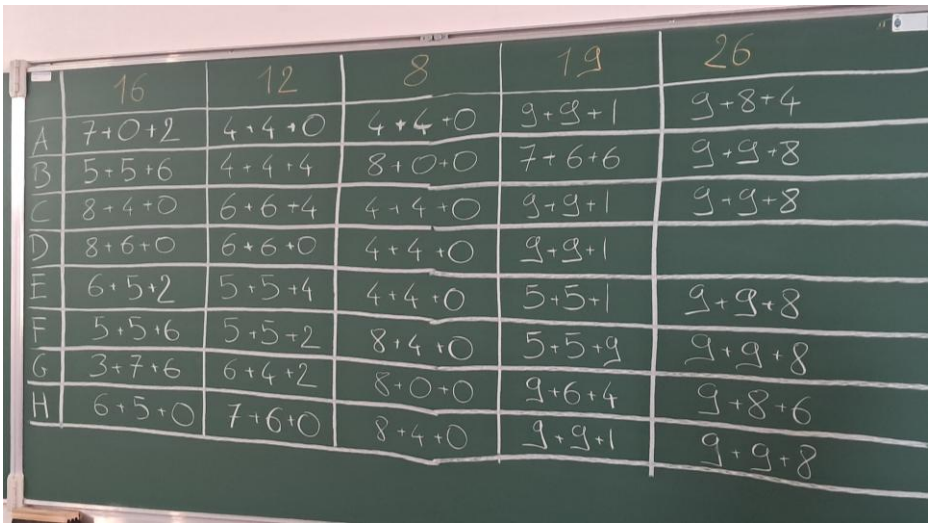
Pendant l'atelier 2024

	17	24	29	2	13	26
A	9+5+3	9+9+6		2+0+0	5+4+4	9+9+8
B	8+2+7	8+8+8		2+0+0	9+4+0	9+9+8
C	5+5+7	9+9+6		1+1+0	9+4+0	9+9+8
D	9+8+0	8+8+8	9+ ?	2+0+0	9+4+0	9+9+8
E	9+8+0	8+8+8		1+1+0	4+4+5	9+9+8
F	3+8+6	8+8+8	~~9+9+9+2~~	1+1+0	4+6+4	9+8+7
G	5+5+7	8+8+8		2+0+0	4+4+5	9+9+8
H	9+7+1	8+8+8		2+0+0	3+5+5	9+9+8
	12	**5**	**21**			
A (st. B)	9+3+0	5+0+0	9+9+3			
B (st. A)	4+4+4	2+1+1	7+7+7			
C (st. E)	4+4+4	2+4+1	7+7+7			
D (st. F)	4+4+4	3+2+1	7+7+7			
E (st. C)	9+3+0	5+0+0	9+9+3			
F (st. D)	9+3+0	5+0+0	9+9+3			
G (st. H)	5+5+2	5+0+0	9+9+3			
H (st. G)	4+4+4	3+1+1	7+7+7			

Pendant l'atelier 2025

	24	14	29	26	21	5
A	9+8+7	7+7+0	x	9+9+8	7+7+7	x
B	9+8+7	6+4+4	**x**	9+9+8	7+7+7	3+1+1
C	8+8+8	5+5+4	9+9+6 (24)	9+9+8	9+9+3	2+2+1
	16	**25**				
A (st B)	8+6+5	9+8+8				
B (st C)	6+5+5	9+9+7				
C (st A)	8+8+0	9+9+7				

En CM2



ANNEXE 2 – MESSAGES RECUEILLIS LORS DE LA PHASE 2

1 Utilisation de la division par 9

(Peault et Butlen, 2003)

C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient n = 9q + r. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.

Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes)

- *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0.*
- *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0 .*
- *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n-18.*

Pendant l'atelier 2024

Groupe D

- Si le nombre cible est inférieur ou égal à 9 :
  Joueur 1 affiche ce nombre n.
  Joueur 2 et Joueur 3 affichent 0.
- Si le nombre n est tel que $10 \leq n \leq 18$
  Joueur 1 affiche 9.
  Joueur 2 affiche n - 9
  Joueur 3 affiche 0.
- si $18 < n \leq 27$
  Joueur 1 et 2 affichent 9.
  Joueur 3 affiche n - 18.

Groupe B

On définit un ordre dans le groupe (Joueur 1 - Joueur 2 - Joueur 3)

Joueur 1 : lève le nbre cible (si entre 0 et 9) ou lève 9

Joueur 2 : lève 0 ou le complément au nombre cible (si entre 10 et 18)

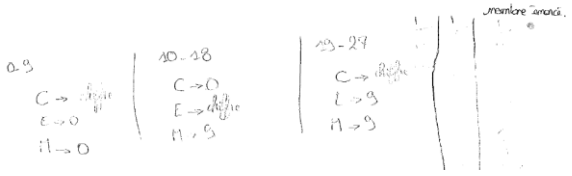
Joueur 3 : lève 0 ou le complément au nombre cible à partir de 18 (si nombre cible entre 19 et 27

Commentaire : type A :
stratégie additive qui nécessite de connaître les Tables d'addition.

Groupe C

A Personne 1	~~cible~~ 9	9	9
B Personne 2	0	cible - 9	9
C Personne 3	0	0	cible - 18
Cible	≤ 9	$9 < \text{cible} \leq 18$	~~< 18~~ $18 < \leq 27$

Message du groupe E

<table>
<tr>
<td>En formation initiale (M1)</td>
<td>Le joueur 1 lève la plus grande étiquette qu'il peut.
↳ Si le nombre est entre 0 et 9 : J_2 et J_3 laissent 0
↳ Si le nombre est entre 10 et 18
↳ J_1 lève 9
↳ J_2 lève la carte "nombre - 9"
↳ J_3 lève 0
↳ Si le nombre est entre 19 et 27
↳ J_1 lève 9
↳ J_2 lève 9
↳ J_3 lève la carte "nombre - 18"</td>
<td>Entre 0 et 9, Lisa et Emilie lèvent le 0 et Loane lève le chiffre correspondant au nombre énoncé.
Entre 10 et 18, Emilie lève le 9, Lisa complète avec l'étiquette correspondante telle que : 9+... = nombre énoncé. Loane lève le 0.
Entre 19 et 27, Lisa et Emilie lèvent le 9 et Loane complète avec l'étiquette correspondante telle que 9+9+... = nombre énoncé.
  </td>
</tr>
<tr>
<td>En CM2</td>
<td colspan="2">B La technique du neuf :

inférieure à neuf nombre : 8
1er joueur : carte 8
2ème joueur : carte 0
3ème joueur : carte 0

Supérieur à neuf inférieur à 18 : nombre : 14
1er joueur : carte 9
2ème joueur : carte 5
3ème joueur : carte 0

Supérieur à 18 : nombre : 20
1er joueur : carte 9
2ème joueur : carte 9
3ème joueur : carte 2</td>
</tr>
</table>

2 Utilisation de la division par 3

(Peault et Butlen, 2003)

On divise n par 3, ce qui donne n = 3q + r.

Si r = 0, chaque joueur joue q ; si r = 1, deux joueurs jouent q et un autre q + 1 ; si r = 2, un joueur joue q et les deux autres q + 1.

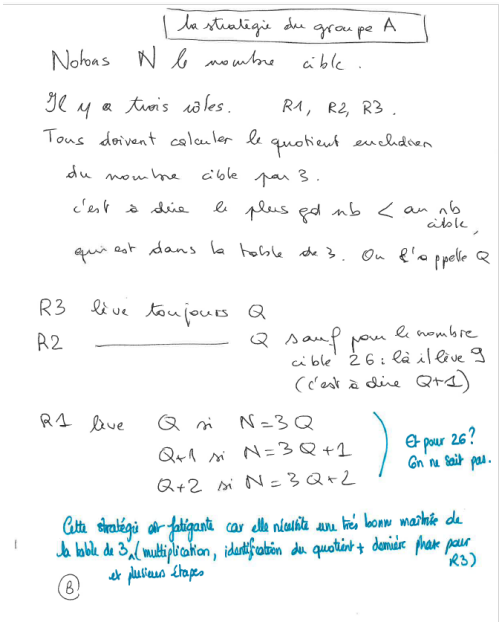
Il arrive assez fréquemment, lorsque cette procédure est retenue, qu'un seul joueur soit chargé des "correctifs" et doive donc jouer q + 1 si r = 1, mais q + 2 si r = 2, les autres jouant tous deux q. Il est utile pour le professeur d'identifier cette forme car elle marche toujours, sauf pour n = 26.

Cette procédure est elle aussi généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, on fait la division euclidienne de n par k, ce qui donne n = kq + r. Les r premiers joueurs jouent q + 1 et les autres q. Le nombre p n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres possibles.

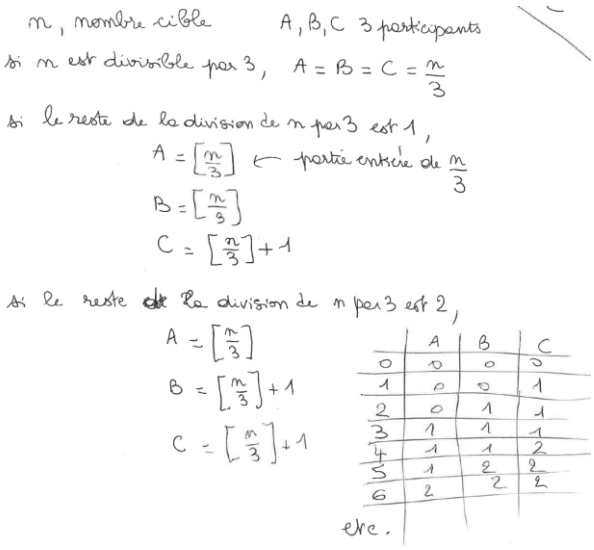
Là encore, la plus grande difficulté d'utiliser cette procédure généralisée vient de la nécessité de numéroter les joueurs.

Pendant l'atelier 2024

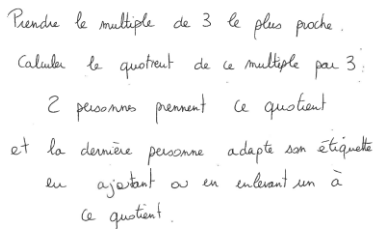
Groupe A



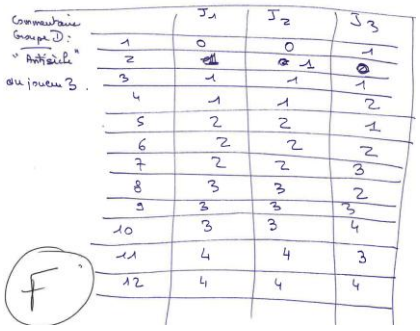
Groupe E



Groupe F



Groupe G

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


</td>
<td>
Stratégie Groupe G
~~Pour les nbres inférieurs~~ $\forall x \in [\![0;27]\!] \setminus \{26\}$ *
1- Diviser x par 3
Joueur 1 : quotient
Joueur 2 : quotient
Joueur 3 : quotient+reste .

2_Pour 26
Diviser x par 3
Joueur 1 : quotient
Joueur 2 : 9
Joueur 3 : 9

*Pour tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à 27, sauf 26.
</td>
</tr>
<tr>
<td>En formation initiale (PES)</td>
<td colspan="2">
• Diviser par 3 le multiple inf (de 3) le plus proche du nb donné.
Ce nb est pris par (a) et (b), le (c) ajuste de 1 ou 2.
(a) (b) (c)
ex: 22 → 7 7 8
le multiple de 3 inf = 21 ; 21 : 3 = 7
a et b = 7
c = 8 (ajuste) = 7+1

Excepté :
• sauf dans le cas de 26 où : (a) (b) (c)
9 9 8

• Pour les inf à 3 : (a) (b) (c)
(soit 1 ou 2) 0 0 2
ou 1.
</td>
</tr>
<tr>
<td>En CM2</td>
<td colspan="2">
Si le nombre cible est un multiple de 3, les trois membres du groupe lèves le même chiffre.
Si le nombre cible n'en est pas un, deux membre du groupe doivent lever le même chiffre (le plus gros possible), le dernier complète (choisissez au préalable les rôle)
</td>
</tr>
</table>

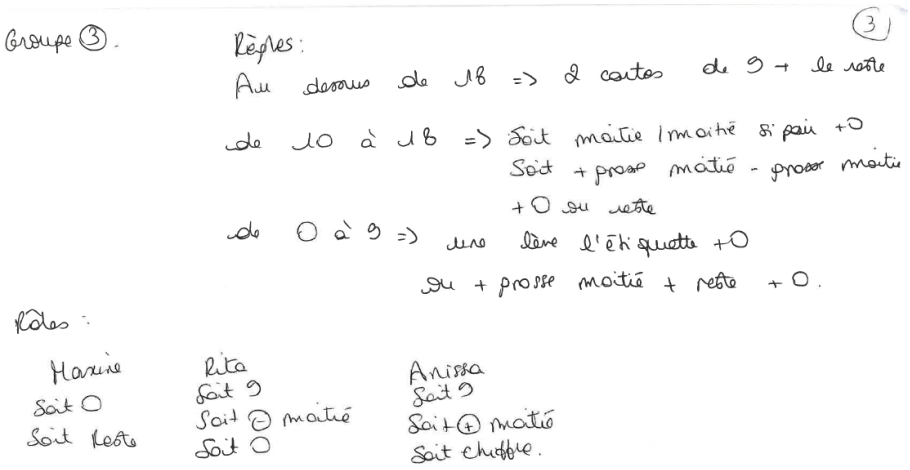
3 Autres procédures

Utilisation de la parité

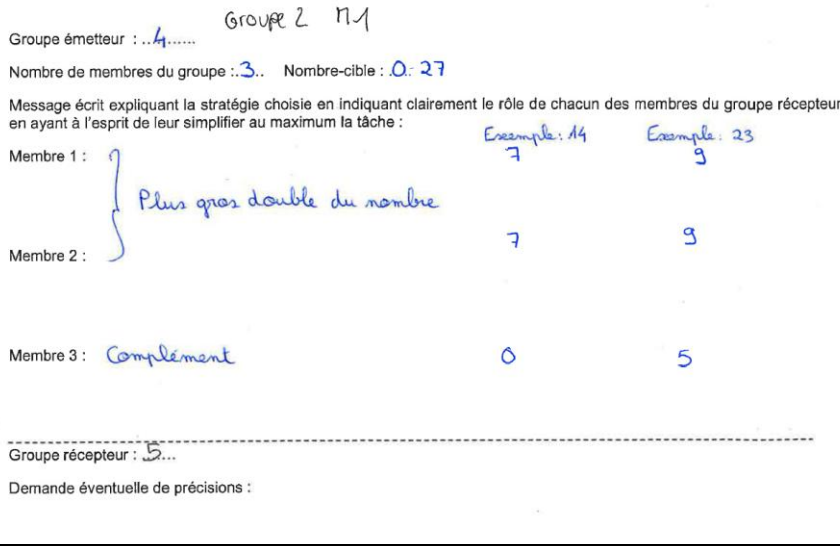
(Peault et Butlen, 2003)

> Diverses autres procédures peuvent apparaître, plus ou moins difficiles à généraliser. Par exemple :
>
> ***a) utilisation de la parité***
>
> - si $n \leq 18$
>
> si n est pair, A et B jouent n/2, C joue 0.
> si n est impair, A et B jouent (n - 1)/2, C joue 1.
> - si $n > 18$
>
> A et B jouent 9 et C complète.

En formation initiale (L3)



En formation initiale (M1)



En formation initiale (PES)	Les deux premiers membres affichent deux fois le même chiffre et le troisième complète. Plus grand multiple de 2 possible le troisième ajoute le reste.	→ 2 joueurs jouent toujours les 2 mêmes cartes en se rapprochant le plus possible du nombre demandé, sans jamais le dépasser. (6) → le 3ème joueur complète, si le nombre demandé est divisible par 2 et situé en-dessous de 18 (et pair), alors le 3ème joueur joue 0. → si le nombre demandé est 1, les deux joueurs qui jouent les doubles affichent 0, le 3ème joueur affiche 1 Exemple :
En CM2	Léa et aya mettent le même chiffre et stan complète. Léa, Aya, Stan équipe D ex 26 : Aya Léa Stane 9 + 9 + 8 Quand c'est plus de 18 les Filles mettent 9 et Stane mais le reste 9 + 9 + ? Et si c'est moins de 18 on mais toute les deux le même chiffre si c'est paire. ex 8 : Aya Léa Stane 4 + 4 + 0 Et si c'est impaire il m'est 1. ex 15 : Aya Léa Stane 7 + 7 + 1	

Délimitation de tranches autonomes

(Peault et Butlen, 2003)

> ***b) délimitation de tranches autonomes***
>
> La procédure ci-dessus peut être considérée comme un cas particulier de cette catégorie. Elle consiste à découper l'intervalle [0 ; 27] en sous-intervalles et à définir une règle sur chacun de ces sous-intervalles, ces règles pouvant être sans rapport entre elles.
>
> Très souvent, les intervalles choisis sont liés à la numération et on trouve fréquemment une règle pour les nombres inférieurs à 10, une autre pour les nombres de 10 à 20 et une troisième au-delà de 20.

Pendant l'atelier 2024

Si le nombre cible est entre 0 et 9 inclus
deux personnes désignées à l'avance lèvent [0]
la 3e personne lève le nbre cible

Si le nombre cible est entre 10 et 19 inclus
deux personnes désignées à l'avance lèvent [5]
la 3e personne lève l'étiquette portant le chiffre des unités du nombre cible

Si le nombre cible est entre 20 et 27
deux personnes désignées à l'avance lèvent [9]
la 3e personne lève l'étiquette correspondant au "nombre cible moins 18".

Pour le joueur "complémer"
entre 0 et 9 lever le nb
entre 10 et 19 lever les unités
entre 20 et 27 lever les unités + 2
(ajout soustraction) → moins rapide
} ambidextre groupe 6.

En formation initiale (M1)

M1 groupe 2.

Groupe émetteur : 5

Nombre de membres du groupe : 3 Nombre-cible : 0 à 27

Message écrit expliquant la stratégie choisie en indiquant clairement le rôle de chacun des membres du groupe récepteur en ayant à l'esprit de leur simplifier au maximum la tâche :

Membre 1 : Si le nombre-cible est entre 0 et 9 → choisir le 0
Si le nombre est entre 10 et 19 → choisir le 5
Si le nombre est entre 20 et 27 → choisir le 9

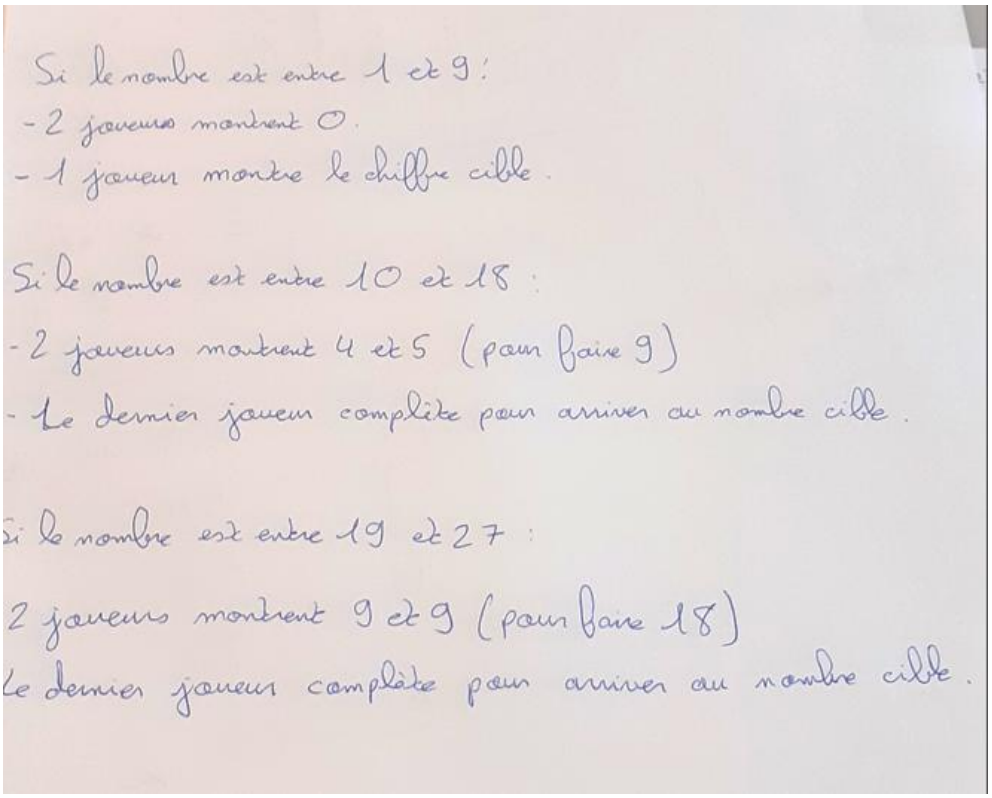
Membre 2 : Si le nombre cible est entre 0 et 9 → choisir le 0
Si le nombre est entre 10 et 19 → choisir le 5
Si le nombre est entre 20 et 27 → choisir le 9

Membre 3 : Si le nombre cible est entre 0 et 9 → choisir ce nombre
Si le nombre est entre 10 et 19 → choisir le chiffre des unités du nombre
Si le nombre est entre 20 et 27 → choisir le complément (exemple 21 = 9+9+3)

Groupe récepteur : 6

Demande éventuelle de précisions :

En formation initiale (L3)

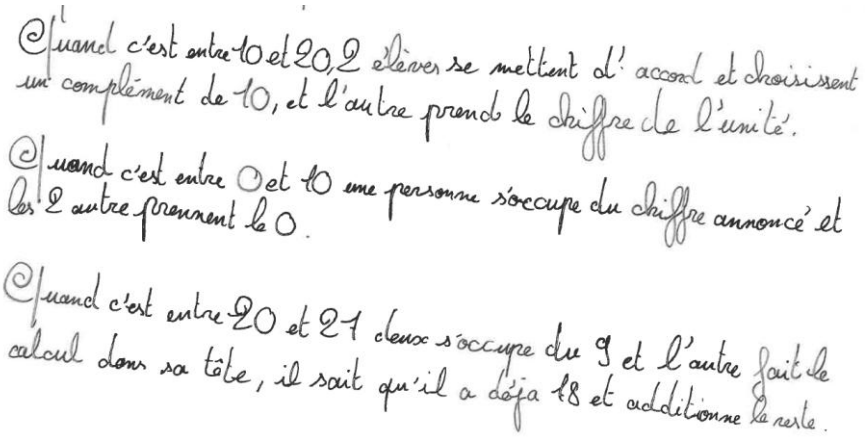


Si le nombre est entre 1 et 9 :
- 2 joueurs montrent 0.
- 1 joueur montre le chiffre cible.

Si le nombre est entre 10 et 18 :
- 2 joueurs montrent 4 et 5 (pour faire 9)
- Le dernier joueur complète pour arriver au nombre cible.

Si le nombre est entre 19 et 27 :
2 joueurs montrent 9 et 9 (pour faire 18)
Le dernier joueur complète pour arriver au nombre cible.

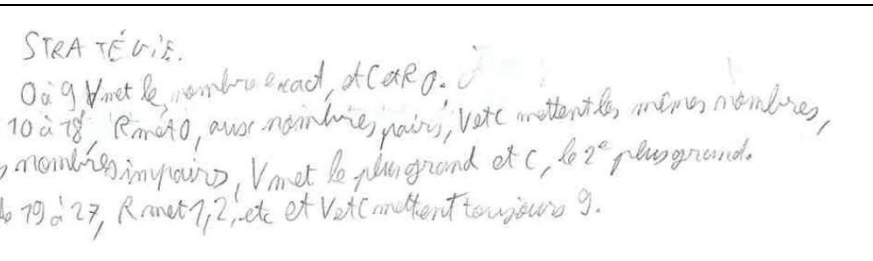
En CM2



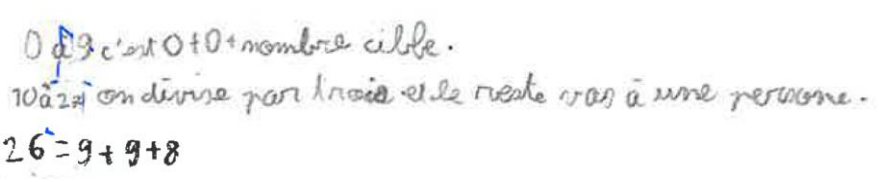
Quand c'est entre 10 et 20, 2 élèves se mettent d'accord et choisissent un complément de 10, et l'autre prend le chiffre de l'unité.

Quand c'est entre 0 et 10 une personne s'occupe du chiffre annoncé et les 2 autre prennent le 0.

Quand c'est entre 20 et 27 deux s'occupe du 9 et l'autre fait le calcul dans sa tête, il sait qu'il a déjà 18 et additionne le reste.



STRATÉGIE.
De 0 à 9 V met le nombre exact, et C et R 0.
De 10 à 18 R met 0, aux nombres pairs, V et C mettent les mêmes nombres, et les nombres impairs, V met le plus grand et C, le 2e plus grand.
Et de 19 à 27, R met 1, 2, etc et V et C mettent toujours 9.



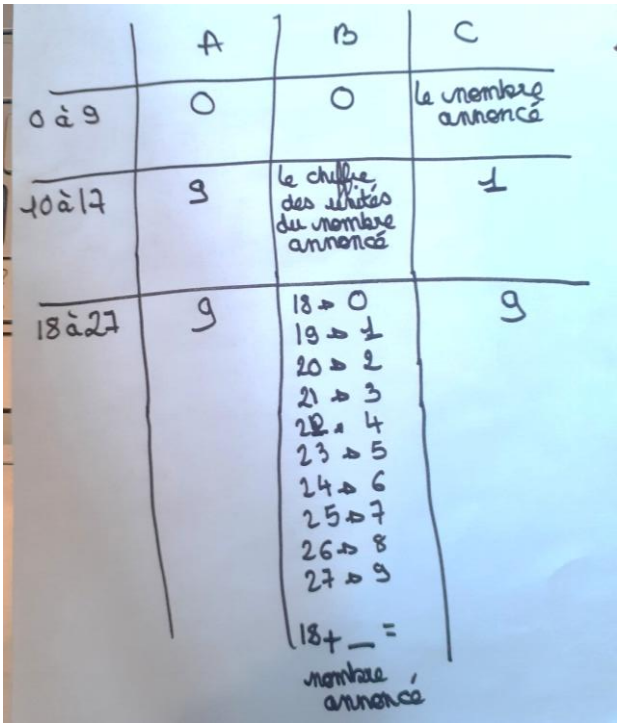
0 à 9 c'est 0+0+nombre cible.
10 à 27 on divise par trois et le reste va à une personne.
26 = 9+9+8

Constitution d'une table

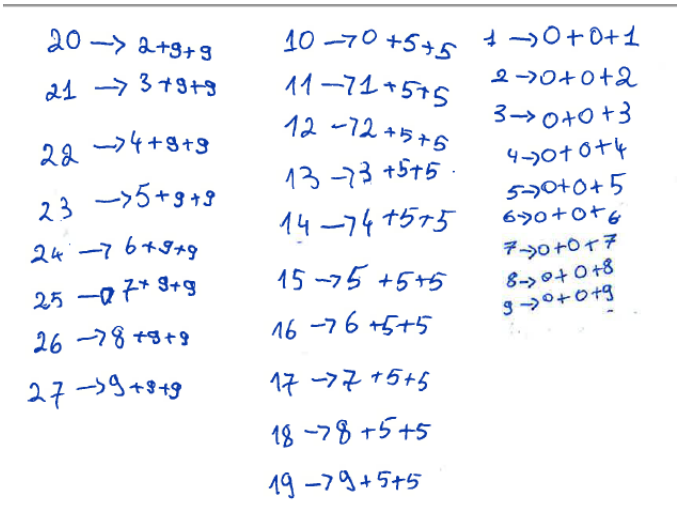
(Peault et Butlen, 2003)

> ***c) Constitution d'une table***
>
> C'est encore un cas particulier du cas précédent. On envisage non seulement des intervalles, mais tous les nombres possibles et on définit le rôle de chaque joueur pour chacun d'eux. On pourrait imaginer des répartitions totalement arbitraires pour chaque nombre. En réalité les tables choisies sont souvent constituées entièrement ou partiellement à partir de l'une des deux premières procédures décrites. Mais celles-ci restent au départ implicites, l'explicitation pouvant se faire progressivement.

En formation initiale (PES)



En CM2



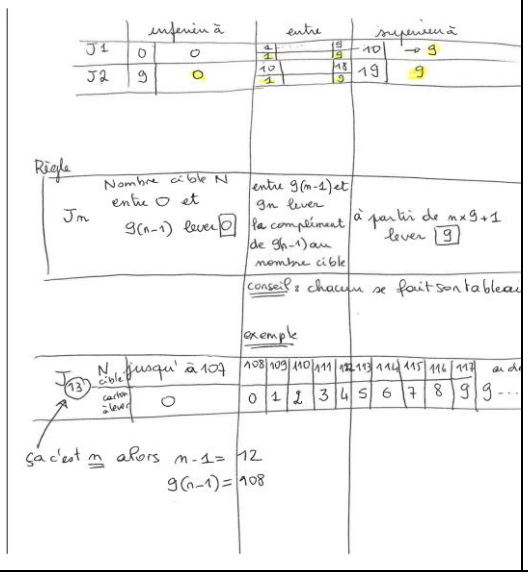
ANNEXE 3 – MESSAGES RECUEILLIS LORS DE LA PHASE 3

1 Utilisation de la division par 9

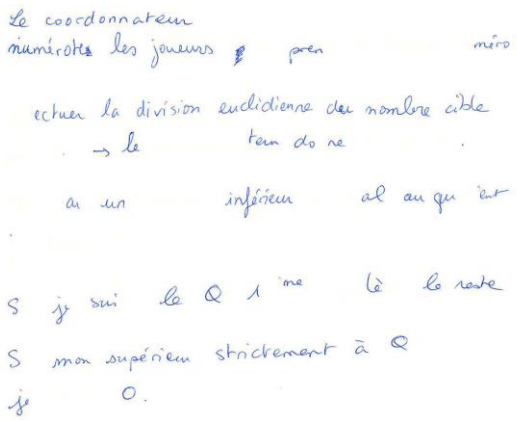
Pendant l'atelier 2024

(24 participants)

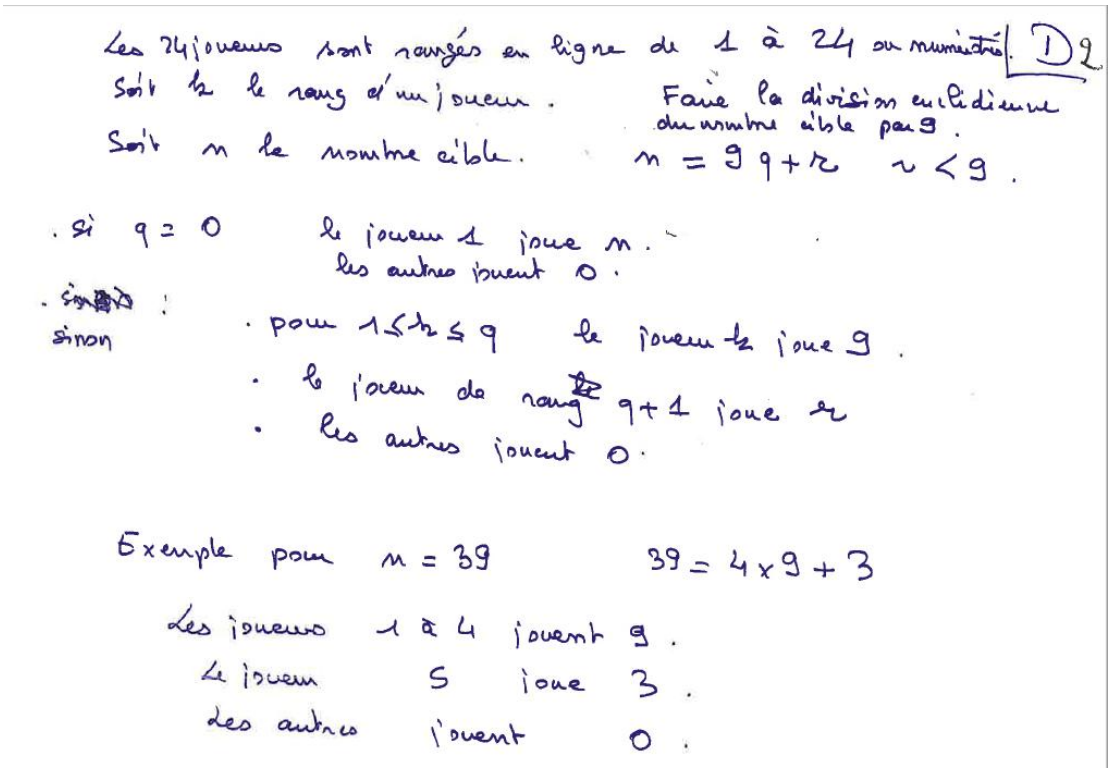
Groupe A (rappel : en phase 2, division par 3)



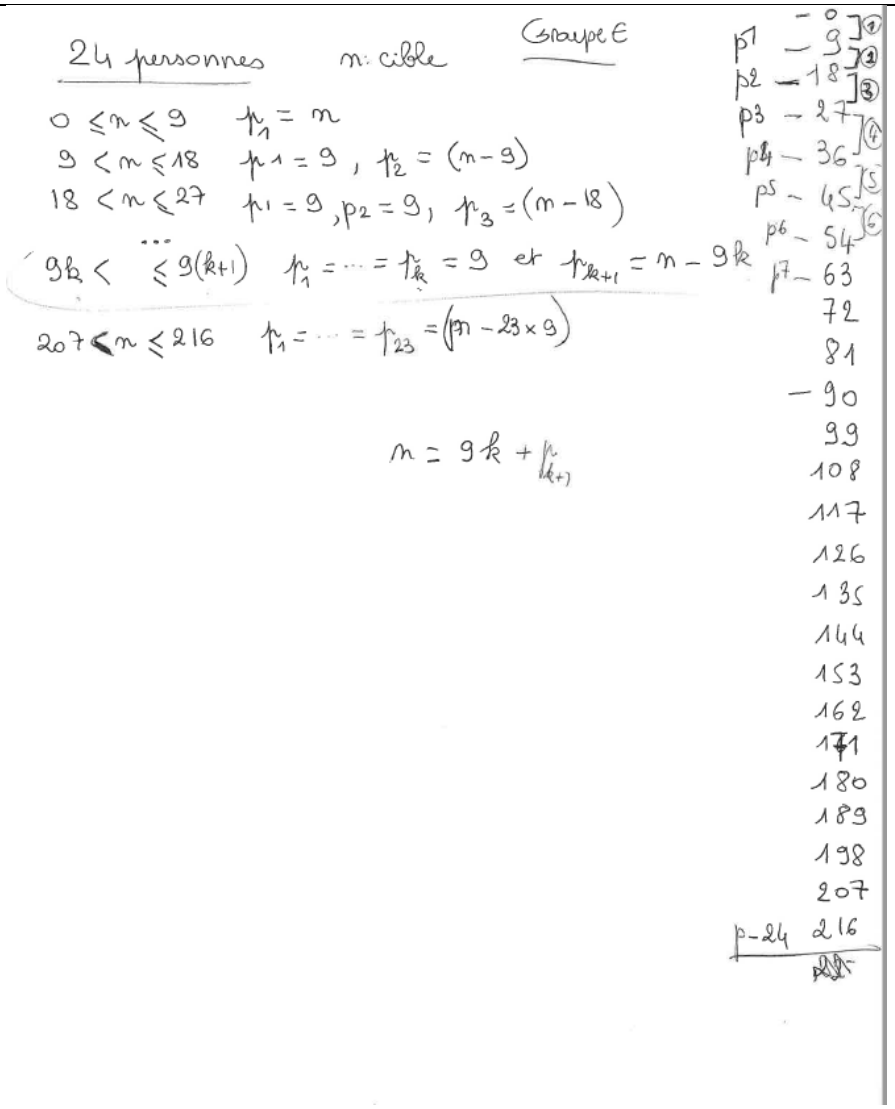
Groupe B (rappel : en phase 2, tranches de 9, sans recours au lexique de la division)



Groupe D (rappels : en phase 2, tranches de 9, sans recours au lexique de la division)



Groupe E (rappel : en phase 2, division par 3)



Groupe F (rappel : en phase 2, division par 3)

On attribut à chaque personne un numéro.

On divise le nombre par 9.
(si < 90 table, si 9 < n < 180 enlevé 90 (> déjà 10 × 9), si (n > 180) enlevé 180.

Soit q le quotient : les q premières personnes prennent un 9.

la q+1ème personne prend le reste

les autres prennent 0.

Groupe G (rappel : en phase 2, division par 3)

Gp G

- Chacun effectue la division euclidienne du nombre choisi par 9 et retient le quotient sauf un participant désigné à l'avance qui retient le reste. (le maître du jeu)

- Chaque participant sauf le maître du jeu (nombres) se voit attribuer un rang par le maître du jeu et le retient

Lorsque le nombre est donné
Pour chaque participant sauf le maître du jeu
- Si le quotient de la division euclidienne du nombre par 9 est supérieur ou égal à son rang alors le participant lève l'étiquette 9
- Sinon il lève 0

- Le maître du jeu lève le reste.

Différenciation : Pour les élèves en difficulté : attribuer un rang facile

Le maître du jeu demande aux joueurs qui pense avoir des difficultés en calcul. Il commence par attribuer les rangs faciles à partir de 1
Puis il demande aux autres participants de lever le doigt et attribue un rang.

Une fois que chacun a un rang, le maître du jeu demande à chaque participant de multiplier son rang par 9 et retenir le résultat.
Pour chaque participant
Si le nombre choisi est supérieur à son résultat, il lève l'étiquette 9 sinon il lève l'étiquette 0
Le maître du jeu lève le reste : la différence entre la somme des doigts et le multiple de 9 inférieur à la somme.

En formation initiale (M1)

(21 participants)

Groupe émetteur : M1...G2

Nombre de membres du groupe : 21 Nombre-cible : 0 à 189

Message écrit expliquant la stratégie choisie en indiquant clairement le rôle de chacun des membres du groupe récepteur en ayant à l'esprit de leur simplifier au maximum la tâche :

Membre 1 : Soit n le nombre demandé.

On fait la division euclidienne de n par 9. $n = q \times 9 + r$

Membre 2 : La (q+1)ème personne lève la carte n.

Les q premières lèvent 9. Les autres lèvent 0.

Membre 3 :

ect... membre 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21

Groupe récepteur : .....

En formation initiale (L3)

(11 participants)

	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11
<9	nombre annoncé	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 < 19	9	1	chiffre des unités du nombre	0	0	0	0	0	0	0	0
20 < 29	9	9	2	chiffre des unités du nombre	0	0	0	0	0	0	0
30 < 39	9	9	9	3	chiffre des unités du nombre	0	0	0	0	0	0
40 < 49	9	9	9	9	4	0	0	0	0	0	0
50 < 59	9	9	9	9	9	5	0	0	0	0	0
60 < 69	9	9	9	9	9	9	6	0	0	0	0
70 < 79	9	9	9	9	9	9	9	7	0	0	0
80 < 89	9	9	9	9	9	9	9	9	8	0	0
90 < 99	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0

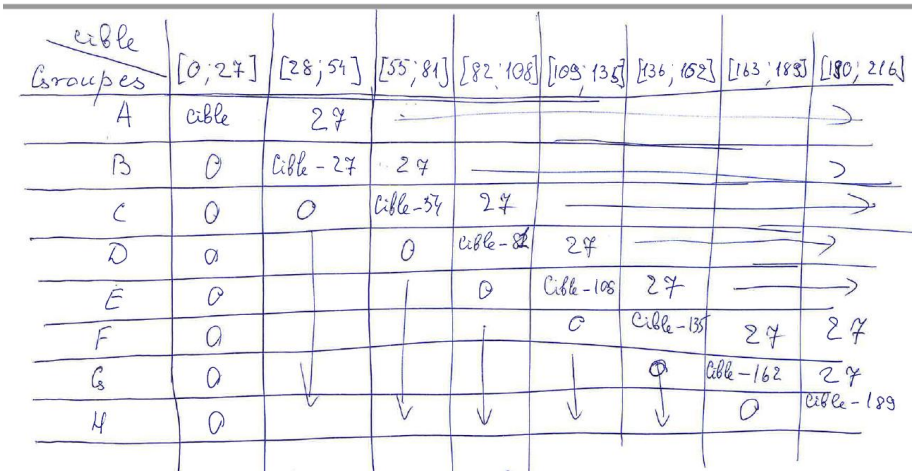
Groupe C

2 Autres procédures

Pendant l'atelier 2024

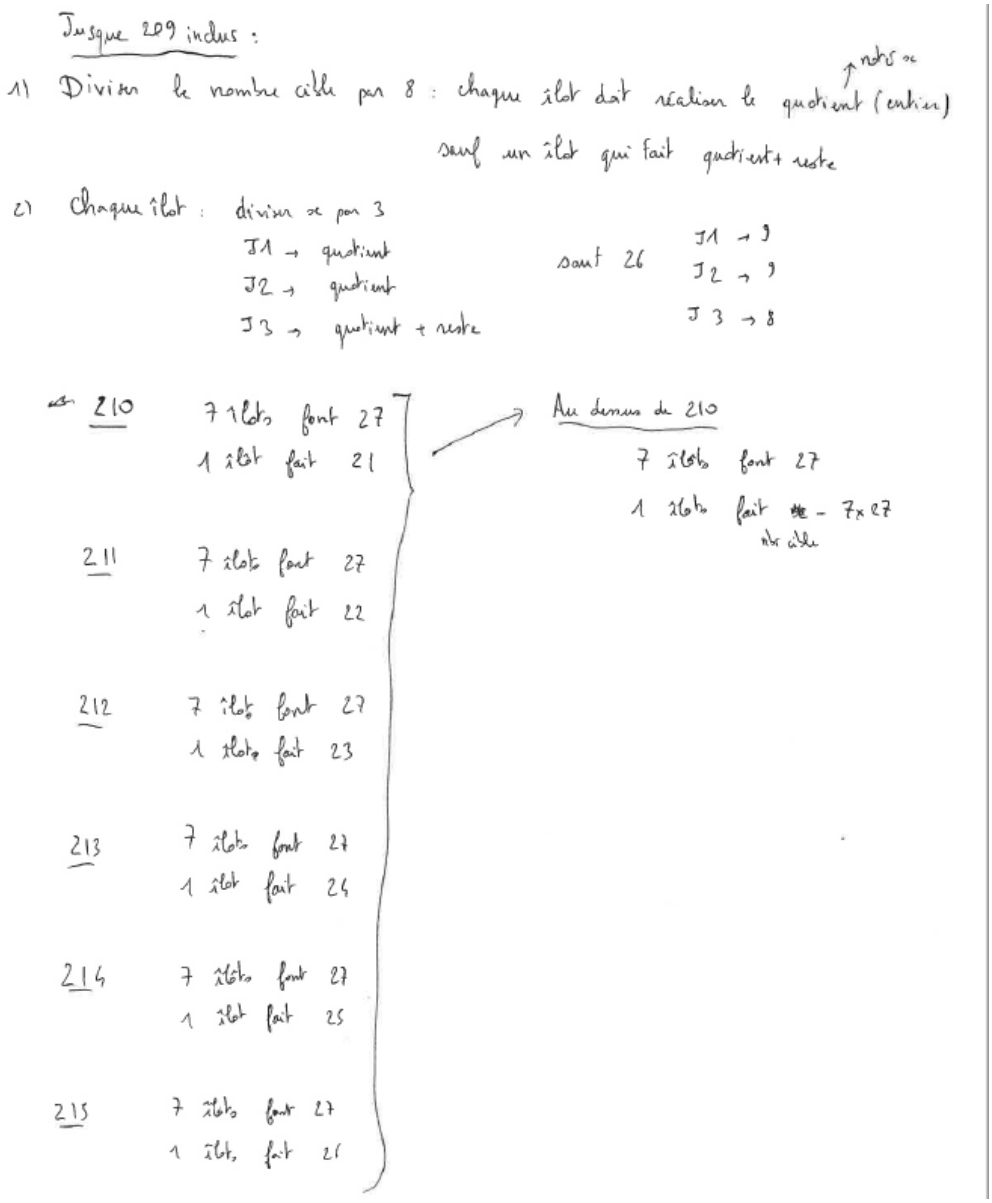
(24 participants)

Groupe C



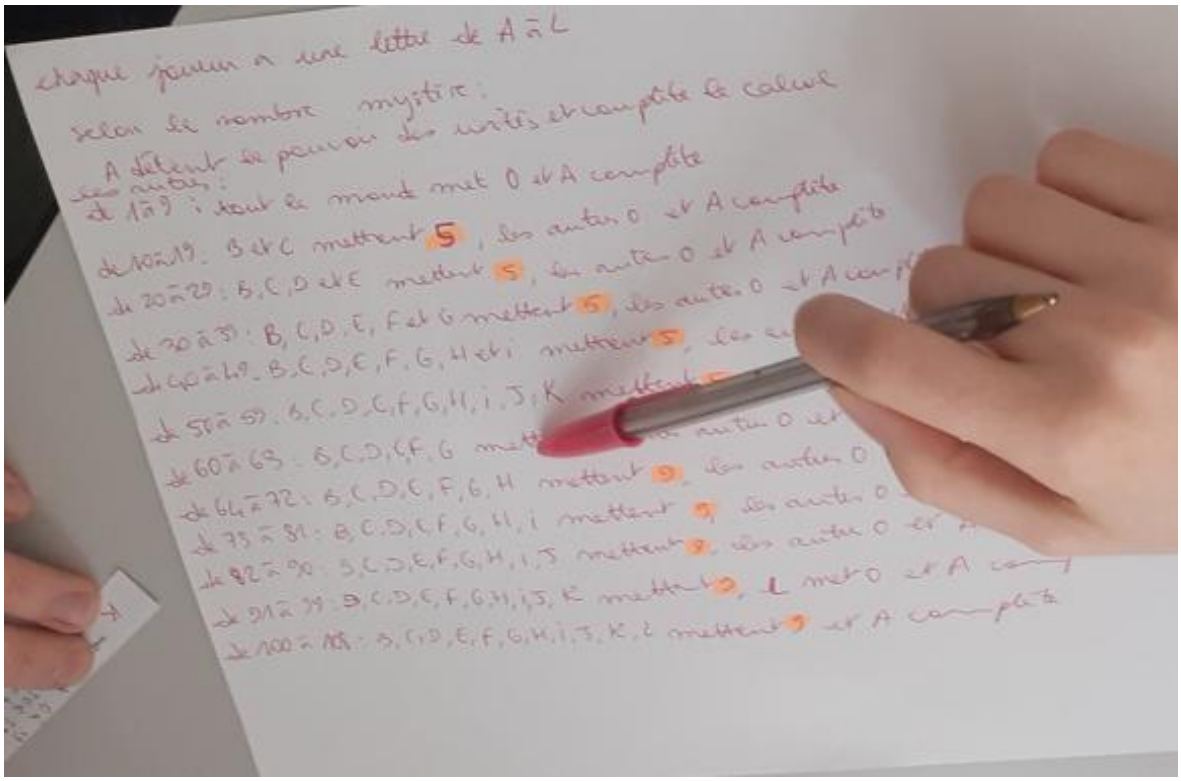
Groupes \ cible	[0 ; 27]	[28 ; 54]	[55 ; 81]	[82 ; 108]	[109 ; 135]	[136 ; 162]	[163 ; 189]	[190 ; 216]
A	cible	27	→	→	→	→	→	→
B	0	cible - 27	27	→	→	→	→	→
C	0	0	cible - 54	27	→	→	→	→
D	0	↓	0	cible - 82	27	→	→	→
E	0	↓	↓	0	cible - 108	27	→	→
F	0	↓	↓	↓	0	cible - 135	27	27
G	0	↓	↓	↓	↓	0	cible - 162	27
H	0	↓	↓	↓	↓	↓	0	cible - 189

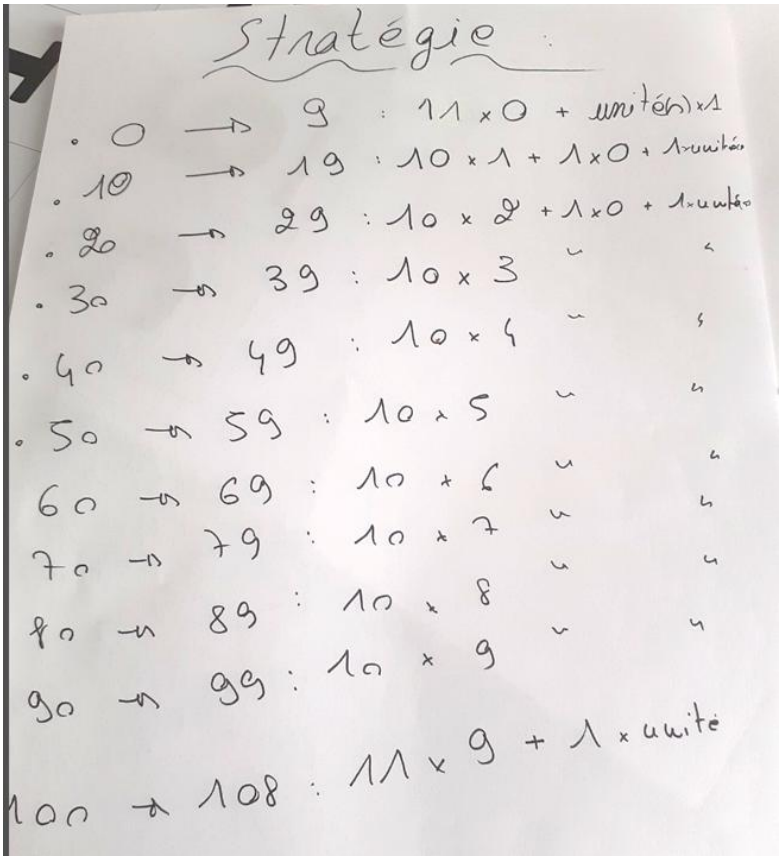
Groupe H



En formation initiale (L3)

(11 participants)





ANNEXE 4 – PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS DE M1

Guy Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) distingue les phases d'**action**, de **formulation**, de **validation** et d'**institutionnalisation**.

Dans la situation vécue, qu'identifiez-vous comme relevant de telle ou telle phase ?

Phase	Identification et description du vécu en situation
Action	Jouer sans s'échanger de stratégie Evolution des contraintes (sans parler, sans regarder) afin de faire émerger des stratégies.
Formulation	Ecrit sur papier de la stratégie mise en place par le groupe
Validation	test des stratégies des autres équipes
Institutionnalisation	Ecrit avec usage de lettre de la stratégie commune (universalisation). Aborder la notion de division euclidienne (partition, quotition) → reste + quotient.

Figure 4. Identification de variables de la situation : les types de communication

Guy Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) distingue les phases d'**action**, de **formulation**, de **validation** et d'**institutionnalisation**.

Dans la situation vécue, qu'identifiez-vous comme relevant de telle ou telle phase ?

Phase	Identification et description du vécu en situation
Action	→ phase 1 : calcul « simple » sans stratégie → tester stratégie
Formulation	→ formulation à l'oral d'une stratégie (phase 2 et 3) → rédaction de la stratégie de groupe → rédaction au tableau pour toute la classe
Validation	→ tester stratégie en groupe de 3 (après l'avoir formuler à l'oral) → donner notre stratégie aux autres pour la tester → essayer en classe entière
Institutionnalisation	→ bilan après avoir tester les stratégies.

Figure 5. Identification de dispositif conduisant à formuler des stratégies

Guy Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) distingue les phases d'**action**, de **formulation**, de **validation** et d'**institutionnalisation**.

Dans la situation vécue, qu'identifiez-vous comme relevant de telle ou telle phase ?

Phase	Identification et description du vécu en situation
Action	-> recherche de stratégies ↳ pour être le plus rapide ↳ pour arriver au bon résultat
Formulation	-> mise en commun de nos différentes stratégies -> différents écrits avec des stratégies identiques
Validation	-> présentation de nos stratégies à la classe -> échange des stratégies
Institutionnalisation	-> division euclidienne -> reste et quotient

Figure 6. Identification de connaissances disciplinaires à institutionnaliser

Guy Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) distingue les phases d'**action**, de **formulation**, de **validation** et d'**institutionnalisation**.

Dans la situation vécue, qu'identifiez-vous comme relevant de telle ou telle phase ?

Phase	Identification et description du vécu en situation
Action	Moment où on devait lever les nombres communication dans le groupe
Formulation	Explication à l'écrit de nos théories et stratégies
Validation	Mise en commun des différentes stratégies.
Institutionnalisation	Division partition et quotition

Figure 7. Identification de connaissances didactiques à institutionnaliser

ANNEXE 5 – DES PISTES D'EXPLOITATION EN LIEN AVEC L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE AU CYCLE 3

Les nouveaux programmes entrant en vigueur à la rentrée 2025 comportent de nouveaux (sous)-domaines qui conduisent à de nouvelles questions : peut-on envisager une autre exploitation de la situation *Concertum* ? Recèle-t-elle des potentialités du point de vue de la formation et ou l'enseignement de la « pensée algébrique » ?

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Squalli et al. (2020) et à celui de Polotskaia (2020) pour définir les composantes de cette pensée algébrique.

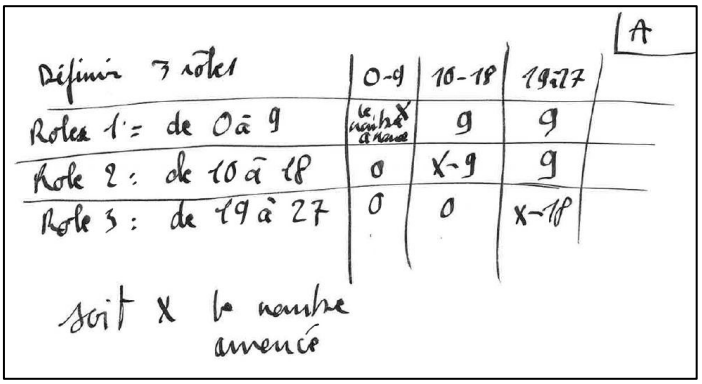
Avec cette nouvelle focale, nous identifions chez les concepteurs de la situation *Concertum* des formulations relevant de l'algèbre, comme dans l'extrait ci-dessous (Péault et Butlen, 2003) :

> **1) Utilisation de la division par 9**
>
> C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient n = 9q + r. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.
>
> Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes)
>
> - *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0.*
> - *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0 .*
> - *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n-18.*

Ce recours à l'algèbre provient de la nécessité d'exprimer une règle dans un cas général :

> *Il [Squalli] propose ainsi de considérer qu'[u]ne généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles.* (Wozniak, 2020, p. 348)

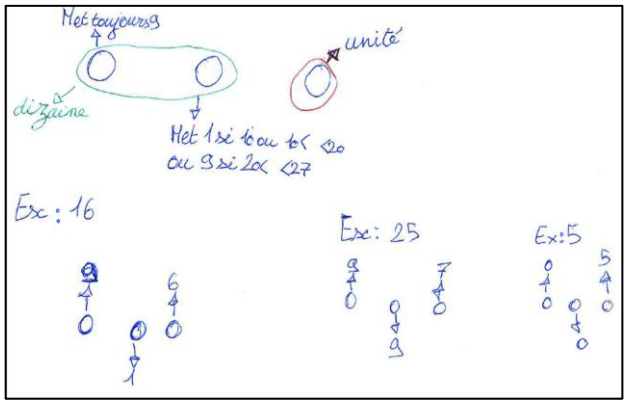
Dans la mise en œuvre de la situation *Concertum, o*n trouve ce recours à l'algèbre dans certains messages d'étudiants lorsqu'ils doivent formuler leur stratégie pour un autre groupe, comme dans l'exemple ci-dessous :

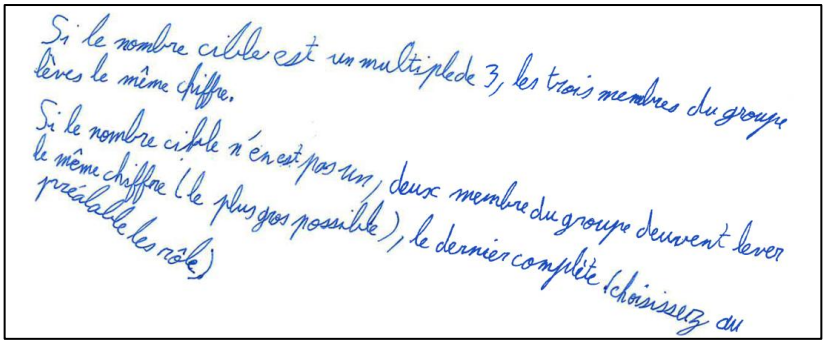


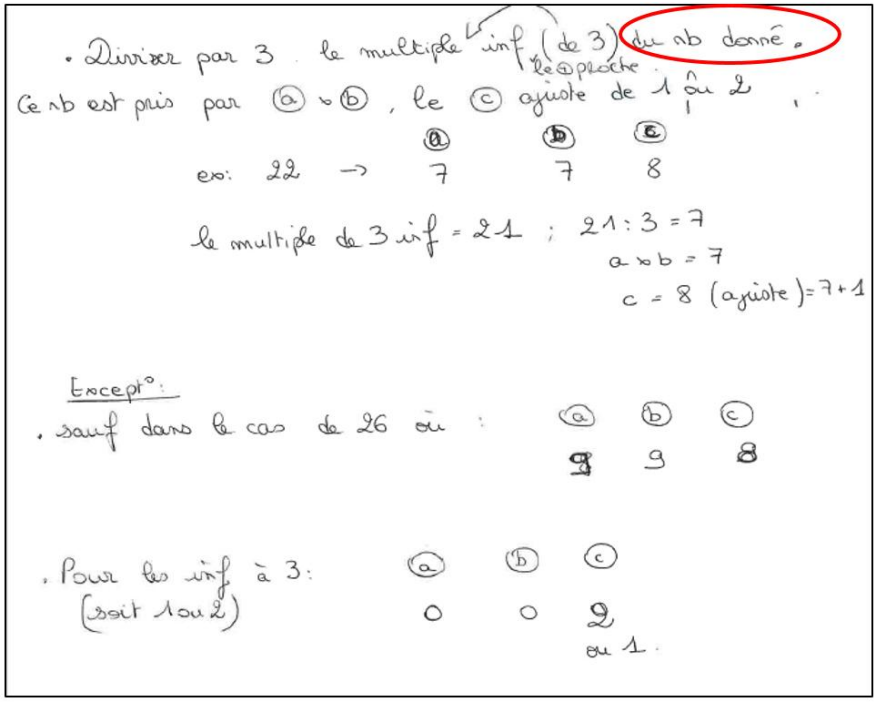
Le recours à la lettre permet alors de formuler la règle pour prendre en compte le nombre qui sera proposé par le meneur de jeu :

> *On fait comme si les nombres désignés à l'aide de lettres étaient connus pour opérer sur eux. On fait comme si le problème était résolu pour le modéliser dans le registre des expressions algébriques (pensée analytique).* (Adihou, Larguier et Bronner, in et al. (2020), p.135)

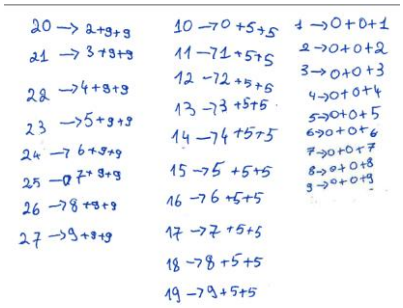
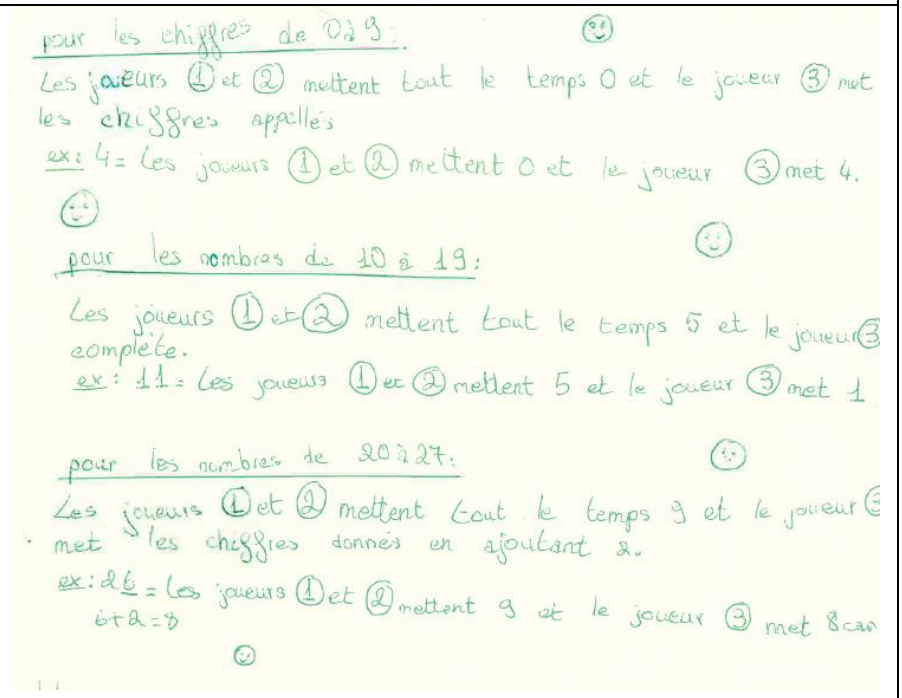
Par contraste, des élèves de CM2 ou des étudiants désignent le nombre inconnu en langage naturel ou des signes non conventionnels, faisant écho à ce que précise Radford cité par Squalli et al. (2020) « *On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci […]* »







Enfin, dans une expérimentation menée en classe de CM2, une reprise des messages a été demandée aux élèves à la suite de tests, en collectif, de mise en œuvre des messages spontanés :

Message initial	Message après reprise
	

Cette tâche nous semble illustrer une contribution à la construction de la pensée algébrique :

> *Ainsi, la modélisation est intimement liée à la pensée relationnelle et à la pensée fonctionnelle. Un aspect essentiel de la modélisation est la reformulation de la situation donnée dans un système de représentation différent (de celui présenté dans la situation). Une telle reformulation nécessite une identification des composantes essentielles et une compréhension approfondie des relations entre elles.* (Polotskaia, 2020, p. 6).

Ces analyses des productions des étudiants ou des élèves nous conduisent à penser qu'il doit être envisageable de développer, en formation, à partir du vécu de la situation *Concertum*, les composantes de la pensée algébrique.

IDENTIFIER LES DÉTERMINANTS DIDACTIQUES D'UNE SITUATION : UNE CONDITION NÉCESSAIRE DANS LA CONDUITE D'UNE SÉQUENCE EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ?

Bénédicte ARTOLA
Formatrice, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site de Toulouse, IRES de Toulouse, groupe école primaire
benedicte.artola@univ-tlse2.fr

Christophe BILLY
Formateur, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site d'Albi, IRES de Toulouse, groupe école primaire
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Marc CAILHOL
Formateur, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site de Rodez, IRES de Toulouse, groupe école primaire
marc.cailhol@univ-tlse2.fr

Philippe CLÉMENT
Formateur, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site de Montauban, IRES de Toulouse, groupe école primaire
philippe.clement@univ-tlse2.fr

Pierre DANOS
Formateur, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site d'Auch, IRES de Toulouse, groupe école primaire
pierre.danos@univ-tlse2.fr

Cédric FRUCHON
Formateur, INSPÉ Toulouse Occitanie Pyrénées, site de Toulouse, IRES de Toulouse, groupe école primaire
cedric.fruchon@univ-tlse2.fr

Isabelle LAURENÇOT SORGIUS
Formatrice, INSPÉ académie de Grenoble, site de Chambéry, IRES de Toulouse, groupe école primaire
isabelle.laurencot-sorgius@univ-grenoble-alpes.fr

Floriane WOZNIAK
Professeure en didactique des mathématiques, Université de Montpellier, IRES de Toulouse, groupe école primaire
floriane.wozniak@umontpellier.fr

Résumé
Le groupe « École primaire » de l'IRES de Toulouse travaille sur un projet de brochure intégrant, en particulier, l'institutionnalisation (Brousseau, 1998) de techniques de résolution de problèmes atypiques (Houdement, 2017 ; MENJS, 2020). Ceci nous a conduits à réfléchir aux conditions de la diffusion et de l'appropriation de séquences intégrant la résolution de problèmes atypiques. L'atelier a donné l'occasion de travailler avec les participants, notamment à partir de vidéos de classe, sur ce que nous avons repéré comme des déterminants didactiques, c'est à dire « des conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation » (Chevallard, 2002 ; Hersant, 2011). Après avoir présenté notre travail en cours sur la

résolution de problèmes atypiques mobilisant notamment les notions de déterminants didactiques, nous avons amené les participants, à partir des observations de séances d'enseignement, à identifier ce qui, de leur point de vue, constituerait des déterminants didactiques. À partir de vidéos de classe, nous avons alors discuté des propositions des participants et des choix que nous avons effectués.
Dans une dernière partie, nous avons ouvert la réflexion sur l'intégration possible en formation initiale et continue de la notion de déterminants didactiques dans la perspective de développement professionnel.

I - INTRODUCTION

1 Contexte et objectif du travail du groupe IRES

Le travail en cours au sein du groupe IRES de Toulouse trouve son origine dans l'analyse de vidéos de classes montrant les difficultés des enseignants, lors de séances labellisées « Résolution de problèmes », à parvenir à un bilan (synthèse à l'issue d'une mise en commun de procédures d'élèves dans le contexte du problème) et une institutionnalisation (formulée de façon décontextualisée). Afin de travailler sur ces phases de bilan et d'institutionnalisation en lien avec les nécessaires relances au cours de l'étude, nous avons réfléchi à la création d'un corpus de problèmes atypiques (Houdement, 2017) pouvant être étudiés du cycle 1 au cycle 3 et relevant de deux familles :

- Recherche de tous les cas possibles ou dénombrement de tous les cas possibles ou « problèmes de dénombrement » (M.E.N.J.S., 2021) ;
- Problèmes avec contraintes ou « problèmes algébriques » (M.E.N.J.S., 2021).

Pour ces problèmes, nous avons construit des fiches à destination des professeurs comportant une analyse *a priori*, une proposition de mise en œuvre avec de possibles relances et un exemple d'institutionnalisation à construire avec les élèves. L'enjeu est de permettre aux enseignants de percevoir que « ces problèmes mettent en jeu des stratégies attendues particulières qu'il convient, selon le niveau d'enseignement, d'expliciter pour développer des compétences transférables » (M.E.N.J.S., 2020).

La première expérimentation, en 2022-2023, a porté sur la situation « Le problème des maisons » mise en œuvre dans deux classes de cycle 1. Ce problème consiste à déterminer toutes les maisons différentes réalisables avec une façade carrée (trois couleurs au choix) et un toit triangulaire (trois couleurs au choix également) (voir descriptif complet en Annexe 1). L'analyse des choix effectués par les deux enseignantes, souvent très différents, nous a conduits à questionner la ressource que nous leur avions fournie. Nous avons ainsi été amenés à préciser les éléments qui préservent les conditions sous lesquelles la situation permet d'atteindre les objectifs d'apprentissages visés que Hersant (2011) nomme « déterminants de la situation », et que nous définissons avant de décrire le déroulé de l'atelier.

2 Notion de déterminant d'une situation

Hersant (2011) cherche à qualifier les « éléments des situations qui garantissent leur robustesse par rapport au savoir » et « des conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation » (op. cit., p. 2). C'est ainsi qu'elle définit :

> *Nous nommerons déterminants ces variables de la situation qui garantissent sa robustesse et permettent une « migration réussie » [d'une ingénierie didactique de première génération, produit de la recherche] vers les classes ordinaires [classes dont le professeur n'a pas participé à la recherche] ; ces déterminants correspondent en quelque sorte aux conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation. (op. cit., p. 5).*
>
> *[…] Quand nous disons que les déterminants d'une situation sont des conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation, cela sous-entend que certaines de ces conditions sont à tenir au cours du déroulement de la situation. C'est pourquoi, aux conditions initiales de la situation liées en particulier aux choix des variables du problème il faut ajouter des conditions associées au déroulement de la situation (op. cit., p. 6).*

[…] Il est certainement plus juste de dire qu'un déterminant est une condition qui contribue à préserver l'essence d'une situation car la réalisation d'une condition ne peut garantir cela. » (op. cit., p. 10).

À la lumière de ces définitions, nous avons repris cette première situation du « problème des maisons » pour essayer, à partir des retours des expérimentations, d'identifier des déterminants de la situation.

Nous avons produit au sein du groupe IRES une grille de déterminants relative au « problème des maisons » ; ce problème n'étant pas étudié ici, on pourra consulter la grille sur le site de l'IRES de Toulouse présentée aux journées nationales de l'APMEP Rennes 2023 (Groupe « école » IRES de Toulouse, 2023). Lors des années 2023-2024 et 2024-2025, nous avons poursuivi ce travail sur une nouvelle situation « Les tours » (Annexe 2) que nous avons proposée à trois collègues de classes de CP (Delphine et Vincent) et CE1 (Sylvie).

Nous avons proposé aux participants à l'atelier d'identifier ce qui, de leur point de vue, constituerait des déterminants didactiques de cette situation.

II - IDENTIFICATION DE DÉTERMINANTS

1 Appropriation de la situation par les participants

Le problème « Les tours » est présenté à travers le visionnage de la passation de consigne d'une enseignante en classe de GS : avec des cubes de trois couleurs, les élèves doivent réaliser « toutes les possibilités de tours différentes, pas pareilles ».

1.1 Analyse a priori de la situation pour une mise en œuvre en CP ou CE1

Par groupes de quatre, les participants reçoivent un lot de petits cubes de quatre couleurs afin de pouvoir, si besoin, s'en aider pour résoudre le problème.



Figure 1. Les cubes distribués aux participants

Consigne aux participants

« Dégager ce que pourraient être :

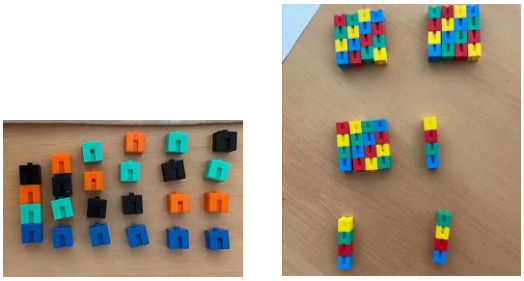
- *le ou les objectifs d'apprentissages de la situation ;*
- *les conditions de mise en œuvre en classe pour atteindre les objectifs définis ».*

Cette première tâche, classique en formation, sert de dévolution au problème de l'identification des déterminants. Elle permet d'engager les participants dans une première analyse mathématique et didactique de la situation.

Des échanges dans les groupes et lors de la mise en commun

La présence du matériel engage les groupes dans la résolution du problème, à l'exception de l'un d'entre eux. Dans un premier temps, les participants ont spontanément construit individuellement les différentes tours sans discussion dans les groupes autour du processus de construction des tours. Dans un second temps, les participants ont discuté de ce qu'ils ont produit. Tous les groupes ne sont pas parvenus à l'obtention de toutes les tours mais les tours sont majoritairement structurées avec une même couleur « en bas » (Figure 2a). On trouve aussi une autre organisation (Figure 2b), via des permutations circulaires. Dans un premier temps, l'ordre des couleurs est choisi (par exemple bleu, jaune, vert, rouge) et une

première tour est construite. La tour suivante s'obtient en positionnant le cube du haut à la place du premier cube en bas de la tour de sorte que le cube du bas se trouve en deuxième position, le cube qui était en deuxième position se trouve en troisième position, etc. ce qui amène à une organisation en 6 groupes de 4.



Figures 2a et 2b. Productions de deux groupes de l'atelier

Dans un groupe, une discussion a lieu sur l'intérêt de commencer par proposer aux élèves le problème avec deux, trois couleurs avant de travailler quatre couleurs, de façon à ce que, lors de l'institutionnalisation, l'augmentation du nombre de couleurs fasse percevoir la nécessité d'organiser l'ensemble des tours. Cette discussion sera partagée avec l'ensemble des participants lors de la discussion ultérieure sur les déterminants. Dans un groupe, un des animateurs observateurs pose la question : « comment êtes-vous sûres d'avoir construit toutes les tours ? », la réponse étant : « On a chacune une couleur en bas, puis on a fait toutes les couleurs possibles pour le 2^{e} cube, et après le 3^{e} et 4^{e}. »

Un des animateurs a questionné les membres d'un groupe qui n'avaient pas construit toutes les tours en leur demandant comment ils pouvaient savoir qu'avec 24 ils les avaient toutes. Les connaissances mathématiques ont alors été convoquées pour affirmer que le nombre de tours était donné par le calcul $4 \times 3 \times 2$. À notre demande, les collègues ont essayé de construire toutes les tours : deux d'entre elles n'avaient pas de stratégie, l'une cherchait toutes les tours possibles avec le 1er cube d'une couleur donnée, l'autre est restée sur des tours à deux couleurs en utilisant les quatre couleurs à disposition ; la 3e collègue a dessiné un arbre, puis en appui a construit les six tours d'une couleur donnée, la couleur du 1er cube étant choisie. Elle a ensuite aidé à trouver les deux tours qui manquaient à la collègue qui avait réussi à en construire 4. On a pu noter avec ce groupe que savoir dire combien il y avait de tours ne garantissait pas de savoir comment les construire. Le groupe a alors noté que : « Oui, c'est vrai, ce n'est pas facile. On est parti tout de suite sur les objectifs mais le faire, c'est aussi important, on a fait comme nos étudiants ».

Ainsi, il est possible de reconnaître un type de problèmes, d'y associer une formule permettant de répondre à la question posée sans que les éléments justifiant cette formule soient eux-mêmes associés aux éléments structurants de la situation qui justifient cette formule.

Dans ce cas, les connaissances mathématiques sont venues faire « écran » au processus de structuration. La « déraisonnable efficacité des mathématiques » a masqué le problème de la construction exhaustive : on applique une « recette » pour avoir le nombre de tours. Ce point questionne bien les objectifs d'apprentissage de la situation – déterminer toutes les tours possibles ou déterminer le nombre de tours possibles – ainsi que les conditions de son étude pour les atteindre.

Nous reviendrons sur ce point observé dans les mises en œuvre en classe, en particulier au moment de l'institutionnalisation que nous présenterons ultérieurement. Lors de la mise en commun, un retour est effectué sur les procédures décrites ci-dessus. Chaque groupe formule différents objectifs d'apprentissages qui pourraient être poursuivis :

- Comprendre qu'il y a besoin d'une technique qui garantisse l'exhaustivité ; l'explicitation d'un algorithme la garantit ; être sûr de ne pas en avoir oublié ;
- Savoir s'organiser ;

- Chercher, raisonner, en distinguant des niveaux : niveau 1 se lancer dans des essais ; niveau 2 valider des essais, niveau 3 chercher l'exhaustivité ;
- S'organiser, chercher l'exhaustivité, mettre en place une stratégie, prendre en compte des contraintes ; comparer (pareil, pas pareil, différent) ;
- Un objectif secondaire : se repérer dans l'espace.

On peut constater que, dans des formulations globalement assez générales, l'organisation est mise en avant comme stratégie pour réussir.

2 En formation

2.1 Mise en situation

Après cette analyse *a priori* que nous ne questionnons pas à ce stade avec les participants, nous engageons ces derniers à se placer en situation de formation et à répondre à la consigne.

Consigne

Vous êtes en formation, vous choisissez ce problème pour un travail sur les « problèmes pour chercher ».

- *Quel(s) objectif(s) de formation ?*
- *Qu'identifiez-vous comme éléments importants à fournir à un formé ?*
  - *pour mettre en œuvre cette situation,*
  - *afin que des stratégies puissent être construites lors de la résolution de ce problème,*
  - *en vue d'être mobilisés lors de la résolution ultérieure de problèmes de la même famille.*

Cette nouvelle consigne permet d'appréhender ce qui fait l'intérêt de la situation du point de vue de la construction des apprentissages et implicitement d'approcher la notion de déterminant didactique. Il ne s'agit pas seulement de considérer les gestes professionnels pour conduire la situation, mais d'appréhender les connaissances qui s'y développent et qui pourront être objet d'une institutionnalisation une fois que les élèves auront identifié leur portée générale au-delà des contingences de la situation.

Des échanges dans les groupes et lors de la mise en commun

Lors des échanges, les objectifs de formation se révèlent être assez généraux, par exemple amener les professeurs à s'interroger sur des manières de faire étudier un problème atypique, faire découvrir que l'on peut prendre du plaisir en résolvant un problème de mathématiques. D'autres apparaissent comme étant plus spécifiques à la situation des tours comme amener les professeurs à s'interroger sur la pertinence de commencer l'étude de ce type de problèmes avec trois couleurs plutôt que quatre, le choix du matériel pour ce problème et les effets de ce choix.

Lors de la mise en commun les éléments importants à faire ressortir en formation ont été synthétisés :

- Comment faire s'approprier aux élèves les contraintes (dans le cas du problème étudié : le fait que les tours soient différentes) ?
- Quels choix et conséquences de ces choix dans le déroulement de la recherche (matériel, modalités de travail) ?
- Quels types d'interventions de l'enseignant pour relancer l'étude tout en préservant l'essence de la situation ?
- Quelle importance d'anticiper les relances, et de façon plus générale quel rôle de l'analyse *a priori* dans cette anticipation ?
- Quelle institutionnalisation (se demander dans quelle mesure la contextualiser) ?

On trouvera les productions des groupes en Annexe 3.

Au-delà de la mise en œuvre d'un problème atypique et du cas particulier de ce problème, comment faire s'approprier par un professeur le descriptif de séances relatives à la résolution de problèmes ?

Les retours de mise en œuvre de la situation en classe nous laissent penser que le descriptif en termes généraux comme ci-dessus ne suffit pas. Ceci nous a conduits à définir, pour ces situations, ce que nous avons repéré comme des déterminants didactiques. Nous engageons dans la suite de l'atelier les participants à questionner ce travail.

2.2 Déterminants de cette situation

Identification

Après avoir présenté aux participants la notion de déterminant (voir la section I.2), un point a été mis en avant : d'après Hersant (2011), la donnée des variables didactiques et de leurs valeurs n'est pas suffisante pour garantir la robustesse d'une situation. Il s'agit d'identifier les éléments qui permettent de la garantir, les conditions à respecter pour préserver « l'essence de la situation ».

Nous demandons donc aux participants à l'atelier de dégager de leur analyse *a priori* et de leur projection en formation ce qui relève, de leur point de vue, de la notion de déterminant.

Consigne

« *Quels éléments sont, selon vous, des déterminants de cette situation en se rappelant que ce ne sont pas seulement des variables didactiques mais qu'ils peuvent aussi être d'une autre nature comme des éléments ayant trait à la manière dont cette situation peut être mise en œuvre ?*

Vous en avez donné tout à l'heure, sans nécessairement les identifier comme des déterminants. Lesquels retenez-vous maintenant ? »

Afin d'initier la réflexion, nous proposons quelques arrêts sur image de moments des mises en œuvre de la situation dans les classes (Figures 3a., 3b. et 3c.) : un extrait vidéo du bilan dressé par Vincent (*« maintenant, je peux vous le dire on peut trouver au maximum 24 tours possibles. Vous avez trouvé toutes les tours possibles. Bravo »*) ; une affiche construite dans la classe de Delphine pour identifier les tours acceptables ; un autre extrait vidéo dans lequel Sylvie fournit un support pour trouver toutes les tours (*« Faites-moi les tours avec le rouge en bas, on va voir s'il a raison. Qu'est-ce que tu fais, rouge en bas, après ? Que du vert en bas, vas-y. »).*

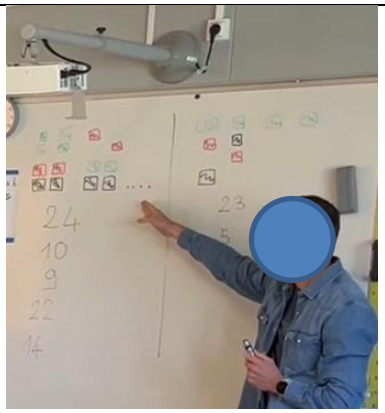


Figure 3a. Bilan

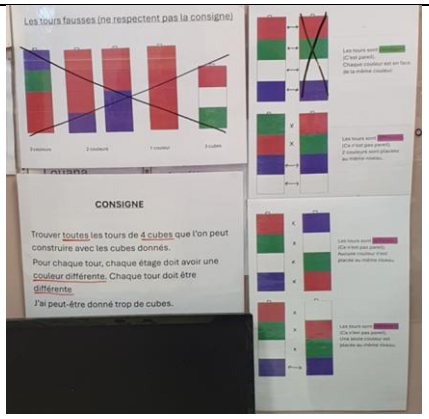


Figure 3b. Tours acceptables

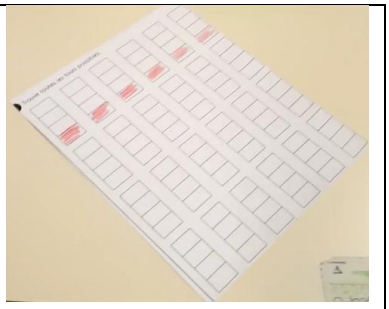


Figure 3c. Feuille pour trouver les tours

Figures 3a, 3b, 3c. Dans les classes

Les participants reconsidèrent les éléments qualifiés d'importants dans la phase précédente afin de répondre à la question posée. On trouvera l'ensemble des réponses des groupes en Annexe 4.

« Éléments importants », déterminants didactiques

Voici la synthèse que nous faisons des réponses au sein des groupes en les rassemblant par thématique :

- Matériel
  - Nature : manipulable,
  - Nombre de cubes suffisant ou non pour construire toutes les tours,
  - Support fourni par l'enseignant (juste une feuille sur laquelle dessiner les tours ou des feuilles préparées avec le dessin des tours...) ;
- Dispositif
  - Recherche individuelle puis par groupe, d'emblée en groupe ou seulement individuelle,
  - Réunion de deux groupes qui n'ont pas trouvé les mêmes solutions,
  - Organisation en phases
    - Nécessité de plusieurs mises en commun,
    - Identification de phases dans la mise en œuvre : manipulation, tours répondant aux contraintes ou non, tours pareilles ou non, etc. ;
- Posture de l'enseignant
  - Annonce du nombre de solutions ou non,
  - Mise en retrait de l'enseignant au cours de la recherche,
  - Renvoi de la validation des solutions au groupe classe : « C'est aux élèves de valider l'exhaustivité des cas (l'enseignant ne dit pas que l'élève a tout trouvé) » ;
- Relances possibles
  - « Comment est-on sûr de les avoir toutes trouvées ? »,
  - Le professeur exhibe une tour non produite ou questionne sur un nombre de tours avec une couleur fixée à la base,
  - Le classement facilite la comparaison ;
- Institutionnalisation
  - Prévoir une institutionnalisation,
  - Quelles stratégies ? Quelle institutionnalisation ?

On peut noter que l'ensemble des productions des groupes permet de recenser certains « éléments importants » relatifs à cette situation que nous avions repérés comme étant des déterminants. Faute de temps, la question des relances possibles et de l'institutionnalisation visée a été peu abordée. Cependant, les groupes qui identifient des éléments de l'institutionnalisation comme déterminants mentionnent l'arbre parfois associé au calcul du nombre de solutions. Nous reviendrons plus en détail sur ce déterminant dans la partie III. Pour approfondir la discussion, la grille de déterminants mise à disposition des enseignants qui ont mis en œuvre la situation dans leur classe (Annexe 5) a été fournie aux participants de l'atelier.

Grille de déterminants du groupe IRES de Toulouse et discussion

On rappelle la genèse et les intentions poursuivies : à partir d'observations de ces classes, nous souhaitons identifier des déterminants et expliciter en quoi ils permettent une mise en œuvre « préservant l'essence de la situation ». Des éléments des discussions émergent à la suite de la lecture de la grille proposée :

- L'éventuelle hiérarchisation des déterminants listés dans la grille : « Sur la grille fournie, les niveaux d'explicitation des déterminants sont différents : déterminant 1/Fournir du matériel, déterminants 2, 3, 4, 5 « S'assurer de » et le déterminant 6/Identifier les relances.... La nature des éléments de la grille n'est pas la même. »

C'est une question que le groupe IRES se pose effectivement dans le sillage de Hersant (2011, p. 10) : « D'où des questions par rapport aux relations que peuvent entretenir les déterminants d'une situation

et une éventuelle solidarité/hiérarchie entre déterminants. Par ailleurs, il semble que, pour une situation donnée plusieurs types de déterminants peuvent être distingués. ». Citons par exemple :

- La réduction du nombre de couleurs pour favoriser la dévolution du problème aux élèves, le retour à un cas simplifié comme idée de relance : *« On s'est posé la question si ce ne serait pas intéressant de passer par des tours de 3 briques. Il y a 6 possibilités quand on aura trois couleurs, est-ce que c'est un élément déterminant de commencer par 3 couleurs ? 4 couleurs, voire 5 c'est l'objectif mais est-ce qu'il ne faudrait pas commencer par 3, est-ce qu'on va directement à 4 ? Notre objectif ce n'est pas 4 couleurs c'est la généralisation. »*
- Le nombre de cubes fournis qui, s'il se réduit à quatre, peut provoquer la nécessité de recourir à l'écrit pour mémoriser les tours réalisées. La manipulation étant empêchée, cela peut en outre conduire les élèves à formuler des stratégies de résolution du problème de recherche exhaustive des tours.

La question du statut de déterminant de la situation des points ainsi relevés reste posée. C'est alors que les participants à l'atelier sont conduits à discuter de la pertinence du concept de déterminant didactique pour la formation.

III - EXPLOITATION DE LA SITUATION EN FORMATION

1 Quel intérêt de la notion de déterminant ?

Avant de débattre avec les participants de cette question, nous livrons quelques réponses fournies par les trois enseignantes et enseignants au questionnaire que nous leur avons soumis, qui visait à recueillir leur ressenti sur l'utilité de la grille énumérant les déterminants dans la conduite des séances d'enseignement.

- Quel(s) intérêt(s) et limite(s) avez-vous perçu de la liste des déterminants fourni dans la ressource ?
  - *« Intéressant pour identifier les points sensibles » (Sylvie CE1) ;*
  - *« Document assez clair, assez précis » (Delphine CP) ;*
  - *« C'est utile mais très chargé en informations. Ça aide à identifier la stratégie la plus efficace » (Vincent CP) ;*
  - *« Ça donne envie de continuer le travail avec une grille de déterminants, ça permet de revisiter la situation et d'autres » (Sylvie CE1) ;*
  - *« Grâce aux déterminants, on garde l'objectif en tête. Au-delà de ranger des tours, à quoi ça sert. Cela aide vraiment à poser l'apprentissage. » (Sylvie CE1) ;*
  - *« Importance de l'identification et de l'explicitation du travail nécessaire à réaliser sur identique/ pas identique » (Delphine CP, Sylvie CE1, Vincent CP) ;*
  - *« J'ai stabiloté des choses qui m'ont semblé importantes, en lisant je me suis dit, ça il faut que je le note, cela me semblait important et je n'y avais pas forcément pensé » (Vincent CP).*

Et plus particulièrement en lien avec nos intentions initiales :

- Une aide pour la relance des recherches ?
  - *« Oui, notamment d'une séance à l'autre » (Delphine CP) ;*
  - *« Ça permet, selon le vécu des séances, de prendre du recul, de reparcourir la grille pour avoir des pistes de réflexion et de faire le découpage des séances suivantes » (Vincent CP).*
- Une aide pour faire émerger une stratégie lors de l'institutionnalisation ?

- *« Oui on a bien dit : on choisit d'abord la couleur du premier niveau, une couleur différente pour le deuxième » (Sylvie CE1)*
- Des stratégies ont été reprises en acte sur des problèmes de la même classe (code mystère à 4 chiffres, les boules de glace Access).

Ces retours encouragent plutôt à poursuivre le travail autour de cette notion de déterminant et à l'inclure dans des scénarios de formation.

Cependant, au-delà de la reconnaissance d'éléments comme déterminants d'une situation, se pose la question des conditions de leur appropriation. Concernant l'institutionnalisation, par exemple, les traces recueillies (Figure 4 et Annexe 6) montrent des procédures et des bilans contextualisés.

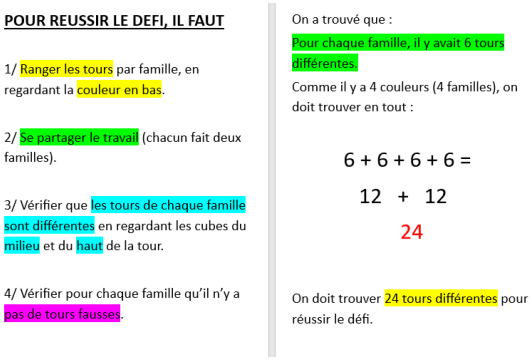


Figure 4. Institutionnalisation dans la classe de CP, Delphine

Alors que le développement des « compétences transférables » par l'explicitation de stratégies particulières est un attendu présent dans le guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP* (M.E.N.J.S., 2020), ces institutionnalisations ne l'assurent pas forcément pour ce type de problèmes.

Nous avions pourtant proposé dans la grille de déterminants (Annexe 5, item 9) une explicitation de cet enjeu, proposé un exemple d'institutionnalisation et mentionné un arbre comme outil possible permettant d'illustrer les organisations de la recherche pour parvenir à l'énumération de tous les cas possibles. Cette proposition n'a pas été retenue par les collègues en classe.

La question de la construction des arbres est reprise par un participant qui note que *« dans les manuels de seconde, les tâches de dénombrement sont proposées en donnant d'emblée les arbres. Les arbres et tableaux ne sont jamais construits. »* Il nous semble que les nouveaux programmes de l'école primaire donnent un relief particulier à cette remarque puisque l'utilisation de cet outil figure dans les exemples de réussite dans la partie « La résolution de problèmes » (Figure 5) du nouveau programme de mathématiques (M.E.N.J.S, 2024).

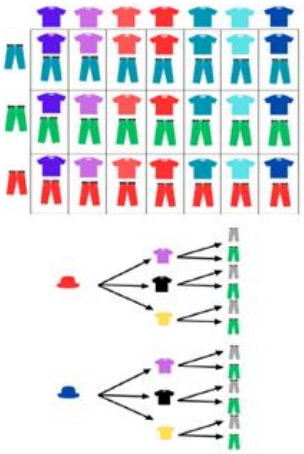
– Résoudre des problèmes mettant en jeu des produits cartésiens.	L'élève sait produire un tableau pour déterminer le nombre de couples possibles dans le cas d'un produit cartésien de deux ensembles. Par exemple, pour le problème « Une poupée est livrée avec trois pantalons et sept tee-shirts. De combien de façons est-il possible d'habiller la poupée ? », l'élève peut produire un tableau faisant apparaître les vingt-et-une solutions. L'élève sait produire un arbre pour déterminer le nombre de solutions possibles lors d'un produit cartésien impliquant plus de deux ensembles. Par exemple, pour le problème « Pour se déguiser, un clown dispose de deux chapeaux (un rouge et un bleu), de trois tee-shirts (un violet, un noir et un jaune) et de deux pantalons (un gris et un vert). Combien de costumes complets différents avec un chapeau, un tee-shirt et un pantalon, le clown peut-il faire ? », l'élève peut produire un arbre faisant apparaître les douze solutions.	

Figure 5. Extrait « La résolution de problèmes » au CE2 (M.E.N.J.S, 2024)

Se pose alors la question formulée par un participant de l'atelier de l'existence « *d'éléments déterminants au niveau de la séquence pour une classe de problèmes* ». Cela nous semble effectivement être l'enjeu afin que la résolution des problèmes atypiques puisse « permettre aux élèves de rencontrer un certain nombre de stratégies et de types de raisonnements qu'ils pourront transposer, en les adaptant autant que nécessaire, dans la résolution d'autres problèmes atypiques. » (M.E.N.J.S., 2020). On retrouve notre intention initiale visant à identifier pour une classe de problèmes des stratégies de résolution similaires.

Du point de vue de l'institutionnalisation, nous distinguons alors trois niveaux :

1. Production de la réponse au problème posé (procédures, bilan contextualisé) ;
2. Mise en évidence des techniques qui pourront permettre, après avoir reconnu un problème d'une même catégorie, de résoudre ce problème ;
3. Mise en évidence des techniques liées à l'activité mathématique autour de la résolution de problèmes de façon plus générale (réduction des contraintes, ...).

Les bilans proposés par les collègues dans leur classe (Figure 4, Annexe 6) relèvent du niveau 1. Le niveau 2 fait référence à ce qui nourrit une mémoire des problèmes au sens de Julo (1995). À ce niveau, ce sont bien des techniques, au sens de modèle généralisable, qu'il s'agit d'institutionnaliser à partir des procédures effectives des élèves.

Sylvie (en classe de CE1), propose le problème « Rechercher tous les nombres à quatre chiffres que l'on peut écrire avec les chiffres 7, 2, 6 et 9 », ce qui pourrait la conduire à une institutionnalisation de niveau 2 qui pourrait être formulée comme dans la partie « Commentaires » de la grille des déterminants (voir Annexe 5, item 9/ Institutionnaliser).

Le niveau 3 concerne davantage les heuristiques. Ainsi faire émerger l'arbre comme un outil générique pour résoudre cette classe de problèmes (relevant des permutations), relèverait de ce niveau.

2 Quelle place pour la notion de déterminant en formation ?

La discussion sur l'intégration de cette notion de déterminant en formation a juste été amorcée en se posant les questions suivantes :

- *Comment, dans votre pratique de formateurs, intégrez-vous, en acte, ce concept de déterminant ?*
- *Pourrait-on nommer les déterminants de façon à ce qu'ils deviennent génériques et mobilisables dans différentes situations ?*
- *Selon vous, que semble-t-il manquer dans les ressources pour les PE de ce point de vue ?*

- *Quelle intégration de cette notion de déterminants envisagez-vous en formation continue et formation initiale ?*

Pour certains participants, les déterminants émergent dans les dispositifs des *lessons studies* qui permettent souvent de révéler des éléments qui dénaturent la tâche ; la question du temps est très discutée (« on ne laisse pas assez de temps »), les étapes incontournables sont recherchées, les relances sont anticipées (« et si un groupe d'élèves fait …, qu'est-ce que je dois dire/faire ? »).

On retrouve dans ce dispositif particulier de formation un questionnement du type de celui mené sur la recherche des déterminants.

De notre côté, au-delà des retours des collègues ayant expérimenté la situation, ceux recueillis en formation continue (cycle 1) et initiale (des professeurs des écoles stagiaires par exemple) laissent penser que l'explicitation des déterminants des situations permet d'éclairer les collègues sur les enjeux d'apprentissage assignés aux situations ainsi que sur, « en quelque sorte les « passages obligés » de la situation, du point de vue des élèves. » (Hersant,2011).

IV - CONCLUSION

La richesse des échanges lors de l'atelier est venue conforter nos réflexions sur l'importance de travailler la notion de déterminant didactique en formation. Comment rendre accessible cette réflexion auprès des professeurs des écoles reste une question en suspens.

Dans l'atelier, nous nous sommes appuyés sur des vidéos de classe, des productions de la classe (affiches) et des descriptifs de mise en œuvre pour nourrir la réflexion des participants.

Il nous semble que l'observation des différences dans les mises en œuvre est une condition permettant de repérer ce qui peut influer sur « l'essence de la situation » et, en cela, conduire à l'identification de potentiels déterminants de la situation. Cependant, toutes les modifications ou différences de mises en œuvre n'affectent pas nécessairement l'essence d'une situation. L'identification des déterminants passe aussi par des analyses mathématiques et didactiques. Ainsi, par exemple, pour des institutionnalisations de niveau 1 ou 3, on pourra comparer des mises en œuvre d'une même situation ; pour des institutionnalisations de niveau 2 ou 3, la comparaison de l'étude de problèmes relevant de la même situation comme l'a proposée Sylvie sera nécessaire.

L'institutionnalisation de niveau 1 (Figure 1, Annexe 6) peut facilement devenir une institutionnalisation de niveau 2 pour le problème des codes en remplaçant « tour » par « nombre » et « lettre » par « chiffre ». Et ainsi, par comparaison, cela permettrait d'aller vers une institutionnalisation de niveau 2.

La clarification des niveaux d'institutionnalisation auxquels on veut parvenir va influer sur ce qui est repéré comme déterminant didactique de la situation.

De façon plus générale, questionner l'essence des situations, notamment à travers l'institutionnalisation visée, nous paraît être une des raisons d'être de la recherche de déterminants de ces situations.

Ce faisant, nous pouvons émettre l'hypothèse que ce questionnement sur les déterminants d'une situation et leur appropriation par les professeurs des écoles les outillent pour cerner et atteindre les objectifs d'apprentissage attachés aux situations.

Cela nous invite à nous engager dans le chantier ouvert de construction d'ingénieries de formation autour des déterminants didactiques des situations.

V - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.*

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L. et al. (éds.), Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Groupe « école » IRES de Toulouse (2023). Résolution de problèmes atypiques et institutionnalisation. *Documents des journées nationales de l'APMEP Rennes 2023.* https://owncloud.apmep.fr/index.php/s/DM2kXZH6rk2NrLj?path=%2FAteliers%2FPlage2%2FD2-01%3A%20R%C3%A9solution%20de%20probl%C3%A8mes%20atypiques%20et%20institutionnalisation

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations. Une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. Dans C. Margolinas (éd.), *En amont et aval des ingénieries didactiques, 2, Cours de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (305-326). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

M.E.N.J.S (2020). *Un guide fondé sur l'état de la recherche. Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.* Consulté le 05/06/2024, Url : https://eduscol.education.fr/media/3738/download

M.E.N. J. S. (2021). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.* Consulté le 8/07/2025, URL : https://eduscol.education.fr/document/32206/download

M.E.N.J.S. (2024). *Programmes d'enseignement, Bulletin officiel n°41 du 31 octobre 2024. Annexe 4. Programme de mathématiques du cycle 2. https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel135_annexe4.pdf*

ANNEXE 1 SITUATION DES MAISONS

Le descriptif ci-dessous est celui fourni aux professeurs lors de l'expérimentation. Une nouvelle version suite à cette expérimentation sera disponible sur le site de l'IRES de Toulouse. Pour les professeurs, le féminin est utilisé à titre épicène.

1 Problème des maisons (MS, GS, CP)

Origine : Odette Bassis « Concepts clés et situations problèmes en mathématiques » tome 2 ; Éd. Hachette éducation p. 13-21

1.1 Énoncé

La professeure demande de confectionner des maisons avec des triangles et des carrés de trois couleurs différentes.

1.2 Analyse a priori

Mathématiquement

Il s'agit de trouver tous les couples que l'on peut former, le premier élément étant dans un ensemble A et le second élément étant dans un ensemble B différent du premier. C'est la recherche du produit cartésien des ensembles A et B.

Technique de résolution

Pour cela, il suffit de choisir un élément de la première collection et de lui associer chacun des éléments de la seconde puis de procéder de même pour chacun des éléments de la première collection. On peut par exemple représenter la technique à l'aide d'un arbre ou un tableau à double entrée.

1.3 Descriptif, mise en œuvre

La professeure pourra demander aux élèves de construire les maisons sur une planche ou un carton que l'on pourra plus facilement déplacer et orienter selon les besoins des échanges.

1) *Première étape : consigne très ouverte : « construisez des maisons »*
Chaque enfant fait des propositions qui sont étalées au centre du groupe pour observation. Les propositions des élèves seront sûrement très variées, avec des maisons unicolores, toujours bicolores, etc.
Mise en commun : la mise en commun devrait permettre de faire émerger la multiplicité des propositions.
2) *Deuxième étape (élimination des doublons) : on introduit une contrainte formulée par la professeure sous la forme : « Construisez des maisons pas pareilles ».*
Pendant la phase de recherche la professeure pose des questions à chaque élève « est-ce que cette maison est pareille à celle-ci ? » Ceci afin de préparer les formulations des élèves pour la phase de mise en commun, par exemple l'élève pourra dire : « ce n'est pas pareil car le toit ici est rouge et là bleu » ou « c'est pareil car le toit et les murs sont de la même couleur ».
À la fin de la séance, même processus d'observation / échanges.
3) *Troisième étape (exploration de l'ensemble des possibles) : la professeure demande « Construisez des maisons pas pareilles ; il en faut le plus possible »*.
À la fin, on dépose toutes les maisons des élèves de l'atelier sur une planche.
4) *Quatrième étape (demande d'exhaustion) : il s'agit de faire émerger le besoin d'une organisation pour être sûr d'avoir toutes les maisons possibles.*
La professeure demande : « *A-t-on construit toutes les maisons possibles sur la planche ? Comment peut-on être sûrs d'avoir construit toutes les maisons possibles ?* ».

Éléments pour la conduite de cette étape :

Des organisations peuvent être proposées par les élèves, par couleurs de toits, par couleurs de murs.

Pour accompagner et faire avancer la recherche de tous les cas possibles, la professeure peut demander : « *De quoi a-t-on besoin pour construire une maison ? Combien a-t-on de toits différents ? Combien a-t-on de murs différents ?* »

Selon les réponses des élèves la professeure pourra suggérer : « *On cherche toutes les maisons à toit bleu* ».

Une maison c'est un mur (un carré) et un toit (un triangle) ;

on cherche toutes les maisons à toit bleu,



puis toutes les maisons à toit rouge



puis toutes les maisons à toit vert.



On peut aussi chercher toutes les maisons à mur bleu,



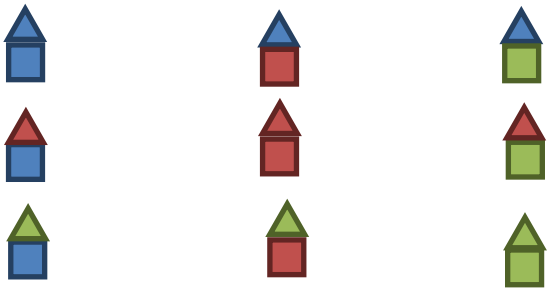
puis toutes les maisons à mur rouge,



puis toutes les maisons à mur vert.



La professeure repartira des propositions pour arriver à une organisation en lignes (chemin des toits bleus par exemple), puis en ligne et colonne avec d'une part la couleur du toit, d'autre part la couleur des murs.



La professeure peut introduire les têtes de colonne et têtes de ligne dans un second temps.





Puis recherche des maisons manquantes à l'aide du tableau.

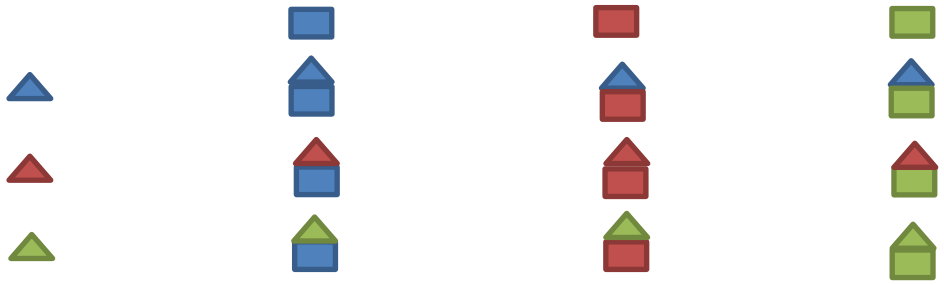
On peut ainsi introduire le tableau à double entrée comme un nouvel outil qui est la réponse à un problème de recherche de tous les cas possibles.

Institutionnalisation (orale)

Pour trouver toutes les maisons (tous les possibles) et ne pas en oublier, on doit bien regarder (observer) de quoi est constituée une maison, un toit et un mur. Il y a plusieurs couleurs de toit et plusieurs couleurs de mur (les caractéristiques des objets).

Puis il suffit de choisir une couleur de toit (un élément de la première collection) et de lui associer chacune des couleurs de murs possibles (chacun des éléments de la seconde collection).

Le tableau ci-dessous pourra constituer un écrit de référence.



Après cette phase de découverte-construction, on joue, par exemple avec des caches. On cache une maison, on cache une entrée, etc. Il s'agit de retrouver les critères permettant de définir ce qui est caché. La lecture du tableau à double entrée est engagée et on peut convenir avec les enfants des termes de lignes et de colonnes.

Un exemple de mise en œuvre d'un travail sur le tableau à double entrée avec des caches se trouve dans le manuel pour le professeur : Hersant, M. et Thomas, Y. (2018) *Mathématiques à grands pas GS*, éd. Retz (un extrait comprenant cette activité est consultable en ligne sur le site des éditions Retz).

ANNEXE 2 SITUATION DES TOURS

Le document fourni aux enseignants ayant expérimenté la situation « Les tours » est disponible sur le site de l'IRES. Il comporte trois parties. On reproduit ci-après la partie 1 décrivant la situation. La partie 2, grille de déterminants mise à disposition des enseignants qui ont mis en œuvre la situation dans leur classe est l'objet de l'annexe 5. On pourra consulter le questionnaire de la partie 3 dans le document en ligne.

Extrait du document fourni pour l'expérimentation de la situation « Les Tours »

Le groupe primaire de l'IRES de Toulouse travaille sur des situations visant à faire émerger en classe des stratégies de résolution de problèmes. Avant de diffuser cette ressource, le groupe souhaiterait un retour d'expérience sur sa mise en œuvre en classe à partir du document suivant. Nous vous remercions vivement de vous prêter à l'expérimentation.

Le document comporte 3 parties.

Partie 1 : Présentation de la situation « Les tours » (origine Ermel)

Partie 2 : Grille de déterminants

La grille de déterminants nous semble proposer des informations qui favoriseront « une « migration réussie » de [la] situation, c'est-à-dire une mise en œuvre en classe robuste par rapport au savoir. » [1]

Dans cette situation de résolution de problème, l'objectif pour le PE est de faire émerger des stratégies de résolution reproductibles dans des problèmes appartenant à la même classe de problèmes (« recherche de tous les cas possibles »).

Partie 3 : Questions à propos de la ressource (situation & grille de déterminants)

Les réponses à ces questions pourront être recueillies lors d'échanges avec un collègue de l'IRES.

Partie 1 La situation

1 Les tours (d'après Ermel CP)

1.1 Énoncé

« Trouver un maximum de tours différentes de quatre étages que l'on peut former en utilisant quatre couleurs différentes une seule fois. »

Remarque : on pourra initialement faire estimer le nombre de tours. Cela peut constituer une motivation pour les trouver toutes.

Dans le document, on a choisi R, J, B, V pour rouge, jaune, bleu, vert.

1.2 Analyse a priori

Mathématiquement

Il s'agit là de dénombrer les permutations d'un ensemble à quatre éléments, c'est-à-dire le nombre de quadruplets, chaque élément du quadruplet étant distinct des autres éléments. Le nombre de solutions est donné par le calcul $4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Techniques

- tâtonnement perceptif pour trouver plusieurs tours ;
- recherche d'un problème simplifié ;
- essais organisés : par exemple en fixant le premier étage d'une couleur, puis la couleur du second étage et en cherchant toutes les solutions une fois ces deux couleurs fixées ; puis en changeant la couleur du second étage ; puis celle du premier ;
- détermination du nombre de possibilités par produit des possibilités pour chaque étage : pour le premier étage (4 choix), puis, à chacun de ces quatre choix correspondent trois choix pour le second étage (plus que 3 possibilités puisqu'une couleur est déjà utilisée), puis deux choix pour le troisième (plus que 2 possibilités) et, pour le quatrième, il n'y a plus de choix possible, une seule couleur s'impose.

Étapes pour faire évoluer la stratégie

- recherche libre ;
- recherche de doublons dans les solutions trouvées (on retire les tours identiques) ;
- trouver le plus possible de tours différentes ;

[1] Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations. Une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. Dans C. Margolinas (éd.), *En amont et aval des ingénieries didactiques, 2, Cours de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (305-326). Grenoble : La Pensée Sauvage.

- organisation et complément éventuel des solutions pour trouver toutes les tours possibles.

Institutionnalisation

L'institutionnalisation visera à faire émerger des stratégies de résolution reproductibles dans des problèmes appartenant à la même classe de problèmes (recherche de tous les cas possibles).

ANNEXE 3 PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS SUR OBJECTIF(S) EN FORMATION ET « ÉLÉMENTS IMPORTANTS »DE LA SITUATION

Fiche A

En formation, objectif :

- découvrir, mettre en œuvre concrètement en classe, traiter un problème atypique ;
- (re)découvrir qu'on peut prendre du plaisir / s'engager dans un problème de mathématiques.

Éléments importants :

- fournir le matériel (éventuellement à imprimer) ;
- donner les étapes clés avec justifications didactiques (sinon ils peuvent avoir l'idée de changer sans se rendre compte qu'ils perdent des éléments), par exemple : phase de recherche individuelle.

Fiche B :

En formation, objectif :

- Prévoir des mises en commun successives avec une trace écrite préparée *(anticipation) ;*
- Comment ne pas dénaturer la situation de recherche ? Quelles relances ?
- Comment faire travailler aussi la compétence **CHERCHER** ?

Ces différents points constituent l'**analyse a priori.**

Fiche C :

En formation, objectif :

- Importance de l'observation : des techniques, des procédures ;
- Importance de l'analyse *a priori* : de la tâche, d'où faire manipuler les formés.
- Importance de faire varier les situations, le matériel ;
- Nécessité des échanges entre pairs, de l'observation réciproque ;
- D'où temps en commun important : faire émerger la/les techniques en relevant les erreurs, les oublis, les redondances.
- Objectif : déjà comprendre qu'il y a bien des stratégies qui peuvent être transposées à d'autres problèmes.

Fiche D :

En formation, objectif

Comment enseigner la résolution de problèmes à partir d'une mise en situation active, emmener les stagiaires à s'approprier une démarche afin que les élèves réussissent à résoudre un problème atypique.

Éléments importants à fournir à un formé :

Faire vivre la situation.

Les amener à verbaliser.

Fiche E :

En formation, objectif

a) Appropriation des contraintes pour les élèves :
   - Comment prendre appui sur le matériel ?

- Exemples et contre-exemples.

b) Déroulement / organisation / modalités de la séance pour faire émerger la nécessité de s'organiser pour résoudre le problème (défi ?)
   - Progressivité (le plus possible : 3 couleurs différentes d'abord puis davantage)
   - Articulation individuel/groupe/collectif ;
   - Choix du matériel (manipulable, représenté ?).

c) Autour d'un exemple de problème de même structure pour travailler sur le transfert.

ANNEXE 4 PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS SUR LES DÉTERMINANTS

Note : la numérotation des fiches ci-dessous ne reprend pas celle de l'annexe 3.

Fiche A

Déterminants

- Matériel/support qui permet facilement la comparaison de 2 tours ;
- La stratégie est remobilisée dans la résolution d'un nouveau problème après la résolution du problème des tours.

Fiche B

Déterminants

- Pas d'intervention de l'enseignant (ou peu). Milieu a-didactique ;
- Laisser l'élève chercher seul puis en discuter en groupe de 2 ; créer un obstacle didactique puis mettre 2 groupes ensemble pour comparer les résultats : situation où les élèves se rendent compte qu'il leur manque des tours ;
- Formulation de la consigne ;
- Support : pas un support construit par l'enseignant. Juste une feuille et dessiner des tours.

Fiche C

- Consignes à dire, ne pas dire ;
- Différentes phases : manipulation, « pareil, différent », « valide, pas valide » ;
- Organisation pédagogique (individuel, collectif) ;
- Prise de parole de l'enseignant qui doit être clarifiée ;
- Matériel : caractéristiques du matériel tangible, matériel support pour représenter, iconique (schéma, feuilles préparées) ;
- Institutionnalisation.

Fiche D

Déterminants (points d'appui pour garantir l'acquisition des objectifs d'apprentissage) :

- Objets déplaçables (identification des tours identiques) ;
- Identifier la position des couleurs (notion d'étages) ;
- Le classement facilite la comparaison ;
- Verbalisation de la démarche

Fiche E

Déterminants de la situation

- Phase individuelle où les élèves cherchent sans indication ;
- Tours de 4 étages (on peut commencer par 2 ou 3 mais il faut aller à 4) ;
- C'est aux élèves de valider l'exhaustivité des cas (l'enseignant ne dit pas que l'élève a tout trouvé) ;
- Matériel manipulable pour chercher ;
- Donner plus de briques que nécessaire (mais assez de chaque couleur) ;

- Organiser un partage des stratégies efficaces par les élèves (pour que tous les élèves les entendent).

Fiche F

Déterminants

- Matériel : présence, choix ; grand nombre de cubes ; grand nombre de tours « modèles » (mais avec une répartition qui n'induit pas) ;
- S'entendre sur ce que sont des solutions différentes, avec ou sans prise en compte de l'orientation ;
- Étapes incontournables : diverses mises en commun
    1. Vérification que toutes les tours produites sont différentes dans un groupe donné (qu'est-ce que 2 tours identiques ? diffférentes ?) ; mode de communication sur la constitution d'une tour : bas/haut… puis 1re, 2e, 3e, 4e ? Vérification s'il en manque, si besoin le PE exhibe une tour non produite ou questionne sur un nombre de tours différentes avec une même couleur à la base,
    2. Comment on est sûr de les trouver toutes ?
    3. Quelles stratégies ?

Fiche G

Déterminants

- Nombre de cubes ;
- Obligation d'une stratégie ;
- Rôle de l'enseignant (enseignement explicite, annoncer le nombre de solutions) ;
- Matériel (cubes, papier) ;
- Nombre de cubes disponibles sur la table (pas assez) ;
- Doit-on tous les utiliser ?

Des exemples d'institutionnalisation avec des arbres ont été proposés par des participants du type ci-dessous et un dénombrement de toutes les tours : $4 \times 3 \times 2$

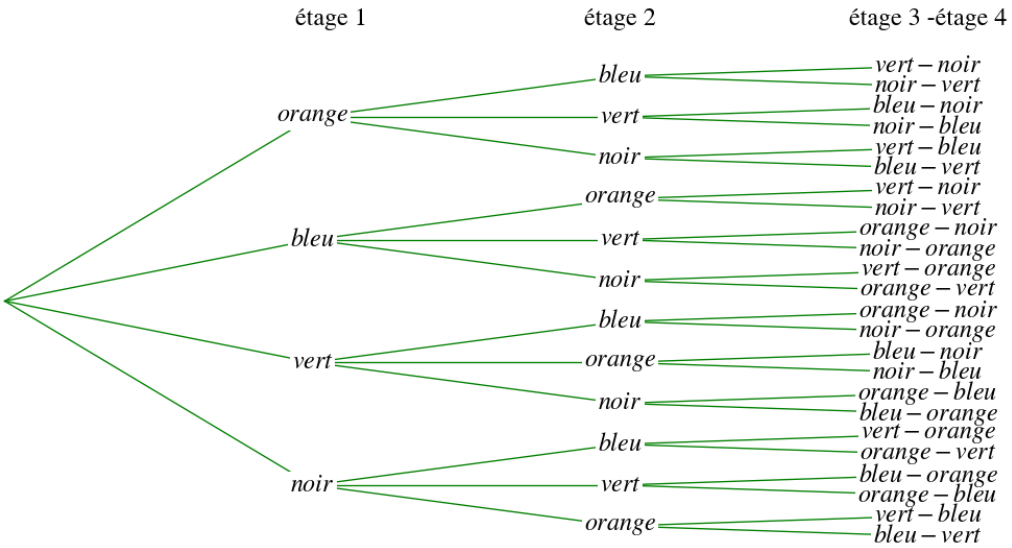
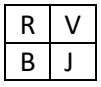
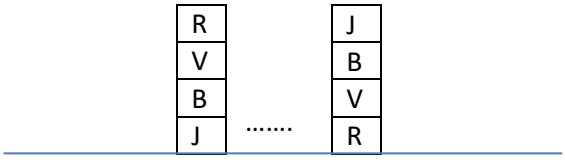


Figure 1. Exemple de représentation en arbre de toutes les solutions

ANNEXE 5 GRILLE DE DÉTERMINANTS DE LA SITUATION DES TOURS

Cette grille de déterminants est disponible sur le site de l'IRES. On pourra le consulter pour les éventuelles mises à jour.

Déterminants :	**Commentaires :**
1/Fournir du matériel : - en nombre suffisant - déplaçable facilement	La question du matériel soulève des questions cruciales. Le fait que le matériel soit déplaçable (cubes ou étiquettes « tour ») favorise l'émergence d'organisations spatiales. 1er cas : on dispose de cubes en nombre suffisant (24 cubes de chaque couleur par groupe d'élèves). Il est de notre point vue essentiel de permettre aux élèves d'effectivement réaliser un grand nombre de tours dont certaines identiques. Pour réaliser toutes les tours différentes, il faut 24 cubes de chaque couleur. Pour permettre aux élèves de produire des doublons (des tours identiques) et interroger ainsi la notion de identiques/différentes (tours différentes deux à deux), il faut donc prévoir par exemple 25-26 cubes de chaque couleur. Les élèves interprètent la situation en fonction de ce qu'il est possible de faire avec du matériel : Si l'élève dispose des 24 cubes de chaque couleur, il peut chercher, par contrat, à tous les utiliser sauf si l'enseignant précise en avoir peut-être donné trop. 2e cas : on a des cubes mais en quantité non suffisante. On va donc avoir recours à une représentation des tours. Lors du passage à la représentation des tours, il sera important de matérialiser une « origine de lecture » des couleurs des tours. Ce pourra être un trait représentant le sol sur la feuille. On fournit plus de 24, (30 par exemple) étiquettes « tour » indépendantes de 4 étages et plastifiées, effaçables, prenant en charge l'orientation sur lesquelles les élèves pourront colorier, marquer d'un point coloré ou écrire/coder les couleurs. Comme dans le cas du matériel tangible, il nous semble déterminant de laisser à la charge de l'élève, le contrôle du nombre maximum de tours différentes (i.e. la réponse au problème posé). Sur papier, si toutes les tours sont pré dessinées, l'élève peut chercher coûte que coûte à remplir toutes les cases.
2/ S'assurer de la compréhension de la mise hors et en contexte : évocation du réel, modélisation avec du matériel géométrique	Qu'appelle-t-on une tour dans cette situation ? 4 cubes de couleurs différentes empilés dans un ordre et une orientation déterminés. Présenter plusieurs assemblages de cubes, certains représentant des tours d'autres non : nombre de cubes incorrect, assemblage incorrect (comme ci-dessous), couleur répétée.  4 couleurs dans un ordre différent, c'est une nouvelle tour.

	La question de l'orientation doit émerger « Vert-Jaune-Bleu-Rouge est-ce identique à Rouge-Bleu-Jaune-Vert ? » Les tours sont présentées verticalement pour proposer un même point de vue aux élèves quelle que soit leur position autour de la table (ce qui ne serait pas le cas si les tours étaient « couchées » sur la table). Selon le matériel utilisé cette question de l'orientation sera ou non prise en charge : par exemple avec des cubes à ergot emboîtables, on ne pourra faire reposer la tour sur la table que d'une façon (ce qui distingue matériellement VJBR de RBJV).
3/ S'assurer de la compréhension du identique/différent	Montrer des tours et demander : « Reconnaître les tours identiques parmi celles présentées » JBVR ; RVBJ ; RVBJ ; JRVB ; RVJB ;  Enjeu : pour certains élèves, deux tours sont identiques dès qu'elles ont un niveau de même couleur (souvent le 4e). Trace écrite pour institutionnaliser : La dénomination des niveaux ; S'assurer que l'on a bien les quatre couleurs différentes ; L'identique/ le différent : photos de tours identiques ; photos de tours différentes ; Une correspondance terme à terme des cubes des tours induit la question de l'orientation (l'ergot fixe l'orientation soit en haut, soit en bas). Pour repérer, on peut recourir au vocabulaire spatial ou au vocabulaire ordinal. On retrouve ici la nécessité de définir une « origine de lecture » des couleurs des tours évoquée au déterminant 1/. La désignation devra être précisée : organisation spatiale liée à une désignation de position. Pour éprouver le « identique/différent » : A/ On peut comparer à partir d'une collection de tours produites par les élèves : la tâche de comparaison pourrait s'effectuer en prenant une tour et en la comparant successivement à celles produites. B/ Si on demande aux élèves de produire une tour « pas identique » : on montre une tour aux élèves et on leur demande d'en construire une « différente » : cela oblige les élèves à expliciter le critère de comparaison/différenciation. On peut ensuite demander aux élèves de comparer leurs tours entre eux.
4/ S'assurer de disposer d'un espace de travail disponible suffisant	En lien avec l'utilisation du matériel et la possibilité offerte de réaliser un grand nombre de tours, il est important de prévoir un espace de recherche suffisant pour chaque élève ou groupe d'élèves.
5/ S'assurer d'un temps de recherche suffisant pour chaque élève.	Laisser une durée suffisante de première recherche des élèves pour permettre au plus grand nombre : • de réaliser des tours diverses, • de questionner le respect ou non de la consigne par le/la PE au sein de chacun des groupes (nombre de niveaux et non répétition des couleurs).

	Dans le cas où les élèves cherchent à remplir l'espace (cf. point précédent), soit on décide de les laisser chercher pour prendre finalement conscience qu'ils ne peuvent en produire d'autres, soit le/la PE intervient pour faire expliciter les raisons qui permettent de se convaincre que l'on ne peut plus construire de tours (par exemple en incitant à un traitement séquentiel, cf. point suivant).
6/ Identifier des relances possibles de l'étude pour : a) constater la présence ou non de doublons, b) poursuivre la recherche, c) déterminer si on a trouvé toutes les solutions	a) Pour constater la présence ou non de doublons, développer le geste de la comparaison directe (encourager les élèves à rapprocher les deux tours côte à côte, comme le geste effectué par le/la PE lors de la mise en commun du identique/différent) en lien avec l'affichage (cf. 3/) et ainsi accéder à une justification. b) Exemple de relances : « On pourrait commencer par chercher quelles sont les couleurs du premier niveau des tours possibles » « On pourrait faire la collection des tours de premier niveau rouge, la collection des tours de premier niveau bleu… ». *Lien avec le déterminant 7/ « Exhiber à partir des productions d'élèves les organisations naissantes pour répondre aux questions ».* c) Relance PE « Est-ce que je peux en faire une de plus ? » Si oui, « parce que j'ai le premier niveau rouge et je n'ai pas de deuxième niveau bleu » (par exemple). Si non, quand j'ai pris le premier niveau rouge, j'ai le deuxième niveau de chacune des autres couleurs puis le troisième niveau d'une des couleurs restantes et le quatrième niveau de la dernière couleur. On visera à faire émerger la découverte d'une organisation favorisant, à terme, la recherche (la preuve) de l'exhaustivité.
7/ En cours d'étude, exhiber, par des mises en commun intermédiaires, à partir des productions d'élèves les organisations naissantes pour répondre au problème et permettre aux autres de se les approprier	Déceler les organisations en acte des élèves : Exemples : créer le premier niveau d'une même couleur ou fixer les couleurs des deux premiers niveaux ou …
8/ Relancer l'activité pour passer de la phase « on en cherche le plus possible » à celle de « on les cherche toutes »	Lors de la mise en commun de l'étape : « trouver le plus possible de tours différentes », pointer l'incertitude que sur l'ensemble des groupes d'élèves, on a bien construit le plus de tours possibles. Notre nouveau problème consiste donc à trouver une validation du fait qu'on les a ou non toutes trouvées.
9/ Institutionnaliser	L'objectif d'apprentissage est de construire une stratégie d'énumération de tous les cas possibles. On s'appuiera sur celles proposées par les élèves en classe et on visera à formuler une institutionnalisation faisant émerger les points suivants : rappeler qu'une tour doit respecter deux contraintes : • un nombre donné de niveaux ; • une couleur différente par niveau. Institutionnalisation possible : « Pour trouver toutes les tours possibles et ne pas en oublier, on doit organiser sa recherche :

	1re organisation possible : on choisit d'abord la couleur du premier niveau, une couleur différente pour le deuxième, il reste alors deux choix pour le troisième niveau et le quatrième est imposé. On recommence en modifiant la couleur du deuxième niveau tant que c'est possible. On recommence en changeant la couleur du premier niveau ou alors on dénombre les tours possibles obtenues en ayant fixé la couleur du premier niveau et on multiplie par 4. 2e organisation possible : on cherche les choix de couleur possibles pour le premier niveau, à chacun de ces choix on fait correspondre les choix possibles pour le deuxième niveau et ainsi de suite (en respectant les contraintes). Un arbre est un outil possible permettant d'illustrer les organisations de la recherche pour parvenir à l'énumération de tous les cas possibles.
10/ S'assurer d'un nombre de séances suffisant permettant de mettre en œuvre chacune des phases de la situation.	Ce déterminant résulte de l'identification des déterminants précédents que l'on retrouve dans les différentes phases de la situation.

ANNEXE 6 EXEMPLES D'INSTITUTIONNALISATIONS PRODUITES EN CLASSE

Ce que nous avons appris :

► Ce problème a plusieurs solutions.

► Il faut s'organiser pour ne pas oublier de tours ou pour ne pas faire plusieurs fois la même tour :

– On peut faire toutes les tours avec une même lettre au début. Après on fait des tours avec une autre lettre au début. À chaque fois, il faut bien regarder si on n'a pas déjà la tour.

– On peut faire une tour puis la renverser.

► Nous avons remarqué qu'il y a 6 tours qui commencent par une même couleur :

V	J	J	V	R	R
R	V	R	J	J	V
J	R	V	R	V	J
B	B	B	B	B	B

6 + 6 + 6 + 6

Figure 1. Classe de CE1, Sylvie



Figure 2. Classe de CP, Vincent

LA NOTION D'ANGLE DU « PAPIER-CRAYON AU « GOUDRON-CRAIE »

Richard DEBORDE
Formateur, INSPÉ de l'académie de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1
richard.deborde@univ-lyon1.fr

Sonia YVAIN-PRÉBISKI
MCF, Université Claude Bernard Lyon1
S2HEP UR 4148
sonia.yvain@univ-lyon1.fr

Résumé
Ce texte rend compte d'un atelier dont l'objectif est double. Le premier est de faire découvrir une micro-ingénierie basée sur les restaurations de figures dans différents espaces pour aider à la conceptualisation de la notion d'angle à la fois comme surface et comme écartement entre deux directions. Le second est d'en étudier les potentialités pour la formation des élèves, des étudiants en formation initiale et des enseignants.

Nous proposons dans un premier temps de définir les enjeux de l'apprentissage de la notion d'angle, de présenter les principes des problèmes de restauration de figure et de préciser le rôle des instruments dans la conceptualisation. Ensuite nous présenterons les quatre séances qui composent la micro-ingénierie expérimentée et analysée lors de l'atelier. Enfin nous rendrons compte du déroulement de l'atelier.

I - LE CONCEPT D'ANGLE

1 Quelques préalables à prendre en compte pour l'enseignement de la géométrie

1.1 Les niveaux de géométrie

Pour Perrin-Glorian et Godin (2018), le problème majeur de l'enseignement de la géométrie tient dans la façon de traiter le rapport entre objets réels et objets géométriques, entre les figures théoriques et leurs représentations. On constate en effet une rupture au cycle 4 où l'enseignement bascule d'une géométrie dessinée à une géométrie d'énoncés et de théorèmes. Pour que cette rupture soit source de moins de difficultés, à la fois pour les enseignants et pour les élèves, il convient de créer une progression cohérente des connaissances depuis l'école primaire. Houdement et Kuzniak (2006) ont défini trois paradigmes géométriques appelés GI, GII et GIII. L'analyse des travaux d'élèves à partir de ceux-ci permet de comprendre la rupture entre l'école et le collège ainsi que les difficultés que rencontrent les enseignants et les élèves qui doivent passer de GI à GII sans que cela soit réellement explicite. GI est la géométrie dite naturelle, elle s'exerce sur des objets représentés, la validation s'appuie sur la réalité sensible, sur des relations visibles. Elle correspond au niveau auquel sont placés les élèves de l'école élémentaire. GII est la géométrie axiomatique naturelle. Elle s'appuie sur des axiomes et la validation provient des lois hypothético-déductives. La perception visuelle des objets reste importante. C'est la géométrie d'Euclide, celle qu'on enseigne aux élèves de collège. GIII est la géométrie axiomatique formaliste. Elle ne recourt plus aux objets réels, elle est strictement abstraite, et ne s'enseigne pas avant l'université. Pour Perrin-Glorian et Godin (2018), le changement de paradigme ne peut se réaliser qu'en permettant des allers-retours entre GI et GII, en instaurant une continuité entre eux. Ils définissent pour cela une géométrie des

tracés (GT), intermédiaire entre la géométrie physique et la géométrie théorique : « les figures planes tracées sur une feuille de papier avec des instruments qui permettent de reporter des formes et des grandeurs constituent un milieu riche pour représenter les savoirs de base de la géométrie élémentaire plane » (Ibid, p. 14). Les objets idéaux de l'espace y sont modélisés par des représentations obtenues avec des instruments de tracé. Ceux-ci, ainsi que ceux de report de grandeurs jouent un rôle prépondérant : ils portent en eux une conceptualisation des notions géométriques de base (les instruments de mesure sont exclus parce qu'ils relèvent du domaine numérique). Six catégories d'instruments dits « théoriques » sont utilisées : la règle, le compas, l'équerre, le reporteur de longueurs, le médiateur de segments et le reporteur d'angles. Le terme « théorique » renvoie à la finalité recherchée par le sujet qui va au-delà de la simple construction d'un dessin. Ces instruments ont bien entendu leurs versions matérielles qui les rendent manipulables pour effectuer les tracés réels, la visée étant alors pratique (géométrie GI), mais ils peuvent aussi avoir un usage géométrique lorsqu'il est guidé par des axiomes, des définitions et des théorèmes (géométrie GII). Par exemple, un usage pratique des instruments pour reproduire un triangle EFG dont le côté [FG] est déjà tracé, en ayant à disposition une règle, un reporteur de longueurs et un reporteur d'angles, peut correspondre aux tentatives des élèves de reports des longueurs FE et GE en ajustant au fur et à mesure pour construire le point E, un usage géométrique peut être guidé par la propriété d'isométrie des triangles et consisterait par exemple à reporter les angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$ pour construire le point E comme point d'intersection des côtés de ces angles. Ce type de tâche, appelé restauration de figure (voir paragraphe 2) place les élèves dans un milieu où les contraintes sur les instruments et les figures à reproduire amènent à mobiliser des propriétés géométriques pour résoudre des problèmes pratiques. Ainsi la géométrie des tracés peut servir de point d'appui pour faciliter la transition entre GI et GII.

1.2 La perception

La rencontre avec la géométrie se fait en cycle 1 avec un travail visuel, de reconnaissance de quelques solides et formes planes que les élèves commencent également à reproduire et dessiner (MEN, 2024). Au cycle 2 apparaissent les instruments qui vont servir à la fois à tracer et à vérifier des propriétés liées aux concepts fondamentaux cités précédemment, les élèves étant amenés progressivement à ne plus se fier uniquement à leur vision. Or, pour Duval (2005), la capacité à percevoir des propriétés « qualitatives » d'une figure est « le seuil le plus difficile et le plus décisif à franchir pour comprendre ce qu'est la démarche géométrique ». Cela demande en particulier de se détacher des mesures de grandeur pour se concentrer sur les aspects qui ne dépendent pas de l'échelle de travail. La perception géométrique implique un effort cognitif pour ne pas rester sur ce que Duval nomme la visualisation iconique (les formes sont d'abord reconnues comme contour d'une surface) qui est un obstacle à la décomposition de toute figure en autres unités figurales de même dimension ou de dimension inférieure. Il y a nécessité pour l'apprenant de parvenir à une visualisation « non-iconique », autrement désignée sous le terme « déconstruction des formes ». L'enseignement doit donc entraîner à un déplacement du regard, à la « déconstruction dimensionnelle ». Un solide (forme 3D) se décompose en polygones (formes 2D) qui se décomposent en segments de droites (formes 1D) qui se décomposent en points (formes 0D)[1]. Duval et Godin (2005) insistent sur la distinction entre la visualisation d'un assemblage de formes par superposition ou par juxtaposition (figure 1) et l'effort que cela demande pour dépasser la perception initiale, à cause de « l'ambivalence gestaltiste de toute figure où l'on distingue au moins deux contours fermés ».

[1] On reprend ici les notations de Duval (2005) : nD signifie « en dimension n »

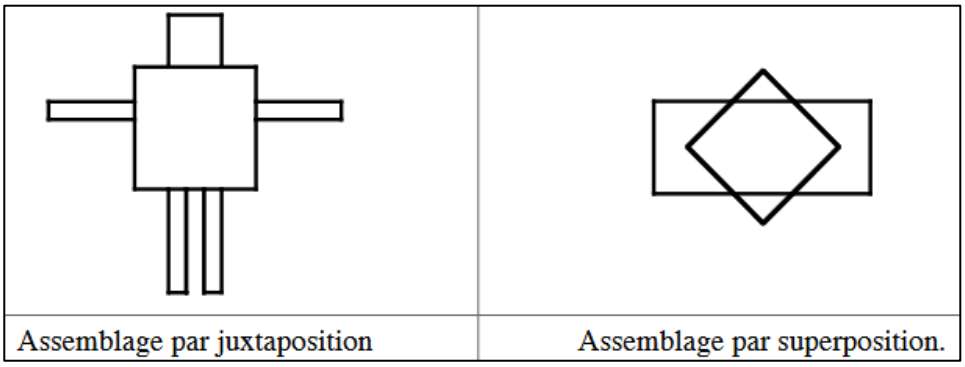


Figure 1. Deux types d'assemblage figural de formes en 2D, Duval & Godin (2005, p. 9)

Pour changer de façon de voir l'assemblage, il faudra passer par des manipulations de gabarits ou des prolongements de tracés. Ces derniers nécessitent de percevoir des objets 1D finis (segments) comme étant portés par des objets 1D infinis (droites et demi-droites) qui ont une direction. En outre, quel que soit le type d'assemblage repéré, le regard identifie des formes 2D et non les formes 1D et c'est donc l'enseignement qui va devoir permettre la déconstruction dimensionnelle pour analyser les figures en dépassant la perception première. Pour ce faire, il faudra varier les instruments disponibles et en proposer qui prennent en charge des surfaces (2D) et d'autres qui produisent des éléments 1D. Enfin, pour que les élèves entrent dans « une manière mathématique de voir les figures » (Duval, 2005, p. 27), deux types de capacités sont à développer : la déconstruction des formes 2D en un réseau de droites dont les formes 2D sont des sous-figures, et inversement la reconnaissance de toutes les formes 2D dans un réseau de droite. Toujours selon Duval (2005), l'acquisition des connaissances géométriques nécessite l'articulation des deux registres de représentation géométrique que sont les tracés et les énoncés. Ce qui est nommé « figure » est un dessin accompagné d'un discours (codages, hypothèses). Or le dessin induit une vision majoritairement 2D alors que les propriétés portent généralement sur les objets 1D ou 0D. La déconstruction dimensionnelle est ainsi une étape indispensable pour expliciter les connaissances géométriques et surmonter le « hiatus dimensionnel ».

2 Les restaurations de figure

2.1 Les espaces

Pour Brousseau (2000), trois tailles d'espace sont à considérer lorsqu'on cherche à modéliser les connaissances spatiales et géométriques. Dans le micro-espace, les objets sont manipulables, on peut identifier toutes leurs propriétés, leurs positions et leurs formes intégralement. L'élève ne fait pas partie de cet espace. Le méso-espace contient l'élève, qui peut agir sur certains objets mais doit aussi adapter ses propres déplacements. Tous les éléments présents dans cet espace sont accessibles par la vue. Enfin, dans le macro-espace, l'élève ne perçoit qu'une partie des éléments et doit avoir recours à des représentations de cet espace pour en concevoir mentalement les formes, positions et propriétés.

2.2 Les restaurations de figure

Pour répondre au besoin de développement d'une vision 1D, un groupe de recherche de Lille a développé des situations de restauration de figure (Keskessa, Perrin-Glorian, Delplace, 2007) dans le micro-espace pour aider les élèves à effectuer la déconstruction dimensionnelle. Ces situations sont définies par trois caractéristiques : le problème et les règles du jeu, le milieu et ses variables didactiques, les connaissances en jeu (Perrin-Glorian et Godin, 2018). Dans ces situations, le problème à résoudre est la reproduction d'une figure pour laquelle on dispose d'un modèle et d'un début de reproduction (l'amorce). Les instruments à disposition sont un élément important du milieu, ce sont eux qui vont permettre d'explorer la figure à reproduire, de vérifier les propriétés géométriques à utiliser pour construire. Dans certains cas,

un système de coût des instruments est mis en place pour privilégier le recours à certains d'entre eux. Ces restaurations de figures visent prioritairement les apprentissages peu explicités dans l'enseignement (définition d'un segment de droite, unicité de la droite qui passe par deux points distincts, obtention d'un point par intersection de deux lignes) ; elles permettent également d'amener à enrichir le modèle avec des tracés supplémentaires faisant apparaître des objets liés à ceux que l'on cherche à obtenir. Elles impliquent une déconstruction dimensionnelle puisqu'il faut dépasser la visualisation iconique de la surface pour isoler les segments qui constituent les côtés, portés par des droites qui peuvent être sécantes et définir des points nécessaires à la reproduction. Les élèves ont à résoudre un problème dans l'espace graphique, et pour y parvenir, les éléments perçus sur le dessin sont à considérer comme des représentants d'objets géométriques idéaux, faisant appel à un modèle géométrique en géométrie des tracés. Par exemple, un segment pourra être prolongé pour faire apparaître un point comme intersection de deux droites. Pour Mathé et Mithalal (2019), la dimension langagière est absente dans les situations de restauration, qui sont des situations d'action (au sens développé dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998)). Or cette dimension est essentielle pour effectuer le changement de paradigme entre les géométries GI et GII. Les connaissances mobilisées pour reproduire une figure demeurent souvent implicites, utilisées dans l'action pour résoudre un problème. Si le milieu est auto-suffisant pour apporter les rétroactions assurant la réussite ou l'échec, alors le recours au langage n'est pas indispensable alors que c'est bien en produisant un discours que les élèves vont rentrer dans une dimension plus théorique de la géométrie. Pour préciser leur propos, notons qu'ils s'intéressent aux trois dimensions de toute activité humaine : agir - parler - penser. Selon eux, celles-ci sont cohérentes si la connaissance liée est stable et les observer donne accès aux significations que revêtent les notions chez les élèves. L'action seule est insuffisante pour la conceptualisation, ils préconisent donc d'y associer des situations de formulation et de validation.

Une modalité semble fournir des conditions propices à l'apparition de langage (parler-penser) dans les situations de restauration. En effet, dans les tâches de reproduction de figure sur papier, Perrin-Glorian et Godin (2018) considèrent deux cas. D'une part, la reproduction par isométrie peut être validée en superposant du papier calque, ce qui ne demande pas de réinvestir les éventuelles propriétés utilisées lors de la construction. D'autre part l'agrandissement-réduction oblige à valider en utilisant des propriétés reliant les objets géométriques (conservation des rapports de longueurs, des alignements et des angles). Cette dernière modalité implique un besoin de langage autre que graphique pour justifier de l'exactitude des tracés en se référant aux propriétés qui ont été repérées sur le modèle et qui étaient transférables. En outre, l'une des conclusions de la thèse de Berthelot et Salin (1992) était : « Dans une tâche de construction ou de reproduction de configuration spatiale, lorsqu'on passe du micro-espace au méso-espace, il y a augmentation du recours effectif aux connaissances de géométrie. » (p. 193)

Pour prendre en compte toutes ces considérations, nous avons décidé de proposer des restaurations de figure dans le cas d'un agrandissement dans le méso-espace.

3 Conceptualisation de la notion d'angle

3.1 Le concept d'angle : deux conceptions

Dans l'espace sensible, les angles sont présents dans des bâtiments, lors des déplacements quand il y a changement de direction, dans l'inclinaison des arbres, la formation des ombres par les rayons du soleil. Dans l'*Encyclopédie* (Diderot, M. (Ed.), 1778), les angles sont cités comme intervenant en mécanique, en optique, en astronomie, en navigation, en architecture, en tactique militaire, en anatomie, en géologie.

Pour limiter l'étude de cette vaste notion, et se concentrer sur les aspects didactiques, nous nous contentons d'en explorer les connaissances scolaires, notre objectif étant de trouver des moyens permettant aux élèves de cycle 3 de dépasser quelques difficultés. Balacheff (1988) en a pointé la principale, rencontrée par les élèves sur le concept, comme suit :

> *L'angle est alors conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts. Avec une telle conception deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent, apparaissent comme représentant deux angles différents. (Balacheff, 1988, p. 371).*

Pour Munier et Merle (2007), l'un des obstacles résistants concernant le concept d'angle est d'en avoir une conception de type 2D, c'est-à-dire comme une portion d'espace délimitée par deux segments. Cette perception conduit à des erreurs dans les tâches de comparaison d'angles : deux angles de même mesure représentés par des secteurs angulaires d'aires distinctes seront perçus comme différents. D'après ces auteures, la pratique de l'enseignement de l'angle droit en cycle 2 est une des causes de la difficulté à passer à une conception « écartement » : le travail est en effet effectué avec des gabarits d'angles droits, ce qui donne une vision statique de l'angle et non dynamique (c'est une petite surface fixe).

Deux conceptions de la notion d'angles sont donc rencontrées : l'une de type surface (2D) et l'une de type écartement (1D). La première induit des erreurs, et il semble donc nécessaire de l'enrichir en développant la seconde.

3.2 Les instruments

Aucun instrument spécifique mettant en avant l'angle comme écartement n'est cité dans les documents officiels. En effet, dans les programmes du cycle 3 (MEN, 2025), seuls le recours à du papier calque ou à des gabarits sont cités pour comparer ou reproduire des angles. Avec le papier calque le dessin est figé et les informations transportées sont les longueurs des côtés et la surface intérieure du secteur angulaire. Les gabarits doivent permettre de reproduire des angles, or ils sont assimilables à des surfaces, de la même façon que les équerres pour les angles droits. Ces outils ne prennent pas en charge la vision dynamique d'écartement entre deux directions. Les reporteurs d'angles (figure 2) évoqués par Perrin-Glorian et Godin (2018) n'apparaissent pas, alors qu'ils semblent efficaces pour accompagner les élèves dans la construction du concept d'angle comme écartement entre deux directions. L'utilisation du compas pour reproduire un angle fait appel aux propriétés des triangles isométriques et n'est donc pas directement liée à la définition de l'angle. Conformément aux recommandations de Perrin-Glorian et Godin (2018), nous excluons les rapporteurs de la liste des instruments à envisager puisqu'ils impliquent la mesure.

L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre aide à percevoir différemment les objets. Par exemple, construire un carré avec une règle non graduée et un compas, sans équerre, requiert des connaissances sur les médiatrices et des schèmes d'utilisation du compas. Dans le cas des angles, un gabarit porte davantage une vision de type surface : c'est un outil figé, correspondant à un seul angle, il transporte toute une partie du plan et il ressemble aux objets utilisés par les élèves depuis le cycle 1 dans le travail sur les formes géométriques. Un reporteur constitué de bras articulés est quant à lui dynamique, utilisable pour tout type d'angle, ce qui favorise une vision « écartement de deux directions ».

Il apparaît ainsi pertinent de ne pas seulement fournir aux élèves des gabarits pour le travail sur les angles.



Figure 2. Reporteur d'angles

3.3 Influence de l'espace

Dans le micro-espace, suivant les conclusions de Duval (2005), la vision première est la surface : l'angle fait partie d'un polygone entièrement visible, il est limité par des segments. Cette perception est encouragée par les instruments permettant de le représenter qui sont du type 2D : gabarits et papier calque transportent une partie du plan et peuvent se révéler efficaces.

Dans le méso-espace, la perception globale peut être entravée. Le sujet ne peut pas se placer face au dessin, il doit se déplacer s'il veut changer de point de vue et la vision est déformée. L'utilisation d'un papier calque devient peu opérationnelle à cause de la taille des figures et les gabarits pourraient se révéler moins efficaces. L'angle peut davantage être appréhendé comme écartement entre deux directions (1D) du fait des déplacements du sujet qui va être amené à viser pour anticiper des tracés. Dans ce cas l'utilisation d'un reporteur d'angles constitué de deux branches amovibles pourrait revêtir une plus grande efficacité.

II - UNE MICRO-INGÉNIERIE VISANT LE TRAVAIL SUR LES ANGLES AU CYCLE 3

1 Objectifs

Prenant en compte les conclusions précédentes, nous avons conçu une séquence composée de quatre séances centrées sur des problèmes de restauration de figures que nous allons présenter dans la suite. L'objectif global de la séquence est d'amener les élèves à reproduire une figure en utilisant ses angles, ses longueurs ou rapports de longueurs, et des propriétés d'alignement (Deborde, 2025).

Les compétences du programme de cycle 3 principalement visées sont :

- **Représenter** : analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points)
- **Raisonner** : passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets

En réalisant les différentes tâches de restauration, les actions imposées par les instruments à disposition doivent contribuer à un élargissement de la compréhension de ce qu'est un angle et permettre une conceptualisation de l'angle comme portion de l'espace et aussi comme écartement entre deux directions. Les élèves sont répartis en groupes de 3 ou 4 pour l'ensemble des activités. Cette organisation doit permettre des échanges verbaux, ce qui participera à l'évolution des conceptions sur la notion d'angle.

2 Séances en classe : papier-crayon

2.1 Matériel

Les instruments mis à disposition sont :

- Une règle non graduée qui sert à vérifier des alignements et à tracer des segments ;
- Une règle informable qui sert à reporter des longueurs. À partir d'un point matérialisé sur un segment existant, on peut reporter une longueur et obtenir un nouveau point. Elle est en plastique souple, de longueur environ 20 cm, de façon à pouvoir reporter la plupart des longueurs sur une feuille A4 ;
- Un reporteur d'angles ;
- Plusieurs gabarits d'angles (30°, 40°, 60°, 80°, 100°, 120°) : ce sont des surfaces en bois délimitées par deux segments de longueurs égales à 4 cm et un arc de cercle.



Figure 3. Gabarits micro-espace

Pour chacune des restaurations, la validation pourra s'effectuer par superposition d'un papier calque comportant le modèle. Un écart ne dépassant pas 1 mm entre chaque côté doit être toléré pour valider la construction.

2.2 Séance 1

Il s'agit de deux restaurations de figures simples, c'est à dire la reproduction d'un quadrilatère puis d'un triangle dont un des côtés sera déjà reproduit. La construction se fera sur papier blanc uni au format A4.

Première figure à reproduire

C'est un quadrilatère convexe avec quatre angles différents (figure 4), figure simple avec laquelle les élèves sont familiarisés, qui ne pose *a priori* pas de difficulté d'analyse. Le caractère convexe implique une visualisation des angles à l'intérieur de la surface, ce qui paraît suffisant pour une première approche du concept. Les quatre côtés ont des longueurs distinctes pour que les élèves puissent les repérer plus facilement lors du travail de restauration. De même les quatre angles sont tous différents pour éviter les ambiguïtés pendant l'analyse et les échanges.

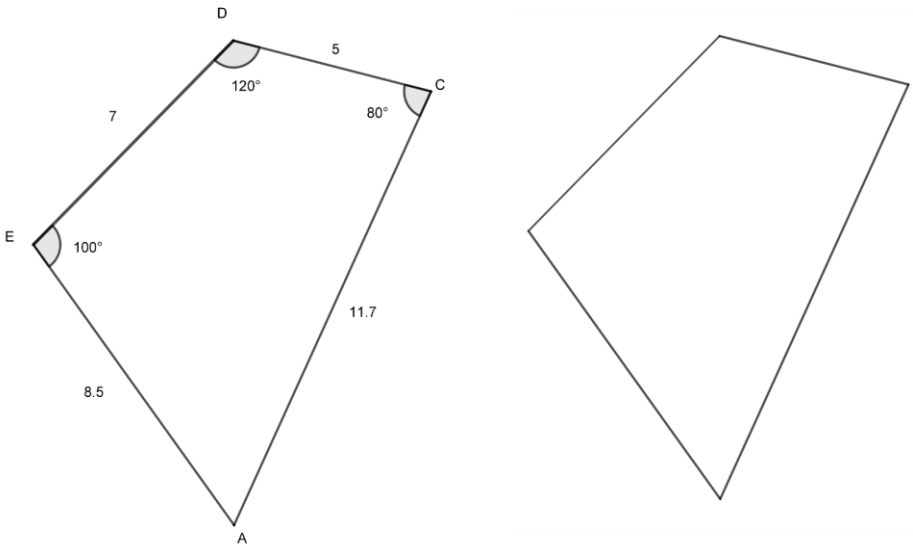


Figure 4. Séance 1, figure 1, modèle élève à droite

Les gabarits fournis ont des côtés de longueurs inférieures à tous les segments du modèle pour qu'ils ne puissent pas offrir la possibilité d'un report de longueur. Ils autorisent plusieurs possibilités de construction (par exemple l'angle $\widehat{EDC}$ peut se reporter en utilisant le gabarit de 120°, ou en utilisant deux fois le gabarit de 60°, ou en accolant les gabarits de 80° et 40°). Ceci permet de rencontrer la propriété d'addition des angles. Ce n'est pas l'objectif de la situation mais si cela est évoqué pendant les échanges collectifs, cela viendra compléter la conceptualisation de la notion.

Le modèle est imprimé sur une feuille de papier uni blanc au format A5, chaque élève en a un exemplaire pour pouvoir faire des investigations dessus individuellement.

Chaque groupe a une autre feuille de papier blanc uni, au format A4. L'amorce y est dessinée au centre, c'est le côté [ED], non précisé aux élèves, à la même échelle que le modèle. C'est aux élèves de l'identifier. Ils peuvent reporter la longueur de l'amorce sur la règle informable puis vérifier sur chaque côté du quadrilatère sur le modèle. À l'inverse, ils peuvent reporter chaque longueur de côté du quadrilatère sur l'amorce. Celle-ci est placée de telle sorte que la restauration peut se réaliser dans toutes les directions, le dessin tiendra complètement dans la feuille quel que soit le choix.

Le modèle et l'amorce sont sur des feuilles séparées :

- Cela permet à chaque élève d'avoir un modèle pour l'analyser ;

- Les orientations sont aléatoires et la reproduction « au jugé » en traçant dans des directions parallèles au modèle est grandement empêchée.

Seconde figure à reproduire

Cette deuxième tâche doit permettre de réinvestir tout de suite les apports du premier travail pour que les élèves s'approprient les procédures de report d'angle.

Le modèle (figure 5) est un triangle isocèle, l'amorce est le segment [FB]. Les angles de la base mesurent 50°. Il n'y a pas de gabarit correspondant à cette mesure. L'objectif de ce choix est de donner plus de légitimité à l'utilisation du reporteur d'angles.

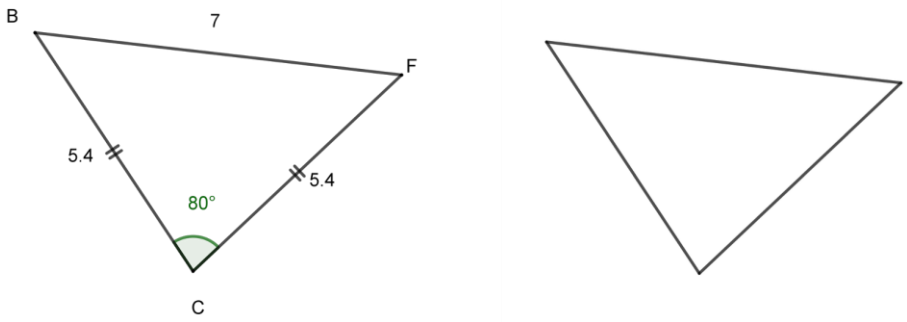


Figure 5. Séance 1, figure 2, modèle élève à droite

2.3 Séance 2

Cette fois, la figure est à agrandir (les longueurs du modèle sont doublées) sur une feuille unie blanche au format A3. Le rapport d'agrandissement n'est pas donné, c'est aux élèves de le déterminer. Les élèves restent dans le micro-espace, le milieu est proche de celui de la séance 1 : la figure est dessinée sur une feuille de papier A5 uni blanc, les instruments à disposition ne changent pas, ils travaillent avec le même groupe et la validation s'effectue de la même façon.

Les angles sont invariants par agrandissement, ce qui en fait un élément très pertinent pour la restauration, un simple report du modèle vers l'espace de travail suffit.

La figure modèle (figure 6) est un assemblage des deux figures de la séance 1. D'après Duval (2005), la vision première de la figure est iconique, les élèves devraient donc, au premier abord, voir le contour extérieur et les deux polygones et percevoir une ressemblance avec la tâche précédente. Nous nous attendons ainsi à des constructions en deux parties : le triangle CBF et le quadrilatère AEDC.

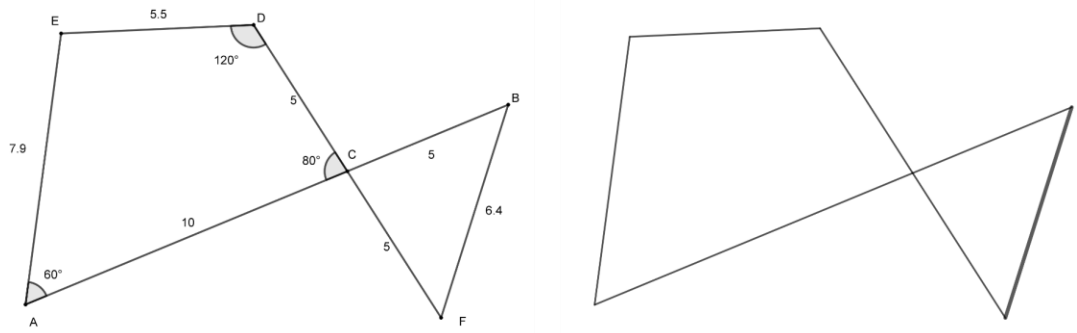


Figure 6. Séance 2, modèle élève à droite

L'agrandissement rend impossible le report direct de longueur. Toutefois le coefficient d'agrandissement est 2, ce qui permet, si on s'en rend compte, d'utiliser la règle informable pour doubler les longueurs des segments.

Les points A, C et B d'une part et F, C et D d'autre part sont alignés. Le repérage de ces alignements est nécessaire pour réussir la restauration, et concourt à la décomposition par déconstruction dimensionnelle.

L'amorce est le segment [BF]. Comme les sommets ne seront pas nommés, ce segment sera repassé en gras et la consigne précisera que c'est ce segment qui est donné comme amorce. C'est la même amorce que pour la seconde figure de la séance 1 et ainsi les élèves peuvent réinvestir les procédures reconnues comme efficaces précédemment. Ils sont contraints d'utiliser le reporteur d'angles puisque les angles $\widehat{CBF}$ et $\widehat{BFC}$ ne sont pas reproductibles à l'aide des gabarits fournis.

3 Séances dans la cour : goudron-craie

3.1 Matériel

Les instruments à disposition correspondent à ceux des séances 1 et 2, mais adaptés à la cour (figure 7), c'est à dire de plus grande taille (les gabarits ont des côtés de 20 cm, les règles informables sont des tasseaux de bois de 50 cm : tous les segments présents sur le modèle peuvent être reportés à l'échelle 1 mais pas agrandis entièrement sur la règle). Pour écrire, on donnera des craies blanches. On fournira de plus des ficelles d'un peu plus de 3 m, utiles pour tracer les segments : elles vont prendre en charge l'alignement sur une grande distance.

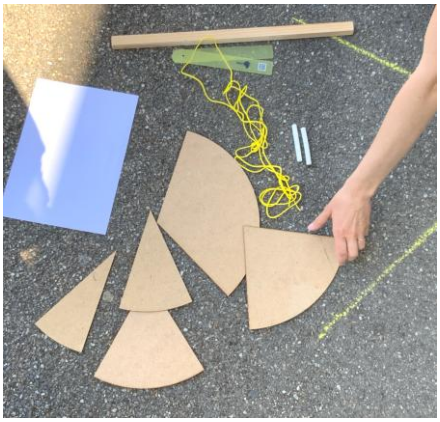


Figure 7. Matériel méso-espace

3.2 Séance 3

La figure est reprise de la séance 2, cette fois sur feuille en format A2. La longueur AB y a une mesure de 45 cm, cette figure est donc un agrandissement de rapport 3 du modèle donné en séance 2. Reprendre la même figure doit favoriser le réinvestissement des concepts mis en place dans le micro-espace. La reconnaissance de la tâche facilitera l'entrée dans le travail de tous les élèves. L'analyse ayant déjà été produite, ils vont pouvoir consacrer plus de temps à la résolution du problème créé par le changement d'échelle et l'utilisation des instruments.

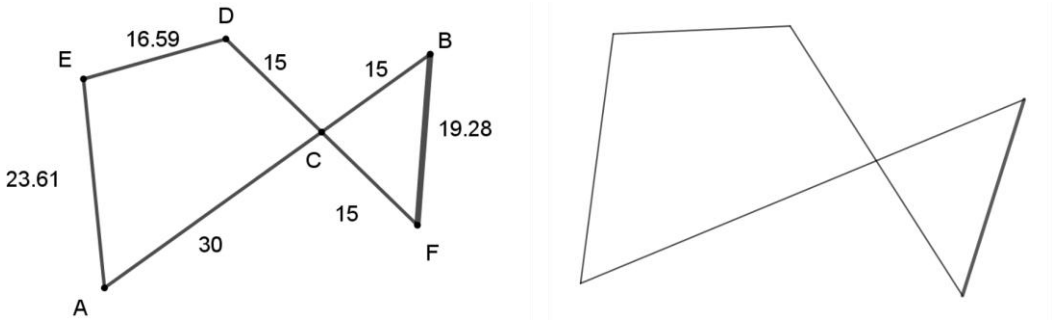


Figure 8. Séance 3, modèle élève à droite

L'amorce est toujours le segment [*BF*]. C'est indiqué explicitement aux élèves : il est dessiné en gras sur le modèle. Dans la cour il est dessiné à la craie, en jaune pour le distinguer des tracés réalisés ensuite, de

longueur 96,5 cm. Cela correspond à un agrandissement de rapport 5. Ainsi la longueur *AB* aura une mesure de 225 cm. Les dimensions placent bien les élèves dans le méso-espace.

Nous prévoyons que le milieu rende plus compliquée l'utilisation des gabarits qui ne transportent qu'une faible portion du plan. S'appuyer sur leurs côtés pour tracer avec la craie ne va produire qu'une toute petite partie du dessin. Cette contrainte devrait conduire à considérer les directions portées par les côtés du gabarit et donc contribuer à développer aussi la vision « direction ». Il est nécessaire d'anticiper que les points (0D) sont alignés avec d'autres ou produits comme intersections de droites (1D), il faut mobiliser une déconstruction dimensionnelle pour articuler les visions 0D et 1D.

3.3 Séance 4

La figure à reproduire est conçue pour avoir des ressemblances avec celle de la séance 3 (figure 9).

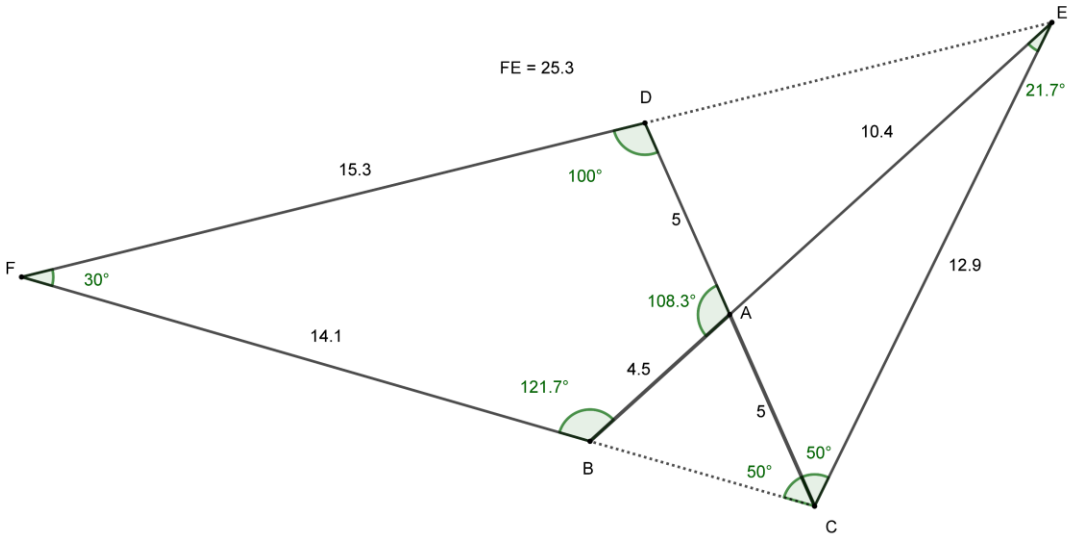


Figure 9. Séance 4 (le modèle donné aux élèves ne comportait aucune donnée)

Le modèle est encore l'assemblage d'un polygone convexe et d'un triangle. De manière analogue à la figure 2, les polygones ont un sommet commun, le point A, et les côtés qui ont ce point pour extrémité sont alignés. De plus, d'autres sommets sont alignés : les points F, D et E et les points F, B et C. Comme les segments [DE] et [BC] ne sont pas dessinés, la vision iconique du dessin ne permet pas de les prendre en compte. L'objectif de ces alignements est donc d'aider à la déconstruction dimensionnelle en considérant que les points E et F sont des objets existant autrement que comme extrémités de segment.

Les angles internes aux surfaces, à l'exception des angles $\widehat{ADF}$ et $\widehat{DFB}$, n'ont pas des mesures qui permettent l'utilisation des gabarits, le milieu impose cette fois encore le reporteur d'angles comme seul instrument efficace.

Le modèle est dessiné sur une feuille au format A2 avec AC = 15 cm. Les points E et F sont alors distants d'environ 76 cm sur le modèle. L'amorce est constituée des segments [AC] et [AB], en agrandissement de facteur 4. Ces deux segments sont repassés en gras sur le modèle et il est explicitement indiqué que les tracés dans la cour correspondent à ces segments. Pour la clarté du propos, les points placés sur l'agrandissement dans la cour seront notés avec un indice 1. Les élèves devront déterminer lequel des deux est [A1C1] en remarquant que c'est le plus long ou plus simplement par reconnaissance globale de la ligne brisée CAB. Le facteur d'agrandissement conduit à une longueur de 304 cm pour le segment [F1E1].

L'exploration du modèle devrait être guidée par les bilans précédents : on peut reporter les angles, repérer des alignements, respecter le rapport d'agrandissement (chaque longueur est à multiplier par 4, ce qui peut se matérialiser par le report de 4 fois la longueur du segment, ce qui ne serait pas possible avec un rapport non entier), trouver des segments de même longueur.

III - L'ATELIER

1 Description des trois phases proposées

1.1 Phase 1 : la restauration papier-crayon

La restauration de figure de la séance 2 a été proposée aux participants. Ceux-ci ont été répartis en 7 binômes et 1 trinôme avec la consigne suivante : « Vous devez reproduire la figure qui est sur le modèle, en partant de l'amorce qui correspond au segment en gras. Pour cela vous avez à votre disposition une règle informable, un reporteur d'angles et quelques gabarits d'angles. »

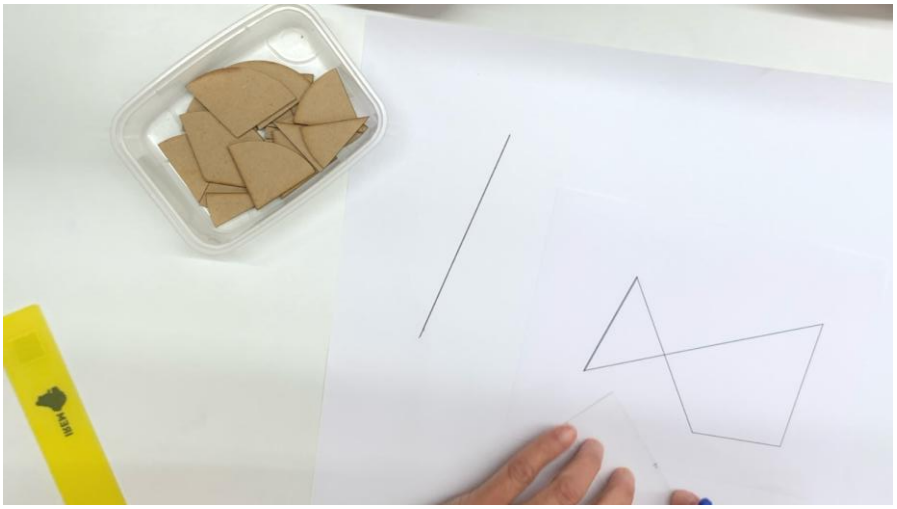


Figure 10. Situation phase 1

Un calque de correction était à disposition pour une validation autonome des constructions. L'objectif était de faire vivre cette première résolution de problème pour en faciliter l'analyse. Pour donner suite à cette tâche, deux questions ont été posées :

1) Quels sont les apprentissages en jeu ?

2) Quel est l'impact du choix des instruments donnés ?

Enfin, des productions d'élèves et un court extrait de vidéo de classe ont été présentés pour conclure cette phase.

1.2 Phase 2 : la restauration goudron-craie

Après l'analyse didactique de la première situation, les participants ont été regroupés en 6 équipes de 2 ou 3. Les équipes ont été nommées A, B, C et 1, 2, 3 pour être associées deux par deux (A-1, B-2 et C-3). La tâche à réaliser était celle de la séance 4 : six amorces ont été dessinées à la craie jaune dans la cour dans six zones pour que chacun ait suffisamment de place pour travailler.

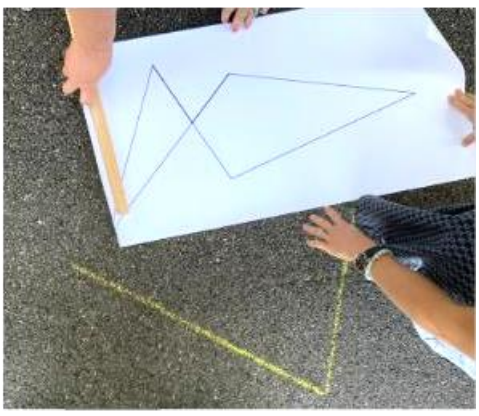


Figure 11. Phase 2

Après la construction, il a été demandé d'élaborer une procédure de validation afin de vérifier le dessin d'un autre groupe, puisqu'il n'y avait pas de calque cette fois. De retour en salle, nous avons questionné l'intérêt du passage dans la cour du point de vue des apprentissages. Des extraits montrant des élèves de CM2 qui se déplacent, se questionnent, manipulent les instruments, ont donné à voir la conceptualisation de la notion d'angles qui se construit.

1.3 Phase 3 : potentiels pour la formation

Deux expériences de formation ont été présentées rapidement. L'une avec des étudiants en 1ère année de master MEEF 1D, l'autre en constellation avec des enseignants de cycle 3. Puis il a été demandé aux participants de s'exprimer sur la pertinence du dispositif.

2 Analyse a posteriori des échanges pendant les trois phases

2.1 Phase 1

Certains participants ont demandé s'il était autorisé de rajouter des traits sur le modèle afin de faire apparaître de nouveaux angles. D'autres ont cherché à résoudre le problème en n'utilisant que les angles et les alignements, sans avoir recours au coefficient d'agrandissement, dans le but d'élaborer une solution plus générale valable quelle que soit l'échelle de la restauration. Cette procédure est possible à condition de tracer de nouveaux segments sur le modèle.

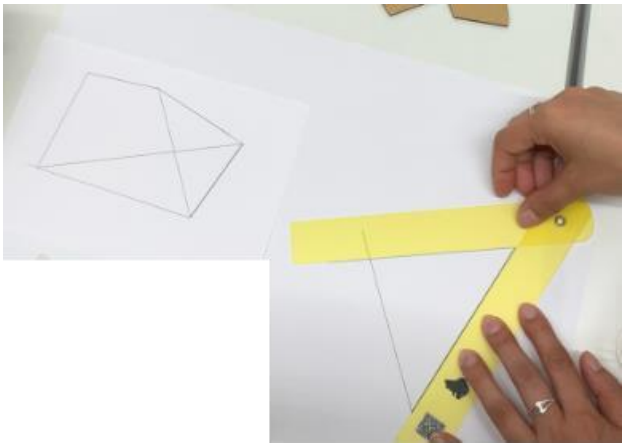


Figure 12. Stratégie de résolution sans longueur

En superposant le calque (figure 13), plusieurs binômes se sont rendu compte de la difficulté de réaliser une construction précise, ce qui pose la question de la différence entre justesse et précision. Les procédures peuvent être correctes sans que les réalisations ne soient parfaitement validées. Cet aspect a suscité un débat entre ceux qui considèrent nécessaire un tracé précis et ceux qui visent prioritairement la construction de concepts géométriques.

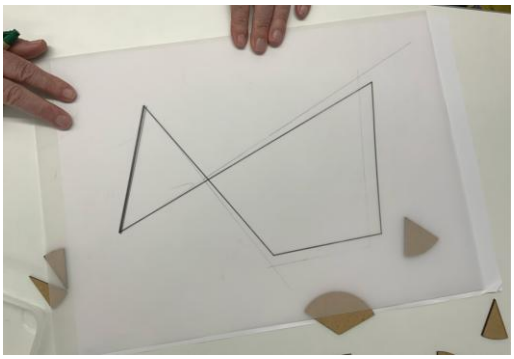


Figure 13. Procédure de vérification

Lors de la mise en commun, les participants ont repéré les potentiels apprentissages suivants :

- La conservation des angles et des rapports de longueur lors de l'agrandissement ;

- Les schèmes d'utilisation des instruments à développer ;
- La notion d'alignement ;
- La notion d'angle ;
- Le constat qu'un report de longueur est plus précis qu'un report d'angle.

Concernant la question sur les choix des instruments et leur impact, les participants ont souligné que :

- Les gabarits aident à la validation ;
- Le reporteur d'angle apporte plus d'imprécision ;
- Les deux bras du reporteur peuvent être bien serrés, ce qui donne l'impression qu'on va bien pouvoir transporter puis tracer l'angle « sans le perdre en route » ;
- Selon ce qu'on utilise comme matériel, on n'a pas la même vision de l'angle ; Les gabarits ont tous la même forme en « arc de cercle », limitant l'image mentale d'un angle comme une portion d'un disque, il serait pertinent de proposer des formes plus variées, avec des longueurs de côtés différentes ;
- Avec le reporteur d'angle, on n'a pas besoin de changer d'outil selon l'angle, contrairement aux gabarits.

Ces constatations rejoignent en partie les observations effectuées dans une classe de CM2. Dans l'extrait vidéo proposé aux participants, on voit les élèves vivre la séance 1 pour découvrir les tâches de restauration et les instruments. Puis lors de la séance 2, tous ont réussi à reporter un angle au moins, au reporteur. Ils ont utilisé l'invariance des angles et ont développé la vision des directions et des écartements grâce à la manipulation du reporteur. L'objet « angle » a été repéré comme constitutif des polygones, ce qui lui a donné un intérêt. Ce sont les reports de longueur qui ont été les moins précis, avec parfois une non prise en compte du rapport d'agrandissement. Lors des échanges, la pertinence du choix de celui-ci a été interrogée. Certains participants ont proposé de modifier l'amorce pour qu'il ne soit pas possible d'utiliser le coefficient et qu'ainsi la notion d'alignement soit incontournable pour réussir. La nécessité d'une verbalisation avec des mises en commun intermédiaires éventuelles a été soulignée pour fixer les apprentissages des notions géométriques et des stratégies de résolution des problèmes de restauration.

2.2 Phase 2

Les participants ont montré un grand enthousiasme à réaliser la tâche. Tous ont commencé par placer le modèle dans la même orientation que l'amorce, contrairement aux élèves de CM2. Ils ont vite saisi l'importance de la ficelle pour créer les alignements (figure 14a). Ils ont utilisé les gabarits et les reporteurs d'angle (figure 14b), pour construire ou pour vérifier les tracés au fur et à mesure.



a. Alignement dans le méso-espace





b. Utilisation des outils de report d'angles

Figure 14.

Après avoir terminé la restauration, les équipes ont élaboré une procédure de validation et l'ont appliquée pour évaluer le travail d'un autre groupe.

Voici les intérêts spécifiques du passage dans le méso-espace que les participants ont relevés :

- La nécessité d'être plusieurs, même à deux, pour manipuler la ficelle, ce qui rend la verbalisation essentielle ;
- Par rapport au papier on ressent plus le besoin de vérifier que tous les angles sont bien reproduits ;
- Le moyen de validation : pas de calque, on vérifie avec les gabarits ;
- La tâche oblige de décomposer la validation en éléments (alors que le calque permet une vérification perceptive globale instantanée) ;
- La précision prend moins de place, puisqu'elle est plus difficile à évaluer ;
- Dans la cour la question de l'alignement arrive plus fortement (l'amorce choisie permet de commencer le tracé par un dessin qui figure une « croix »).

Un débat s'est instauré concernant la précision, encore plus fortement que sur le papier : valide-t-on la figure ou une démarche ? la justesse ou la précision ? Nous avions fourni des tasseaux de 40 cm, trop courts pour prendre en charge les tracés en une fois. L'objectif était de placer les participants face à la difficulté de la notion d'alignement. Ce choix a été discuté : il permet l'apprentissage du prolongement d'un segment afin de conserver l'alignement mais il peut être bloquant et détourner de la notion d'angle.

Un autre aspect a été interrogé, celui des traits de construction : ils sont faciles à gommer sur papier mais pas sur le goudron. Cela oblige à les conserver et certains participants ont essayé de les tracer en pointillés, ce qui s'est avéré peu approprié. Il a été proposé de fournir des craies de plusieurs couleurs, afin que la figure reproduite apparaisse bien malgré les segments rajoutés.

À partir d'extraits vidéo montrant des élèves de CM2 en train de réaliser cette même tâche, quelques difficultés inhérentes au passage au méso-espace ont été illustrées :

- Le passage du modèle à la zone de travail non déplaçable donne un intérêt à nommer les objets ;
- Les élèves font partie de l'espace et doivent s'y déplacer, se positionner dans des directions portées par les segments déjà tracés ou indiquées par les bras du reporteur ;
- Le changement d'échelle est important et déstabilise les conceptions : c'est tellement plus grand que certains élèves pensent que les angles vont aussi grandir ;
- L'amorce est plus difficile à identifier si on n'oriente pas le modèle dans la même direction.

2.3 En formation initiale

Les activités abordées dans l'atelier ont été proposées à des étudiants en 1ère année de master MEEF 1D, sans la phase de validation entre pairs. Ces étudiants ont souvent un a priori très négatif vis-à-vis des mathématiques et en particulier de la géométrie. Il y a un fort enjeu de changer leur sentiment et leurs conceptions. L'activité de restauration les a tous engagés avec motivation. Le travail en équipe les a entraînés à verbaliser les relations géométriques de base, à redécouvrir les objets élémentaires (points, segments, droites, angles, polygones). La situation vécue a servi de référence sur la notion d'agrandissement.

En prenant du recul, l'analyse des choix didactiques des situations a permis de rendre plus concrète la notion de variable didactique. Lors des discussions avec les participants à propos de cette formation, certains ont évoqué le manque de temps disponible pour ce type de travail en M1, ce que d'autres ont contredit en invoquant le besoin de réconciliation. A cette occasion, on a pu s'interroger sur l'ordre des activités. Commencer sur le goudron pourrait avoir encore plus d'impact sur le changement de regard.

2.4 En formation continue

Lors d'une constellation, des enseignants de CM1 et CM2 ont eu envie de travailler sur la géométrie ou les grandeurs. La notion d'angle a semblé l'objet idéal pour combiner les deux domaines. Il leur a été présenté le principe des restaurations de figures et des exemples de travaux dans la cour. Ils ont créé une séquence comportant une séance papier-crayon et une séance goudron-craie de reproduction d'un quadrilatère convexe, fournissant des gabarits, des reporteurs d'angles et des règles informables. Malgré des réticences quant à la faisabilité parce que cela demande du matériel inhabituel et une gestion périlleuse d'un groupe dans la cour, les enseignants ont terminé la constellation en étant convaincus de l'apport positif de ce travail pour leurs élèves. L'une des professeurs des écoles a évalué ses élèves à l'issue de la séquence, utilisant le même test que les années précédentes. Pour la première fois tous les élèves ont dépassé les 75% de réussite, y compris ceux inscrits dans le dispositif ULIS. Les élèves se sont très bien comportés dans la cour, motivés par la tâche. Ils ont pu également observer que ce ne sont pas nécessairement les élèves en réussite scolairement qui ont le mieux réalisé la restauration.

L'analyse a posteriori des situations vécues en classe a permis de faire monter les enseignants en compétences sur la didactique des angles. Ils ont découvert que faire de la géométrie ne se limite pas à utiliser du vocabulaire et réaliser des tracés propres et précis.

IV - CONCLUSIONS-PERSPECTIVES

Les participants ont globalement apprécié le fait de se confronter concrètement à des tâches de restauration de figures dans le méso-espace. Cette mise en pratique d'un dispositif connu a confirmé le potentiel didactique de ces situations, suscité des questionnements et ouvert de nouvelles perspectives.

Les échanges au sein de l'atelier ont permis d'imaginer des pistes d'évolution pour enrichir l'activité :

- Proposer des gabarits plus variés. Ceux que nous avons proposés sont des portions de disque, ils donnent une représentation restrictive des angles qu'on peut développer simplement en diversifiant les formes des surfaces. Il paraît intéressant d'en fabriquer avec des bords en lignes brisées, avec des côtés non isométriques, avec le sommet absent. Cette variété de représentants matériels des angles devrait permettre une conceptualisation plus large de l'objet angle.
- Mettre à disposition des craies de plusieurs couleurs pour distinguer les traits de constructions des traits de la figure finale. En effet, sur papier on peut dessiner en pointillés, appuyer moins fort sur le crayon ou gommer, toutes ces actions ne sont plus vraiment possibles avec une craie sur le goudron.
- Demander aux élèves d'écrire les étapes de leur travail pour tendre vers les programmes de construction.
- En formation initiale ou continue, commencer par les restaurations dans la cour plutôt que sur papier. Cela plongerait les apprenants directement dans les problématiques auxquelles ils ne sont pas habitués, déconstruisant leur rapport à la géométrie. Celle-ci est souvent perçue comme une discipline développant des compétences de tracés rigoureux et de vocabulaire précis, qui sont insuffisantes pour entrer dans les raisonnements.
- En fonction du public formé, adapter les amorces pour que le coefficient d'agrandissement ne soit pas nécessairement un nombre utilisable. Dans les situations prévues pour l'atelier les coefficients sont entiers, ce qui rend possibles les reports de longueurs et peut détourner de la notion d'angle. Avec des coefficients non identifiables, la réussite des restaurations ne passe plus que par la prise en compte de propriétés d'alignement, d'égalités de longueurs, d'angles.

Enfin, plusieurs participants ont émis l'idée que des recherches seraient à mener pour étudier l'apport de ce dispositif auprès d'élèves à besoins particuliers. La manipulation des instruments dans la cour et le

changement de positionnement pourraient en effet constituer une aide, ou conduire à une réflexion sur d'autres types d'étayages que ceux apportés lors de tâches « papier-crayon ».

V - BIBLIOGRAPHIE

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse d'état, Université Grenoble 1.https://theses.hal.science/tel-00326426

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Phdthesis, Université Sciences et Technologies – Bordeaux I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire ; l'étude de l'espace et de la géométrie*, Apr 2000, Rethymnon, Grèce, 67-83. https://hal.science/hal-00515110v1

Deborde, R. (2025). Restaurations de figures : la notion d'angles du « papier-crayon » au « goudron-craie ». *Repères IREM*, 137, 51-64

Diderot, M. (Ed.). (1778). Angles dans L'encyclopédie de Diderot et d'Alembert. (No Title) *https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50533b/f521.item*

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27. Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 11*,* 175-193.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J. et Delplace, J.-R (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Mathé, A.-C. et Mithalal, J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. In Nouvelles perspectives en didactique : *Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques – XIXe école d'été de didactique des mathématiques* (Editions La pensée sauvage, Vol.1). La Pensée Sauvage.

MEN (2024) Programmes d'enseignement pour le développement et la structuration du langage oral et écrit et pour l'acquisition des premiers outils mathématiques de l'école maternelle (cycle 1) et de français et de mathématiques du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2) (B.O. n°41 du 31 octobre 2024). Ministère de l'Education Nationale.

MEN (2025) Programme du cycle de consolidation (cycle 3) (B.O. n°16 du 17 avril 2025). Ministère de l'Education Nationale.

Munier, V. et Merle, H. (2007) Une approche interdisciplinaire mathématiques – physique du concept d'angle àl'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 349-388.

Perrin-Glorian, M.-J. et Godin, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. CORFEM (éd.), *Les savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Besançon : PUFC. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document

CONJUGUER MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA NATURE AUTOUR DE SITUATIONS-PROBLÈMES

Audrey DAINA
Chargées d'enseignement, Haute école pédagogique Vaud
UER MS
audrey.daina@hepl.ch

Xénia SUBILIA
Chargées d'enseignement, Haute école pédagogique Vaud
UER MS
xenia.subilia@hepl.ch

Fabienne BARROCA-PACCARD
Chargées d'enseignement, Haute école pédagogique Vaud
UER MS
fabienne.barroca-paccard@hepl.ch

Résumé
Depuis quatre ans, nous proposons, dans le cadre d'un module interdisciplinaire en 3e année du Bachelor en enseignement primaire de la HEP Vaud, un cours optionnel intitulé comme cet atelier. Celui-ci vise à doter les étudiant·es d'outils leur permettant de concevoir des situations-problèmes interdisciplinaires en mathématiques et en sciences de la nature à destination d'élèves de 4 à 12 ans. Cette expérience a mis en lumière la complexité de cette approche, tant sur le plan de la mise en œuvre que des questionnements qu'elle suscite, aussi bien chez les étudiant·es que chez les formateur·rices. C'est à partir de ces constats que nous avons proposé cet atelier, conçu comme un espace de partage de pratiques et de réflexions à partir de ressources pour l'enseignement que nous avons sélectionnées car elles se présentent comme interdisciplinaires et/ou en lien avec la durabilité.

Cet atelier avait pour objectif de mener une réflexion sur l'enseignement par situations-problèmes dans un contexte interdisciplinaire associant mathématiques et sciences de la nature, en lien notamment avec les enjeux de durabilité. Nous nous référons à des situations-problèmes à destination d'élèves de 4 à 12 ans. Plus spécifiquement, nous nous posons des questions en lien avec la formation et les outils pertinents à transmettre afin de favoriser la mise en œuvre de cette approche.

L'origine de notre questionnement s'ancre dans notre expérience, en tant que formatrices, de quatre années d'enseignement au sein des modules interdisciplinaires (modules BP63ID) de troisième année du Bachelor en enseignement primaire de la HEP Vaud (Lausanne), et plus particulièrement dans le cadre du module intitulé « Conjuguer mathématiques et sciences de la nature autour de situations-problèmes ». Ce cours optionnel, choisi par les étudiants parmi différents modules proposés, représente un enseignement de deux heures hebdomadaires sur un semestre et correspondant à 3 crédits ECTS. Ce module témoigne d'une volonté institutionnelle de promouvoir l'interdisciplinarité dans la formation des futurs enseignants. Ceci se retrouve également dans notre plan d'études (Plan d'Etudes Romand) comme nous aurons l'occasion de le présenter dans la suite.

Une brochure commune aux modules BP63ID présente le cadre général de l'ensemble des modules (HEP, 2025) et définit l'interdisciplinarité de la manière suivante :

> **L'interdisciplinarité, c'est quoi ?**
>
> L'interdisciplinarité est l'art de conjuguer diverses disciplines scientifiques, l'intérêt étant de parvenir à un but commun en confrontant des approches différentes d'un même problème.

L'interdisciplinarité, pourquoi ?

> Présupposant un lieu d'échanges, une posture de travail qui peut conduire à la transdisciplinarité si l'interaction est suffisante, l'interdisciplinarité permet l'émergence de nouveaux concepts, méthodes ou théories. Elle offre dans tous les cas des situations où les disciplines collaborent et créent des échanges de méthodes et de résultats entre elles. C'est dans cet état d'esprit qu'ont été préparés les modules ici présentés (HEP, 2025, p 2)

Cette même brochure précise que la certification du module se réfère à trois dimensions :

> 1. le faire (élaborer une réalisation de qualité) ;
>
> 2. la réflexivité (se situer en tant que futur·e professionnel·le et se situer au niveau du contenu du module, plus particulièrement par rapport au repérage de difficultés et à la mise en œuvre de mesures adéquates) ;
>
> 3. la conceptualisation (analyser un cadre conceptuel clairement défini et issu de la littérature scientifique) (HEP, 2025, p 2).

Les étudiants se trouvent ainsi placés dans la tâche complexe de concevoir des tâches ou des dispositifs de formation qui mobilisent simultanément plusieurs disciplines. Cette exigence pose de manière directe la question centrale de notre atelier : « L'interdisciplinarité, comment ? », autrement dit, comment accompagner efficacement les étudiants dans le développement et l'appropriation de démarches interdisciplinaires, autour de situations-problèmes.

Dans la présente contribution, nous présenterons dans un premier temps quelques éléments théoriques à propos d'interdisciplinarité (Roy, Schubnel & Schwab, 2019), de durabilité (Lausselet, 2022) et de modélisation (Yvain-Prébiski, 2023), qui servent de références au cours cité. Ceux-ci sont présentés dans le cadre du module afin de doter les étudiant·es d'outils leur permettant de concevoir et d'analyser des situations-problèmes interdisciplinaires en mathématiques et en sciences de la nature (élèves de 4 à 12 ans).

Dans un deuxième temps, nous rendrons compte des travaux de groupes durant lesquels les participants ont été amenés, d'une part, à analyser des ressources pour l'enseignement sélectionnées pour leur caractère interdisciplinaire et/ou leur lien avec la durabilité, et, d'autre part, à examiner des productions d'étudiants issues de notre cours.

I - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

1. L'interdisciplinarité, c'est quoi ?

Le terme interdisciplinarité est énormément utilisé dans les discours éducatifs, mais dans des situations très différentes, ce qui rend nécessaire une clarification. Dans la littérature scientifique, il est souvent associé à d'autres termes tels que multidisciplinarité, pluridisciplinarité ou transdisciplinarité, qui se distinguent par la nature des relations établies entre les disciplines et par le degré d'intégration des savoirs (Figure 1).

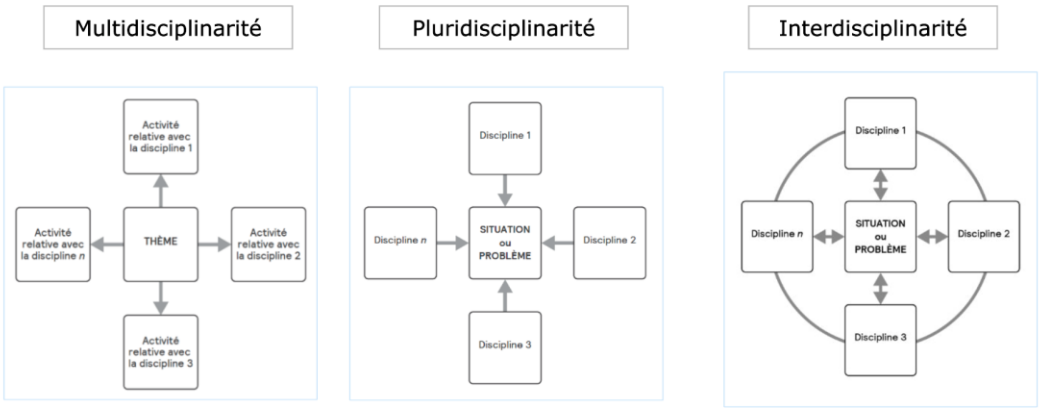


Figure 1 : Multi, pluri ou interdisciplinarité, d'après Roy, Schubnel et Schwab, 2019.

Multidisciplinarité

La pratique multidisciplinaire « consiste à traiter un thème en le déclinant en une pluralité d'activités, sans pour autant poursuivre un but commun et mettre en relation des objets de savoir entre eux » (Roy, Schubnel & Schwab, 2019, p. 57). Le degré d'intégration est faible : les disciplines sont juxtaposées, chacune poursuivant ses propres objectifs.

Exemple : travailler sur la thématique de l'eau. En sciences, on mène une activité en lien avec la pollution des eaux ; en mathématiques, on propose des problèmes arithmétiques en lien avec la vie aquatique (contextualisation) ; en français, on lit des textes sur les lacs, les rivières ; en arts visuels, on dessine des animaux aquatiques. Il existe une cohérence thématique, mais aucune mise en relation des objets de savoir.

Pluridisciplinarité

La pluridisciplinarité « consiste à traiter une situation ou un problème en juxtaposant des regards disciplinaires autour d'un but commun, sans pour autant mettre en relation les objets de savoir des différentes disciplines » (Roy, Schubnel & Schwab, 2019, p. 58). Les disciplines partagent un but commun, mais les apports ne sont pas intégrés : il s'agit d'une « juxtaposition de points de vue ».

Exemple : aborder la pollution de l'eau en sciences, en français, en mathématiques et en arts, avec pour but commun de traiter cette problématique, mais sans relier les productions ou résultats de chaque discipline.

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité consiste à placer les élèves face à une situation-problème ou à une étude de cas et à traiter la question « en faisant interagir de manière féconde des objets de savoir de différentes disciplines autour d'un but commun » (Roy, Schubnel & Schwab, 2019, p. 59). Les disciplines sont sollicitées en fonction des besoins et leurs apports sont intégrés, notamment lors d'une synthèse finale. Cette approche peut donner davantage de sens au travail réalisé en classe, car elle repose sur un fil conducteur explicite. Le passage de la pluridisciplinarité à l'interdisciplinarité est cependant complexe car cette interdisciplinarité doit se concevoir à la fois aux niveaux curriculaire, didactique et pédagogique, comme nous le détaillerons dans la suite.

Exemple : à partir de la question « Comment grâce aux gestes du quotidien je peux limiter la pollution de l'eau ? », les élèves sont invités à analyser les causes principales de la pollution du lac (lecture de références - sciences de la nature), à recueillir et interpréter des données sur leur propre consommation de plastique et d'énergie (mathématiques – introduction aux données statistiques, dénombrement, mesures), puis à modéliser l'impact potentiel de changements de comportements (mathématiques – proportionnalité, calculs pour anticiper en fonction des changements proposés). Ils consultent des articles

de vulgarisation pour identifier des actions individuelles et collectives pertinentes (français – compréhension et synthèse) et conçoivent un support de communication destiné à sensibiliser leurs proches ou la communauté scolaire (arts visuels et français – production d'un message argumentatif et créatif).

Transdisciplinarité

Nous tenons finalement à distinguer interdisciplinarité et transdisciplinarité, bien que cette dernière approche ne soit pas reprise dans notre atelier car elle implique souvent des aspects théoriques complexes qui dépassent les attentes dans le contexte de l'enseignement primaire. La transdisciplinarité se distingue de l'interdisciplinarité par son objectif de « transfert de concepts, de modèles, d'outils d'une discipline à une autre […] en vue de construire de nouveaux modèles » (Fourez, Maingain & Dufour, 2002, cité par Roy, Schubnel & Schwab, 2019, p. 61). Elle intègre une réflexion sur les concepts des différentes disciplines et peut conduire à la construction d'objets de savoir inédits.

Exemple : pour la thématique des grandeurs et mesures, un travail conjoint entre mathématiques et physique peut amener à discuter des définitions, des aspects épistémologiques et des implications conceptuelles, ces éléments devenant eux-mêmes objet d'étude.

Finalement, pour l'atelier, nous nous sommes également référées à Cyr, Langlois, Poliquin et Charland (2020) qui proposent un modèle opérationnel d'intégration des mathématiques et des sciences qui permet d'évaluer les situations afin de déterminer si elles sont « vraiment » interdisciplinaires (Figure 2).

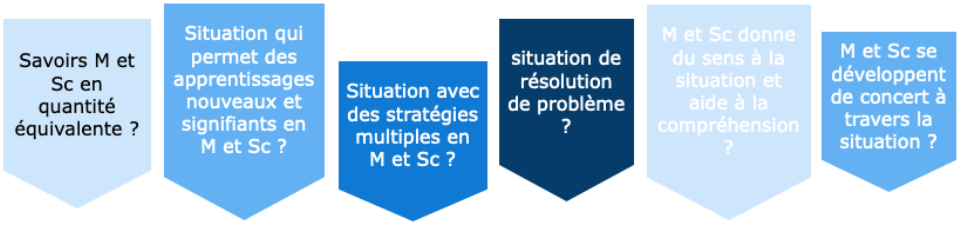


Figure 2 : Modèle d'intégration des mathématiques et des sciences, réalisé à partir de Cyr, Langlois, Poliquin et Charland, 2020.

2. La situation-problème dans un contexte interdisciplinaire

Au cœur de l'approche interdisciplinaire se trouve une situation ou une étude de cas qui va constituer le point de départ et le fil conducteur de la démarche. Dans le cadre de notre cours, nous avons introduit la notion de situation-problème qui se caractérise par un certain nombre de critères, que nous reprenons en nous appuyant sur la synthèse proposée par Ducommun (2009) :

- Avoir du sens : interpeler, concerner l'apprenant, qui ne se contente pas d'obéir ou d'exécuter, mais s'engage activement dans la tâche.
- Faire naître un questionnement : amener les apprenants à formuler leurs propres questions et ne pas seulement répondre à celles posées par l'enseignant.
- Correspondre à une situation complexe : ouvrir sur différentes réponses acceptables et permettre le recours à des stratégies variées.
- Déboucher sur un savoir d'ordre général : notion, concept, loi, règle, compétence, savoir-être ou savoir-devenir.
- Faire l'objet d'un ou plusieurs moments de métacognition : analyser *a posteriori* la manière dont les activités ont été vécues et le savoir qui a pu être intégré.

Dans la définition classique, deux autres critères apparaissent également :

- Être liée à un obstacle repéré, défini et surmontable, dont les élèves prennent conscience à travers l'émergence de leurs conceptions initiales.
- Créer une ou des ruptures amenant à déconstruire le ou les modèles explicatifs initiaux, s'ils sont inadaptés ou erronés.

Cependant, dans le cadre du module que nous présentons, nous ne travaillons pas explicitement sur ces deux aspects. La conception d'une situation-problème interdisciplinaire mobilisant déjà les autres critères représente une tâche suffisamment complexe pour les étudiant·es. De plus, la notion d'obstacle est délicate à mettre en œuvre dans la formation initiale.

Un de nos objectifs est notamment de sensibiliser les étudiants au fait que la situation-problème, en mobilisant des savoirs issus de plusieurs disciplines autour d'un enjeu concret et complexe, s'inscrit pleinement dans la perspective de l'éducation à la durabilité (ED), en engageant les apprenants dans une réflexion critique et contextualisée sur des problématiques environnementales, sociales et économiques actuelles.

3. L'interdisciplinarité, pourquoi ? Dans une perspective d'éducation à la durabilité

À l'école, l'interdisciplinarité ne se limite pas à juxtaposer ou enrichir les contenus. Elle constitue avant tout un moyen privilégié de favoriser des apprentissages profonds et intégrés. Plusieurs chercheurs ont montré qu'elle permet aux élèves de construire des savoirs plus riches, mieux structurés et plus signifiants (Klein, 2010 ; Lenoir et Sauvé, 1998). En mobilisant différentes disciplines autour d'un même objet d'étude, les apprenants établissent des liens, comparent et intègrent des connaissances distinctes, développant ainsi des compétences cognitives de haut niveau.

Parmi les bénéfices relevés, on retrouve notamment :

- le développement d'une pensée critique, créative et originale ;
- la capacité de synthèse et d'intégration ;
- la compréhension et la consolidation de notions complexes ;
- le renforcement de la mémoire conceptuelle ;
- l'aptitude au débat scientifique et à l'argumentation.

Ces apprentissages, situés à un niveau taxonomique élevé, sont difficiles à atteindre dans un cadre strictement disciplinaire. L'interdisciplinarité apparaît donc comme une approche pédagogique de choix pour donner du sens aux savoirs et aider les élèves à structurer une compréhension globale du monde, comme le relève Tonnetti, B., et Lentillon-Kaestner, V. (2023).

Dans une perspective d'éducation à la durabilité (ED), cette dimension prend une importance particulière. Les grands défis contemporains – changement climatique, perte de biodiversité, pollutions, inégalités sociales et économiques – sont complexes et interdépendants. Ils nécessitent une compréhension systémique et des capacités d'action responsables que l'école a pour mission de cultiver. Le Plan d'études romand (PER, Suisse) l'affirme clairement :

« L'éducation en vue du développement durable contribue à la formation de l'esprit critique en développant la compétence à penser et à comprendre la complexité. Elle incite et favorise les approches interdisciplinaires. »

Ainsi, l'interdisciplinarité ne favorise pas seulement l'intégration des savoirs, mais aussi l'émergence d'une conscience critique et engagée, indispensable pour relever les défis socio-environnementaux actuels (Centre de compétence en durabilité, UNIL).

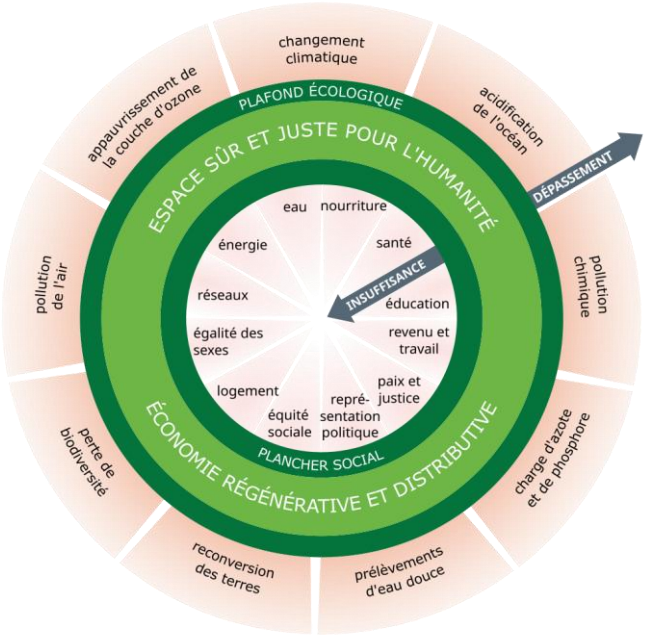


Figure 3 : le modèle du Donut, selon Kate Raworth (2018)

À la HEP, c'est le modèle du *donut* (Figure 3) proposé par Raworth (2018), articulant neuf limites planétaires avec un plancher social garantissant des conditions de vie dignes, qui a été choisi pour illustrer cette exigence. Il invite à situer les apprentissages dans un espace « sûr et juste » pour l'humanité, entre plafond écologique et fondement social, et offre un cadre de réflexion sur l'équité et la justice dans une perspective de durabilité forte.

Dans cette optique, Lausselet (2022) identifie plusieurs compétences clés à développer :

- recréer le lien au monde ;
- comprendre le monde et son évolution ;
- questionner les cadres de référence et nos modes de vie ;
- réimaginer l'avenir et penser le changement ;
- agir de manière responsable au sein du monde.

Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire de recourir à des approches pédagogiques spécifiques, favorisant notamment la pensée systémique et complexe, la créativité et la participation active. Les modalités les plus pertinentes incluent l'interdisciplinarité, l'*outdoor education* (apprentissage en lien avec la nature) et l'approche institutionnelle globale.

L'*outdoor education* désigne une démarche éducative qui se déroule en dehors de la salle de classe, où l'espace – qu'il soit naturel, urbain ou social – devient une ressource d'apprentissage. Elle représente un levier important pour l'éducation à la durabilité, car elle engage les apprenants dans une relation concrète à leur environnement et favorise l'acquisition de savoirs contextualisés (Lausselet et Zosso, 2023). Cette approche a été brièvement présentée lors de l'introduction de l'atelier, sans faire l'objet de discussions approfondies durant les travaux de groupes. Elle occupe toutefois une place plus importante dans notre module, notamment par l'apport d'une démarche d'investigation du lieu.

Cette approche ouvre à l'exploration des liens entre activités humaines, limites planétaires et interdépendances écologiques, contribuant ainsi à développer le sens de la responsabilité et des attitudes

de care. Articulée à l'interdisciplinarité, l'*outdoor education* dépasse la simple transmission de connaissances et participe à la formation d'élèves capables de penser la complexité et d'agir avec discernement face aux défis liés à la durabilité.

Dans le cadre de l'atelier, nous avons utilisé l'outil d'analyse des différents niveaux de labellisation des offres de formation en matière d'éducation à la durabilité, développé à la Haute École Pédagogique Vaud (Figure 4), afin d'évaluer notre module. Nous considérons que l'articulation entre situations-problèmes interdisciplinaires et recours à l'*outdoor education* permet de classer ce module dans la catégorie des « approches favorables à l'éducation à la durabilité ».

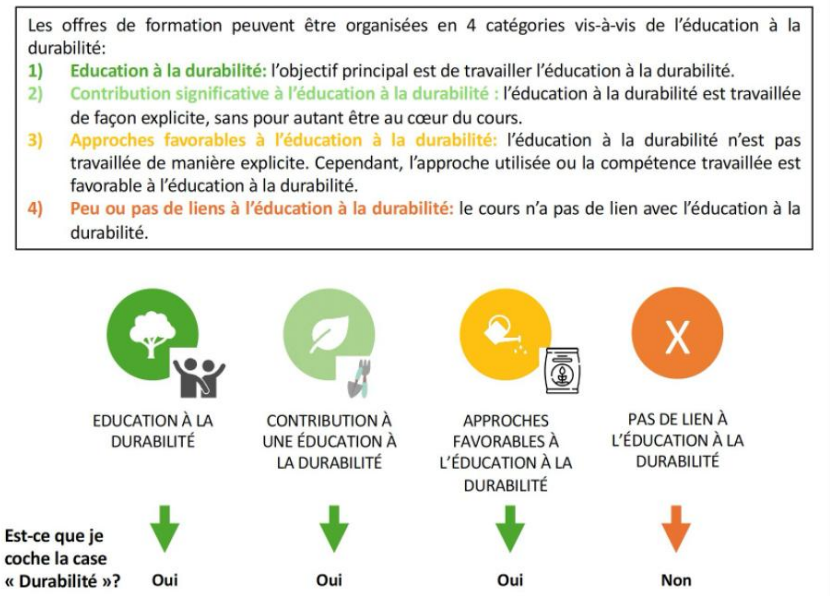


Figure 4 : les différents niveaux de labellisation des offres de formation en termes d'éducation à la durabilité à la Haute École Pédagogique Vaud, 2025.

Cet outil (Figure 4) a été présenté aux participants de l'atelier, puis mobilisé lors des travaux de groupes.

4. L'interdisciplinarité, comment ?

Une première représentation de l'interdisciplinarité, que l'on pourrait qualifier de « naïve », consiste à la concevoir principalement comme une organisation pédagogique centrée sur les intérêts des élèves. Dans cette vision, l'élève choisit ses propres questionnements et l'enseignant lui apporte les savoirs jugés nécessaires pour y répondre. Si cette approche peut sembler séduisante par la liberté et la créativité qu'elle suppose, elle laisse une grande place à l'improvisation et comporte plusieurs écueils : risque de simplification excessive, absence de maîtrise des contenus, juxtaposition hétéroclite d'éléments disciplinaires (« pot-pourri »), manque de liens explicites entre les apports et, surtout, perte de validité des savoirs faute de les relier à leur source disciplinaire.

Pour dépasser cette vision simplificatrice et éviter l'improvisation, Lenoir (1995, 1997, 2003, cités dans Roy, Schubnel et Schwab, 2019) distingue trois niveaux organisationnels de l'interdisciplinarité scolaire : curriculaire, didactique et pédagogique.

- L'interdisciplinarité **curriculaire** consiste en « l'établissement, à la suite d'une analyse systématique des programmes d'études […] des liens d'interdépendance, de convergence et de complémentarité entre les différentes matières scolaires » (Lenoir et Sauvé, 1998, p. 110, cités par Roy, Schubnel & Schwab, 2019, p. 52). Dans le cadre de l'atelier, nous avons examiné plus précisément, la place de l'**interdisciplinarité curriculaire** en France comme en Suisse romande. En ce qui concerne la Suisse, il est intéressant de voir que les mathématiques et les sciences sont

regroupées au sein du même domaine disciplinaire appelé MSN (Mathématiques et Sciences de la Nature). En outre, il faut noter qu'il existe des points de convergence en termes de démarches entre ces deux disciplines puisqu'on y parle dans les deux cas de problématiser et de résolution de problème. Des liens avec les autres disciplines sont également mentionnés, proposant ainsi de faire dialoguer mathématiques, sciences, corps en mouvement, ou bien encore sciences humaines et sociales. En France, on tend plutôt vers une disciplinarisation des savoirs avec d'un côté les mathématiques et de l'autre les sciences. Toutefois, les liens entre les disciplines sont également soulignés dans les programmes français, où l'on parle de « croisements entre enseignements » : des liens entre mathématiques, histoire et géographie, éducation physique et sportive, sciences et technologie et arts sont explicités.

- L'interdisciplinarité **didactique** se situe au niveau de la planification et de l'organisation de l'intervention éducative. Elle « porte, d'une part, sur le rapport au savoir […] et, d'autre part, sur la planification et l'organisation de l'intervention éducative » dans les phases préactive et postactive (Lenoir, 2003, cité dans Roy, Schubnel et Schwab, 2019, p. 52). C'est à ce niveau que le modèle didactique interdisciplinaire centré sur la résolution de la situation-problème est plus particulièrement travaillé dans notre séminaire. Cette planification prévoit l'ordre des apprentissages, les méthodes à mobiliser, la place de chaque discipline et l'articulation entre les activités.
- L'interdisciplinarité **pédagogique** se réalise dans la phase interactive de la pratique d'enseignement et consiste en l'actualisation en classe de l'interdisciplinarité didactique en tenant compte de l'ensemble des variables qui interagissent dans la dynamique d'une situation d'enseignement-apprentissage réelle (Roy, Schubnel et Schwab, 2019, p. 52). Il s'agit par exemple, lors de la mise en œuvre en classe, d'ajuster la séquence en fonction des réactions des élèves ; si la collecte de données révèle une méconnaissance du sujet, il faudra intégrer un temps d'échange ou un apport d'information ciblé ; guider les groupes pour maintenir le lien entre les disciplines et expliciter en quoi chaque activité contribue à répondre à la question initiale.

Cette articulation entre les trois niveaux montre que l'interdisciplinarité efficace en classe est le résultat d'un travail préparatoire approfondi et coordonné, et non d'une simple juxtaposition d'activités autour d'un même thème.

5. La modélisation dans un contexte interdisciplinaire

En mathématiques et en sciences, la modélisation occupe une place centrale lorsqu'il s'agit de travailler sur des situations-problèmes tirées d'un contexte réel, comme c'est le cas dans notre module. Elle renvoie à l'ensemble des processus cognitifs par lesquels les apprenants passent d'une situation réelle, souvent complexe et ouverte, à une représentation sous la forme d'un modèle qui leur permet de formuler et de traiter le problème.

Il existe de nombreux schémas qui permettent d'illustrer les processus en jeu lors de la modélisation et de rendre visibles les compétences spécifiques (voir Yvain-Prébiski, 2023). Dans le cadre de notre cours, le modèle que nous avons choisi d'introduire récemment est celui de Blum et Leiss (2007), que nous avons découvert lors d'une présentation de Lacek et De Simone (2025) puis approfondi à travers les travaux de Yvain-Prébiski (2023).

Le modèle de modélisation (Figure 5a) de Blum et Leiss (2007), s'articule en sept étapes successives qui rendent compte du va-et-vient entre monde réel et monde mathématique. Tout d'abord, l'individu construit une représentation simplifiée de la situation de départ (« *situation model* ») en sélectionnant les informations pertinentes et en formulant des hypothèses. Dans un second temps, il élabore un « *real model* » en identifiant les variables influentes et en établissant des relations entre elles. Vient ensuite la construction du modèle mathématique, où les variables et leurs relations sont mathématisées, éventuellement simplifiées, et représentées au moyen d'outils et de notations adaptés. Le travail se

poursuit alors dans ce modèle mathématique à l'aide de stratégies heuristiques et de connaissances mathématiques. Les résultats obtenus doivent ensuite être interprétés dans le modèle de situation, puis validés ou invalidés au regard du problème initial, ce qui peut nécessiter un retour aux étapes précédentes. Enfin, la dernière phase consiste à communiquer les solutions dans la situation réelle.

Yvain-Prébiski (2023) a repris et développé le schéma de Blum et Leiss afin de décrire plus spécifiquement le processus de mathématisation horizontale, c'est-à-dire la transition progressive entre le monde réel et le monde mathématique. Elle montre que cette transition implique une simplification de la réalité, suivie de l'identification et de la mise en relation des variables pertinentes, avant la formalisation mathématique. Ceci implique que lors de l'enseignement, l'accent doit être mis sur ces choix, ces hypothèses et ces simplifications qui s'opèrent et qui conditionnent fortement la suite du processus mais qui restent souvent implicites. Ce processus devrait être explicitement travaillé avec les élèves. Ces derniers points nous ont paru particulièrement pertinents dans le cadre de nos situations-problèmes interdisciplinaires car dans le processus de simplification de la réalité et d'identification des variables importantes, les mathématiques et les sciences deviennent complémentaires. De même, nous avons pu mettre en évidence que, selon les situations, en plus du processus de mathématisation, on pouvait également mettre en évidence la présence de modèles de sciences qui permettaient de manière complémentaire de traiter la situation-problème. Finalement, à l'étape 6 qui consiste à retourner à la situation réelle afin de valider le résultat, l'interdisciplinarité prend alors une dimension particulière par rapport à l'interprétation des résultats en lien avec le contexte réel.

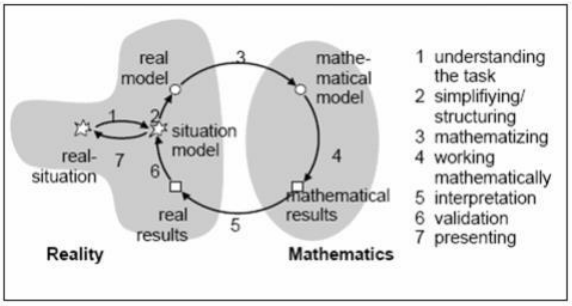


Figure 5a : modèle de Blum et Leiss (2007)

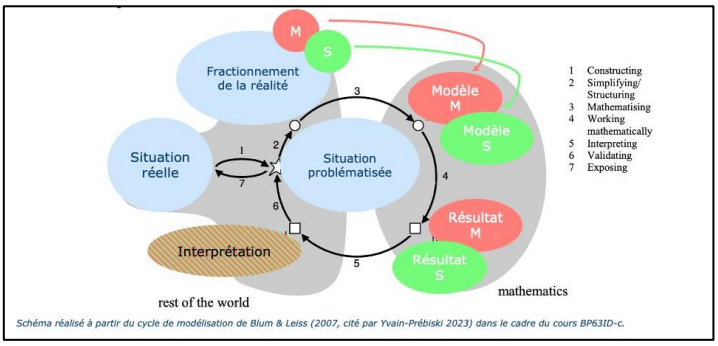


Figure 5b : schéma réalisé à partir du cycle de modélisation de Blum et Leiss et utilisé dans le cadre du cours BP63ID-c

Notre réflexion est encore à ses débuts, mais dans le cadre de notre module, nous avons cherché à adapter ce schéma de modélisation dans une optique interdisciplinaire. Concrètement, cela signifie que les allers-retours ne concernent pas seulement les mathématiques et la réalité, mais mobilisent aussi d'autres disciplines, en particulier les sciences de la nature. Dans le cadre de notre cours, nous avons associé la première étape à l'élaboration d'une situation problématisée (Figure 5b). Lors de l'étape 2, la construction du « *real model* » peut nécessiter des connaissances scientifiques pour comprendre le phénomène étudié mais également des connaissances mathématiques. Selon les hypothèses que l'on pose, les connaissances dont on dispose, la fragmentation de la réalité et le choix des variables importantes ne seront pas identiques ce qui permet de donner sens ensuite aux prochaines étapes du modèle et plus particulièrement l'interprétation des résultats qui peuvent être mis en relation avec ces choix qui ont été explicités. Cette adaptation vise à doter les étudiant·es d'un outil conceptuel leur permettant d'analyser et de concevoir des situations-problèmes interdisciplinaires, en explicitant les processus cognitifs et disciplinaires en jeu à chaque étape. Comme nous avons pu le voir dans l'analyse des ressources lors de l'atelier, nous avons remarqué que très souvent, l'étape de fractionnement de la réalité était totalement prise en charge ce qui ne permettait pas à l'élève d'être acteur de cette partie du processus de modélisation. Ceci a pour conséquence une scission dans le processus : un contexte est

présenté aux élèves mais les étapes 2 et 3 étant prises en charge par l'enseignant, finalement l'élève ne fait que l'étape 4 (application d'un modèle mathématique). Par ailleurs, les étapes 5 et 6 sont généralement absentes ce qui ne permet pas un retour au contexte réel.

II - COMPTE RENDU DES TRAVAUX DE GROUPES

1. Analyse de ressources interdisciplinaires et/ou en lien avec la durabilité

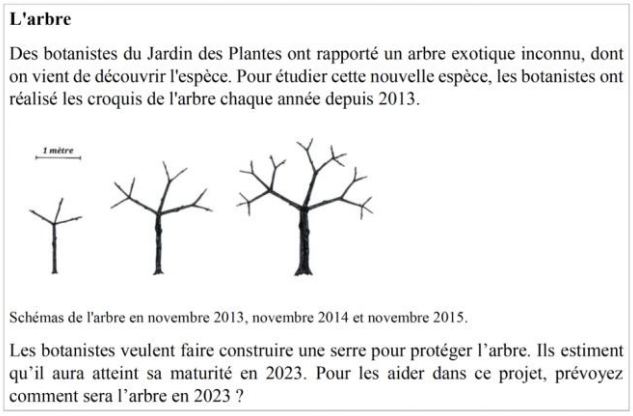
Durant ce deuxième temps de l'atelier, les participants ont analysé par groupes de 4 ou 5 des activités issues de manuels ou créées pour des travaux de recherche. L'objectif était de réinvestir les notions théoriques présentées durant la première partie de l'atelier.
Ils ont alors analysé les activités sous trois angles :

- S'agit-il d'une activité interdisciplinaire ?
- Peut-on considérer qu'elle propose une situation-problème ?
- L'éducation à la durabilité (ED) est-elle présente ? Si oui, à quel degré : ED, contribution à l'ED, approche favorable à l'ED, pas de lien avec l'ED ?

Nous présenterons ci-dessous quatre activités parmi celles proposées : nous synthétiserons le contenu des discussions qui ont eu lieu entre les participants tout en y ajoutant quelques apports plus théoriques.

1ère activité : L'arbre

Cette activité (Figure 6) a été rapidement perçue par les participants comme mono-disciplinaire avec l'utilisation des mathématiques pour modéliser la division et la croissance des branches au fil du temps. Ils n'y ont pas vu d'interdisciplinarité réelle, jugeant qu'il n'y avait que trop peu d'informations sur la partie croissance des arbres pour la rendre interdisciplinaire.



L'arbre

Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.

Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ?

Figure 6 : Situation proposée dans le cadre du travail de thèse de Yvain-Prébiski, S. (2023)

Toutefois, telle qu'elle était prévue dans le travail de Yvain-Prébiski, elle pouvait tout à fait conduire à de l'interdisciplinarité puisque, pour pouvoir prévoir l'évolution de la taille de l'arbre, il allait falloir chercher des informations sur la croissance, émettre des hypothèses et imaginer ensuite des manières de modéliser cette croissance.
On voit que l'habillage de l'activité peut orienter la manière dont elle est perçue par les enseignants. Et l'on voit également toute l'importance du rôle de l'enseignant : la manière dont il va engager les élèves dans l'activité via un questionnement pertinent va permettre ou pas de faire dialoguer les connaissances entre les disciplines.

2ème activité : Les fourmis haltérophiles

Dans cette activité (Figure 7), on voit de premier abord un potentiel interdisciplinaire puisqu'on fait référence à la biologie de l'insecte (corps fait de trois parties, masse de l'animal) et on voit rapidement qu'un calcul mathématique est attendu pour la réponse - ce problème demandant selon l'énoncé proposé

à être résolu comme un problème de proportionnalité. Ainsi, on arrive, à la solution que pour un adulte de 70 kg, il pourrait porter un poids de 3 500 kg (le record réel étant de 500 kg). Il aurait été intéressant, pour avoir une approche davantage interdisciplinaire, d'aller comprendre pourquoi cette différence de force entre la fourmi et l'Homme.



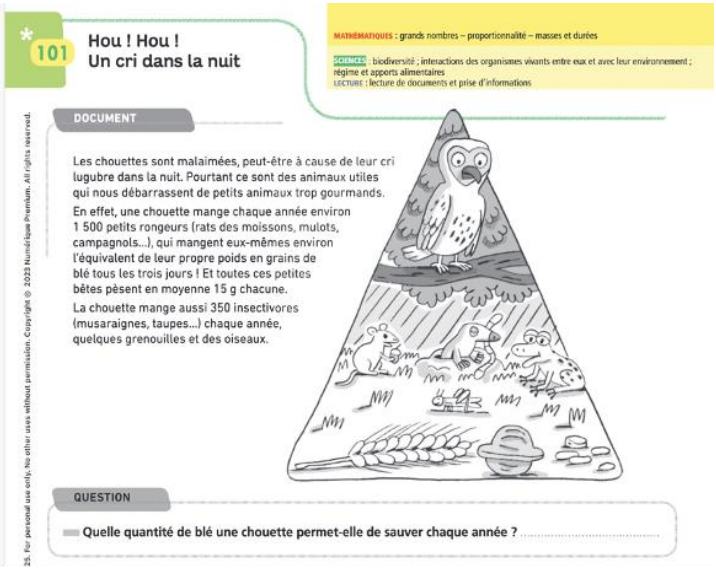
Figure 7 : Exercice extrait de « On a besoin des maths dans la vie », projet (Maaß, 2016.)

En approfondissant les connaissances sur la biologie de la fourmi, on aurait pu voir que les fourmis ont un exosquelette rigide et des muscles puissants par rapport à leur taille, ce qui leur donne une grande force relative. Les Hommes, eux, ont une morphologie différente, avec des muscles moins concentrés et un squelette plus lourd. En outre, les fourmis sont beaucoup plus petites et légères que les humains. Une fourmi moyenne pèse environ 1 à 5 mg, tandis qu'un humain pèse en moyenne 60 à 80 kg. La capacité de la fourmi à soulever 50 fois son poids est impressionnante, mais elle est finalement due à sa petite taille et à sa morphologie particulière. Un humain, avec sa plus grande taille et son exosquelette moins adapté, ne peut pas soulever des charges aussi disproportionnées, même si sa force brute est plus grande. On pourrait comparer la capacité de soulèvement de la fourmi à celle d'un humain en regardant la force relative (force par rapport au poids corporel) plutôt que la force absolue. Ceci aurait permis de faire un retour aux mathématiques avec une base scientifique.

Les participants ont souligné le potentiel interdisciplinaire de l'activité, tout en voyant la limite à ne rester que sous l'angle mathématique de la proportionnalité. Il a été souligné que cet exemple est particulièrement intéressant pour comprendre en quoi certains modèles mathématiques demandent à être requestionnés sous l'angle de la biologie.

3ème activité : Hou ! hou ! Un cri dans la nuit

En abordant la notion de chaine alimentaire tout en proposant des calculs mathématiques permettant de comprendre l'impact des maillons supérieurs sur les niveaux inférieurs de la chaine, cette activité semble *a priori* une activité avec un potentiel interdisciplinaire et permettant également de travailler l'ED (Figure 8). L'aspect résolution de problème est bien présent et en cela, cette activité pourrait constituer un support intéressant permettant de donner sens aux mathématiques.



101 Hou ! Hou ! Un cri dans la nuit

MATHÉMATIQUES : grands nombres – proportionnalité – masses et durées

SCIENCES : biodiversité ; interactions des organismes vivants entre eux et avec leur environnement ; régime et apports alimentaires

LECTURE : lecture de documents et prise d'informations

DOCUMENT

Les chouettes sont malaimées, peut-être à cause de leur cri lugubre dans la nuit. Pourtant ce sont des animaux utiles qui nous débarrassent de petits animaux trop gourmands.

En effet, une chouette mange chaque année environ 1 500 petits rongeurs (rats des moissons, mulots, campagnols…), qui mangent eux-mêmes environ l'équivalent de leur propre poids en grains de blé tous les trois jours ! Et toutes ces petites bêtes pèsent en moyenne 15 g chacune.

La chouette mange aussi 350 insectivores (musaraignes, taupes…) chaque année, quelques grenouilles et des oiseaux.

QUESTION

Quelle quantité de blé une chouette permet-elle de sauver chaque année ? .....

25. For personal use only, no other uses without permission. Copyright © 2023 Numérique Premium. All rights reserved.

Figure 8 : activité extraite de Pomme et Valentin, 2017.

Toutefois en ce qui concerne la partie biologie, des approximations en limitent son intérêt : les petits rongeurs qui sont évoqués ne consomment pas que des graines. En présentant l'information de cette manière, les auteurs renforcent cette idée que les petits rongeurs sont des nuisibles qui privent l'homme de ressources. Cette approche anthropocentrée a été soulevée par les participants. Pour être dans une approche réellement interdisciplinaire, il serait important d'apporter des connaissances biologiques plus complètes, en soulignant justement le rôle de ces rongeurs comme maillon important de la chaîne alimentaire, puisqu'ils représentent des proies pour certains oiseaux, mammifères, reptiles et que leur présence assure donc l'équilibre dans les écosystèmes. En outre, en creusant des galeries, les rongeurs ont aussi un impact positif sur le sol. Ils permettent l'aération du sol, favorisant l'écoulement de l'eau mais aussi la biodiversité du sol (source LPO, site internet https://www.lpo.fr/decouvrir-la-nature/conseils-biodiversite/conseils-biodiversite/accueillir-la-faune-sauvage/cohabiter-avec-les-rats-et-les-souris). Avec ces informations, cette activité pourrait garder son côté interdisciplinaire tout en travaillant de manière plus poussée l'ED sous l'angle de la biodiversité des écosystèmes.

4ème activité : La poubelle

Dans cette activité (Figure 9), les participants ont rapidement bien ressenti le côté interdisciplinaire puisque, pour exploiter cette photo, il fallait à la fois des connaissances géographiques et mathématiques (localiser Rio et Timmiarmiut puis comprendre le système de repérage des coordonnées géographiques), puis dans un deuxième temps, des connaissances en astronomie (utiliser la position de l'ombre et l'heure indiquée pour orienter la photo). Il s'agit clairement d'une résolution de problème puisque la solution n'est pas accessible immédiatement, elle a donné du fil à retordre aux participants.



« Vous devez constituer des groupes de 3 ou 4 personnes et tenter, en 60 minutes, de répondre à la question suivante en observant la photographie ci-dessus : Dans quelle direction se trouve la région de Timmiarmiut (ou Tingmiarmiut) par rapport à la photographie ? (Indiquez la direction par une flèche sur la photo ci-dessus)

Vos outils de travail : un accès Internet, une feuille A4, un crayon.

Figure 9 : Situation tirée de Ducommun, J. (2009).

Conclusions sur ce temps d'échange par groupe

Les échanges ont été riches et construits au sein des groupes sur ces thèmes d'interdisciplinarité, de situation-problème et d'éducation à la durabilité. Il en ressort que les points de vue de départ étaient parfois très différents.

En outre, même pour des experts de la didactique, être capable de dire si une activité est réellement interdisciplinaire n'est pas toujours aisé. Il en est de même pour la place de l'ED dans ces activités.

Concernant la notion d'interdisciplinarité, il y a souvent une discipline qui est majoritaire dans les activités proposées. Et cela s'accompagne d'imprécisions ou de raccourcis vis-à-vis de l'autre discipline qui en perd son sens. En outre, l'enseignant est souvent plus compétent dans une discipline mais n'est pas toujours capable de voir les manques ou les imprécisions dans la ou les autres disciplines concernées.

Les participants ont également souligné l'importance du contexte pédagogique : une même activité pourra avoir un impact différent selon la manière dont elle sera abordée par l'enseignant. En enrichissant le support, l'enseignant sera à même de la transformer, en y ajoutant davantage d'interdisciplinarité ou d'ED. Mais c'est bien là son regard de professionnel qui fera toute la différence.

2. Analyse de production d'étudiants suisses dans le cadre du module de formation interdisciplinaire au Bachelor en enseignement primaire

Les participants ont été invités à analyser des productions réalisées par nos étudiants dans le cadre du module interdisciplinaire. Ces derniers avaient pour tâche de concevoir une séquence d'enseignement destinée à des élèves du primaire, construite autour d'une situation-problème interdisciplinaire. La séquence devait inclure un moment d'apprentissage en extérieur (outdoor education), avec la possibilité d'établir un lien avec l'éducation à la durabilité.

Nous présenterons ci-dessous trois des activités analysées avec les participants à l'atelier et nous ferons une synthèse des échanges au sein des groupes.

1ère activité : Le pote à Gégé

Dans cette situation imaginée par les étudiants pour des élèves de 6P (CM1), il est question d'aider un personnage « Gégé » à répartir au mieux les 6 espèces qu'il souhaite planter dans deux carrés de son potager : *« J'ai ici 6 types de graines : épinard, poireau, aubergine, tomate, pomme de terre et chou. Votre mission sera de répartir ces 6 sortes de graines par carré de potager. Attention, j'ai lu dans un journal de*

permaculture que certains légumes ne peuvent pas pousser l'un à côté de l'autre. À vous chers habitants de me créer un schéma pour que je puisse me mettre au travail ! Quels légumes peut-on planter dans le carré A ? Et dans le carré B ? Représentez votre réponse à l'aide d'un schéma. Les légumes doivent être plantés soit dans le carré A soit dans le carré B. Il doit y avoir le même nombre de légumes dans chaque carré. »

Pour aider les élèves, des cartes basées sur des concepts de permaculture identifiant certaines associations favorables ou défavorables sont proposées aux élèves :



Les objectifs du Plan d'Etudes Romand (PER) travaillés sont listés comme suit :

Objectif(s) du PER :

MSN 25 - Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques

A…en imaginant et en utilisant divers outils de représentation
D…en triant et organisant des données

MSN 28 - Déterminer des caractéristiques du monde vivant et de divers milieux et en tirer des conséquences pour la pérennité de la vie

2. …en construisant et en utilisant des critères de classement spécifiques
3. …en identifiant les interactions des êtres vivants entre eux et avec leur milieu

Si les objectifs du PER semblent plutôt cohérents et bien identifié, leur mise en œuvre n'est pas aussi claire, comme les participants à l'atelier ont pu le souligner.

Ainsi, concernant l'objectif d'apprentissage sur l'axe scientifique, plusieurs problèmes ont été soulevés.

Tout d'abord, le texte d'introduction qui a pour objectif de contextualiser le problème (Figure 10), présente de nombreuses approximations scientifiques (par exemple, réduire la permaculture au fait d'utiliser des techniques naturelles) ou bien encore de grossières erreurs (la « graine » de pomme de terre).

"Dans un charmant petit village où les maisons étaient entourées de jardins fleuris, vivait un jardinier nommé Gégé. Chaque matin, il se levait tôt pour prendre soin de son jardin et son sourire chaleureux était toujours apprécié par les habitants. Gégé prenait soin de ses plantations et de la terre. Il cultivait son potager en permaculture, c'est-à-dire qu'il utilisait des techniques naturelles pour faire pousser ses plantes. Un jour, Gégé voulut créer un jardin potager pour tous les habitants du village afin de créer un garde-manger. Il décida de répartir le jardin potager sur deux carrés. Avec son chariot rempli de graines et son chapeau de paille sur la tête, il se rendit sur la place du village et demanda la chose suivante aux habitants : « J'ai ici 6 types de graines : épinard, poireau, aubergine, tomate, pomme de terre et chou. Votre mission sera de répartir ces 6 sortes de graines par carrés de potager. Attention j'ai lu dans un journal de permaculture que certains légumes ne peuvent pas pousser l'un à côté de l'autre. À vous chers habitants de me créer un schéma pour que je puisse me mettre au travail !"

Figure 10 : texte d'introduction proposé par les étudiants

Ensuite, certaines cartes présentent quelques concepts de la permaculture mais ne sont pas utiles pour résoudre la tâche : elles ne sont pas non plus utilisées pour aller travailler des compétences du MSN28, ce qui aurait été pourtant possibles (impact des produits chimiques sur les êtres vivants) (Figure 11, colonne de gauche).

En outre, quelques documents ont été jugés inutiles par les participants, soulignant qu'ils avaient plutôt tendance à surcharger le travail. Ainsi, le texte d'introduction n'est pas forcément utile et peut être complexe (Figure 10), et certaines cartes contiennent des informations redondantes.

Enfin, la manière de lire la carte (Figure 11, colonne de droite) en la retournant peut conduire à comprendre l'information de manière erronée (le pouce se retrouvant vers le haut) :

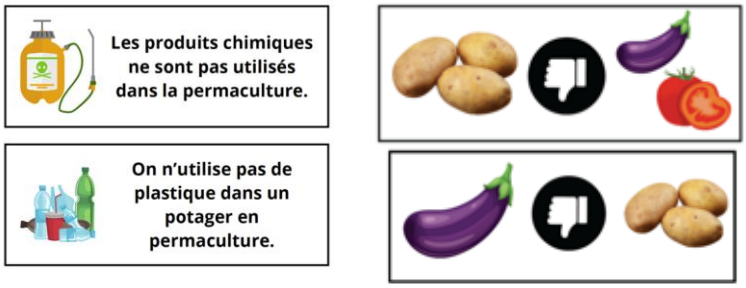


Figure 11 : exemples de cartes préparées par les étudiants

Il faut également noter que les cartes ne donnent aucune explication sur l'origine de ces associations favorables ou défavorables. Or il aurait pu être intéressant de relier cela aux besoins de végétaux en termes de lumière, d'apport en eau…L'objectif du PER pour la partie sciences n'est donc que très partiellement travaillé.

Concernant la partie mathématiques, l'objectif visé concernait la représentation du problème, avec le souhait de faire utiliser aux élèves une table de vérité fourni aux élèves (Figure 2).

Prénom :_____

Tableau de vérité « Problème jardinier »

	Épinard	Poireau	Aubergine	Tomate	Pomme de terre	Chou
Épinard						
Poireau						
Aubergine						
Tomate						
Pomme de terre						
Chou						

Figure 12 : tableau de vérité proposé par les étudiants.

Or il est possible de résoudre le problème sans table de vérité, avec des schémas et en procédant par ajustements successifs. L'objectif mathématique est donc possible, mais pas avec les modalités prévues par les étudiants.

Parmi les pistes d'amélioration proposées par les participants se trouve l'idée d'utiliser des graphiques ou des tableaux montrant par exemple la variation de rendement selon l'espèce associée, ce qui permettrait de renforcer le lien mathématiques-sciences et glisser vers davantage d'interdisciplinarité.

Le sujet qui a été choisi est également un très bon support pour l'ED et les participants ont imaginé explorer davantage cette piste en lien avec la permaculture.

2ème activité : Avion en papier

L'objectif annoncé par les étudiants sur cette activité destinée aux élèves de 5-6P (CE2-CM1) est de comprendre quels sont les éléments importants pour faire voler un avion en papier. Cette situation se base sur une situation d'apprentissage proposée par *La main à la pâte* destinée au cycle 3.

Parmi les objectifs du Plan d'Etudes Romand cités par les étudiants se trouvent plusieurs éléments liés aux sciences. Certains concernent la démarche scientifique : imaginer un dispositif de recherche pour répondre à une problématique, anticiper les résultats, identifier les variables et les constantes dans un protocole…. D'autres concernent les propriétés de l'air (force et pression, omniprésence…).

Concernant l'interdisciplinarité, les étudiants ont également identifié des objectifs liés aux mathématiques en lien avec les transformations géométriques, et plus particulièrement la notion de symétrie.

L'entrée dans cette activité est proposée sous forme d'une question posée aux élèves *(« Qu'est-ce qui permet à un avion en papier de voler loin ? »)* et permet ainsi de se situer dans le cadre d'une situation-problème.

Dans sa conception, cette activité semble donc répondre à la demande qui a été faite aux étudiants : concevoir une situation d'apprentissage interdisciplinaire en se basant sur une situation-problème.

Toutefois rapidement les participants à l'atelier ont identifié quelques limites à ce travail :

- Le protocole des étudiants n'est pas suffisamment rigoureux et fait varier plusieurs facteurs sur une même expérience (ce qui ne permet pas d'interpréter les résultats obtenus).
- Les mathématiques ont servi d'outil de mesure, sans véritable intégration conceptuelle : la symétrie est présentée comme une propriété isolée sans bien clarifier son lien avec les forces en jeu (Pourquoi la symétrie permet-elle de mieux voler ?).

Les pistes proposées sont les suivantes :

- Travailler davantage sur l'élaboration du protocole expérimental en contrôlant par exemple les différentes variables expérimentales : ne faire varier qu'un seul facteur à la fois (la forme de l'avion varie mais les matériaux restent identiques par exemple). La mise en place de protocoles expérimentaux est souvent quelque chose qui reste difficile pour les futurs enseignants, et ce même dans les modules purement scientifiques. Or la mise en œuvre d'un protocole expérimental rigoureux figure clairement dans le Plan d'Etudes Romand. Il est donc préférable de tester moins de facteurs, mais de le faire de manière rigoureuse.
- Faire ressortir la symétrie comme conclusion et non comme postulat : en effet, il serait intéressant de faire apparaitre ce paramètre comme étant un critère important en testant les capacités de vol de différentes formes d'avion, dont certains asymétriques.
- Avoir soi-même une meilleure maitrise du sujet : nous, formatrices, avons sollicité un ingénieur aéronautique afin de mieux comprendre les paramètres intervenant dans les capacités de vol d'un avion. En effet, il s'agit d'un domaine pointu qui nécessite une mise à jour en termes de connaissances afin de maitriser *a minima* le sujet que l'on va proposer aux élèves. Il a semblé que les participants, tout comme les étudiants, se trouvaient eux aussi à la limite de leurs connaissances et qu'un temps de mise au point aurait été grandement profitable.

En prolongement de l'activité, on aurait également pu utiliser certains contre-exemples pour enrichir la discussion autour de la symétrie, comme l'avion de reconnaissance allemand de la seconde guerre mondiale Blohm et Voss BV 141 qui avait une cabine déportée d'un côté et un moteur de l'autre et qui volait bien malgré son apparence bizarre.

Ce contre-exemple aurait par exemple permis d'aborder la notion de forces en jeu et d'enrichir alors la partie scientifique de cette activité. Quatre forces sont en jeu dans le vol des avions – portance, poussée, poids, trainée- et un avion asymétrique peut donc compenser son asymétrie en jouant par exemple sur la position du centre de gravité (en décalant le réservoir, les sièges...) ou en utilisant les surfaces de contrôle (ailerons, gouvernail…).

3ème activité : Écureuil et noisettes

Dans cette activité, il est question de modéliser le déplacement des écureuils pour circuler entre des cachettes qu'ils ont choisies dans leur environnement afin d'y dissimuler leurs réserves de nourriture. Deux objectifs ont été identifiés par les étudiants pour cette activité :

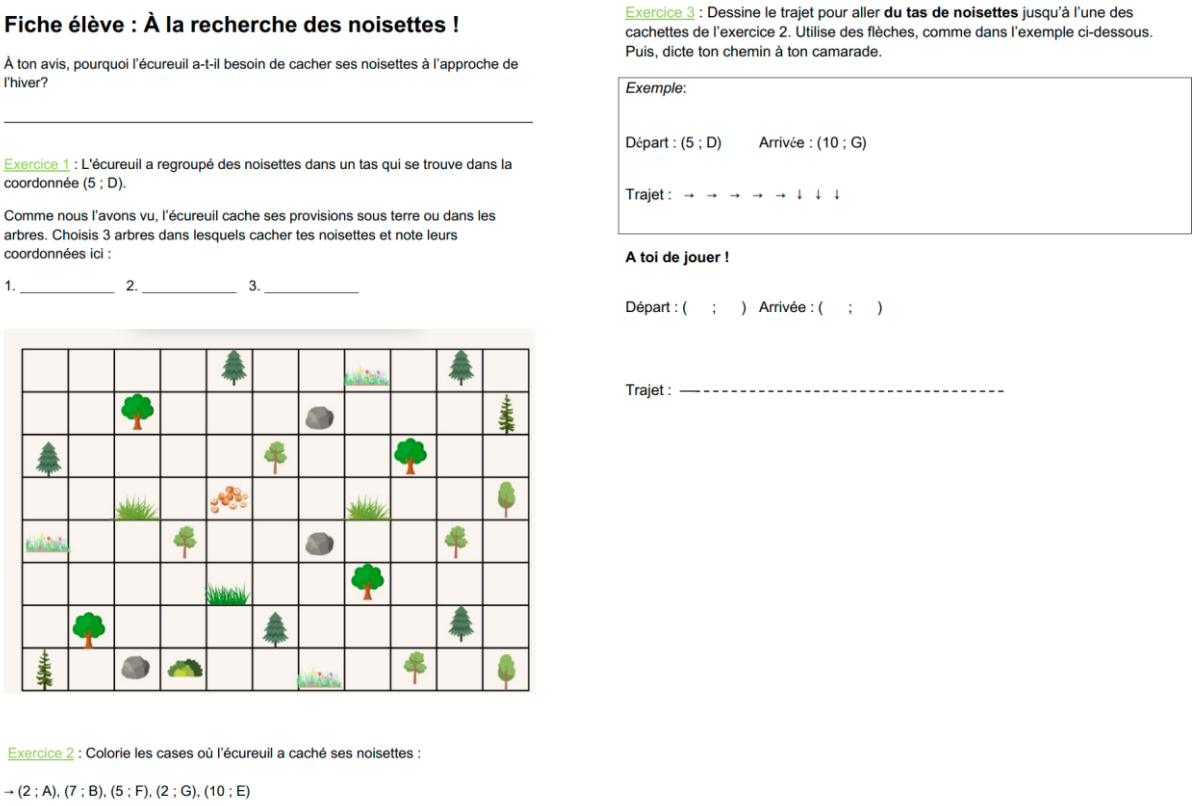
- En mathématiques, la notion de repérage dans l'espace en utilisant des systèmes conventionnels de repérage.

- En sciences, les interactions qui peuvent exister entre les êtres vivants et leur milieu.

Il semble donc que cette activité réponde dans sa conception au critère d'interdisciplinarité.

Les discussions entre les participants se sont orientées sur trois axes :

- La qualité des supports proposés aux élèves (Figure 13) : le « jardin » proposé sous forme de cases avec des végétaux représentés de manière très caricaturale éloigne trop la situation du réel. Le recours à la revue « Le chasseur français » (Figure 14) comme ressource documentaire sur la biologie de l'animal est plus que discutable. Il est évident que d'autres ressources auraient pu être privilégiées.
- La pertinence de la modélisation des déplacements des écureuils : des données réelles de déplacement auraient pu être utilisées pour mieux comprendre la biologie de l'écureuil (distances parcourues, types de cachettes privilégiées, comparaison de différents environnements…).
- L'absence d'interaction entre les mathématiques et les sciences : dans l'activité proposée, on voit que les disciplines sont utilisées de manière totalement indépendante. Les sciences n'ont pas aidé à construire le modèle des cachettes. Les mathématiques, via cette modélisation, ne permettent pas de faire de nouveaux apprentissages sur l'écureuil. Elles sont un simple outil, une simple réactivation de connaissances liées au déplacement dans l'espace. Pour aider à faire davantage dialoguer les deux disciplines, il aurait été intéressant de proposer une problématique qui pousse à cette interaction, par exemple : « Compare ces deux aménagements de jardin : quel est celui qui serait le plus économique en termes de déplacement pour les écureuils tout en lui offrant le plus de cachettes différentes ? »



Fiche élève : À la recherche des noisettes !

À ton avis, pourquoi l'écureuil a-t-il besoin de cacher ses noisettes à l'approche de l'hiver?

_____

Exercice 1 : L'écureuil a regroupé des noisettes dans un tas qui se trouve dans la coordonnée (5 ; D).

Comme nous l'avons vu, l'écureuil cache ses provisions sous terre ou dans les arbres. Choisis 3 arbres dans lesquels cacher tes noisettes et note leurs coordonnées ici :

1. _____ 2. _____ 3. _____

Exercice 2 : Colorie les cases où l'écureuil a caché ses noisettes :

→ (2 ; A), (7 ; B), (5 ; F), (2 ; G), (10 ; E)

Exercice 3 : Dessine le trajet pour aller **du tas de noisettes** jusqu'à l'une des cachettes de l'exercice 2. Utilise des flèches, comme dans l'exemple ci-dessous. Puis, dicte ton chemin à ton camarade.

Exemple:

Départ : (5 ; D) Arrivée : (10 ; G)

Trajet : → → → → → ↓ ↓ ↓

A toi de jouer !

Départ : (;) Arrivée : (;)

Trajet : ——————————————————

Figure 13 : supports de travail élaborés par les étudiants.

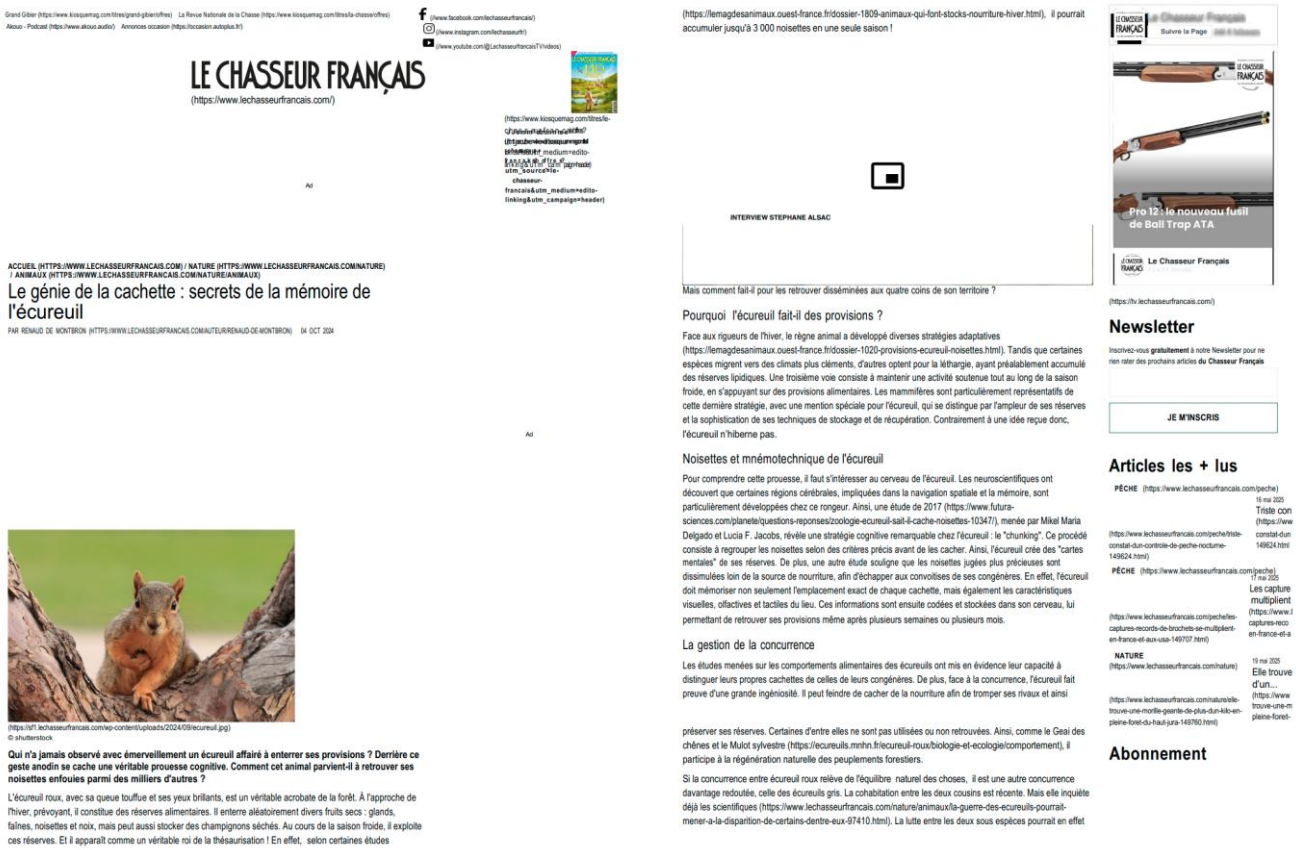


Figure 14 : ressource documentaire fournie par les étudiants

Conclusions sur ce temps d'échange par groupe

Pour favoriser l'interdisciplinarité, il semble qu'il faille concevoir la situation en intégrant dès le départ les objectifs croisés et non pas les assembler après coup. Or souvent, les situations proposées juxtaposent les disciplines (pluridisciplinarité) plutôt que de les intégrer.

Les situations-problèmes bien conçues permettent un apprentissage riche à condition de vérifier la validité scientifique des modèles. Elles doivent être ancrées dans des problèmes concrets et réalistes pour favoriser l'engagement et la compréhension des élèves.

Les échanges ont mis en évidence la complexité de concevoir des activités véritablement interdisciplinaires. Pour améliorer ces situations, il est crucial :

- de renforcer les liens entre les disciplines en s'appuyant sur des problèmes authentiques ;
- de fournir des ressources pédagogiques solides et adaptées au niveau des élèves ;
- de guider les étudiants dans la conception de protocoles expérimentaux rigoureux.

Enfin, il semble très important d'arriver à équilibrer la rigueur scientifique et mathématique, la pertinence pédagogique et l'engagement des élèves.

III - BIBLIOGRAPHIE

Blum, W. et Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? Dans C. Haines, P Galbraith, W Blum, S. Khan (éd.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (222 – 231). Chichester: Horwood.

HEP, (2025). Modules interdisciplinaires BP63ID 3e année, présentation de l'offre 2025-2026, Haute école pédagogique du canton de Vaud, Filière Enseignement primaire, Lausanne. https://www.hepl.ch/files/live/sites/files-site/files/filiere-bp/programme-formation/bp63id_2025-2026.pdf

Ducommun, J. (2009). Analyse d'une activité pédagogique à l'aune de critères définissant la « situation-problème ». Dans M. Mellouki et A. Akkari (éd.), *Actes de la Recherche n° 7 : La recherche au service de la formation des enseignants* (169 – 182). Suisse : HEP-BEJUNE

Cyr, S., Langlois, S., Poliquin, G. et Charland, P. (2020). Intégration des mathématiques et des sciences. Dans P ; Potvin et M. Bissonnette (éd.), *Repères contemporains pour l'éducation aux sciences et à la technologie* (89 − 94). Laval : Presses de l'Université Laval.

Klein, J. T. (2010). *A taxonomy of interdisciplinarity*. The Oxford handbook of interdisciplinarity.

Lacek, Y. et De Simone, M. (2025) *Aborder le monde qui nous entoure par les mathématiques : un enjeu de modélisation*. [Présentation] Journées romandes des formatrices et formateurs en didactiques des mathématiques. Genève, 31 janvier 2025. https://www.unige.ch/fapse/dimage/application/files/8917/4195/6531/2025-01-31__Journees_Formateurs_Romands.pdf

Lausselet, N. (2022) Éduquer à la durabilité : de quoi parle-t-on ? *Educateur*, 8, 4-7

Lausselet, N., et Zosso, I. (2023). Une École pour transformer ? Dialogue entre l'éducation à la durabilité et l'outdoor education. Dans N. Durisch Gauthier, N. Fink et A. Pache (éd.), *Former dans un monde en crise : Les didactiques des sciences humaines et sociales face aux transformations sociétales. Mélanges offerts à Philippe Hertig*. (105-118). Neuchâtel, Suisse : Editions Alphil − Presses universitaires suisses.

Lenoir, Y., et Sauvé, L. (1998). Note de synthèse. De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement : un état de la question. *Revue française de pédagogie*, 125(1), 109 − 146.

Maaß, K. (2016) *On a besoin des maths dans la vie. Primas Cahier de problèmes (5P - 6P Harmos).* Université de Genève. Consultée le 10/09/2025, URL : https://www.unige.ch/primas/files/besoin-maths.pdf

Pomme. M. et Valentin D. (2017). M*athématiques et interdisciplinarité. Les maths, un outil pour comprendre le monde*. Paris : Hatier.

Raworth, K. (2018). *La Théorie du donut : S'inspirer de la nature pour changer de modèle économique*. Plon

Roy, P., Schubnel, Y., et Schwab, C. (2019). Les représentations de la pratique interdisciplinaire chez de futurs enseignants suisses du primaire. *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, (19), 49 − 85.

Tonnetti, B., et Lentillon-Kaestner, V. (2023). Teaching interdisciplinarity in secondary school: A systematic review. *Cogent Education*, 10(1), 2216038. 4 − 15.

Yvain-Prébiski, S. (2023). La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique ? Dans Vandebrouck F. et Gardes, M.-L. (éd.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des séminaires et des posters des actes de EE21.* (209 – 218). Paris : ARDM et IREM de Paris.

LE CHALLENGE MATHÉMATIQUE, UN DISPOSITIF DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Vincent DIONISI
Conseiller Pédagogique Départemental (CPD) en mathématiques
Inspection de Wittelsheim (68)
Vincent.dionisi@ac-strasbourg.fr

Herrade GUTH
Conseillère Pédagogique de Circonscription (CPC)
Inspection de Riedisheim (68)
Herrade.guth@ac-strasbourg.fr

Marie-Anne MARRIERE
Conseillère Pédagogique de Circonscription (CPC)
Inspection de Saint-Louis (68)
Marie-anne.marrière@ac-strasbourg.fr

Karine RUDLOFF-BEYER
Formatrice à l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education
INSPE Colmar (68)
rudloffbeyer@unistra.fr

Résumé

Enseigner la résolution de problèmes nécessite de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un enseignement explicite, structuré et régulier. Ce travail commence au cycle 1 avec des situations où le nombre est utile pour exprimer des quantités, pour désigner un rang ou une position, pour anticiper le résultat d'une action sur des quantités ou sur des positions. Il se poursuit aux cycles 2 et 3 où « la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves ».

Les nouveaux programmes (2025) de l'école primaire réaffirment la place centrale de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Cette activité essentielle se développe progressivement au fil des trois cycles en s'adaptant aux étapes de développement des élèves.

- Au cycle 1, elle prend la forme de défis motivants, favorisant la manipulation, l'essai-erreur et la verbalisation des démarches. Elle développe de manière informelle le sens des opérations sans utiliser les symboles mathématiques.
- Au cycle 2, elle exige de l'élève initiative, engagement et capacité à explorer des pistes de solution avec rigueur.
- Au cycle 3, elle permet de donner du sens aux notions, de développer des compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer), et constitue un critère d'évaluation clé.

En outre, la résolution de problème favorise aussi le développement des compétences psychosociales comme la confiance en soi, la curiosité et l'apprentissage par l'erreur. Cet atelier vise la présentation d'un dispositif départemental mis au service de la résolution de problèmes de la Petite Section (PS) au CM2, développé et conçu par la Mission mathématiques du Haut-Rhin (68). L'objectif est de faire

découvrir le Challenge mathématique, son développement et ses enjeux, à travers le prisme du prescrit institutionnel et des recherches en didactique des mathématiques mais aussi d'engager une réflexion sur les choix réalisés ou sur différentes orientations possibles.

I - INTRODUCTION – PRESENTATION DU CONTEXTE

1 La « Mission maths 68 »

La mission essentielle du groupe vise à améliorer par des approches variées les performances en mathématiques des élèves et plus spécifiquement en résolution de problèmes.
Aussi, l'objectif de notre groupe est de favoriser une dynamique départementale autour de l'enseignement des mathématiques, en articulant formation des enseignants, approche pluridisciplinaire et production d'outils pour la classe. Ces outils font l'objet d'expérimentations en classe, d'une validation institutionnelle auprès du Directeur Académique des Services de l'Education Nationale (DASEN) du Haut-Rhin, avant d'être diffusés largement auprès de la communauté enseignante.
La « Mission maths 68 » existe depuis 2014 et s'est considérablement développée avec le plan maths. Elle regroupe, autour de l'inspectrice chargée de la mission mathématiques et du conseiller départemental en mathématiques, des formateurs (conseillers pédagogiques de circonscription, en langue vivante, formateurs INSPÉ, professeurs-maîtres formateurs) et des directeurs. Elle s'organise autour de deux groupes de travail : le groupe « Outils » qui propose des ressources à destination des enseignants et des formateurs, et le groupe « Challenge » qui s'occupe spécifiquement de la conception des problèmes, des outils et des ressources du Challenge mathématique.
Alors que les énoncés de problèmes proposés à l'origine relevaient de problèmes dits atypiques, il s'agit désormais de problèmes arithmétiques catégorisés selon la typologie présentée dans le guide sur *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* MEN (Ministère de l'Education Nationale, 2022), qui s'appuie sur les travaux de Catherine Houdement (2017).

2 Le « Challenge mathématique »

Il s'agit d'un dispositif de résolution de problèmes, de la maternelle au CM2, en quatre manches réparties sur l'année, avec à chaque fois deux typologies de problèmes travaillées.
Ces dernières sont annoncées dès le début de l'année (par circulaire), harmonisées autant que possible de la maternelle au CM2, et mises en cohérence avec la programmation en résolution de problèmes élaborée par le groupe « Outils enseignants » de la Mission maths (exemple du cycle 2 en annexe 1).
Des énoncés pour six niveaux sont proposés avec la particularité de ne pas correspondre à un niveau de classe prédéfini. Ainsi, l'enseignant pourra choisir le niveau travaillé en fonction des possibilités des élèves.
Des problèmes arithmétiques variés et structurés sont ainsi proposés mais aussi des problèmes imagés, des problèmes atypiques (selon la classification du guide *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* MEN – Ministère de l'Education Nationale, 2022), des problèmes traduits en langue régionale (Allemand). Suivent des activités de prolongement, à savoir des propositions de problèmes pour le calcul mental, une production d'énoncés.
Une des participantes à l'atelier questionne l'exclusivité des problèmes arithmétiques et la non prise en compte des problèmes géométriques. Selon elle, il serait intéressant de développer des problèmes

géométriques car de nombreux professeurs des écoles rencontrent des difficultés dans l'appréhension des problèmes de géométrie. On ne questionnerait pas assez les données purement géométriques à travers des énoncés de problèmes.

Cette possibilité figure en effet dans les pistes de prolongement des concepteurs du « Challenge mathématique ».

Le nom d'origine « Challenge mathématique » a été conservé même si le fonctionnement a profondément évolué. Les enjeux sont multiples : il s'agit à la fois d'outiller pédagogiquement et didactiquement les enseignants mais aussi de motiver les élèves afin qu'ils s'engagent dans l'activité souvent peu appréciée.

S'engager dans le « Challenge mathématique » pour l'enseignant, c'est surtout s'inscrire dans une démarche d'enseignement de la résolution de problèmes. Une programmation étant communiquée en début d'année, l'enseignant peut, soit introduire la catégorie ou sous-catégorie grâce au « Challenge mathématique », soit utiliser la manche comme un entraînement si la catégorie a déjà été enseignée.

De nombreux outils sont mis à disposition des enseignants pour accompagner la mise en œuvre du « Challenge mathématique » : une démarche d'enseignement, des supports d'évaluation tenant compte des spécificités des élèves de maternelle -où l'on privilégie l'observation des attitudes plutôt que le résultat-, des outils de suivi, ainsi que des exemples de modélisation et de verbalisation adaptés au jeune élève.

Bien que les deux versions diffusées (Word et PDF) constituent des supports prêts à l'emploi, leur utilisation nécessite une analyse préalable des énoncés par l'enseignant, afin d'en garantir l'adéquation avec le niveau et les besoins de sa classe.

II - LA DÉMARCHE DU CHALLENGE MATHÉMATIQUE

1 Comprendre la logique des phases successives lors d'une manche du Challenge mathématique

Afin de permettre à chacun de se sentir personnellement sollicité, l'atelier débute par une réflexion qui permet d'interroger la logique de la succession des énoncés. Un corpus de problèmes est proposé à chaque binôme, sans préciser ni la catégorie (ou sous-catégorie) ni la phase de la démarche d'enseignement. Les participants ont pour consigne de positionner les énoncés dans la bonne étape de la démarche représentée sous la forme d'un tableau avec différentes colonnes puis d'échanger à deux sur les éléments identifiés permettant d'associer un énoncé à une phase de la démarche d'enseignement. Cette approche vise à se centrer sur des éléments déterminant une place dans un processus d'apprentissage.

	Séance de découverte et d'entraînement Typologie 1 :		Séance de découverte et d'entraînement Typologie 2 :		Séance de réinvestissement (typologies 1 et 2)	Séance d'évaluation (typologies 1 et 2)
	« Je découvre » Problème de **découverte**	« Je m'entraîne » Problème **d'entraînement**	« Je découvre » Problème de **découverte**	« Je m'entraîne » Problème **d'entraînement**	« J'approfondis » Problème de **réinvestissement**	« Je m'évalue » Problème **d'évaluation**
Typologie 1 et 2 sur une semaine – monolingue						

Figure 1. Grille à compléter

Cette recherche se voulait autocorrective pour permettre de comparer la proposition du groupe à la version « officielle » du Challenge mathématique et de poursuivre les échanges au sein du binôme.

	Jour 1 **Séance de découverte et d'entraînement** Typologie 1 : Problèmes **mixtes en plusieurs étapes, avec comparaison additive**		Jour 2 **Séance de découverte et d'entraînement** Typologie 2 : **Problèmes multiplicatifs en une étape : comparaison**		Jour 3 **Séance de réinvestissement** (typologies 1 et 2)	Jour 4 **Séance d'évaluation** (typologies 1 et 2)
	« Je découvre » Problème de **découverte**	« Je m'entraîne » Problème **d'entraînement**	« Je découvre » Problème de **découverte**	« Je m'entraîne » Problème **d'entraînement**	« J'approfondis » Problème de **réinvestissement**	« Je m'évalue » Problème **d'évaluation**
Typologie 1 et 2 sur une semaine – monolingue	**Les salles de classe 1** Dans une classe de CE1-CE2, il y a 11 tables doubles pour les CE1 ; il y a 15 places de moins pour les CE2. Combien de places assises y a-t-il dans cette classe de CE1-CE2 ?	**Les salles de classe 2** Dans une classe de CE1-CE2, il y a 9 tables doubles pour les CE1 ; il y a 9 places de moins pour les CE2. Combien de places assises y a-t-il dans cette classe de CE1-CE2 ?	**Les écoles 1** Dans l'école Victor Hugo, il y a 150 élèves. Dans l'école Jules Verne, il y en a trois fois plus. Combien d'élèves y a-t-il dans l'école Jules Verne ?	**Les écoles 2** Dans l'école Victor Hugo, il y a 70 élèves. Dans l'école Jules Verne, il y en a quatre fois plus. Combien d'élèves y a-t-il dans l'école Jules Verne ?	Problèmes **mixtes en plusieurs étapes, avec comparaison additive** **Les feutres**  Voici la réserve de feutres pour les CE1. La réserve des CE2 en compte 38 de plus. Combien y-a-t-il de feutres dans la réserve de toute la classe ? **Problèmes multiplicatifs en une étape : comparaison** **Le partage des cubes** Voici le sac de cubes de Jules.  Anna a cinq fois moins de cubes dans son sac. Combien de cubes a-t-elle ?	Problèmes **mixtes en plusieurs étapes, avec comparaison additive** **Le cinéma** Pour payer la sortie au cinéma, les CM1 ont récolté 37 pièces de 2 euros. Les CM2 ont récolté 25 euros de moins. Combien d'argent les élèves ont-ils récolté en tout ? *Différencié* – **Le cinéma** Pour payer la sortie au cinéma, les CM1 ont récolté 25 pièces de 2 euros. Les CM2 ont récolté 20 euros de moins. Combien d'argent les élèves ont-ils récolté en tout ? **Problèmes multiplicatifs en une étape : comparaison** **Les livres** Dans la bibliothèque, il y a 60 bandes dessinées, et six fois plus de romans. Combien y a-t-il de romans dans la bibliothèque ? *Différencié* – **Les livres** Dans la bibliothèque, il y a 60 bandes dessinées, et dix fois plus de romans. Combien y a-t-il de romans dans la bibliothèque ?

Figure 2. Challenge mathématique 2024-2025 ***Manche 4 niveau 2B : L'école***

2 Echanges avec le groupe

La mise en commun consiste à citer les indices qui ont permis la reconstitution de l'ensemble de la séquence en justifiant les raisons de leur choix, c'est-à-dire en explicitant les critères retenus.
Un premier groupe dévoile sa stratégie en expliquant qu'ils sont partis de l'évaluation (dernière colonne) car celle-ci est était différenciée et pour eux, il est indispensable de proposer une différenciation pédagogique lors de cette phase. Selon eux, les problèmes de réinvestissement étaient facilement identifiables.

Un autre groupe interroge la place des problèmes imagés : une partie du traitement de l'information étant déjà prise en charge, s'agit-il alors plutôt d'un problème de découverte ou de réinvestissement ? Le collectif débat sur la place du problème imagé dans le processus d'apprentissage car certains d'entre eux aideraient à modéliser la situation, donc à les résoudre.
Pour d'autres, la place du problème imagé serait dans la phase de réinvestissement car c'est aussi l'autonomie qui est visée. Déchargé de l'étape de lecture, l'élève peut plus facilement entrer dans la recherche de procédures de résolution.
Contrairement à ce que pensent les participants, le choix des problèmes imagés ajoute une complexité supplémentaire, au regard de l'analyse qui en est faite dans le guide sur *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* MEN – Ministère de l'Education Nationale, 2022. Ainsi, les illustrations qui contiennent une partie des informations, nécessitent des allers-retours entre le texte de l'énoncé et la ou les illustrations, ce qui augmente la difficulté à résoudre le problème. La « Mission maths 68 » a fait le choix de proposer en réinvestissement ces problèmes plus complexes, en proposant des illustrations dont l'impact est essentiel : la résolution du problème n'est pas possible sans l'image (ni avec l'image seule).
Un des participants remarque qu'il pourrait être intéressant d'expliciter aux enseignants comment exploiter une image avec les élèves. Une autre participante remarque une image, parmi les problèmes proposés, dont la représentation schématique induit un partage équitable d'une collection. Ce problème est de fait plus simple, et ne correspond effectivement pas aux intentions annoncées ci-dessus.
Par ailleurs, une activité à proposer à des étudiants serait de faire une analyse comparative de manuels et de problèmes créés lors du « challenge mathématique » au niveau du rôle de l'image dans l'énoncé.

Les indices prélevés dépassent le choix des nombres en jeu et il a également été précisé qu'il y a aussi une réflexion sur les procédures de calculs mobilisables par les élèves. Nous pensons que la tâche de l'enseignant est aussi de mettre en évidence les procédures de calcul mental, cela permet aussi de travailler la flexibilité mentale. Une des attentions de la « Mission maths du 68 » quant aux données numériques des problèmes produits, est de rendre plus facile la résolution du problème par un calcul mental ou en ligne, plutôt que par un calcul posé. Le but est de mettre du sens sur les calculs, de manipuler les nombres, plutôt que de mobiliser des compétences « techniques » de calcul. Les nombres mobilisés offrent fréquemment la possibilité de recourir à différentes procédures de calcul.
Ainsi, ce premier atelier a permis de s'interroger sur les contraintes prises en compte dans la conception d'un énoncé de problème arithmétique.

III - NIVEAUX DE DIFFICULTE ET VARIABLES DIDACTIQUES DANS LA CONCEPTION DES PROBLÈMES

1 Comprendre la logique des niveaux du « Challenge mathématique »

Afin d'interroger la progressivité des énoncés, un nouveau support est proposé aux participants : six énoncés sont projetés, avec pour consigne d'identifier le niveau correspondant à chacun (niveau « maternelle », niveaux 1 à 4). Il est précisé en amont qu'un niveau intermédiaire a récemment été créé pour répondre à l'écart constaté entre les niveaux 2 et 3. Le niveau 2 est décliné en « 2A » et « 2B ».

Lors de la mise en commun, les participants remarquent que tous les problèmes relèvent de la même typologie : il s'agit de problèmes de transformation.

Les nombres en jeu ont été leur première stratégie pour déterminer « les extrêmes » : le niveau « maternelle » met en jeu de petits nombres, et la possibilité d'une mise en situation avec recours à du matériel. A l'inverse, l'utilisation des nombres décimaux permet d'identifier les deux niveaux les plus élevés.

Un deuxième critère a été le nombre d'étapes (croissant au fur et à mesure des problèmes), puis l'introduction de problèmes mixtes.

Les participants ont demandé si les typologies proposées dans le « Challenge mathématique » restaient les mêmes d'une année à l'autre. Des aménagements sont réalisés tous les ans, pour faciliter la mise en œuvre par les enseignants. Cette année, les typologies proposées étaient les mêmes de la maternelle au CM2 (lorsque cela était possible), afin de faciliter la différenciation pour enseigner la résolution de problèmes dans les classes (notamment à double ou triple niveaux).

2 Obstacles et objectifs d'apprentissage dans les énoncés de problèmes du « Challenge mathématique »

L'atelier se poursuit avec l'analyse de différents énoncés des niveaux 2B, 3 et 4. Il est demandé aux participants de repérer les obstacles liés à la numération, au calcul… qui pourraient se présenter aux élèves lors de la résolution de ces problèmes. Ces obstacles sont choisis intentionnellement par la « Mission maths 68 » lors de la conception des énoncés de problèmes, afin de viser un objectif d'apprentissage précis. Il est également demandé au groupe d'identifier ces objectifs d'apprentissage.

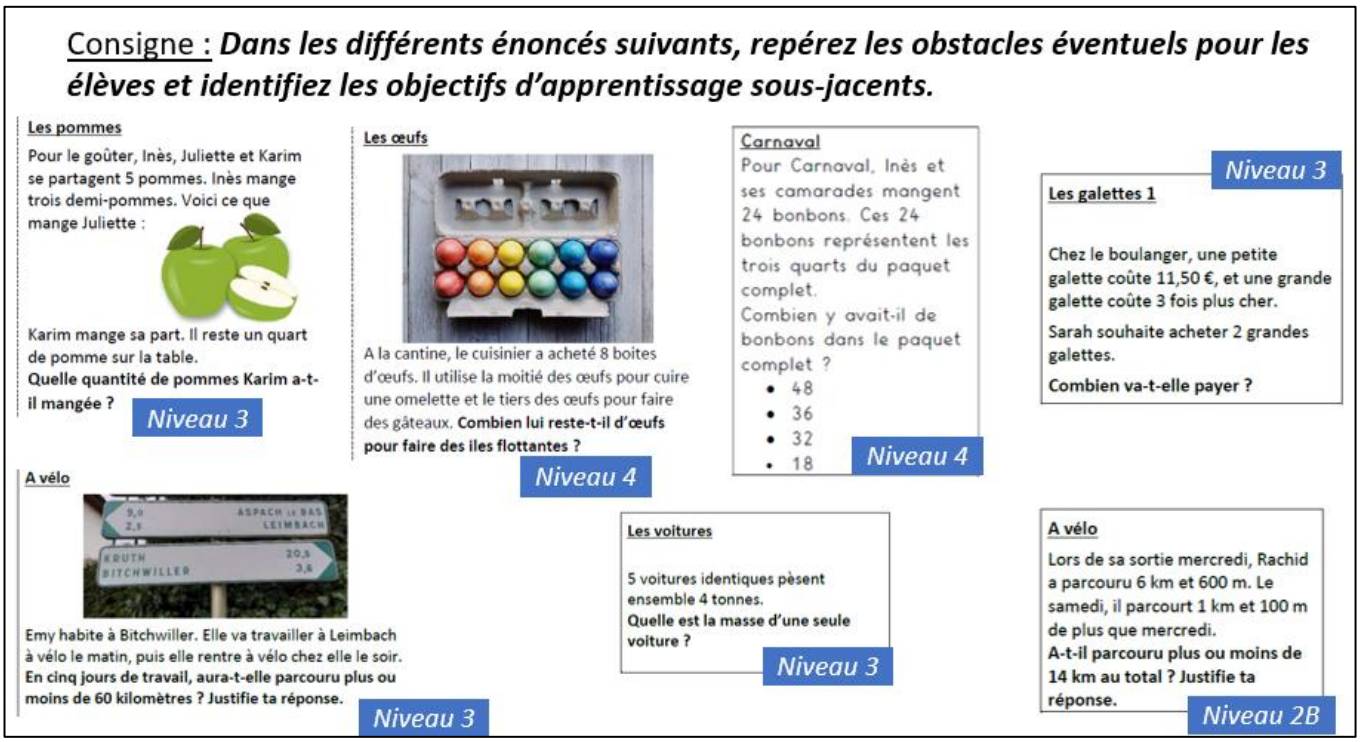


Figure 3. Problèmes à analyser au regard des obstacles pour les élèves en numération, calcul…

Un participant remarque que le recours à une estimation permet de résoudre certains problèmes, par exemple le problème du niveau 2B « A vélo » (*figure 3*). Il souligne que souvent, les enseignants ne s'autorisent pas à accepter des estimations de la part des élèves.

Pour les énoncés de problèmes comportant un Questionnaire à Choix Multiples (QCM), un participant analyse que de nouvelles stratégies de résolution peuvent apparaître chez les élèves, comme tester les propositions.

Les participants s'interrogent sur la consigne de l'atelier, en particulier sur le sens que nous attribuons à la recherche des « objectifs d'apprentissage » sous-jacents. Nous expliquons alors que les obstacles liés à la numération ou au calcul, rencontrés par les élèves dans certains énoncés, sont intentionnellement construits par le collectif de la « Mission maths 68 ». Ces situations permettent de mettre en évidence une conception erronée des notions mathématiques à travers la résolution de problèmes. Les nombres en jeu sont ainsi choisis de sorte qu'une conception erronée conduise à une réponse incorrecte.

3 Choix didactiques pour le « Challenge mathématique »

L'atelier se poursuit avec l'explicitation de ces points d'attention liés aux obstacles d'apprentissage. Notre principal point d'attention concerne l'enseignement des fractions et des nombres décimaux, en appui sur le document d'accompagnement abordant l'enseignement des fractions et des nombres décimaux au cycle 3 (MEN, 2016). Ce dernier pointe le risque de compréhension d'un nombre décimal comme deux nombres entiers séparés par une virgule (et par extension, de la fraction comme deux nombres entiers séparés par un trait). Ainsi, tous les problèmes proposés dans le cadre du « Challenge mathématique », impliquant des fractions ou des nombres décimaux, ne peuvent être résolus avec cette mauvaise conception des fractions et/ou des nombres décimaux. Par exemple, dans le problème du niveau 3 « La

galette 1 » (*figure 3*), « une petite galette coûte 11,50 € et une grande galette coûte trois fois plus cher ». Une mauvaise conception des nombres décimaux pourrait amener un élève à répondre « 3 fois 11 virgule 3 fois 50 », ce qui donnerait un résultat erroné. Si la petite galette avait coûté 11,10 €, cette mauvaise conception aurait tout de même permis à l'élève de trouver le bon résultat.

Toujours en appui sur le document d'accompagnement sur les fractions et nombres décimaux (MEN, 2016), les nombres en jeu sont choisis pour faciliter leur traitement en verbalisant par les unités de numération. Par exemple, pour déterminer la quantité totale que représentent « 5 verres de 0,3 L », un raisonnement utilisant les unités de numération pourrait être « 5 verres de 3 dixièmes de litre, soit 5 fois 3 dixièmes de litre, ou 15 dixièmes de litre, que j'écris 1,5 L ». Ce type de raisonnement permet de mettre du sens sur les nombres, et de rendre accessible le problème sans avoir abordé la multiplication d'un nombre entier par un nombre décimal.

Les travaux du Conseil Scientifique de l'Education Nationale (*De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématiques*, 2022), mettent en lumière des obstacles sur la compréhension de la notion de fraction, pris en compte dans le « Challenge mathématique ». Ainsi, dans le problème « Les œufs » (*figure 3*), la fraction est utilisée comme opérateur multiplicatif, avec un « tout » (une boîte de 12 œufs) constitué de plusieurs éléments. Le problème « Carnaval » (*figure 3*) propose de retrouver l'unité (la quantité de bonbons dans le paquet complet) à partir d'une fraction (la quantité de bonbons représentant les trois quarts du paquet).

Les travaux de Catherine Rivier et Emmanuel Sander sur les formes d'analogies dans la résolution de problèmes (APMEP – Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 2021) ont également permis d'affiner la production de nos énoncés de problèmes. Le problème « Les voitures » (*figure 3*) pose une difficulté conceptuelle pour les élèves, liée à l'analogie de simulation : Comment partager 4 tonnes en 5 ?

D'autres obstacles sont pris en compte dans les intentions des concepteurs :

- Le recours à des conversions dans les unités de mesure
- La nécessité des fractions ou des nombres décimaux pour résoudre un problème
- L'attente d'un raisonnement pour justifier un résultat plutôt qu'un calcul à effectuer (pour mettre du sens sur le problème)
- La notion de « distracteur », présente dans les évaluations nationales de 6ème, qui propose sous forme de QCM des réponses erronées qui correspondent à une mauvaise conception de la notion en jeu. Au-delà des aspects didactiques, l'usage des distracteurs permet également aux élèves participant au « Challenge mathématique » de se familiariser avec les QCM.

4 Réactions du groupe

Les participants à l'atelier soulignent la richesse des éléments pris en compte dans le « Challenge mathématique », dont ils n'avaient pas pleinement conscience. Constatant que cette difficulté de perception pourrait être encore plus marquée pour les enseignants, l'un des participants souligne ainsi la nécessité de les outiller pour saisir la subtilité des énoncés. Parallèlement, un autre point de vue met en

avant la capacité du « Challenge mathématique » à susciter la réflexion des enseignants en mettant au jour certaines conceptions erronées.

Il apparaît difficile de donner aux enseignants l'ensemble des clés de compréhension. Un sondage dans le Bas-Rhin sur l'utilisation des outils élaborés par la « Mission mathématiques du 67 » a d'ailleurs montré que les enseignants prennent peu appui sur ces supports. Malgré tout, les participants s'accordent sur l'utilité de donner aux enseignants quelques courts points de vigilance, pour chacune des quatre manches du Challenge mathématique, par rapport au choix des nombres. Une aide sur la mise en commun, pas toujours exploitée par les enseignants, est aussi évoquée dans le groupe. Le travail en constellation, mis en place dans le Plan mathématiques, est une voie privilégiée pour attirer l'attention, la vigilance des enseignants sur les points d'attention du « Challenge mathématique ».

IV - PROLONGEMENT DE LA RESOLUTION DE PROBLÈMES DANS LE CHALLENGE MATHEMATIQUE

1 Résolution de problèmes et calcul mental

Depuis l'année scolaire 2023/2024, des problèmes simplifiés, dits « flash », sont proposés aux enseignants pour être exploités en calcul mental. Au cours de l'atelier, le groupe est invité à expérimenter ce type de problèmes. Ces derniers conservent la même typologie que les problèmes « principaux » et les énoncés, sauf choix particulier des concepteurs, sont même souvent identiques, mais les nombres choisis permettent un traitement en calcul mental. Le nombre d'étapes peut également être réduit afin d'alléger la mémoire de travail, tout en préservant la même typologie.

Un des enjeux récents de ce travail en calcul mental est soulevé par le rapport sur les résultats aux évaluations nationales de CM1 (DEPP – Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance, 2024), et concerne l'égalité filles-garçons. Le rapport montre un écart visible entre les résultats des filles et des garçons, en particulier sur la mémorisation des faits numériques et des procédures. C'est pourquoi nous portons une attention particulière sur les énoncés de calcul mental. C'est aussi pour les mêmes raisons que les nombres en jeu dans les énoncés « principaux » privilégient le calcul mental ou le calcul en ligne, plutôt que le calcul posé.

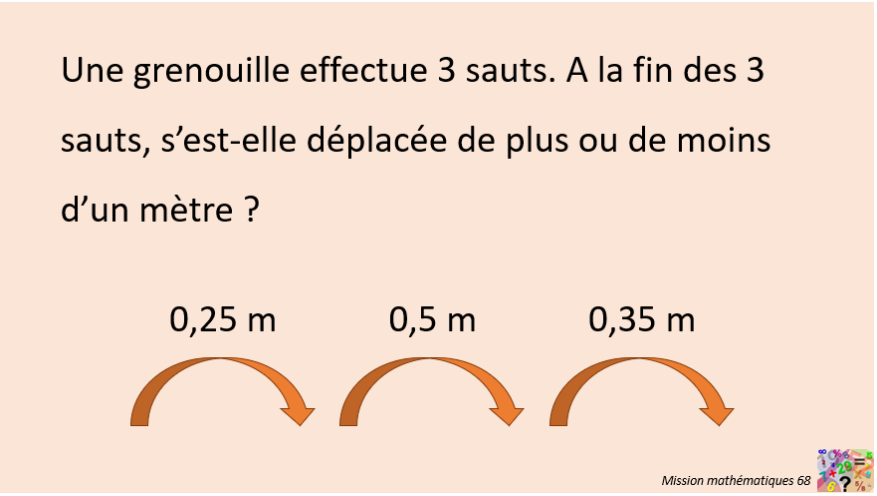


Figure 4. Exemple de support numérique pour la mise en œuvre des problèmes de calcul mental

Un participant soulève une interprétation différente du support accompagnant un problème de calcul mental (*figure 4*). Trois sauts de grenouille sont représentés par trois flèches avec chacune une mesure différente indiquée au-dessus. Il s'agit de déterminer si après ces trois sauts, la grenouille a parcouru plus ou moins d'un mètre. Or, les flèches étant visuellement identiques, une autre interprétation pourrait être : « Lequel de ces trois sauts, reproduit 3 fois, permet de dépasser un mètre ? »

La question est posée sur l'idée d'un recours à un logiciel d'intelligence artificielle pour concevoir les énoncés de problèmes. Plusieurs essais ont été menés, d'abord pour produire des énoncés prenant en compte tous les points d'attention didactiques (et institutionnels), puis dans un deuxième temps pour concevoir des images « sur-mesure » servant de support aux problèmes de réinvestissement. Les résultats de ces essais n'ont pas été concluants. Plusieurs participants s'accordent à dire que la production et les réécritures du prompt prennent plus de temps que de produire directement l'énoncé.

2 Les « bonus » du « Challenge mathématique »

En parallèle des énoncés de problèmes arithmétiques et du calcul mental, deux « bonus » sont proposés à chaque manche du « Challenge mathématique ».

Le premier propose la résolution d'un problème atypique, dès la maternelle. Quatre manches étant mises en œuvre chaque année, chacune traite d'un des quatre types de problèmes atypiques définis dans le guide sur *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* MEN (Ministère de l'Education Nationale, 2022) : les problèmes algébriques en manche 1, les problèmes de dénombrement en manche 2, les problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes en manche 3, et les problèmes d'optimisation en manche 4 (ou pour le niveau maternelle, un des types de problèmes des manches 1 à 3, au choix des concepteurs).



Figure 5. Exemples de problèmes algébriques proposés pour le niveau « maternelle » et le niveau 1

Le deuxième bonus aborde la production d'énoncés. Si notre intérêt pour cette activité s'appuie sur les travaux d'Annie Camenisch et Serge Petit (*Apprendre à écrire par les mathématiques*, 2008), le développement de cette partie est encore en projet afin d'accompagner les enseignants dans la réalisation de ce travail.

V - SYNTHESE : QUESTIONS ET REMARQUES DU GROUPE

L'atelier se termine par un temps d'échanges et de réactions du groupe sur le dispositif du « Challenge mathématique ». Les questions concernent l'utilisation du dispositif en formation, notamment dans le cadre des constellations du Plan mathématiques.

En constellation, le « Challenge mathématique » est surtout utilisé comme un outil, un fil rouge. De manière générale en formation, l'analyse des énoncés est privilégiée.

Un participant questionne sur la première approche en formation : partir de ressources que l'on a créées, ou partir des ressources proposées dans les manuels ? Un autre membre du groupe rebondit sur la question des manuels, et souligne que la présentation d'un manuel en formation influence souvent le choix de manuel que les enseignants vont faire. Pour un autre participant, l'objectif pour l'enseignant est de faire un choix éclairé, et il faudrait donc sensibiliser à l'analyse et au regard.

Concernant le « Challenge mathématique », le groupe s'accorde à dire qu'à un moment, les enseignants doivent avoir une connaissance des choix didactiques faits pour les énoncés de problèmes produits, notamment sur la notion de fraction et de nombre décimal. Il est ajouté que les enseignants sont demandeurs de ces précisions.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Bourgeois, C., Magnino, L., Raffy, G., Andreu, S., Conceiçao, P., Eteve, Y., Gill-Sotty, C., Laskowski, C., Léger, A., Loi, M., et al. (2024), Evaluations Repères 2023 de début de CM1 : meilleures performances des filles en français et des garçons en mathématiques. DEPP *Note d'information*, n°24.14.

Camenisch, A. et Petit, S. (2008), Apprendre à écrire par les mathématiques. *Actes du colloque international « De la France au Québec : l'écriture dans tous ses états ».*

Houdement, C., (2017), Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 2017, 100.

Ministère de l'Education Nationale (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*.

Ministère de l'Education Nationale (2022). *Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.*

Rivier, C. et Sander, E. (2022), Trois formes d'analogie guidant la résolution de problèmes. APMEP *Au fil des maths*, n°542.

Sander, E., Neagoy, M., Rivier, C., Scheibling-Sève, C., Sensevy, G., Thevenot, C. (2022). De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique. CSEN *Synthèse de la recherche et recommandations*.

ANNEXE 1 – EXEMPLE (CYCLE 2) DE PROGRAMMATION EN RESOLUTION DE PROBLEMES DU GROUPE « OUTILS » DE LA MISSION MATHS 68

La programmation des typologies de problèmes du Challenge mathématique a été établie en lien avec la programmation en résolution de problèmes suivante. La Mission maths 68 a mis à jour en juin 2025 ces programmations du cycle 1 au cycle 3, en lien avec les nouveaux programmes qui seront effectifs à la rentrée 2025.

PROGRAMMATION RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DU CP AU CM2

Ce document propose une programmation des problèmes arithmétiques en appui sur les programmes, les attendus de fin d'année et les guides institutionnels (Guide orange « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » et Guide violet « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen »).

C'est la terminologie du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » qui est retenue :

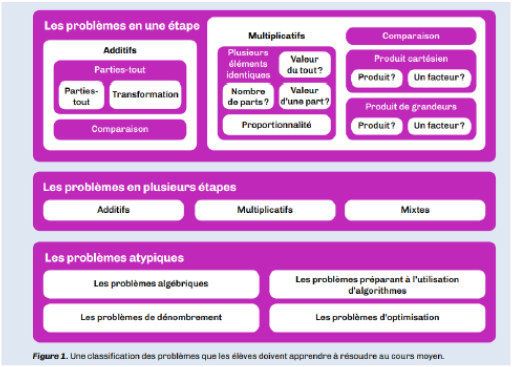


Figure 1. Une classification des problèmes que les élèves doivent apprendre à résoudre au cours moyen.

les problèmes en une étape : il s'agit des problèmes qui vont se traiter en effectuant une unique opération. On peut distinguer parmi ceux-ci, d'une part, les problèmes additifs qui nécessitent une addition ou une soustraction et, d'autre part, les problèmes multiplicatifs qui se traitent en effectuant une multiplication ou une division ;
les problèmes en plusieurs étapes : il s'agit de problèmes qui vont se traiter comme une succession de problèmes en une étape, chacune déterminant des éléments intermédiaires qui vont permettre d'aboutir à la solution recherchée ;
les problèmes atypiques : il s'agit des problèmes verbaux à données numériques dont la résolution est possible au cours moyen et qui ne rentrent pas dans les catégories des problèmes en une ou plusieurs étapes mentionnées précédemment. Le fait de les qualifier d'atypiques ne signifie pas qu'il n'y a pas de stratégies à faire acquérir pour pouvoir les résoudre. Bien au contraire, des sous-catégories clairement identifiées permettront d'enseigner des méthodes de résolution que les élèves doivent connaître.

Au cycle 2, « le temps consacré à la résolution des problèmes basiques doit être conséquent et régulier ». Ainsi, les élèves se créeront un répertoire de problèmes basiques *(problèmes en une étape)*.

Néanmoins, « il importe aussi de proposer des problèmes à deux étapes (problèmes complexes) » dès le CP.

Page 102 du guide « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP »

Au cycle 3, ce sont « les problèmes en plusieurs étapes qui sont l'objectif principal de l'enseignement de la résolution de problèmes ». Ils « sont en général plus difficiles que ceux en une étape » mais, cette « résolution de problèmes en plusieurs étapes va permettre de renforcer les habiletés de résolution de problèmes en une étape. » Au cycle 3, il est attendu des élèves qu'ils soient en capacité de décomposer un problème en plusieurs étapes en une succession de sous-problèmes en une étape. *Pages 30 et 82 du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen »*

« Les nombres en jeu dans un problème peuvent être source de difficulté pour les élèves » *Page 78 du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen »* **Aussi, les énoncés varieront au fil de l'année : on veillera à proposer des « petits nombres » pour introduire de nouveaux types de problèmes afin de permettre aux élèves de s'appuyer sur la manipulation avant d'abstraire.**

Les nombres en jeu peuvent introduire des procédures différentes. Il est donc important de jouer sur cette variable didactique (ex : faits numériques, décomptage, surcomptage…).

ATTENTION : Les problèmes atypiques n'apparaissent pas dans la programmation ; ils seront proposés aux élèves tout au long de l'année.

*Programmation en résolution de problèmes cycle 2 – document de la Mission maths 68 année 2023 – 2024 (groupe outils pour les enseignants) page **1** sur **7***

CP	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Il résout, en mobilisant ses connaissances du champ additif sur des petits nombres ou en s'aidant de manipulations, des problèmes du champ multiplicatif en une étape (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable). Les écritures mathématiques avec les symboles : et x ne sont pas attendues. *NB1 : Encourager les écritures mathématiques avec les symboles « + » « - » « = » en P2 / NB2 : A partir de la période 3, les écritures mathématiques avec les symboles « + » « - » « = » sont attendues.* *Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes. Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. Il connaît le sens des signes - et +.*					
Types de problèmes d'après les attendus de fin de CP	**Problèmes du champ additif** Nombres en jeu < 10 pour chacune des parties	**Problèmes du champ additif** Résultat ≤ 20	**Problèmes du champ additif** Nombres ≤ 60	**Problèmes du champ additif en plusieurs étapes** Nombres ≤ 100 **Problèmes du champ multiplicatif** (additions itérées) : nombres ≤ 30 *NB : Les symboles « x » et « : » ne sont pas utilisés.*	**Problèmes du champ additif en plusieurs étapes** Nombres ≤ 100 **Problèmes du champ multiplicatif** Avec trois nombres en jeu < 30, à partir de représentations figuratives ou de schémas *NB : Les symboles « x » et « : » ne sont pas utilisés*
	Champ additif Problèmes du type **parties-tout (une étape)** : recherche du tout *Dans un train, il y a 5 passagers dans le premier wagon et 2 passagers dans le deuxième wagon. Combien y-a-t-il de passagers au total dans ce train ?* **Champ additif** Problèmes du type **transformation (une étape)** positive : recherche de l'état final *Léa joue au Jeu de l'oie. Elle est sur la case 5 et doit avancer de 2 cases. Sur quelle case va-t-elle poser son pion ?*	**Champ additif** Problèmes du type **parties-tout (une étape)** : recherche d'une partie *Dans mes poches, j'ai 9 billes. J'en ai 7 dans ma poche de gauche. Combien en ai-je dans ma poche de droite ?* **Champ additif** Problèmes du type **transformation (une étape)** positive ou négative : recherche de l'état final *Léa a 9 euros dans son porte-monnaie. Elle achète un livre à 7 euros. Combien lui reste-t-il ? ** Léa a 9 euros dans son porte-monnaie. Elle achète un livre à 3 euros. Combien lui reste-t-il ? ** Léa joue au Jeu de l'oie. Elle est sur la case 8 et doit avancer de 12 cases. Sur quelle case va-t-elle poser son pion ?* *Il avait 28 euros, il a dépensé 12 euros. Combien lui reste-t-il ?*	**Champ additif** Problèmes du type **parties-tout (3 parties)** : recherche du tout *Dans un train, il y a 15 passagers dans le premier wagon, 22 passagers dans le deuxième wagon et 18 dans le troisième wagon. Combien y-a-t-il de passagers au total dans ce train ?* **Champ additif** Problèmes du type **transformation (une étape)** positive ou négative : recherche de la transformation *Il y avait 36 oiseaux dans l'arbre. Il n'en reste plus que 21. Combien d'oiseaux se sont envolés ?* *Un lundi, la plante mesure 43 cm. Le lundi suivant, elle mesure 52 cm. De quelle longueur a-t-elle grandi ?*	**Champ additif** Problèmes du type **parties-tout (2, 3 étapes)** : recherche d'une partie *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* **Champ additif** Problèmes du type **transformation (2 étapes)** : recherche de l'état final (deux transformations successives) *Il y avait 37 enfants dans un bus. Au premier arrêt, 12 enfants sont descendus. Au deuxième arrêt, 7 enfants sont montés. Combien y a-t-il d'enfants dans le bus maintenant ?* *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t-il de livres dans la bibliothèque de la classe ?* *Il avait 28 euros. Il a acheté un livre à 12 euros et une trousse à 5 euros. Combien lui reste-t-il ?*	**Champ additif** Problèmes du type **transformation positive ou négative (une étape)** : recherche de l'état initial *Dans la boîte, il y avait des bonbons. J'en ai mangé 6 et il en reste encore 21. Combien y avait-il de bonbons dans la boîte avant que j'en mange ?* **Champ additif** Problèmes du type **comparaison (une étape)** : recherche de l'une des deux quantités *Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur d'une part** (division partition) *3 enfants se partagent 18 images (donner ces images). Combien d'images aura chaque enfant ?* **Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : parties-tout** *Calcule la somme constituée par 4 billets de 10 euros, 4 billets de 5 euros et 3 pièces de 2 euros.*

*Programmation en résolution de problèmes cycle 2 – document de la Mission maths 68 année 2023 – 2024 (groupe outils pour les enseignants) page **2** sur **7***

CP	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
				Champ multiplicatif Problèmes en **une étape : valeur du tout** (recherche d'un produit) *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 6 biscuits dans chaque paquet. Combien y-a- t-il de biscuits en tout ?* *Une puce fait des sauts de 2 cm. Quelle distance parcourt-elle en faisant six sauts ?* *Un livre coûte 3 euros. Combien cela va-t-il coûter à l'école d'acheter 5 exemplaires de ce livre ?* *Combien y-a-t-il de jours dans 3 semaines ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition) *Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à des rencontres sportives, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y-aura-t-il d'équipes ?* *À la patinoire, l'entraîneur prépare 30 patins pour les enfants de son club de hockey. Combien y-a-t-il d'enfants dans le club ?* *Avec 20 cm de ficelle, combien de morceaux de 5 cm puis-je faire ?*	
Révisions	NB : Continuer à proposer des problèmes de parties-tout avec recherche du tout.	**Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de P1	**Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de P1, P2 Problèmes du type **parties-tout (une étape)** : recherche d'une partie *Dans mes poches, j'ai 27 billes. J'en ai 11 dans ma poche de gauche. Combien en ai-je dans ma poche de droite ?* Problèmes du type **transformation (une étape)** négative : recherche de l'état final *Léa a 53 euros dans son porte-monnaie. Elle achète un livre à 7 euros (48 euros *). Combien lui reste-t-il ?* *Léa joue au Jeu de l'oie. Elle est sur la case 53 et doit reculer de 7 cases. Sur quelle case va-t-elle poser son pion ?*	**Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de P1, P2, P3	**Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de P1, P2, P3, P4 **Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de P4 NB : Continuer à proposer des problèmes de parties-tout avec recherche du tout.

**NB : Les nombres en jeu peuvent induire des procédures ou des techniques de calcul différentes. Il est donc important de jouer sur ces variables didactiques. (ex. : faits numériques, décomptage, surcomptage…).*

CE1	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes. Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. Il connaît le sens des signes - et +. *Il résout des problèmes du champ multiplicatif (itération d'addition). Il connaît le sens du signe x. Il résout des problèmes multiplicatifs qui mettent en jeu un produit.* *Il résout des problèmes à deux étapes mixant additions, soustractions et/ou multiplications.* *Il résout des problèmes de partage (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs).*					
Types de problèmes d'après les attendus de fin de CE1	**Problèmes du champ additif** Nombres dont le résultat < 100	**Problèmes du champ additif :** résultat < 100 **Problèmes du champ multiplicatif :** nombres < 30 pour chacune des parties ***NB : Les symboles « x » et « : » ne sont pas utilisés.***	**Problèmes du champ additif** **Problèmes des champs additif et multiplicatif en lien avec la numération,** en appui sur du matériel de numération (*plaques de 100 – barres de 10, cubes unités*)	**Problèmes du champ additif** : nombres < 1000 **Problèmes du champ multiplicatif** (additions itérées) : nombres ≤ 30 *NB : Le symbole « x » est introduit.* **Problèmes mixtes en plusieurs étapes**	**Problèmes du champ multiplicatif** **Problèmes mixtes en plusieurs étapes** Nombres < 1000
	Champ additif Problèmes du type **transformation (une étape)** : recherche de l'état initial *Dans ma boîte, il y avait des images. J'en ai distribué 56 et il m'en reste encore 37. Combien y avait-il d'images dans ma boîte avant la distribution ?* **Champ additif** Problèmes du type **comparaison (une étape)** : recherche de l'une des deux quantités *Léo a 38 billes. Lucie en a 45 de plus que Léo. Combien Lucie a-t-elle de billes ?* *Au lancer de poids, Léo a atteint 3 m 54 cm. Il lui manque 7 cm pour atteindre la même distance que son camarade. Quelle distance a atteint son camarade ?*	**Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur du tout** *Lucie a fabriqué 3 colliers avec 9 perles chacun. Combien Lucie a-t-elle utilisé de perles ?* *Dans un restaurant, il y a 7 tables de 4 personnes. Combien ce restaurant peut-il recevoir de clients ?* *Dans la salle, il y a 3 rangées de 6 chaises : combien de personnes peuvent-elles s'asseoir ?* *Un client achète 6 paquets de 5 gâteaux. Combien a-t-il acheté de gâteaux ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition) *Dans la classe, il y a 28 élèves. Les professeurs veulent constituer des équipes de 7 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur d'une part** (division partition) *Dans une école, il y a 40 élèves de CE1. Les professeurs veulent constituer 8 équipes (de même nombre d'élèves). Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ?* **Champ additif** Problèmes du type **comparaison (une étape)** : recherche de l'écart *Dans l'école, il y a 51 garçons et 87 filles. Combien y-a-t-il de filles de plus que de garçons ?*	**Champ additif** Problèmes du type **transformation (une étape)** : recherche de la transformation *Il y avait 52 animaux dans le zoo. Il n'en reste plus que 23. Combien d'animaux se sont échappés ?* **Champ additif** Problèmes du type **comparaison (une étape)** : recherche de l'une des deux quantités *Alice a 20 euros. Elle a 10 euros de moins que Paul. Quelle somme d'argent a Paul ?* **Champ additif** Problèmes en **plusieurs étapes : transformation** *À la pâtisserie, Madame Martin achète une tarte à 17 euros et un gâteau à 26 euros. Elle donne un billet de 50 euros à la vendeuse. Combien la vendeuse va-t-elle lui rendre ?* Problèmes en **plusieurs étapes : parties-tout** *Dans la bibliothèque de l'école, il y a 84 livres. Il y a 35 romans policiers, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* *Un album peut contenir 55 photos. Lucie a 18 photos et Léo en a 37. L'album peut-il contenir toutes les photos de Lucie et Léo ?* **Champs additif et multiplicatif** Problèmes de groupements (ou de partage) en lien avec la numération *Dans une jardinerie, on peut acheter des plants de fleurs par lots de 100, de 10 ou à l'unité. Que doit-on acheter pour planter 563 fleurs ?*	**Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition) *Dans l'école, il y a 60 élèves de CE1. Les professeurs veulent constituer des équipes de 10 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* *Léo veut 700 g de pêches. Une pêche pèse environ 70 g. Combien lui faut-il de pêches ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur d'une part** (division partition) *Dans l'école, il y a 400 élèves. Les professeurs veulent constituer 80 équipes (de même nombre d'élèves). Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ?* **Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en plusieurs étapes, avec comparaison additive** *Léa a 4 paquets de 5 billes. Léo a trois billes de plus que Léa. Combien de billes a Léo ?*	**Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : transformation** *Le professeur achète 10 paquets de 25 gâteaux. Ses élèves en ont mangé 100. Combien lui en reste-t-il ?* *Lucie avait 60 perles. Elle a fabriqué 3 colliers avec 20 perles chacun. Combien lui reste-t-il de perles ?* Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : parties-tout** *Dans un restaurant, il y a 4 tables de 6 personnes et 7 tables de 4 personnes. Combien ce restaurant peut-il recevoir de clients ?* *Calcule la somme constituée par 4 billets de 10 €, 4 billets de 5 €, 3 pièces de 2 €, 4 pièces de 20 c et 2 pièces de 2 c.* *Dans son camion, un maçon a 2 sacs de sable pesant 30 kg chacun et 1 sac de ciment pesant 35 kg. Quelle est la masse de son chargement ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition ; lien avec la numération) *Je veux ranger mes 789 photos dans un album. Je peux ranger 10 photos par page. Combien de pages me faut-il pour ranger toutes mes photos ?* *Dans l'école, il y a 356 élèves. Les professeurs veulent constituer des équipes de 10 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?*

CE1	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Révisions	**Problèmes du champ additif** **Problèmes du champ multiplicatif** Reprise des acquis du CP (P1 à P5) Problèmes du type **parties-tout (une étape)** : recherche d'une partie *Dans mes deux coffres, j'ai 87 billes. J'en ai 53 dans mon coffre vert. Combien en ai-je dans mon coffre rouge ?* **Problèmes du champ additif en plusieurs étapes** Reprise des problèmes de la période 4 du CP Problèmes du type **parties-tout (2, 3 étapes)** : recherche d'une partie *Dans le train, il y a 25 passagers dans le premier wagon, 37 passagers dans le deuxième wagon et 8 dans le troisième wagon. Combien y a-t-il de passagers dans le train ?* Problèmes du type **transformation (2 étapes)** : recherche de l'état final (deux transformations successives) *Dans la bibliothèque de l'école, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 75. Combien y a-t-il de livres dans la bibliothèque de l'école ?*	Reprise des problèmes de P1 **Problèmes du champ additif** Problèmes du type **parties-tout (3 parties)** : recherche du tout *Léo passe 15 minutes chez le coiffeur, 25 minutes à la piscine, puis 10 minutes à ranger ses affaires. Léo, peut-il tout faire en 45 minutes ?* Problèmes en **une étape : transformation** (recherche de l'état final) *Léo achète une montre à 37 €, il donne un billet de 50 €. Combien va-t-on lui rendre ?*	Reprise des problèmes de P1, P2 **Problèmes du champ additif** Problèmes en **une étape : transformation** (recherche de l'état final) *Il avait 328 €, il a dépensé 127 €. Combien lui reste-t-il ?* Problèmes du type **transformation (2 étapes)** : recherche de l'état final *Il avait 280 €. Il a acheté un livre à 12 € et une console à 155 €. Combien lui reste-t-il ?*	Réactivation des problèmes du champ additif de la période 1 Problèmes du type **transformation (une étape)** : recherche de l'état initial *Dans ma boîte, il y avait des images. J'en ai distribué 56 et il m'en reste encore 217. Combien y avait-il d'images dans ma boîte avant que j'en distribue ?* Réactivation des problèmes du champ multiplicatif de la période 2 Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition) *Dans la classe, il y a 28 élèves. Les professeurs veulent constituer des équipes de 7 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* Problèmes en **une étape : valeur d'une part** (division partition) *Dans une école, il y a 40 élèves de CE1. Les professeurs veulent constituer 8 équipes (de même nombre d'élèves). Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ?* Reprise des problèmes de P3 **Problèmes du champ additif** Problèmes en **une étape : transformation** (recherche de l'état final) *Une baguette coûte 1 € 35 c, Léo a donné 2 €. Combien la boulangère va-t-elle lui rendre ?* ***Remarque :** Un travail préalable sur la monnaie doit avoir été réalisé.*	Reprise de l'ensemble des problèmes rencontrés au cours de l'année (nombres en jeu < 1000). **Problèmes du champ additif** Problèmes du type **transformation (2 étapes)** : recherche de l'état final *Dans la bibliothèque de l'école, il y a 363 livres. Le professeur en apporte 125 de plus. Les élèves en empruntent 175. Combien y a-t-il de livres dans la bibliothèque de l'école ?* **Problèmes du champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur du tout** *Un client achète 10 paquets de 25 gâteaux. Combien a-t-il acheté de gâteaux ?* *Un agriculteur a 4 vaches. Il donne 50 L d'eau par jour à chaque vache. Combien de litres d'eau donne-t-il chaque jour à ses quatre vaches ?* *Combien y-a-t-il d'heures dans 3 jours ?* *Combien y a-t-il de minutes dans 3 heures ?*

**NB : Les nombres en jeu peuvent induire des procédures ou des techniques de calcul différentes. Il est donc important de jouer sur ces variables didactiques. (ex. : faits numériques, procédures…).*

CE2	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Il résout des problèmes du champ additif et/ou multiplicatif en une, deux ou trois étapes. Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. Il connaît le sens des signes –, +, x et : . *Il résout des problèmes de partage et de groupement (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs).* *Il résout des problèmes nécessitant l'exploration d'un tableau ou d'un graphique.*					
Types de problèmes d'après les attendus de fin de CE2	Nombres dont le résultat < 1000 : énoncés à adapter	Le nombre de parts est inférieur à 100. La taille d'une part est inférieure à 1000. Enoncés à adapter selon la progression et la maîtrise en numération.	Champ numérique plus étendu, selon la progression en numération Nombres en jeu < 10 000 *NB : Veiller à proposer des petits nombres pour introduire une nouvelle catégorie (recherche de référant).*	Champ numérique plus étendu, selon la progression en numération Nombres en jeu < 10 000	Produit < 10 000
	Champ additif Problèmes en **plusieurs étapes : parties-tout** *Trois avions se sont posés à l'aéroport : il y avait 825 passagers dans le premier avion, 237 passagers dans le deuxième avion et 358 dans le troisième avion. Combien de passagers au total ont-ils débarqué ?* *Dans la bibliothèque de l'école, il y a 7 986 livres. Il y a 4 359 romans policiers, 1 226 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* *Léo passe 15 minutes chez le coiffeur, 20 minutes au supermarché, 1 heure à son cours de natation puis 15 minutes à ranger ses affaires. Léo peut-il tout faire en deux heures ?*	**Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur du tout** *Lucie a fabriqué 30 colliers avec 210 perles chacun. Combien Lucie a-t-elle utilisé de perles ?* *Le directeur achète 400 paquets de 25 gâteaux. Combien a-t-il acheté de gâteaux ?* *Un agriculteur a 4 vaches. Il donne 75 L d'eau par jour à chaque vache. Combien de litres d'eau donne-t-il chaque jour à ses quatre vaches ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : nombre de parts** (division quotition) *Léo veut 300 g de cerises. Une cerise pèse environ 7 g. Combien lui faut-il de cerises ?* *On veut ranger 4 789 photos dans des albums. On peut ranger 500 photos par album. Combien d'albums faut-il pour ranger toutes les photos ? Combien y aura-t-il de photos dans le dernier album ?*	**Champ additif** Problèmes du type **comparaison (une étape)** *Dans les collèges de la ville, il y a 2 734 garçons et 2 957 filles. Combien y-a-t-il de filles de plus que de garçons ?* *Léo a 188 billes. Léo en a 75 de plus que Lucie. Combien de billes a Lucie ?* *Au lancer de poids, Léo a atteint 3 m 54 cm. Il lui manque 57 cm pour atteindre la même distance que son camarade. Quelle distance a atteint son camarade ?* *Lucie a un entraînement de foot de 13 h 45 à 16 h 15. Combien de temps a duré l'entraînement ?* *Lucie part de chez elle à 8 h 45. Elle rentre à 12 h 30. Combien de temps est-elle partie ?*	**Champ additif** Problèmes du type **transformation (une étape)** *Léa a 4 530 euros sur son compte en banque. Elle achète une tablette à 538 euros. Combien lui reste-t-il ?* *Il avait 2 328 €, il a dépensé 1 273 €. Combien lui reste-t-il ?* *Il y avait 4 867 visiteurs dans le zoo. Il n'en reste plus que 2 321. Combien de visiteurs sont partis ?* **Champ additif** Problèmes en **plusieurs étapes : transformation** *Il avait 1 280 €. Il a acheté un livre à 12 € et une console à 355 €. Combien lui reste-t-il ?* *Dans la bibliothèque de l'école, il y a 6 363 livres. La directrice de l'école achète 1 250 nouveaux livres. Les élèves en empruntent 2 175 le premier mois. Combien y a-t-il de livres à la fin du premier mois ?*	**Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : produit de grandeurs** *Sur un mur, on pose 15 rangées de 60 carreaux de faïence. Combien de carreaux a-t-on posés sur le mur ?* (1er problème de la période 5, car il permet d'introduire la commutativité) **Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : parties-tout** *Dans la salle des fêtes d'une commune, il y a 37 rangées de fauteuils. Sur chaque rangée, il y a 46 fauteuils. Le prix de l'entrée du spectacle est de 16 euros, mais 47 personnes ont été invitées et n'ont donc pas payé leur entrée. Combien vont rapporter les entrées du spectacle si la salle des fêtes est complète ?*

CE2	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
	Champs additif et multiplicatif Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : parties-tout** *Pendant la fête des voisins dans une grande ville, on a compté 50 tables de 20 personnes, 60 tables de 6 personnes, 100 tables de 4 personnes. Combien de personnes ont participé à cette fête ?* *Calcule la somme constituée de 3 billets de 50 €, 2 billets de 20 €, 4 billets de 10 €, 4 billets de 5 €, 3 pièces de 2 €, 5 pièces de 50 c, 4 pièces de 20 c et 2 pièces de 2 c.* *Utilise les pièces et les billets à ta disposition pour représenter la somme d'argent nécessaire pour acheter un livre qui coûte 243 € 25 c (éventuellement avec le moins de pièces et de billets possible).* *Dans une jardinerie, on peut acheter des plants de fleurs par lots de 1 000, de 100, de 10 ou à l'unité. Que peut acheter un jardinier qui souhaite planter 6 563 fleurs ?* *Dans son camion, un maçon a 2 sacs de sable pesant 80 kg chacun et 1 sac de ciment pesant 75 kg. Quelle est la masse de son chargement ?* *Une entreprise achète huit cartouches d'encre à 67 euros et trente ramettes de papier à 6 euros. Quel sera le montant de la facture ?*	**Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : valeur d'une part** (division partition) *Dans le lycée, il y a 1 400 élèves. Les professeurs veulent constituer 80 équipes (de même nombre d'élèves). Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ?* *Dans les 5 écoles élémentaires de la ville, il y a 2 356 élèves au total. Les professeurs veulent constituer des équipes de 25 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* **Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en deux étapes : valeur du tout** *Combien y-a-t-il d'heures dans 3 jours et 8 heures ?* *Combien y a-t-il de minutes dans 3 heures et 35 minutes ?*	**Champ additif** Problèmes du type **comparaison (2 étapes)** : deux comparaisons successives *Léo a 23 billes de plus que Lucie et Zoé a 7 billes de moins que Lucie. Zoé a 27 billes. Combien de billes a Léo ?* **Champ multiplicatif** Problèmes en **une étape : comparaison** *Leïla a 9 ans. Son grand-père est 8 fois plus âgé qu'elle. Quel âge a-t-il ?* *Le père de Leïla a 36 ans, il est 9 fois plus âgé que Leïla. Quel est l'âge de Leïla ?*	**Champs additif et multiplicatif** Problèmes **mixtes en plusieurs étapes : transformation** *Lucie avait 6 000 perles. Elle a fabriqué 200 colliers avec 20 perles chacun. Combien lui reste-t-il de perles ?* *Le directeur achète 100 paquets de 30 gâteaux en début de mois. Les élèves en ont mangé 1 800 pendant le mois. Combien lui en reste-t-il à la fin du mois ?* *Léo achète une montre à 167 € 95 c, il donne 4 billets de 50 €. Combien va-t-on lui rendre ?* *Lucie a 20 euros. Peut-elle acheter 6 croissants à 1€50c et 5 pains au chocolat à 1€80c ?*	
Révisions	**Problèmes du champ multiplicatif** Reprise des problèmes de CE1 en lien avec l'addition itérée	**Problèmes du champ additif** Reprise des problèmes de CE1	**Problèmes du champ multiplicatif** Reprise des problèmes multiplicatifs de CE1 en lien avec le partage (divisions partition / divisions quotition)	**Problèmes des champs additif et multiplicatif** Reprise des problèmes mixtes du CE1 Reprise des problèmes des périodes 1 et 2 de CE2	**Problèmes des champs additif et multiplicatif** Reprise des problèmes des périodes 3 et 4 de CE2

**NB : Les nombres en jeu peuvent induire des procédures ou des techniques de calcul différentes. Il est donc important de jouer sur ces variables didactiques. (ex. : faits numériques, procédures…).*

*Programmation en résolution de problèmes cycle 2 – document de la Mission maths 68 année 2023 – 2024 (groupe outils pour les enseignants) page **7** sur **7***

LE CHERCHER-DÉBATTRE-PROUVER À PARTIR DU CYCLE 1

Nataly ESSONNIER
Formatrice, CFAI DE SAVOIE
IREMI de Grenoble
nataly.essonnier@gmail.com

Michèle GANDIT
Université Grenoble Alpes
IREMI de Grenoble, Maths à Modeler
michele.gandit@univ-grenoble-alpes.fr

Laurence MOSSUZ
Conseillère Pédagogique de Circonscription, Circonscription de Bonneville 2
IREMI de Grenoble
laurence.mossuz@ac-grenoble.fr

Jean-Christophe SALMON
Enseignant, Collège, Montpellier
IREMI de Grenoble
jean-christophe.salmon@ac-montpellier.fr

Résumé
Ce texte porte sur les conditions de la mise en œuvre du *Chercher-Débattre-Prouver* en cycle 1. Notre recherche collaborative, menée avec des équipes d'enseignants issus de plusieurs écoles (cycles 1, 2 et 3) s'inscrit dans la suite d'un projet de recherche-action (2018-2021), puis du LéA « Réseau de l'école à l'université – Grenoble et Annecy » (2021-2024), sur l'action de recherche « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique » (Gandit, Gravier et Mossuz, 2023). Nous présentons ici un outil destiné à évaluer, au niveau microscopique, les interactions didactiques dans la classe au cours de la résolution d'un problème de la progression que nous avons établie. Du côté des élèves, cet outil permet-il d'identifier qu'ils ont acquis des connaissances, qu'on nomme *des connaissances de type II* (Da Ronch, Gandit et Mili, 2025) ? Du côté de l'enseignant, cet outil permet-il d'évaluer dans quelle mesure sa pratique permet l'installation d'un contrat didactique fondé sur le *débat scientifique* (Legrand, 1993) ? Dans le cadre de cet atelier, nous questionnons cet outil mis à l'épreuve pour analyser une séance en Grande section de maternelle.

I - INTRODUCTION

Notre recherche collaborative menée dans le cadre de l'IREMI (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques et de l'Informatique) de Grenoble a commencé en 2018 à la demande d'une école primaire d'Annecy. Cette demande initiale, de la part des enseignants, portait sur les difficultés des élèves en résolution de problèmes en mathématiques. Ce questionnement de départ, concernant les élèves, a peu à peu évolué vers une interrogation sur les pratiques enseignantes lors de la résolution de problèmes,

notamment sur l'explicitation des objectifs poursuivis au travers de celle-ci, sur le choix des problèmes et, par suite, sur l'institutionnalisation des connaissances mises en œuvre par les élèves pour résoudre ces problèmes (2018-2021). Ensuite, notre travail s'est poursuivi entre 2021 et 2024, dans le cadre du LéA « Réseau de l'école à l'université – Grenoble et Annecy » (https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/anciens-lea/reseau-de-lecole-a-luniversite-grenoble-et-annecy) dont l'action de recherche s'intitulait : « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique ». Depuis 2024, nous poursuivons notre recherche dans le cadre d'un groupe IREMI particulier, en ce sens qu'il collabore avec une équipe d'enseignants expérimentateurs issus de plusieurs écoles de Grenoble et d'Annecy, du cycle 1 au cycle 3. Notre objectif est de développer chez les élèves, à partir du cycle 1, une attitude de preuve, une capacité à argumenter et débattre en mathématiques, discipline essentielle de la résolution de problèmes et de la preuve. Plusieurs outils, destinés aux enseignants, voire aux élèves, ont ainsi été coconstruits, après discussion et expérimentation par les enseignants des écoles impliqués : une première version de ces outils a été présentée au colloque de la COPIRELEM à Toulouse en 2022 (Gandit, Mossuz et Gravier, 2023), parmi ceux-ci, une *Progression annuelle de problèmes* (Gandit, 2024) dont une adaptation sera présentée pour le cycle 1.

Depuis 2024, notre recherche porte sur les conditions de la mise en place d'un contrat didactique favorable à la mise en œuvre de ce que nous appelons désormais le *chercher-débattre-prouver* (nous précisons ce terme plus loin) dans la classe. Ce contrat est fondé sur *le débat scientifique en classe* au sens de Legrand (1993). La mise en place de ce type de contrat, la plupart du temps nouveau par rapport au contrat usuel, nécessite, de la part de l'enseignant, une remise en cause de sa pratique. Cela implique notamment une prise de conscience de la nécessité d'une alternance entre plusieurs postures : 1) poser un problème consistant permettant de viser des connaissances spécifiques à la résolution de problèmes, bien identifiées – nous les nommons des *connaissances de type II* (Gandit, 2024), 2) animer les phases d'échanges entre les élèves en leur laissant une large responsabilité sur le plan scientifique, 3) prendre en considération ce que pensent les élèves en les faisant voter, 4) observer leurs *actions scientifiques*, 5) organiser au moment opportun des phases de conclusion sur le problème et d'institutionnalisation des connaissances de type II visées.

Ainsi dans la suite de ce texte, nous explicitons le cadre théorique dans lequel se situe le *chercher-débattre-prouver*, et notamment le *débat scientifique en classe* au sens de Legrand, ainsi que *les connaissances de type II* et les *actions scientifiques*, évoquées précédemment. Puis nous présentons précisément nos questions de recherche. L'expérimentation sur laquelle nous nous appuyons se situant dans une classe de cycle 1, nous présentons également l'un de nos outils, adapté au cycle 1 : la *Progression annuelle de problèmes* pour la maternelle, qui a été expérimentée par l'enseignante. La première partie du travail des participants à l'atelier a consisté à expliciter des connaissances de type II en jeu dans le dernier problème de cette progression. Nous montrons ensuite comment l'outil d'évaluation que nous avons élaboré peut permettre une analyse, au niveau microscopique, des interactions dans la classe afin de repérer comment le débat scientifique vit au sein de la classe. Dans la seconde partie de l'atelier, les participants ont utilisé cet outil d'évaluation pour analyser les interactions dans une classe de Grande Section de maternelle. Enfin nous concluons sur nos résultats de recherche et nous ouvrons quelques perspectives.

II - ÉLEMENTS THÉORIQUES ET PROBLÉMATIQUE

Notre cadre théorique général comporte deux volets : d'une part, la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), dans laquelle se situent nos outils de *Progression annuelle* de *problèmes* et *d'Actions Scientifiques des élèves*, ainsi que *Le Débat Scientifique en classe* (Legrand, 1993) en tant que contrat didactique favorable au développement d'actions scientifiques de la part des élèves ; d'autre part, l'évaluation formative, au sens de Black et Wiliam (2009, p. 9), en tant que facteur d'auto-régulation des apprentissages, pour les élèves, mais aussi pour les enseignants. Nous explicitons particulièrement le premier volet, dans lequel les connaissances de type II et l'un des problèmes de la progression ont fait l'objet d'un premier temps de travail lors de l'atelier.

1 Les Actions Scientifiques

Les actions scientifiques des élèves sont les gestes, visibles ou non de l'extérieur, qu'ils accomplissent dans l'objectif de résoudre un problème de mathématiques, en argumentant, débattant, établissant des preuves, la classe fonctionnant comme une mini-communauté scientifique. Ces actions scientifiques ont été catégorisées, explicitées et affinées à partir de travaux de recherche précédents, portant sur la démarche d'investigation en mathématiques (modèle EMI[1] ; Gandit, 2015) et sur l'évaluation formative (Lepareur, Gandit et Grangeat, 2017 ; Chanudet, Coppé, Gandit et Moulin, 2019). Elles sont déclinées en quatre grandes catégories : *Expérimenter*, *Généraliser*, *Questionner* et *Communiquer*. A ces titres, nous avons ajouté des sous-titres reprenant les termes de chercher, débattre, prouver, inventer, afin de rendre visibles la créativité, la preuve et le débat, qui sont intimement liés à ces quatre catégories (Gandit, 2024) :

> 1) *Expérimenter, chercher, débattre, prouver* : c'est choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème, les observer au regard du problème, en déduire des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider celles-ci, reconnaître les résultats ainsi établis.
>
> 2) *Généraliser, chercher, débattre, prouver* : c'est dégager le généralisable du particulier en formulant une conjecture de portée générale, la prouver ou l'invalider par un contre-exemple, définir des objets nouveaux utiles à l'étude, dégager une méthode pour étudier un problème.
>
> 3) *Questionner, inventer, débattre* : c'est s'autoriser à sortir du cadre du problème et se poser des questions, dégager un questionnement dans une situation donnée, proposer de nouveaux problèmes ou questions induits par les actions précédentes.
>
> 4) *Communiquer, débattre, prouver* : c'est argumenter, débattre scientifiquement de ses résultats ou de ceux des autres, de ses conjectures ou de celles des autres, donner – par écrit ou oralement – une preuve acceptable par la classe, expliciter ses démarches de recherche et de preuve, présenter un problème et les résultats obtenus, donner son avis, donner un argument, un résultat, une méthode, reconnaître son ignorance ou son erreur, identifier et verbaliser ce qu'on a appris.

Une de nos hypothèses de travail est que ces actions scientifiques résultent de l'acquisition par les élèves de connaissances d'un certain type, qui sont très souvent *transparentes* (Deloustal-Jorrand, Gandit et Mesnil, 2023 ; Da Ronch, Gandit et Mili, 2025) dans l'enseignement, aussi bien pour les élèves que pour

[1] Enseignement des Mathématiques fondé sur l'Investigation de la part des élèves.

les enseignants. Nous explicitons ci-dessous ces connaissances, que nous avons désignées par *connaissances de type II*. Notre objectif est de les rendre explicites.

2 Les connaissances de type II

Ces connaissances particulières sont en jeu dans le *chercher-débattre-prouver*. Nous précisons d'abord ce que recouvre cette expression dans notre recherche. Ensuite nous définissons de manière un peu générale ce type de connaissances. Enfin, nous les illustrons dans le cadre de la résolution du dernier problème de la Progression, *Les rectangles de 4 couleurs*.

2.1 Le chercher-débattre-prouver et les connaissances en jeu

Cette expression, déjà utilisée dans (Gandit, 2024, p. 3) désigne pour nous l'activité développée par une personne confrontée à un problème nouveau et consistant, *activité* au sens de Rogalski (2008) :

> *L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, dans ce qu'il fait et se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps, et également son état personnel – en termes de charge de travail, de fatigue, de stress, et de plaisir pris au travail –, ainsi que ses interactions avec autrui dans la situation de travail.* (p. 24).

La tâche, dont il est question dans la citation, est, dans notre recherche, la résolution d'un des problèmes de la Progression. Le *chercher-débattre-prouver* est ainsi l'activité d'une personne qui résout ce problème et qui interagit avec une communauté scientifique pour établir des résultats (prouvés). Cette activité est en partie décrite par les différentes catégories d'actions scientifiques présentées ci-dessus. Comme nous l'avons déjà dit, dans ces actions scientifiques sont en jeu des connaissances spécifiques. Ce sont des connaissances qu'on peut classer en deux catégories. La première catégorie regroupe les connaissances qui relèvent du fonctionnement de la rationalité en mathématiques : la logique mathématique, les divers types de raisonnements mathématiques, la validité, les registres de représentation des mathématiques. Les connaissances de cette première catégorie sont nommées « connaissances d'ordre II » par Sackur, Assude, Maurel, Drouhard et Paquelier (2005). Par exemple : savoir qu'une proposition mathématique est soit vraie, soit fausse. La seconde catégorie rassemble les connaissances liées à l'heuristique : les manières de s'y prendre pour démarrer et avancer dans la résolution d'un problème nouveau, ce que Castela (2011) nomme « savoirs pratiques et heuristiques ». Par exemple : savoir ce qu'on appelle un cas particulier pour un problème donné, savoir que l'observation organisée de multiples cas particuliers, y compris des cas simples, permet de dégager une généralité (une conjecture de portée générale). Ce que nous désignons par *connaissances de type II* regroupe ces deux catégories de connaissances. Cette dénomination laisse penser qu'il existe également des connaissances de type I. En effet, les connaissances de type II portent elles-mêmes sur des objets mathématiques et leurs propriétés : les définitions de ces objets, ainsi que les propriétés et théorèmes relatifs à ces objets constituent ce que nous désignons par connaissances de type I (Sackur, Assude, Maurel, Drouhard et Paquelier (2005) les nomment « connaissances d'ordre I »). Ces connaissances de type I sont nécessairement présentes dans toute activité mathématique, dans tout enseignement de mathématiques ; elles constituent la matière avec laquelle fonctionnent les connaissances de type II. Mais, contrairement à ces dernières, ce sont les seules qui bien souvent sont institutionnalisées. Comme déjà dit, les connaissances de type II restent la plupart du temps transparentes.

Notre objectif est l'enseignement explicite de ces connaissances de type II, dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, particulièrement dans le cadre des Situations de Recherche pour la Classe *enrichies* (Deloustal-Jorrand, Gandit et Mesnil, 2024 ; Da Ronch, Gandit et Mili, 2025). La Progression que nous avons établie dans ce but repose sur une liste ordonnée de ces connaissances selon la difficulté croissante de leur apprentissage dans le contexte actuel de l'enseignement des mathématiques à partir du cycle 1.

Voici un premier exemple de ces connaissances de type II : *Savoir ce qu'on appelle un cas particulier pour un problème donné*. Tous les problèmes que nous avons choisis comporte des variables. Pour des raisons didactiques, nous avons fixé les valeurs de certaines d'entre elles. Les autres sont laissées libres, à la charge des élèves, elles constituent des variables de recherche. On obtient un cas particulier si on fixe des valeurs aux variables laissées libres. On réduit ainsi le problème à son étude sur ce cas particulier. On poursuit ensuite l'étude sur d'autres cas particuliers. Ce faisant, on mobilise une autre connaissance de type II (un deuxième exemple) : *Savoir que, pour comprendre un problème, on choisit différents cas particuliers et on les étudie, en commençant par des cas « simples »*, autrement dit, en donnant des valeurs « petites » aux variables. Nous renvoyons à Gandit (2015) concernant les malentendus engendrés par le choix de cas simples, pas trop complexes, pour induire une généralité. L'explicitation de ces deux connaissances de type II permet ainsi de rendre plus claire l'injonction de « faire des essais », que l'enseignant adresse souvent aux élèves, lorsqu'ils résolvent un problème.

Nous illustrons ci-dessous d'autres exemples de connaissances de type II, dans le cadre de la résolution du problème des *Rectangles de 4 couleurs*. La résolution de ce problème-phare, tel qu'il est présenté en cycle 1, ainsi que l'explicitation des connaissances de type II en jeu, ont fait l'objet de la première partie du travail des participants à l'atelier.

2.2 Le problème des Rectangles de 4 couleurs, des exemples de connaissances de type II

Nous renvoyons à Da Ronch, Gandit et Gravier (2020, p. 89) pour l'énoncé et la résolution du problème général. Nous avons présenté, aux participants à l'atelier, une instance du problème proche de celle que nous proposons au cycle 1, en deux temps. Les participants disposaient de tuiles de Wang à 4 couleurs, celles de la collection de base, en nombre suffisant. Ils ont ainsi découvert ces tuiles matériellement – des carrés décomposés suivant leurs diagonales, en quatre triangles colorés – et leur règle d'assemblage (figure 1) : deux tuiles s'assemblent si, et seulement si, elles ont une couleur commune sur un de leurs côtés

Dans un premier temps (figure 1), les participants ont cherché à paver (recouvrir sans chevauchement) le plan.

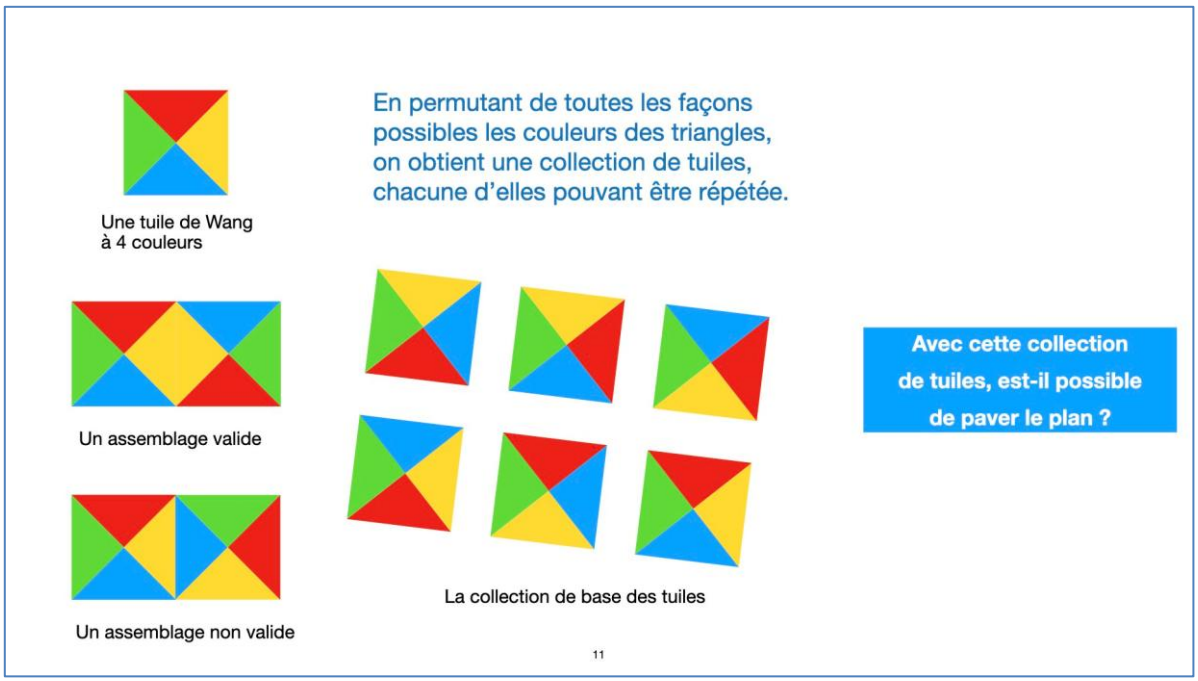


Figure 1. Un problème de pavage du plan

En cherchant ainsi à assembler des tuiles de la collection de base, les participants ont exhibé des réalisations de pavages sans se préoccuper des contours des surfaces pavées. La découverte que certains motifs, construits avec ces tuiles, pouvaient se répéter a permis d'élaborer des conjectures concernant la pavabilité avec les tuiles, de certaines figures ou du plan. Ainsi nous pouvons expliciter une troisième connaissance de type II en jeu dans ce premier temps de résolution : *Savoir que l'exhibition d'une réalisation (qui est ici matérielle) suffit à prouver la possibilité*. Autrement dit, savoir que, pour prouver qu'il est possible de paver le plan avec des tuiles de la collection de base, il suffit d'exhiber matériellement un pavage d'un motif rectangle et de montrer qu'on peut répéter ce motif, à droite, à gauche, en haut, en bas, à l'infini.

Dans un second temps (figure 2), des contraintes ont été ajoutées, portant sur la forme à paver et sur la coloration de ses bords. Concernant la forme, on a imposé de paver un rectangle, dont la taille restait une variable de recherche. Concernant ses bords, on a imposé que chaque bord soit unicolore et que les quatre bords soient colorés de quatre couleurs différentes (les quatre mêmes couleurs que les tuiles de Wang) : vert pour le bord Nord, jaune pour le Sud, rouge pour l'Est et bleu pour l'Ouest. On relie ainsi ce second temps du problème au premier, en imaginant qu'on extrait d'un pavage du plan un rectangle, extérieurement bordé au Nord par une rangée de tuiles dont le côté Sud est vert, au Sud, par une rangée de tuiles dont le côté Nord est jaune, à l'Est, par une rangée de tuiles dont le côté Ouest est rouge et à l'Ouest, par une rangée de tuiles dont le côté Est est bleu. Ceci se traduit par la condition supplémentaire imposée concernant le pavage du rectangle : les tuiles doivent respecter la couleur des bords.

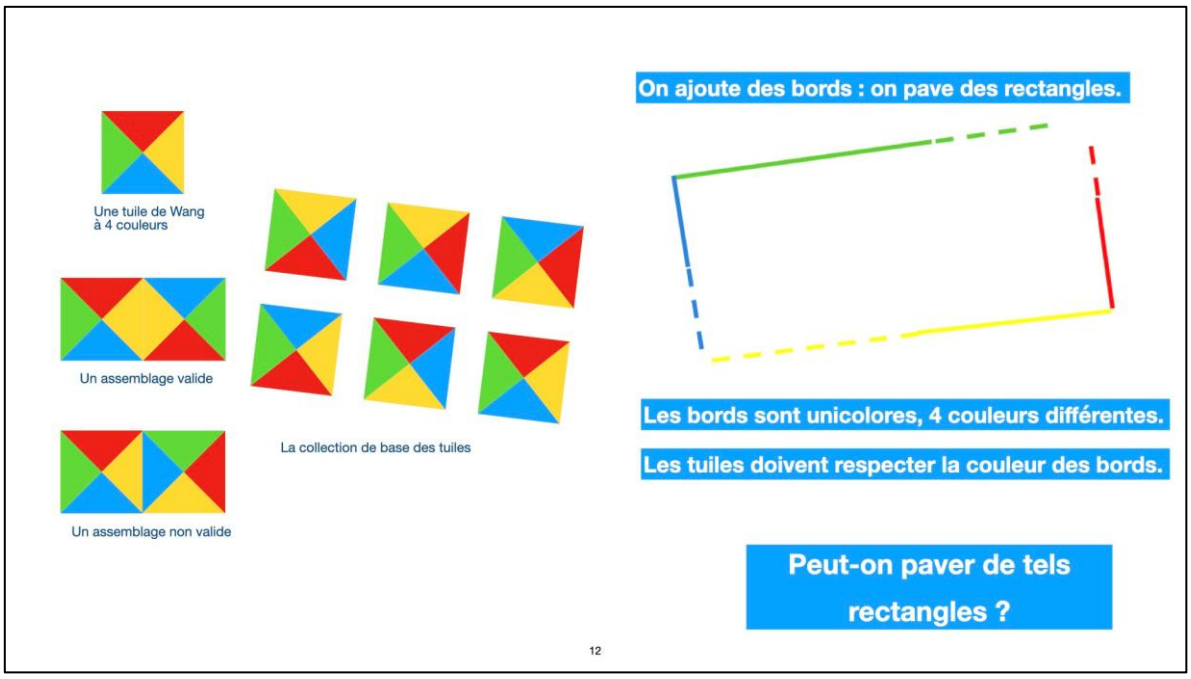


Figure 2. On cherche à paver des rectangles aux bords unicolores et de quatre couleurs différentes

Les participants à l'atelier se sont lancés dans le pavage de rectangles de tailles différentes. Le cas « simple » des rectangles de largeur 1 a été étudié. Les conjectures recueillies dans l'atelier (figure 3) ont été qu'on pouvait, avec les tuiles de cette collection, paver une ligne (ou une colonne) de longueur infinie et de largeur 1 (conjecture n°1), qu'on pouvait paver un rectangle d'une seule case. La conjecture n°1 a été invalidée par le cas du rectangle de taille 1 x 4 : la preuve a été donnée de l'impossibilité du pavage d'un tel rectangle. On a, par contre, prouvé qu'on pouvait paver un rectangle de taille 1 x 3. La constatation qu'on pouvait répéter certains « motifs » (constitués d'assemblages de tuiles) a permis d'aborder une preuve de la possibilité de paver des rectangles de largeur 1 et de longueur impaire quelconque.

Au travers de ces échanges menés dans l'atelier, on identifie ainsi la mobilisation des deux premiers exemples de connaissances de type II, donnés ci-dessus : *Savoir ce qu'on appelle un cas particulier pour un problème donné* et *Savoir que, pour comprendre un problème, on choisit différents cas particuliers et on les étudie, en commençant par des cas « simples »*. Ces connaissances n'ont cependant pas été identifiées par les participants. Ceci confirme que ces connaissances restent transparentes. Comme le montre la figure 3, la plupart des réponses données à la consigne d'identifier des connaissances de type II, en jeu dans la résolution du problème, est formulée de manière très vague : « raisonnement, représentation, essai-erreur, essai-ajustement, valider ». L'une d'entre elles est, en revanche, très pointue, « savoir qu'il y a un invariant ». Cependant celle-ci, de la même façon que « poser une conjecture », se rapproche davantage des connaissances de type II que nous avons sélectionnées dans notre progression.

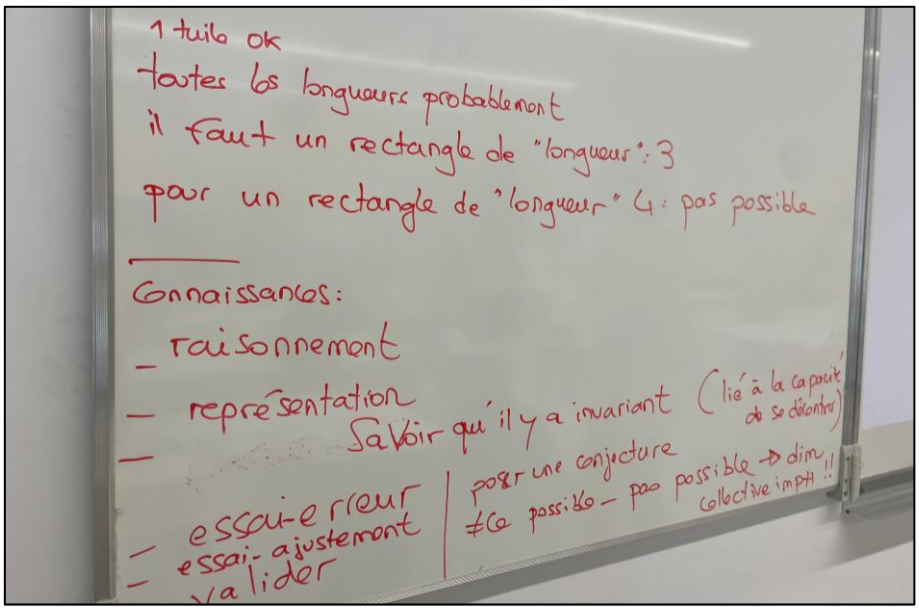


Figure 3. L'état du tableau à l'issue de la première partie du travail dans l'atelier : au-dessus du trait sont notées les conjectures, en dessous les connaissances de type II envisagées par les participants

Les connaissances de type II, dont nous visons l'apprentissage par la résolution du problème des *Rectangles de 4 couleurs*, sont nombreuses du fait que ce problème constitue le dernier problème de la progression. Nous explicitons ci-dessous les principales après avoir présenté la *Progression de problèmes adaptée au cycle 1*.

3 La Progression annuelle de problèmes : progression dans l'acquisition des connaissances de type II

Nous avons établi une liste de connaissances de type II à faire acquérir aux élèves, afin de les rendre plus autonomes et responsables lorsqu'ils résolvent des problèmes, afin de favoriser leurs actions scientifiques.

3.1 Une vue d'ensemble de la progression annuelle adaptée pour le cycle 1

Comme déjà dit, nous avons ordonné ces connaissances de type II en fonction de la difficulté croissante de leur acquisition. A chacune de ces connaissances de type II, nous avons attribué un problème-phare, dans la résolution duquel cette connaissance est un outil (Douady, 1986) dont on vise l'acquisition par les élèves. Le choix des problèmes-phares résulte d'une analyse a priori fine, sur le plan mathématique d'abord, puis sur les plans didactique et ergonomique. Concernant ce dernier plan, nous sommes attachés à la possibilité pour les élèves de manipuler du matériel lorsqu'ils s'engagent dans la résolution. Nous renvoyons à Da Ronch (2020) qui montre comment un problème issu des mathématiques savantes et contemporaines se révèle être un bon candidat pour devenir le support d'une situation de recherche adaptée à la classe. Cette connaissance rencontrée par l'élève (sciemment ou non) comme un outil, devra être ensuite de l'institutionnalisée en tant qu'objet (ibid.), grâce à la construction d'une trace écrite. Cette liste ordonnée de connaissances de type II nous a ainsi permis de construire un enchaînement de problèmes, qui constitue la *Progression annuelle de problèmes*, que nous avons adaptée pour le cycle 1. Nous résumons notre Progression dans le tableau 1.

Connaissances de type II Savoir que :	Problème-phare	Dès la	Actions scientifiques des élèves
Un problème peut avoir plusieurs solutions. Une organisation est nécessaire pour convaincre que les solutions sont bien différentes et qu'on les a toutes.	*Les Tours* (3 étages et 3 couleurs)	Petite section	Construire une tour / une composition de la somme à payer. Contrôler si elle est valide ou non. Comparer deux tours / compositions (identiques ou différentes). S'organiser pour comparer plusieurs tours / compositions. Argumenter.
	La Monnaie	Petite section	
On construit un raisonnement (déductif) pour trouver la réponse. Les contraintes (les hypothèses) sont représentées de façon symbolique. On contrôle sa réponse par un raisonnement.	*Logikville*	Moyenne section	Construire une configuration qui répond aux contraintes. Contrôler si cette configuration est valide ou non. Argumenter en suivant plusieurs cheminements possibles.
Une proposition en mathématiques est soit vraie, soit fausse. On regarde beaucoup de cas simples et on formule une généralité (une conjecture). Il suffit d'un seul cas pour invalider une généralité.	*Les nombres pairs et impairs*	Grande section	Choisir un, deux, trois nombres. Construire une représentation matérielle d'un nombre pair / impair (jetons, Numicon) Construire une représentation de la somme de deux nombres. Dégager une généralité (propriété de parité) à partir des cas étudiés. Argumenter pour le vrai / faux.
Il suffit d'un seul exemple pour prouver une possibilité. La différence est importante entre « je n'y arrive pas » et « ce n'est pas possible ». On ne peut pas prouver une impossibilité par le fait qu'on « n'y arrive pas ». La preuve d'une impossibilité ne peut se faire que par un raisonnement.	*Le Carrelage de la salle de bain* (démarrer sur le 5 x 5, simplifier ensuite sur le 3 x 3)	Grande section	Choisir la place du lavabo / la taille du rectangle. Construire un pavage et contrôler s'il est valide ou non. Comparer plusieurs pavages. Dégager une généralité à partir de différents cas de placement du lavabo / de taille du rectangle Argumenter pour le vrai / faux.
	Les Rectangles de 4 couleurs (démarrer sur des rectangles…, simplifier sur des bandes de largeur 1)	Grande section	

Tableau 1. Une vue d'ensemble de la progression annuelle pour le cycle 1

Le tableau 1 présente une liste ordonnée de couples dont le premier élément est un ensemble identifié de connaissances de type II (première colonne) et le second un problème-phare (deuxième colonne). La dernière colonne présente les actions scientifiques potentielles des élèves. Mis à part, *Logikville* et *Les*

Rectangles de 4 couleurs, les problèmes ont été présentés dans (Gandit, Mossuz et Gravier, 2022). *Logikville* est un jeu qu'on trouve dans le commerce : il s'agit de placer des objets (personnages et animaux) dans des maisons en respectant des contraintes présentées sur des cartes.

Par la résolution de chaque problème-phare (sauf le premier), on vise non seulement l'acquisition par les élèves des connaissances de type II qui figurent sur la même ligne que le nom du problème, mais également la mobilisation des connaissances de type II déjà rencontrées dans la résolution des problèmes précédents. Ainsi, à chaque nouveau problème (sauf le premier), on cumule les connaissances de type II visées. Pour la classe de Grande section, il est proposé de traiter un problème par période scolaire (entre deux périodes de vacances). Dès lors, les connaissances de type II visées par la résolution de chacun de ces problèmes-phares pourront être réinvesties dans des variantes de ces problèmes – voire des rituels – que les enseignants proposeront au cours de la même période. Ceci renforce l'appropriation par les élèves de ces connaissances de type II.

Le paragraphe suivant illustre les connaissances de type II qui figurent dans la dernière ligne du tableau 1 (colonne de gauche), les explicite et les illustrent dans le contexte du problème des *Rectangles de 4 couleurs*. Ce sont ces connaissances qui guident l'enseignant de cycle 1 dans la conduite de la résolution du problème et la production d'une « trace écrite ».

3.2 Les connaissances de type II visées particulièrement par la résolution du problème des Rectangles de 4 couleurs

Les connaissances de type II citées ci-dessous sont celles qui figurent dans la première colonne et dernière ligne du tableau 1.

La première qui est indiquée : *Savoir qu'il suffit d'un seul exemple pour prouver une possibilité*. Autrement dit, savoir que : si une conjecture énonce dans sa conclusion qu'une propriété ou qu'un événement sont possibles, le fait de donner un exemple de réalisation de cette propriété ou de cet événement constitue une preuve de la vérité de cette conjecture. Dans le contexte du *Problème des Rectangles de 4 couleurs*, pour prouver qu'il est possible de paver le rectangle de taille 1 x 3, il suffit d'exhiber (matériellement) un pavage de ce rectangle, comme le montre la figure 4.



Figure 4. Il suffit d'exhiber ce pavage pour prouver qu'il est possible de paver de paver le rectangle 1 x 3

La deuxième connaissance de type II indiquée : *Savoir que la différence est importante entre « je n'y arrive pas » et « ce n'est pas possible*. On ne peut pas prouver une impossibilité par le fait qu'on « n'y arrive pas ». » Autrement dit, savoir que : si une conjecture énonce dans sa conclusion qu'une propriété ou qu'un événement sont impossibles, le fait de ne pas trouver d'exemple de réalisation pour cette conjecture ne constitue pas une preuve de la vérité de la dite conjecture. Dans le contexte du *Problème des Rectangles de 4 couleurs*, ce ne sont pas les multiples essais infructueux de pavages non aboutis du rectangle 1 x 4 qui constituent une preuve de l'impossibilité du pavage. De ces multiples essais, on peut seulement déduire qu'on n'a pas trouvé de pavage. Ceci ne veut pas dire qu'il n'en existe pas. La différence de sens doit être établie avec les élèves entre « on n'en a pas trouvé » et « il n'en existe pas ».

La troisième connaissance de type II indiquée : *Savoir que la preuve d'une impossibilité ne peut se faire que par un raisonnement*. Autrement dit, savoir que, pour prouver que quelque chose est impossible, la validation empirique par le matériel n'est plus possible. Il est nécessaire de se dégager (en partie) du matériel pour s'engager dans un raisonnement. Dans le contexte du *Problème des Rectangles de 4 couleurs*, pour prouver qu'il est impossible de paver le rectangle de taille 1 x 4, on peut procéder à un raisonnement par forçage (figure 5).



Pour paver ce rectangle 1 x 4, il n'y a pas d'autre possibilité pour la 1ère tuile à gauche, puis pour la 2ème tuile à gauche, puis pour la 3ème ; pour recouvrir le 4ème carré, il est nécessaire d'avoir une tuile avec 2 fois la couleur rouge, ce qui est impossible.

Figure 5. Un raisonnement par forçage pour prouver qu'il est impossible de paver le rectangle 1 x 4

Comme nous l'avons évoqué, ces connaissances de type II sont en jeu dans les actions scientifiques des élèves, à condition que ces derniers puissent en prendre l'initiative, dans le cadre d'une classe fonctionnant comme une mini-communauté scientifique. Ce type de fonctionnement est assuré par la mise en place d'un contrat didactique, *Le Débat Scientifique en classe* au sens de Legrand. Nous en donnons, ci-dessous, une description.

4 Le Débat scientifique en classe

Le débat scientifique en classe (Legrand, 1993) – dans la suite, nous dirons seulement *le débat scientifique* — met l'élève en situation de construire le sens des connaissances visées par l'enseignant au travers du problème proposé, par le fait qu'il favorise l'engagement des élèves et l'émergence de leurs conceptions. Balacheff (2024) écrit que « Le postulat fondateur de la TSD énonce qu'il est nécessaire que la connaissance dont l'apprentissage est visé « ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans les discussions entre élèves » (Brousseau, 1981/1998, p. 218-220) » (p. 19). *Le débat scientifique* est une manière d'enseigner, un contrat didactique, dont une des caractéristiques est de faire fonctionner la classe comme une mini-communauté scientifique (Legrand, 1988), favorisant ainsi les actions scientifiques des élèves. Chaque élève a sa part de responsabilité scientifique dans les échanges qui ont lieu, l'enseignant pilotant ces échanges, mais restant en retrait sur le plan scientifique par rapport aux contenus échangés. L'installation de ce contrat nécessite une rupture avec la pratique usuelle en mathématiques, des enseignants et des élèves. Elèves et enseignant ont ainsi à comprendre la modification attendue de leurs postures respectives dans ce contrat didactique particulier.

Tout d'abord les élèves doivent comprendre qu'ils ont à prendre cette responsabilité scientifique : ils ont à s'engager dans la recherche de la vérité, à formuler des conjectures au vu des cas qu'ils ont étudiés, à donner un avis, sincère et argumenté, sur les propositions échangées, sans chercher à décoder la réponse attendue par l'enseignant. Ils ont ainsi à agir scientifiquement. Le doute et l'erreur ont un statut scientifique reconnu dans ce type de contrat. Ils permettent d'avancer dans la recherche de la vérité. Ainsi, au vu d'une proposition ou conjecture proposée à la classe, l'élève peut donner un avis argumenté – « elle est vraie parce que… », « elle est fausse parce que… » –, mais il a aussi la possibilité de dire qu'il ne sait pas ou qu'il ne se prononce pas, pour des raisons diverses : il n'a pas eu assez de temps pour se forger un avis argumenté, il doute, ayant des raisons qui lui font dire qu'elle est vraie et d'autres

qui le poussent à dire qu'elle est fausse, il n'a pas compris… Ainsi la vérité mathématique retrouve une dimension sociale : un résultat, même s'il est vrai, ne sera accepté par la classe que si son auteur en donne une preuve convaincante.

L'enseignant, quant à lui, doit à la fois lâcher prise dans les moments d'échanges et piloter le débat de façon très stricte, en ayant bien en tête les connaissances dont il vise l'acquisition par les élèves. Différentes phases sont à respecter, au cours desquelles le rôle de l'enseignant est différent : la recherche des élèves, le vote, l'argumentation, la conclusion. Nous décrivons succinctement ces différentes phases, puisqu'elles seront explicitées dans l'outil d'analyse, présenté plus loin.

Concernant la recherche des élèves, l'enseignant laisse suffisamment de temps pour qu'apparaissent des propositions de la part des élèves, correctes ou non, qui permettront une avancée dans la compréhension et la résolution du problème. Les élèves peuvent échanger avec leurs pairs. L'enseignant se garde d'intervenir sur le problème. Il peut les encourager, mais il évite toute intervention un peu longue auprès d'un élève. Une telle intervention a souvent pour effet de démobiliser les autres élèves. En revanche il observe les actions et les productions des élèves, ce qui lui permettra d'organiser les échanges qui vont suivre.

Dès qu'une proposition (une conjecture) d'élève intéressante est observée, elle est communiquée à l'ensemble de la classe, avec un support visible par tous les élèves. Le détachement de cette proposition par rapport à son auteur permet d'en faire une proposition de la classe, sur laquelle l'enseignant demande l'avis des élèves. Il recueille cet avis par un vote (entre trois choix, comme explicité plus haut) dont les résultats chiffrés restent visibles par tous. Ce vote a quatre fonctions essentielles : 1) Il force l'engagement des élèves. 2) Il renseigne l'enseignant sur les conceptions des élèves. 3) Il montre que ce n'est pas la majorité qui l'emporte en mathématiques et permet aux élèves d'entrer dans la rationalité mathématique. 4) Les résultats chiffrés du vote renforcent les investigations de certains élèves. L'enseignant peut itérer la phase de vote sur une même proposition au cours ou à la fin des échanges, afin de relancer ces échanges ou de faire un bilan.

Les résultats du vote permettent l'installation du doute. L'enseignant engage les élèves à argumenter, en choisissant de donner la parole à tel ou tel élève suivant l'avis qu'il a donné. Ce choix dépend, d'une part, du décalage entre cet avis et le caractère de vérité (vrai ou faux) de la proposition, d'autre part, de la position de cet avis par rapport à celui des autres élèves. Il invite chaque élève à s'adresser à toute la classe. La parole de l'élève doit être respectée par l'enseignant et partagée (par un support) avec tous les autres élèves. L'enseignant demande ensuite à un autre élève de répondre à ce premier argument. Et ainsi de suite, ce qui permet d'initier des interactions de type *enseignant-élève1-élève2*... et non *enseignant-élève1, enseignant-élève2*...

Tout au long des phases précédentes, l'enseignant a adopté une posture d'organisateur des échanges entre les élèves, permettant de faciliter l'émergence et la confrontation des représentations. Au moment qu'il juge opportun – les échanges s'épuisent, il apparait la nécessité d'une synthèse – l'enseignant arrête les échanges. Il conclut cette phase d'échanges en reprenant les résultats établis, les méthodes utilisées, en revenant également sur les erreurs et les impasses. Enfin il explicite les connaissances qu'il visait. Dans ce texte, il s'agit des connaissances de type II en jeu dans la résolution du problème choisi de la *Progression annuelle*.

Le problème choisi sert donc de support à l'acquisition de ces connaissances de type II, ceci faisant ainsi écho à notre ancrage théorique (TSD). L'objectif explicite de l'enseignant n'est donc pas la résolution du problème – peu importe que le problème ne soit pas résolu – mais l'acquisition progressive par les élèves de ces connaissances de type II.

A la suite de la présentation de ces éléments théoriques, travaillés dans le cadre de cet atelier, nous pouvons résumer nos questions de recherche.

5 Nos questions de recherche

Nous partons du constat que le contrat didactique usuel relatif à la résolution de problème à l'école est éloigné du débat scientifique. Pour l'enseignant, il est difficile à mettre en place, du fait, notamment de l'incertitude dans laquelle ce contrat place l'enseignant au cours des échanges scientifiques au sein de la classe. Celui-ci a besoin de repères et de critères pour mettre en place un tel contrat et de comprendre son intérêt pour les apprentissages des élèves.

D'où nos questions de recherche.

Q1 – Comment repérer et faire évoluer la mise en œuvre du débat scientifique en classe ?

Q2 – La mise en place du débat scientifique, dans le cadre de notre progression de problèmes adaptée pour le cycle 1, est-elle favorable à l'acquisition par les élèves de cycle 1 de connaissances de type II ?

Nous souhaitons présenter des éléments de réponses à ces questions en montrant, d'une part, que les enseignants impliqués dans notre recherche, avec le support des outils que nous avons co-construits, ont fait évoluer leur pratique vers la mise en place en classe d'un contrat didactique proche du débat scientifique, d'autre part, que leurs élèves ont acquis des connaissances de type II.

Dans ce but, nous avons élaboré un nouvel outil permettant d'analyser, au niveau microscopique, les interactions didactiques dans la classe lors des séances menées en classe par les enseignants, sur les problèmes de la Progression annuelle. Cet outil, que nous désignons ici par *la Grille*, est conçu pour repérer, d'une part, si les actions de l'enseignant sont favorables ou non à la mise en œuvre du débat scientifique dans le cadre d'un problème de la progression, d'autre part, si les actions des élèves sont scientifiques et révèlent l'acquisition de connaissances de type II.

Dans la seconde partie de l'atelier, nous avons ainsi présenté *la Grille*, puis nous avons invité les participants à l'utiliser pour analyser un extrait d'une séance en cycle 1 sur le problème des *Rectangles de 4 couleurs*.

III - UN OUTIL D'ANALYSE DES INTERACTIONS : *LA GRILLE*

Ainsi pour répondre à notre première question de recherche, nous avons mobilisé le cadre de l'évaluation formative, en tant qu'évaluation au service des apprentissages, et plus particulièrement les recherches francophones qui, plus largement, considèrent l'évaluation formative comme intégrée à chaque activité d'enseignement-apprentissage et se centrent sur la notion de régulation (Chanudet, Coppé, Gandit et Moulin, 2018). On pourra noter que, dans cette perspective, le *débat scientifique* peut être présenté comme un dispositif permettant, d'une part, de saisir les conceptions et les difficultés des élèves, d'autre part, de réguler et d'adapter l'enseignement. Nous l'avons présenté comme un contrat didactique. Les travaux cités ci-dessus avaient déjà présenté un outil d'analyse des interactions didactiques dans la classe dans le contexte de la résolution de problèmes et de la démarche d'investigation, lui-même inspiré des

travaux de Ruiz-Primo et Furtak (2007) portant sur ce qu'elles nomment « assessment conversations ». Nous avons adapté cet outil, *la Grille*, pour qu'il permette de mieux saisir les différents moments d'un débat scientifique portant sur la résolution d'un problème de la progression.

1 Description de la Grille

Ainsi *la Grille* est constituée d'une liste d'indicateurs observables, qui décrivent le déroulement d'une séance en classe consacrée à la résolution d'un problème. Ces indicateurs sont des gestes ou actions de la part de l'enseignant ou des élèves. Ils découlent des observations réalisées par les chercheurs de notre groupe, soit directement dans les classes, soit indirectement par le visionnage des vidéos réalisées (par les chercheurs ou par les enseignants eux-mêmes) dans les classes des enseignants expérimentateurs de notre groupe. Ces indicateurs sont répartis en quatre parties ou sous-grilles.

Les trois premières d'entre elles concernent l'enseignant, la quatrième les élèves pris individuellement.

1.1 La sous-grille « Mise en recherche »

La première sous-grille, désignée par *Mise en recherche*, regroupe et décrit les paroles, gestes ou postures observables de l'enseignant, au moment initial où il donne le problème et s'assure de la compréhension de la question posée, ou chaque fois qu'il met les élèves en recherche sur une question, proposition de méthode, conjecture ou argumentation, qui émergent des échanges au cours du débat scientifique ou qui résultent de l'observation par l'enseignant des productions des élèves. Voici trois exemples d'indicateurs observables présents dans cette sous-grille, qui en comporte vingt-six : ex.1) *L'enseignant donne la parole à un ou une élève, dès qu'il ou elle la demande* ; ex.2) *L'enseignant se tait pendant que les élèves cherchent* ; ex.3) *L'enseignant engage les élèves dans une pratique d'auto-évaluation, en leur donnant des outils pour se positionner sur leurs actions*. Les indicateurs de cette sous-grille correspondent à des moments où les élèves sont attentifs ou travaillent individuellement ou avec leurs voisins. Certains d'entre eux sont conformes à la mise en œuvre du débat scientifique, à la dévolution à l'élève d'une responsabilité sur le plan scientifique, comme l'illustre l'exemple 2 ci-dessus. En effet, lorsque l'enseignant se tait, il instaure un climat de travail et incite les élèves à prendre des responsabilités. D'autres indicateurs, au contraire, n'y sont pas favorables, comme on le voit dans l'exemple 1. En effet, donner la parole à un élève dès qu'il l'a demandée conforte celui-ci dans l'idée qu'il n'a pas à chercher lui-même la réponse aux questions qu'il se pose ou que des réponses doivent être trouvées de façon immédiate et ne l'incite pas à respecter le travail des autres. Enfin d'autres indicateurs correspondent à des aides apportées par l'enseignant, qui peuvent favoriser ou non la responsabilité scientifique des élèves. Ces derniers critères sont codés par la lettre A[2] suivie d'un numéro d'ordre A1, A2, A3. Les autres critères de cette sous-grille sont codés par la lettre E[3] suivie d'un numéro également : E0, E1… Enfin, dans le but de distinguer, parmi les autres, les indicateurs favorisant la responsabilité scientifique des élèves, nous avons ajouté la lettre d[4] aux codes précédents, et éventuellement un numéro[5]. Ainsi, l'indicateur de l'exemple 2 ci-dessus est codé E9d2, celui de l'exemple 3 est codé A3d, enfin celui de l'exemple 1 en reste au code E3.

[2] A : première lettre du mot « aide ».

[3] E : première lettre du mot « engagement ».

[4] d : première lettre du mot « débat ».

[5] Nous revenons, dans la deuxième moitié de ce paragraphe, sur ces numéros qui suivent le code d.

Cette sous-grille figure en annexe 1.

1.2 La sous-grille « Animation des échanges »

La deuxième sous-grille, intitulée *Animation des échanges*, regroupe et décrit les paroles, gestes ou postures observables de l'enseignant, au moment où il anime des échanges dans la classe. Cette sous-grille compte actuellement vingt-huit observables. Ils sont codés par la lettre R[6] suivie d'un numéro. En voici deux exemples : ex.1) L'enseignant répond directement à une question en donnant une réponse correcte, donne une explication ; ex.2) L'enseignant demande à un ou une élève d'expliciter les raisons de son vote. De la même manière que pour la première sous-grille, certains indicateurs sont favorables à la responsabilité scientifique des élèves et les autres non. Les premiers reçoivent en plus le code d, suivi éventuellement d'un numéro (voir note 3). Ainsi l'exemple 1 correspond à l'indicateur codé R6 et l'exemple 2 à l'indicateur codé R5d2. Ce dernier indique en effet un geste d'animation d'un débat scientifique, alors que l'exemple 1 est contraire à l'esprit du débat scientifique.

Cette sous-grille est proposée en annexe 2.

1.3 La sous-grille « Conclusion-Institutionnalisation »

La troisième sous-grille, nommée *Conclusion-Institutionnalisation*, rassemble les paroles, gestes ou postures de l'enseignant lorsqu'il clôt le débat, conclut sur les résultats du problème, y compris les preuves établies en classe, et fait le bilan des connaissances de type II visées au travers de sa résolution. Cette sous-grille comporte actuellement dix-sept indicateurs. Ils sont codés par la lettre CI ou la lettre A, celle-ci marquant qu'il s'agit d'une aide supplémentaire apportée aux élèves. A ces lettres sont ajoutés, d'abord un numéro, ensuite, la lettre d, uniquement dans le cas où l'indicateur est en accord avec les principes du débat scientifique, suivie éventuellement d'un numéro (voir note 3). Voici deux exemples d'indicateurs avec leur code qui figurent dans cette sous-grille : ex.1) *L'enseignant clôt le débat à un moment opportun* ; ex.2) *Le débat s'arrête sans que l'enseignant ne le close explicitement*. L'exemple 1 correspond au code CI1d1 et l'exemple 2 à CI1. La partie commune à ces deux codes, CI1, indique que les deux indicateurs correspondants portent sur l'arrêt de la phase d'échanges entre les élèves. La lettre d, présente dans le code de l'exemple 1, marque l'arrêt des échanges dans la classe, décidé par l'enseignant suivant l'avancement dans la résolution du problème et les connaissances de type II qu'il vise. Il est conforme aux principes du débat, d'où la première partie du code, CI1d. Le numéro 1 qui suit la lettre d (dans le code CI1d1) permet de distinguer cet indicateur du suivant, codé CI1d2, qui énonce : *L'enseignant explicite sur quelle conclusion se clôt le débat*. Ce geste de l'enseignant correspond également à la clôture du débat (partie CI1 du code) ; il est conforme aux principes du débat (d'où le code CI1d), mais se distingue de l'exemple 1 par la précision apportée à cette phase de conclusion (d'où le numéro 2 ajouté, ce qui donne le code complet CI1d2).

Cette sous-grille figure en annexe 3.

1.4 La sous-grille « Actions des élèves »

Cette quatrième sous-grille, désignée par *Actions des élèves*, regroupe les paroles, gestes ou attitudes observables des élèves, pris individuellement. Elle est composée de dix-sept indicateurs, qui sont codés

[6] R : première lettre du mot « régir ».

par la lettre S[7], suivie d'un numéro. En voici deux exemples : ex.1) *L'élève exprime son indécision, son ignorance, sans avoir manifesté d'engagement* ; ex.2) *L'élève donne un exemple, un contre-exemple*. Les codes attribués aux exemples 1 et 2 sont respectivement : S9 et S4a. La lettre *a*, attribuée à un code de cette sous-grille, signifie en effet que l'indicateur correspondant relève d'une action scientifique (voir paragraphe II-1) de la part de l'élève.

Cette sous-grille est disponible en annexe 4.

2 Mise à l'épreuve de *La Grille* dans une étude de cas en cycle 1

Nous avons cherché à étudier l'efficience de cet outil, *La Grille*, pour répondre à nos deux questions de recherche. *La Grille* permet-elle de repérer et faire évoluer la mise en œuvre du débat scientifique en classe ? Permet-elle aussi de répondre à la seconde question de recherche concernant l'acquisition par les élèves de cycle 1 de connaissances de type II ?

Avant d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous avons invité les participants à s'approprier cet outil en leur proposant de l'utiliser pour coder une partie de séance en cycle 1, les codes étant ceux présentés ci-dessus et que l'on retrouve dans les annexes de 1 à 4. Cette partie de séance a été mise à disposition des participants, d'abord sous la forme d'un extrait de la vidéo réalisée par l'enseignante elle-même de la séance qu'elle a animée, ensuite sous la forme d'une transcription de cet extrait, réalisée par l'équipe de recherche du groupe.

Dans un premier temps, nous présentons le contexte dans lequel se situe l'extrait de la séance évoquée ci-dessus, ensuite nous réalisons le codage de cet extrait avec l'outil *Grille*, enfin nous exposons les résultats que le codage complet de la séance a permis d'obtenir. Les participants à l'atelier ont également procédé au codage et sont parvenus à la même description codée que celle qui va être présentée.

2.1 Le contexte

La séance analysée se situe vers la fin de l'année scolaire 2023-2024, donc en juin 2024, dans une classe de Grande section de maternelle, à Grenoble, en zone d'éducation prioritaire. Nous désignons l'enseignante par Marie. Elle appartient à notre groupe d'expérimentateurs depuis 2022. Cette séance porte sur le problème des *Rectangles de 4 couleurs*. Marie a elle-même filmé ses séances en classe et a mis toutes les vidéos à disposition de notre groupe de recherche. Par ailleurs nous avons mené avec elle un *Entretien de remise en situation par des traces matérielles* (Theureau, 2010), le 11 juillet 2024. Il s'agit d'un entretien d'une durée de deux heures, où l'enseignante s'est exprimée sur son action à partir d'extraits de vidéos réalisées dans sa classe ou à partir de documents, comme son compte-rendu du déroulement de sa séquence concernant le problème des *Rectangles de 4 couleurs*. Voici la transcription d'un extrait du début de cet entretien :

[7] S : première lettre du mot « Student ».

Marie : « C'est le dernier problème, que j'ai proposé à mes élèves. Donc on en avait déjà fait cinq, parce que j'avais déjà fini la programmation qu'on avait établie pour les maternelles. Et j'ai trouvé que mes élèves étaient vraiment très engagés dans la résolution du problème. J'ai commencé par d'abord leur faire construire les tuiles. Donc en fait ce n'était pas la première étape du problème, c'était surtout pour réinvestir le problème des Tours et pour qu'ils comprennent que les tuiles étaient bien différentes. Que si on avait un triangle jaune, à côté un triangle bleu, et en rotation, rouge et vert, et qu'après on avait jaune, rouge, bleu et vert, c'étaient pas les mêmes tuiles. »

Ainsi Marie a suivi avec ses élèves la totalité de la Progression de problèmes adaptée pour le cycle 1 (voir le tableau 1). Elle a remarqué l'engagement des élèves dans la résolution de ce nouveau problème. Elle exprime l'idée qu'elle compte réinvestir des connaissances développées à l'occasion du premier problème traité, à savoir le problème *des Tours*. Pour traiter ce problème, en effet, il faut tout d'abord savoir reconnaître si deux tours (construites à partir de trois cubes *duplo* de trois couleurs différentes) sont identiques ou différentes, suivant le placement des couleurs. Pour le problème *des Rectangles de 4 couleurs*, il s'agit également de reconnaître si deux tuiles données, construites avec quatre triangles de quatre couleurs différentes, sont différentes ou non.

La séance qui est analysée se situe dans la séquence consacrée au problème des *Rectangles de 4 couleurs*. Celle-ci s'est déroulée en six séances en ateliers dirigés, avec chaque groupe, la classe étant partagée en deux groupes de 5 à 7 élèves.

* Séance 1) Découverte du matériel, à partir de triangles de quatre couleurs (durée de 41 min avec le groupe 1 et de 27 min avec le groupe 2).
* Séance 2) Utilisation de tuiles de Wang à quatre couleurs pour paver le plan (durée de 30 min avec les deux groupes) (voir figure 1).
* Séance 3) Recherche individuelle sur la possibilité de paver ou non des rectangles de taille 1 x 4 ou 1 x 5 (durée de 17 min avec le groupe 1 et de 24 min avec le groupe 2) (voir figure 2).
* Séance 4) Nouvelle recherche individuelle sur la possibilité ou non de paver des rectangles de tailles 1 x 4 et 1 x 5 (durée de 3 min pour le groupe 1 et de 4 min pour le groupe 2).
* Séance 5) Recherche-débat sur la possibilité ou non de paver des rectangles de taille 1 x 5, puis des rectangles de taille 1 x 4 (durée de 33 min avec le groupe 1 et de 31 min avec le groupe 2).
* Séance 6) Explication-débat avec les deux groupes réunis (durée de 7 min).

2.2 Utilisation de La Grille pour coder un extrait de séance

L'extrait de la séance codé au cours de l'atelier se situe dans la séance 5 avec le groupe 1. Cet extrait a été visionné par les participants, puis il leur a été distribué une transcription de cet extrait, qu'ils ont codé, en interaction avec les animatrices de l'atelier, en utilisant *la Grille*. Cet extrait codé est reproduit à la figure 5. Les lignes sont numérotées dans la première colonne. La deuxième colonne indique la personne qui parle : P désigne l'enseignante, E, E1 désignent des élèves, parfois nommés par un prénom. La troisième colonne comporte des indications sur le temps, elles ne figurent pas sur la figure 5. La quatrième colonne comporte des transcriptions de ce que disent l'enseignante ou les élèves. Enfin, les trois dernières colonnes comportent les codes issus de la Grille. De fait plusieurs codes peuvent correspondre à une même intervention, lorsque celle-ci représente plusieurs gestes ou attitudes, repérables par un code. Par exemple, *demander son avis à un élève* (code E3d2) et *donner la parole à un élève qui ne l'a pas demandée*

(code R5d3) correspondent à la même intervention, « Qu'est-ce que t'en penses toi ? [P s'adresse à Elian] » (ligne 37 du tableau de la figure 5).

La figure 5 correspond, par ailleurs, à une feuille de calcul d'un tableur, qui permettra de repérer la fréquence des différents codes de la Grille.

			Transcription codée			
25	P		Non, donc celle-là on est obligé de l'enlever. Maintenant, regardez Elian [C'est l'élève au premier plan de la vidéo, qui a déjà essayé les six tuiles possibles pour la quatrième case, et les a laissées sur sa table pour montrer ses essais, qui n'ont pas abouti]. Elian, il a pas fini, mais qu'est-ce qui se passe ? [Bruit] Chut.	R1	R2d	E2d2
26	E		[…] il te reste que une.	S2a		
27	P		Il lui reste plus qu'une. Bien, Elian alors, t'as pas trouvé laquelle mettre à la fin ? [Elian ne sait pas quoi répondre]	R1d1	R4d	
28	E1 (pas Elian)		Il a tout mis [elle montre les six tuiles essayées qui sont restées sur la table] et ça marche pas.	S3a		
29	P		Ah, pourquoi ?	E2d1		
30	E1		parce que là, parce que là, y a du rouge et là y a du rouge.	S3a		
31	P		Ah, toi t'as la même, il te reste la même qu'Elian. Il faudrait une tuile…	R3	R1	
32	E		qui a deux rouges, parce que ça existe pas.	S2a	S3a	
33	P		Ah, vous avez entendu ça ? Pour la dernière tuile de Ewa ou la dernière tuile d'Elian, qu'est-ce qui se passe ?	E2d1		
34	E		Il se passe que, il se passe que… qu'il faut avoir… que deux rouges, ça existe pas, donc il faut qu'il doit, qu'il doit… laisser trouver…	S5a	S6a	
35	P		Il doit laisser trouver d'autres personnes ?	R1d1	R4d	
36	E, E…		Non.	S2a		
37	P		Qu'est-ce t'en penses toi ? [P s'adresse à Elian]	E3d2	R5d3	
38	Elian		Le problème… il faut enlever.	S3a		
39	P		Le problème quoi ?	R10d		
40	Elian		Il faut enlever.	S3a		
41	P		Il faut enlever ? Est-ce que tu penses que si tu enlèves et que tu recommences, tu vas y arriver ?	R1d1	R4d	
42	E		faut pas enlever, faut le laisser et on va dire que c'est fini.	S12a	S3a	S14a
43	P		Que c'est fini et que, du coup ?	R1d1	R4d	
44	E		Ça marche pas.	S12a	S8a	
45	P		Ça marche pas. Est-ce qu'on peut dire que ça marche pas ?	R13		
46	E		[Brouhaha] Non, on peut dire que ça marche, mais quand même…	S8a	S9a	
47	P		Que le tien [P s'adresse à Elian], ça marche pas. On peut dire qu'on n'a pas réussi.	R4		
48	Elian		Ben je sais, je sais pourquoi ça marche pas.	S2a	S11a	
49	P		Pourquoi ?	R4d		
50	Elian		Parce que ici [il montre le rouge qui correspond au bord Est de la troisième tuile posée] il y a du rouge, et ici aussi [il montre le bord Est de la bande] il y a du rouge.	S3a		
51	P		Est-ce qu'il y a des tuiles avec deux rouges ?	R4d		
52	E		Non, ça existe pas des tuiles avec deux rouges.	S3a		
53	P		Alors pourquoi là ça marche pas et que tout à l'heure, ça marchait ? [P rappelle que les élèves ont tous réussi à paver leur bande 1 x 5]	R13		
54	E		Ça marchait parce que… il avait bien mis les cartes, parce qu'il avait bien mis les cartes.	S3a		

Figure 5. Extrait de la transcription de la séance codée lors de l'atelier

Les participants ont pu constater que *la Grille* permettait non seulement de coder les gestes ou attitudes de l'enseignant et des élèves, même si certains passages étaient inaudibles, donc non retranscrits, mais aussi que la lecture de cette grille donnait des repères aux enseignants pour mettre en place le débat scientifique dans leurs classes. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion.

2.3 Les résultats issus du codage avec la Grille

Les résultats qui sont présentés ci-après ne correspondent pas seulement à l'extrait de séance codé au cours de l'atelier. Ils correspondent à un épisode de 15 minutes de la séance (il s'agit des quinze dernières minutes de la séance) dont est issu cet extrait.

Dans un premier temps, nous décrivons les résultats que ce codage permet d'obtenir concernant l'activité des élèves au cours de cet épisode. Tous les codes commençant par un S nous ont permis de relever 84 observables qui marquent une parole ou un geste ou une attitude de la part d'élèves, pris

individuellement. Parmi ceux-ci, nous en avons relevé 75 (présence de 75 codes qui commencent par la lettre S et se terminent par la lettre a) qui dénotent une action scientifique, soit 89%. Parmi ces actions scientifiques, on relève 34 fois le code S3a, soit 40%, ce qui indique une argumentation, ou plus précisément que *l'élève justifie ou précise ou reformule un raisonnement ou donne une raison, une méthode ou un argument*. On retrouve 5 fois le code S3a (5/75), qui indique que *l'élève donne son avis*, et 7 fois le code S12a, qui révèle *une intervention spontanée de la part de l'élève*. Plus précisément voici les résultats (tableau 2) obtenus concernant l'activité scientifique des élèves pendant ces 15 minutes de séance.

Observables	Effectifs
L'élève justifie, précise, reformule un raisonnement, donne une raison, une méthode ou un argument » (S3a)	34
L'élève explique comment il ou elle a obtenu une réponse, une conjecture, une idée (S5a)	1
« L'élève justifie, précise, reformule un raisonnement, donne une raison, une méthode ou un argument » (S3a)	1
L'élève donne son avis… (S8a)	5
L'élève exprime son indécision, son ignorance…(S9a)	2
L'élève exprime ce qu'il a compris…(S11a)	1
L'élève intervient de manière spontanée… (S12a)	7
L'élève propose une conjecture (S14a)	1

Tableau 2. Actions scientifiques remarquables de la part des élèves pendant 15 min de la séance

En résumé, nous pouvons conclure que l'argumentation tient une large part dans l'activité des élèves, que ceux-ci osent donner leur avis et même qu'un élève a proposé une conjecture.

Dans un second temps, nous décrivons les résultats que ce codage permet d'obtenir concernant la pratique de l'enseignante. Nous avons relevé 101 observables qui concernent la pratique de l'enseignante, dont 60 (sur 101), soit 59% marquent une parole ou un geste ou une attitude en accord avec les principes du débat scientifique. Ceci indique une progression nette de sa pratique vers l'installation d'un contrat didactique fondé sur le débat scientifique. Plus particulièrement, le tableau 3 montre que, très majoritairement, l'enseignante respecte la parole et les idées des élèves, en accord avec un principe du débat scientifique

Observables	Effectifs
L'enseignante répète ou paraphrase une contribution d'élève en en conservant le sens … (R1d1)	14
L'enseignante demande l'avis d'un ou d'une élève. (R5d3)	7
L'enseignante renvoie à la classe des propositions d'élèves. (R2d)	3
L'enseignante renvoie une idée d'élève à la classe. (R3d)	3
L'enseignante permet à l'élève de reformuler… (R10d)	5
L'enseignante reprend, mais de manière différente, une idée d'élève… (R1)	4

Tableau 3. Du côté de l'enseignante, les observables en lien avec le respect de la parole et des idées des élèves

Cependant l'effectif de 4 correspondant au code R1, montre qu'il arrive parfois à l'enseignante de reprendre une idée d'élève en la déformant, ce qui n'est pas favorable aux principes du débat scientifique.

De surcroit, nous constatons certains manques dans la pratique de l'enseignante, qui empêchent la mise en place du débat : d'une part, l'enseignante ne conserve pas de trace pour rappeler les étapes de la résolution du problème (effectif de 0 pour le code R1d3[8]), d'autre part, elle ne fait pas voter les élèves pour recueillir leur avis (effectif de 0 pour le code R5d1[9]). Enfin l'effectif de 16 attribué au code R13 révèle que *l'enseignante incorpore assez souvent aux échanges avec la classe un commentaire ou une question qui ne sont pas pertinents pour la poursuite du débat*. De fait, dans cet extrait de séance, elle questionne souvent les élèves sur la réussite ou non du pavage. Or ce questionnement n'est pas pertinent pour amener les élèves vers la preuve, de l'existence d'un pavage ou de son impossibilité, alors qu'ils sont tout à fait prêts cognitivement à franchir ce pas. En effet, ils ont tous réussi à trouver un pavage du rectangle 1 x 5. Ils ont donc tous prouvé que le rectangle 1 x 5 était pavable par l'exhibition de leur pavage. Ils n'ont pas trouvé de pavage du rectangle 1 x 4, pourtant certains élèves sont tout près d'établir la preuve que le pavage du rectangle 1 x 4 est impossible (voir la figure 6).



Figure 6. La preuve de l'impossibilité du pavage du rectangle 1 x 4 est sur la table

La figure 6 montre en effet que l'élève (dont on voit la main) a commencé un pavage du rectangle 1 x 4. Il s'est arrêté en ne posant pas la quatrième tuile. Concernant les trois premières tuiles, étant données les contraintes portant sur la couleur des bords du rectangle, il n'y a pas d'autre choix que celui que l'élève a opéré. Les six tuiles – ce sont les six tuiles de la collection de base (voir figure 1) – retournées sur la table au-dessus du pavage commencé, portant des gommettes de couleur, montrent que l'élève a essayé de poser chacune de ces tuiles pour tenter de terminer le pavage. Il a donc étudié tous les cas possibles pour cette dernière tuile. Sa preuve est « sur la table ». Il manque juste l'argument selon lequel il n'a pas d'autre choix que celui qu'il a effectué pour les trois premières tuiles du pavage. L'élève, désigné par E, dans le dialogue qui suit, conclut que « ça marche pas ». Or l'enseignante semble ne pas comprendre que l'élève annonce que le pavage est impossible. Elle est, à ce moment-là, en difficulté pour animer un débat scientifique.

E : « Faut pas enlever. Faut le laisser. On va dire que c'est fini. »

P : « Que c'est fini et que du coup… »

[8] R1d3 : L'enseignante fait prendre des notes sur ce qui se dit en classe ou constitue une trace de la recherche.

[9] R5d1 : L'enseignante demande l'avis des élèves en les faisant voter.

E : « Ca marche pas »

P : « Ca marche pas. Est-ce qu'on peut dire que ça marche pas ? »

La raison principale de la difficulté de l'enseignante à mener le débat au cours de cette séance est qu'elle n'a pas clairement désigné préalablement, pour elle-même, les connaissances de type II qu'elle vise au travers de la résolution du problème – comme recommandé dans l'outil *Positionnement* destiné à l'enseignant (Gandit, 2024) – ou qu'elle les perd de vue. Cette désignation constitue en effet, pour l'enseignant, le fil conducteur essentiel pour mener un débat scientifique.

Concernant l'installation dans la classe du débat scientifique au cours de cet extrait de séance de 15 minutes, nous concluons sur deux points. D'une part, les élèves développent majoritairement des actions scientifiques, qui sont révélatrices de la mobilisation de connaissances de type II. Notamment, le raisonnement décrit ci-dessus montre que l'élève mobilise la connaissance de type II selon laquelle une présentation organisée du raisonnement par disjonction de cas permet d'assurer que tous les cas possibles sont étudiés, sans répétition. Cette connaissance de type II est visée lors de la résolution des problèmes précédents dans la Progression. D'autre part, l'enseignante agit majoritairement dans l'esprit du débat scientifique, en respectant la parole et les idées des élèves et en leur accordant du temps pour réfléchir. Les manques identifiés dans cet extrait, qui perturbent l'installation du débat scientifique sont : l'absence de recours au vote pour recueillir l'avis des élèves, l'absence de support pour conserver la mémoire de la résolution du problème, la perte de vue par l'enseignante des connaissances de type II visées ou l'absence de désignation préalable précise de celles-ci.

Nous ajoutons par ailleurs, qu'aux évaluations nationales auxquelles ont été soumis tous les élèves de Grande Section, les élèves de Marie ont obtenu les meilleurs résultats de l'école, notamment concernant l'expression et le langage. Marie attribue ce résultat à la mise en œuvre de la Progression de problèmes et de l'expérimentation du débat scientifique en classe. A cela s'ajoutent d'autres constats faits par les enseignants expérimentateurs de notre équipe, à savoir que leurs élèves développent des attitudes plus responsables et assurées, également dans les disciplines autres que les mathématiques.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A notre première question de recherche, « Comment repérer et faire évoluer la mise en œuvre du débat scientifique en classe ? », nous répondons que *La Grille* constitue un modèle qui décrit le contrat didactique en vigueur dans les séances consacrées à la résolution des problèmes de la Progression, du côté des élèves et du côté de l'enseignant. Cette description est constituée d'un ensemble de codes attribués à leurs paroles, gestes et attitudes observables par une personne extérieure à la classe. Comme nous l'avons montré dans l'étude de cas en cycle 1, ces codes permettent de discriminer les observables qui, du côté des élèves, relèvent ou non d'actions scientifiques, du côté de l'enseignant, relèvent d'une pratique ancrée ou non dans le débat scientifique. Cette Grille fournit ainsi des données qui mesurent l'état de mise en œuvre du débat scientifique dans la classe. La communication de ces données, à l'enseignant de la classe observée, comme le cas pour Marie, lui donne des repères très concrets concernant les points positifs ou les manques de sa pratique. Par ailleurs, lorsqu'elle est utilisée en amont par les enseignants, la Grille leur fournit des repères très explicites pour faire évoluer leur pratique. C'est ce que nous ont affirmé les enseignants expérimentateurs de notre groupe, dans leur ensemble. Ainsi, la Grille apparaît à la fois comme un modèle pour la recherche et comme un outil pour les enseignants.

Notre seconde question de recherche est la suivante : « La mise en place du débat scientifique, dans le cadre de notre progression de problèmes élaborée pour le cycle 1, est-elle favorable à l'acquisition par les élèves de cycle 1 de connaissances de type II ? » Rappelons que la mise en avant des connaissances de type II, couplée au choix des problèmes au service de l'acquisition par les élèves de ces dites connaissances, fournit des briques de *situations fondamentales* (Brousseau, 1998, p.60). Par ailleurs, le débat scientifique nous apparaît comme le contrat didactique le plus favorable à l'acquisition de ces connaissances de type II, du fait qu'il transforme la classe en une mini-communauté scientifique, dans laquelle les échanges sont mus en grande partie par ces connaissances. La réponse à cette seconde question de recherche s'appuie essentiellement sur notre étude de cas, même si, par ailleurs, nous avons d'autres éléments qui la renforcent. Ainsi, à la fin d'une année scolaire au cours de laquelle les élèves de cycle 1 ont été confrontés à la Progression de problèmes et l'enseignante a orienté sa pratique vers une mise en place du débat scientifique, les élèves de cycle 1 réinvestissent des connaissances de type II visées dans les problèmes précédents. Ceci montre qu'ils ont acquis ces connaissances. Par exemple, ils organisent la présentation de leur raisonnement pour montrer qu'ils ont étudié tous les cas possibles, ils reconnaissent que la preuve d'une impossibilité ne se fait pas l'exploration d'un grand nombre de cas infructueux (« je n'ai pas trouvé », c'est différent de « ça n'existe pas »). Ils développent ainsi leur capacité à argumenter. De plus, ils développent leur capacité à s'exprimer et ils s'engagent volontiers dans la résolution de problèmes nouveaux.

Un point important n'a pu être développé ici, c'est le choix des problèmes de la progression. Nous renvoyons à Da Ronch, Gandit et Gravier (2020), ainsi qu'à la thèse de doctorat de Da Ronch (2022).

Enfin, nous disposons actuellement d'un grand nombre de données, sous forme de vidéos fournies par les enseignants et d'entretiens menés avec eux, qui vont nous permettre d'affiner notre Grille, ainsi que notre méthode pour conduire les entretiens, et d'obtenir de nouveaux résultats concernant l'acquisition par les élèves des connaissances de type II, du cycle 1 au lycée, et même au-delà.

V - BIBLIOGRAPHIE

Black, P., Wiliam, D. Developing the theory of formative assessment. Educ Asse Eval Acc 21, 5–31 (2009). https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Balacheff N. (2024). Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques (Numéro spécial), pp. 15-59. ⟨10.46298/rdm.12905⟩. ⟨hal-04028314v2⟩

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'habilitation à diriger des recherches. Paris : Université Denis Diderot Paris VII. https://theses.hal.science/tel-00683613v1

Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M. et Moulin, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. Dans S. Coppé & E. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, XIXème école d'été de didactique des mathématiques, Paris.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Da Ronch, M., Gandit, M. et Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères-IREM, 121,* 77-108.

Da Ronch M., Gandit M. et Mili I. (2025). *Modélisation des situations de recherche pour la formation professionnelle des enseignants*. hal-04975494v1

Da Ronch, M. (2022). Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries. [Thèse de doctorat]. Université Grenoble Alpes

Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M. et Mesnil, Z. (2023). Spécificités des connaissances en logique et conséquence sur la double discontinuité de Klein. *Numéro spécial FUMME de Recherches en Didactique des Mathématiques.* hal-04975494v1

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31

Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en Education, 21*, 67-80. https://doi.org/10.4000/ree.7513

Gandit, M., Gravier, S et Mossuz, L. (2023). L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques du cycle 1 au cycle 3 : premiers outils et premiers résultats. Dans Wozniak, F. (dir), Actes du 48ème colloque de la COPIRELEM, Toulouse 2022, 431-448, https://hal.science/hal-04818426v1

Gandit, M. (2024). *« Chercher-Débattre-Prouver » à partir du cycle 1 : des résultats issus d'un LéA*. Pré-publication pour les actes de la 22ème école d'été de didactique des mathématiques, Bar-sur-Seine, octobre 2022, hal-04819108, version1 (consulté le 01/10/2025)

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9.3, 365-406

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. *Repères-IREM, 10*, 123-159

Lepareur, C., Gandit, M. et Grangeat, M. (2017). Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas. *Education et didactique, 11-3*, 101-120. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2857

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (23 – 30). Toulouse : Octarès Editions.

Ruiz-Primo, M-A., et FURTAK E-M. (2007). Exploring Teachers' Informal Formative Assessment Practices and Students' Understanding in the Context of Scientific Inquiry. *Journal of Research in Science Teaching,* 44(1), 57-84.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. et Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(1), 57–90. https://amu.hal.science/hal-03914966v1

Theureau, J. (2010). Les entretiens d'autoconfrontation et de remise en situation par les traces matérielles et le programme de recherche « cours d'action ». *Revue d'anthropologie des connaissances, 2010/2*, 287-322

ANNEXE 1 – SOUS-GRILLE « MISE EN RECHERCHE »

L'enseignante donne le problème et met ou relance les élèves en activité de recherche –> MISE EN RECHERCHE	
L'enseignante organise la classe et présente des modalités de travail.	E0
L'enseignante pose le problème, de façon ouverte .	E1d
L'enseignante pose le problème, de façon insuffisamment ouverte.	E1
L'enseignante demande de fournir une preuve de ce qui est déclaré, d'argumenter, d'expliquer, en donnant explicitement du temps.	E2d1
L'enseignante engage les élèves à chercher, à approfondir un raisonnement, une explication, en donnant explicitement du temps.	E2d2
L'enseignante donne la parole à un ou une élève, dès qu'il ou elle la demande.	E3
L'enseignante ne donne pas la parole à un ou une élève, qui l'a demandée (dès la donnée du problème ou pendant la recherche).	E3d1
L'enseignante donne la parole à un ou une élève, qui ne l'a pas demandée.	E3d2
L'enseignante demande de répéter, préciser, clarifier.	E4d
L'enseignante propose une réponse d'élève fausse (fictive ou non), une idée d'élève, une relation donnée par un ou une élève… fausses, pour lancer ou relancer la recherche.	E5d
L'enseignante demande quelles connaissances de type II ou méthodes connues on peut utiliser.	E6
L'enseignante propose plusieurs idées d'élèves et invite à la comparaison.	E7d1
L'enseignante renvoie aux hypothèses du problème sans admettre d'autres points de vue.	E7
L'enseignante demande de définir un concept.	E7d2
L'enseignante demande de voter « vrai », « faux » ou « autre réponse » à propos d'une conjecture donnée, demande l'avis des élèves.	E8d
L'enseignante valide elle-même les réponses des élèves.	E8
L'enseignante se tait pendant que les élèves cherchent.	E9d1
L'enseignante est attentive à la production des élèves ou observe les actions des élèves.	E9d2
L'enseignante intervient auprès de certains élèves pendant la phase de recherche.	E9
L'enseignante arrête la recherche des élèves au moment opportun, par rapport à la résolution du problème, et démarre le recueil de ce que pensent les élèves.	E10d
L'enseignante arrête la recherche des élèves à un moment inopportun, par rapport à la résolution du problème, et démarre le recueil de ce que pensent les élèves,	E10
L'enseignante propose une aide (par exemple, du matériel non mis à disposition au lancement du problème) à tous les élèves.	A1d
L'enseignante propose une aide (par exemple, du matériel non mis à disposition au lancement du problème) à un ou plusieurs élèves, en marge de la classe.	A1
L'enseignante explicite le but à atteindre, en laissant les élèves libres sur la stratégie utilisée pour atteindre le but.	A2d
L'enseignante explicite le but à atteindre, en fixant la stratégie utilisée pour atteindre le but.	A2
L'enseignante engage les élèves dans une pratique d'auto-évaluation, en leur donnant des outils pour se positionner sur leurs actions scientifiques.	A3d

ANNEXE 2 – SOUS-GRILLE « ANIMATION DES ÉCHANGES »

L'enseignante anime les phases d'échanges au cours du débat –> ANIMATION DES ECHANGES	
L'enseignante répète ou paraphrase une contribution d'élève, en en conservant le sens, à l'oral.	R1d1
L'enseignante reprend, mais de manière différente, une idée d'élève, à l'oral ou à l'écrit.	R1
L'enseignante reprend et écrit une contribution (conjecture, affirmation, argument, raisonnement) d'élève au tableau, en conservant ce qui est dit.	R1d2
L'enseignante fait prendre des notes sur ce qui se dit en classe ou constitue une trace de la recherche.	R1d3
L'enseignante élabore une réponse sur la base des réponses fournies par des élèves.	R2
L'enseignante renvoie à la classe une proposition d'élève ou une liste de propositions d'élèves, apparues dans la classe.	R2d
L'enseignante explore une idée d'élève, encourage un ou une élève à poursuivre dans son idée.	R3
L'enseignante renvoie une idée d'élève à la classe.	R3d
L'enseignante incorpore un commentaire sur ce qui a été dit précédemment, qui met fin aux échanges en cours sur le sujet, pas nécessairement de manière consciente.	R4
L'enseignante incorpore un commentaire sur ce qui a été dit précédemment, qui encourage ou relance la poursuite du débat.	R4d
L'enseignante demande l'avis des élèves sans vraiment avoir l'intention de le recueillir.	R5
L'enseignante demande l'avis des élèves en les faisant voter.	R5d1
L'enseignante demande à un ou une élève d'expliciter les raisons de son vote.	R5d2
L'enseignante demande l'avis d'un ou d'une élève.	R5d3
L'enseignante répond directement à une question en donnant une réponse correcte, donne une explication.	R6
L'enseignante renvoie une question à la classe ou dit qu'elle ne répond pas.	R6d
L'enseignante donne la parole à un ou une autre élève (en cas d'absence de réponse, d'hésitation d'élève…).	R7
L'enseignante donne le temps de répondre à un ou une élève ou à la classe.	R7d
L'enseignante porte un jugement de valeur sur une réponse d'élève, fait un commentaire personnel.	R8
L'enseignante coupe court au débat ou à une réponse d'élève, pour permettre la réflexion.	R9d
L'enseignante recentre sur une tâche précise, sur une question fermée, à la suite de ses observations ou des échanges.	R9
L'enseignante corrige les propos incompréhensibles d'un élève.	R10
L'enseignante permet à l'élève de reformuler ses propos difficilement compréhensibles.	R10d
L'enseignante demande d'évaluer la qualité d'une preuve : sa recevabilité d'un point de vue présentation, explication ou persuasion.	R11d
L'enseignante valide une preuve.	R11
L'enseignante propose une réponse d'élève attendue dans l'analyse a priori, mais qui n'est pas apparue dans la classe, pour relancer le débat.	R12d
L'enseignante incorpore un commentaire sur ce qui a été dit précédemment ou pose une question, non pertinents pour le débat.	R13
L'enseignante interpelle un ou des élèves pour le ou les ramener dans le débat.	R14

ANNEXE 3 – SOUS-GRILLE « CONCLUSION-INSTITUTIONNALISATION »

L'enseignante clôt le débat, conclut et fait le bilan des connaissances de type II visées par la résolution du problème –> CONCLUSION ET INSTITUTIONNALISATION	
L'enseignante clôt le débat à un moment opportun.	CI1d1
Le débat s'arrête sans que l'enseignante ne le close explicitement.	CI1
L'enseignante explicite sur quelle conclusion se clôt le débat.	CI1d2
L'enseignante explicite les connaissances de type II (voire de type I) mises en œuvre dans les actions des élèves, avec des indicateurs ou pas.	CI2d
L'enseignante décrit les raisonnements utilisés sans pointer les connaissances à retenir.	CI2
L'enseignante reprend pour toute la classe une démarche ou une réponse d'élève, apparue au cours du débat, qu'elle n'avait pas anticipée.	CI3d
L'enseignante laisse en suspens une réponse sur laquelle il n'y a pas consensus, en disant qu'on y reviendra plus tard.	CI4d
L'enseignante laisse en suspens une réponse sur laquelle il n'y a pas consensus ou tranche en donnant une réponse.	CI4
L'enseignante questionne oralement sur les connaissances mises en œuvre.	CI5
L'enseignante reprend la main pour faire une conclusion, une institutionnalisation.	CI5d
L'enseignante questionne les élèves sur leur ressenti par rapport à leur vécu de la résolution du problème.	CI6
L'enseignante construit une trace écrite relative aux connaissances de type II (voire de type I) visées par la résolution du problème.	CI7d
L'enseignante construit une trace écrite sur les résultats du problème, sans conserver la mémoire du faux apparu au cours de la résolution du problème.	CI8
L'enseignante construit une trace écrite sur les résultats du problème, en conservant la mémoire du faux apparu au cours de la résolution du problème.	CI8d
L'enseignante organise une mise en commun des divers résultats obtenus dans la classe.	CI9
L'enseignante valide ou invalide les différents résultats présentés, avec le concours de quelques élèves.	CI10
L'enseignante engage les élèves dans une pratique d'auto-évaluation, en leur donnant des outils pour se positionner sur leurs actions scientifiques et leurs apprentissages.	A4d

ANNEXE 4 – SOUS-GRILLE « ACTIONS DES ÉLÈVES »

ACTIONS DES ELEVES	
L'élève lit à voix haute un texte écrit ou affiché au tableau.	S1
L'élève propose une réponse très courte, dans le cas d'« effet Topaze » de l'enseignante.	S2
L'élève propose une réponse très courte, suite à un raisonnement non partagé avec la classe.	S2a
L'élève justifie, précise, reformule un raisonnement, donne une raison, une méthode ou un argument.	S3a
L'élève donne un exemple, un contre-exemple.	S4a
L'élève explique comment il ou elle a obtenu une réponse, une conjecture, une idée.	S5a
L'élève questionne scientifiquement un autre élève ou la classe concernant le sujet en discussion.	S6a
L'élève questionne un autre élève ou le professeur concernant le sujet en discussion, pour obtenir une réponse immédiate.	S7
L'élève exprime un refus d'interaction avec un ou une autre élève.	S8
L'élève donne son avis sur le sujet en question, exprime son accord ou désaccord, directement ou par le vote.	S8a
L'élève exprime son indécision, son ignorance, après avoir montré son engagement.	S9a
L'élève exprime son indécision, son ignorance, sans avoir manifesté d'engagement.	S9
L'élève exprime ce qu'il ou elle a compris ou appris, de manière sincère.	S11a
L'élève intervient de manière spontanée, sur le sujet en cours, sans répondre directement à la professeure.	S12a
L'élève reconnait son erreur.	S13a
L'élève propose une conjecture.	S14a
L'élève propose une réponse qui ne relève pas de la rationalité mathématique.	S15

SAVOIR EXPLOITER UN JEU POUR DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ET EN FORMATION DE PROFESSEURS DES ÉCOLES : L'EXEMPLE DE « MATCH POINT »

Cécile BERROUILLER
PREC, INSPE Aix-Marseille
COPIRELEM
cecile.berrouiller@univ-amu.fr

Pierre EYSSERIC
COPIRELEM
pierre.eysseric@free.fr

Chantal MOUSSY
PRAG, INSPE U-PEC
COPIRELEM
chantal.moussy@u-pec.fr

Arnaud SIMARD
MCF, INSPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Frédérick TEMPIER
MCF, CY Cergy Paris Université
COPIRELEM
LDAR
frederick.tempier@cyu.fr

Gwenaelle VAY
PRCE, INSPE de Nantes
COPIRELEM
gwenaelle.vay@univ-nantes.fr

Résumé
Dans la lignée des brochures *Construire une expertise pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire* (Guille-Biel Winder et al., 2019 ; Celi et al., 2022 ; Bilgot et al., 2025), nous proposons l'analyse d'une situation de formation visant l'exploitation d'un jeu pour des apprentissages mathématiques (Eysseric et al., 2012). Nous avons choisi le jeu *Match Point* (APMEP, 2019) pour ses possibilités d'usages selon différents enjeux mathématiques et didactiques et auprès de différents publics d'élèves ou de formés. Ce texte présente l'atelier qui a été mené lors du colloque en revenant sur les moments de mise en situation de jeu, d'analyse du jeu et de ses usages possibles, et enfin de réflexions sur son exploitation en formation.

I - INTRODUCTION : FORMER À L'USAGE DE JEUX POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES

La question du jeu pour enseigner les mathématiques suscite toujours beaucoup d'engouement en formation initiale et continue. Sur le plan institutionnel, l'intérêt pour le jeu comme support d'apprentissage est aussi mis en avant. Les programmes scolaires de 2025 des cycles 1 et 2 contiennent

des références explicites à des jeux (jeux de plateau, jeux de Kim, jeux du portrait, …). Des documents officiels explicitent leur intérêt et fournissent des exemples de jeux. Dans la ressource « Les mathématiques par les jeux » sur le site Eduscol (MENESR, 2016), on peut lire :

> *Chacun peut en retirer de grands bénéfices. La pratique du jeu permet de gagner du temps dans la compréhension des connaissances, rend plus pérennes les savoir-faire essentiels en mathématiques et leur permet de développer des compétences diverses. (MENESR, 2016, p. 1).*

Toutefois ce document reste relativement vague quant aux modalités concrètes de mise en œuvre en classe. Si ces textes soulignent l'importance d'accompagner les activités ludiques de traces écrites collectives, cette recommandation nous semble insuffisante et peut laisser les enseignants démunis face à l'exploitation didactique de jeux avec leurs élèves.

L'usage du jeu en classe demande une vigilance particulière pour les enseignants. Leur intérêt pour les jeux peut être interprété comme une réponse aux difficultés qu'ils rencontrent face à la démotivation croissante des élèves vis-à-vis des activités scolaires classiques, notamment en éducation prioritaire (Peltier, 2001). Mais cet usage ne peut être pleinement pertinent que s'il s'accompagne d'une réflexion approfondie sur son intégration dans les dispositifs d'enseignement en prévoyant « une articulation très forte entre les séances ordinaires et les séances de jeux, de cerner avec précision ce qui peut être travaillé » (*ibid., p. 38*) car :

> *Intégrés de manière rapide dans l'enseignement, ils peuvent également conduire à des dérives difficiles à maîtriser (connaissances inexactes, raisonnements erronés conduisant pourtant à la réussite, vocabulaire incorrect parfaitement compris par les partenaires, résultats faux acceptés par tous les joueurs parce qu'énoncés par des leaders ou des élèves jouissant d'un certain prestige, etc.) (Peltier, 2001, p. 38).*

Ces mises en garde rejoignent des questionnements plus larges, en lien avec la sociologie de l'éducation. En s'inspirant notamment des travaux de Bautier (2016), on peut s'interroger sur le rôle que peuvent jouer les supports ludiques dans la construction des inégalités scolaires. Si l'on transpose à la notion de jeu ce que Bautier dit de l'activité scolaire en général, il apparaît que :

> *L'importance des supports de travail **[jeux]** […] est d'autant plus grande dans le processus de construction des inégalités que l'organisation didactique de la classe est largement fondée actuellement sur la mise en activité des élèves, sur un apprentissage qui serait lié au "faire" **[« jouer »]** des élèves. […] (Bautier, 2016, p. 486).*
>
> *S'il est sans doute vrai qu'être actif **[que jouer]** peut mobiliser davantage l'élève, y compris intellectuellement, nombre d'élèves s'inscrivent dans un malentendu socio-cognitif (Bautier et Rochex, 2007 ; Bautier et Rayou, 2009) dès lors qu'ils sont ainsi le plus souvent dans l'effectuation de la tâche **[le jeu]** plus que dans l'apprendre, sans identifier que la finalité de celle-ci **[du jeu]** dépasse justement cette effectuation. (Bautier, 2016, p. 489).*

Autrement dit, si le jeu peut motiver les élèves, il peut aussi générer des malentendus socio-cognitifs en laissant certains élèves dans une simple logique ludique, sans percevoir les finalités d'apprentissages mathématiques.

L'objectif de l'atelier est de réfléchir aux enjeux et modalités de formation sur l'usage des jeux dans l'enseignement des mathématiques afin d'outiller les formateurs. Il s'inscrit dans le travail mené depuis plusieurs années par la COPIRELEM sur la conception de situations de formation (Guille-Biel Winder et al. ; 2019, Celi et al., 2022 ; Bilgot et al., 2025). Nous nous appuyons sur un dispositif de formation de type homologie (Houdement et Kuzniak, 1995), c'est-à-dire un dispositif où les formés vivent ce que nous attendrions qu'ils fassent vivre à leurs propres élèves, puis analysent ce qui s'est passé en reprenant un point de vue d'enseignant. Pour cela, nous nous appuyons sur le jeu *Match Point*, édité par l'APMEP[1], que

[1] De nombreuses ressources autour de ce jeu sont aussi fournies par l'APMEP sur le site https://www.apmep.fr/Match-Point-Espace-compagnon (consulté le 16/06/2025).

nous avons choisi pour ses possibilités d'usages selon différents enjeux mathématiques et didactiques et auprès de différents publics d'élèves ou de formés.

L'atelier a commencé par une phase de découverte du jeu *Match Point*, suivi d'un moment de jeu. Ensuite les participants ont été invités à s'interroger sur le jeu et ses potentialités, avant de réfléchir et d'échanger sur son usage en formation.

II - DÉCOUVRONS LE JEU *MATCH POINT*

Les participants[2] à l'atelier ont été amenés à ouvrir l'enveloppe qui était posée sur leur table et contenant les pièces du jeu, à découvrir les pièces et à s'interroger sur la façon dont ils joueraient à ce jeu sans avoir accès à la règle du jeu pour le moment.

Après un très court temps d'échanges entre les groupes sur les usages possibles des tuiles, la règle officielle du jeu a été présentée :

> *Ce jeu fait partie de la famille des dominos. Il s'agit de juxtaposer les pièces carrées, au nombre de 35, en réalisant des zones les plus vastes possible portant les mêmes nombres de points. On totalise alors le nombre de points de la zone avec éventuellement des bonus. Le but du jeu est bien sûr d'avoir le plus grand score en fin de partie. (APMEP, 2019, p. 1)*

Sur chacun des 4 petits carrés de chacune des 30 premières tuiles, il y a une constellation de points (1, 2, 3, 4 ou 5 points). Toutes les combinaisons possibles sont présentes. Sur les 5 autres tuiles, il y a une étoile, qui est un joker et qui peut remplacer l'un des 5 nombres (1, 2, 3, 4 ou 5).

Une pièce est tirée au hasard et placée au centre de la table pour débuter la partie. Chaque joueur reçoit ensuite deux pièces, qu'il peut consulter librement. À tour de rôle, les joueurs posent l'une de leurs deux pièces en la reliant à une pièce déjà présente sur la table, en respectant la contrainte d'un côté entièrement aligné. L'objectif, en plaçant sa pièce carrée, est de faire correspondre autant que possible les nombres adjacents (par exemple, un 5 contre un 5, un 4 contre un 4), selon le principe du jeu de dominos. Le but du jeu est de maximiser le nombre de points obtenus grâce à ces correspondances.

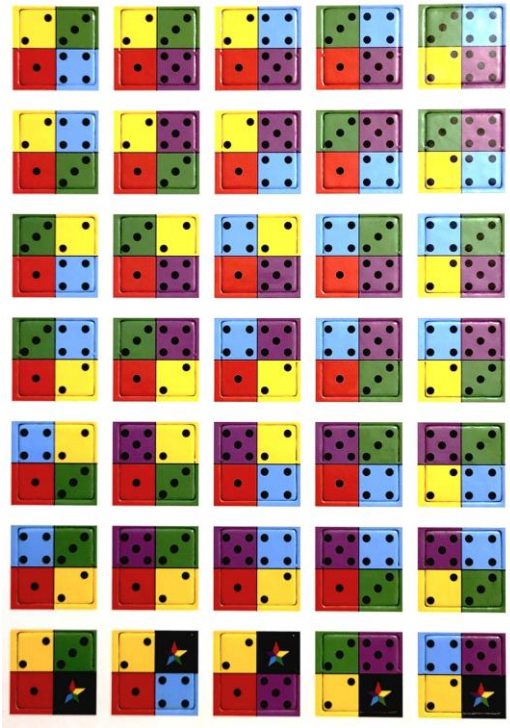


Figure 1. L'ensemble des tuiles du jeu

À chaque tour, le joueur marque autant de points que la somme des nombres communs en contact entre la pièce posée et celles déjà placées (figure 2). Après avoir joué, il pioche une nouvelle pièce. Un bonus de 10 points est accordé si un joueur forme un carré de 2×2 avec quatre nombres identiques : c'est le « match point ». La partie s'arrête lorsque toutes les pièces ont été jouées, en veillant à ce que chaque joueur ait eu le même nombre de tours. Le joueur ayant le plus de points remporte la partie.

[2] Les participants qui connaissaient déjà la règle de ce jeu devaient, quant à eux, essayer de s'en souvenir et de la formuler par écrit.

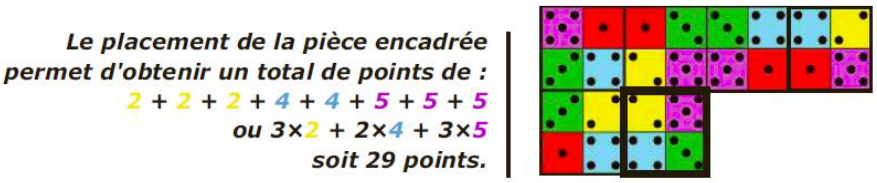


Figure 2. Exemple de calcul de points

III - JOUONS !

Les participants ont ensuite été invités à jouer à *Match Point*. La consigne était la suivante : « Le jeu s'arrête quand vous n'avez plus de tuile ou que le temps est écoulé (10 minutes). Dans chaque groupe, vous devrez être en mesure de nous dire qui a gagné. Vous allez recevoir une feuille vous indiquant une consigne spécifique d'organisation pour votre groupe ».

Voici les consignes d'organisation proposées :

- Vous vous organisez comme vous souhaitez. À la fin, vous devrez pouvoir dire qui a gagné.
- Vous ne pouvez utiliser ni papier / crayon, ni ordinateur, ni téléphone. À la fin, vous devrez pouvoir dire qui a gagné.
- Un d'entre vous est secrétaire. Il doit garder des traces de l'évolution des scores.
- Vous devez garder trace de tous les coups joués.

IV - INTERROGEONS-NOUS SUR CE JEU

Les participants ont été amenés à réfléchir par groupes aux questions suivantes :

1) *Match Point* est-il un jeu ?
2) Quelles stratégies utilise-t-on pour gagner ?
3) Comment s'organiser pour savoir qui a gagné ?
4) Quelles sont les compétences mathématiques travaillées ? Pour quel(s) niveau(x) ?

1 Match Point est-il un jeu ?

Les 7 groupes sont unanimes : ils considèrent *Match Point* comme un jeu.

Pour compléter les réponses des participants, nous avons introduit les deux critères de Haye et Bronner (2020) : le « game » (la structure de jeu) et le « play » (la pratique réelle en action du game). Le « game » de *Match Point* concerne sa structure de jeu, c'est à dire les règles qui ont été présentées plus haut. Elles offrent une liberté au joueur : choix de tuiles et de placement/orientation, faire le plus de points ou bloquer l'adversaire, etc. Le « play » de *Match Point* est quant à lui à observer en action, lors de parties de jeu par des élèves ou des étudiants en formation : est-ce que l'activité génère du plaisir, du fun ? L'adhésion des élèves peut par exemple se manifester dans la volonté de refaire une partie, même en–dehors du temps de classe. C'est ce que nous avons observé par exemple avec des enseignants en formation initiale, mais aussi avec les participants à l'atelier !

2 Quelles stratégies utilise-t-on pour gagner ?

Voici des éléments de réponses proposés par les différents groupes lors de l'atelier :

- On cherche à faire des carrés ou la plus grande zone possible, avec le plus grand nombre possible, et à bloquer les autres.
- Ne pas piocher les cartes violettes.
- Piocher les cartes avec joker.
- Empêcher les adversaires de marquer.

- Éviter de donner des zones carrées au joueur suivant.
- Ne pas commencer. Essayer de faire un carré. Chercher les chemins les plus longs. Chercher toutes les possibilités et choisir celle qui rapporte le plus. Favoriser les constellations les plus grandes et les combiner.
- Poser sa pièce de manière à marquer le plus de points.
- Privilégier les grandes valeurs, éviter de mettre la 3e plaque pour les carrés de grandes valeurs, fermer les carrés pour obtenir le bonus, calculer les positions qui rapportent le plus de points.
- Maximiser ses points en privilégiant les zones carrées et les constellations importantes.
- Avoir des carrés. Avoir des zones avec de grands nombres. Optimiser l'utilisation du joker. Bloquer pour que l'autre ne fasse pas un carré.
- Multiplier les zones en simultané.
- Faire des zones avec des constellations de 5 (ou 4).
- Faire des carrés.

Nous identifions deux grands types de stratégies de jeu, qui peuvent être utilisées conjointement.
La stratégie « Attaquant » consiste à :

- Repérer sur les tuiles déjà placées les « places » les plus porteuses, comme par exemple :
  - 3 tuiles adjacentes qui permettent de faire un « match point ».
  - 2 tuiles adjacentes avec un « grand » nombre (4 ou 5).

et/ou à partir des tuiles de son jeu :

- Identifier les tuiles avec un « grand » nombre (4 ou 5)
- Chercher les tuiles correspondant aux places les plus porteuses.

La stratégie « Défenseur » consiste, quant à elle, à repérer les tuiles de l'adversaire et les places qui pourraient lui permettre de faire un « match point », puis placer une pièce de son propre jeu à cette place.
Ces stratégies s'appuient principalement sur des raisonnements inductifs (par *essais et ajustements)* voire déductifs (*par exhaustivité des cas*).

3 Comment s'organiser pour savoir qui a gagné ?

Voici les éléments de réponses fournis par les groupes participants à l'atelier :

- Nous n'avons pas le droit d'écrire, donc chaque personne mémorise son score et l'annonce à voix haute. Nous avons utilisé un marqueur pour tenir compte du gagnant en cours.
- Avoir un mémo papier pour noter. La feuille tourne, chacun compte ses points et marque son total intermédiaire, les autres vérifient. Ou faire une somme seulement en fin de partie.
- Un élève joue le rôle d'observateur qui, par exemple, vérifie les calculs.
- Calcul possible également de tête, avec validation de tous.
- Vérification commune.
- Faire un tableau de score avec les calculs en ligne pour chaque joueur, puis une addition du score global au fur et à mesure ou à la fin.
- Éventuellement proposer un outil de calcul.
- Additionner les scores intermédiaires au fur et à mesure et les écrire.
- Avoir un tableau pour marquer les scores à chaque tour et les calculs.
- Feuille de scores.

Ces réponses sont très variées du fait des consignes différentes données à chaque groupe (voir III). Le choix des consignes visait justement à illustrer la nécessité des traces des coups joués pour savoir qui a gagné et pour pouvoir revenir sur une partie lors de mises en commun.

La question des traces sera abordée dans la partie V.

4 Quelles sont les compétences mathématiques travaillées ? Pour quel(s) niveau(x) ?

La figure 3 présente les réponses des groupes lors de l'atelier selon les différentes catégories de compétences qui leur ont été proposées : compétences numériques, en résolution de problèmes, spatiales, autres.

1 Compétences numériques

Mobilisation de faits numériques Calcul mental Calcul posé (score)	Enchaînement de calculs	Étapes de calcul
Le champ augmente jusqu'aux centaines	Comparer des nombres	Calcul mental (additif et multiplicatif), ajouter une dizaine, priorités opératoires.
Procédures de calcul	Addition , tables de multiplication jusqu'à 5, priorités de calcul	Tables de multiplication et d'addition
Passage de la numération orale à écrite	Calcul mental	Appui sur la numération
Calculer des sommes et produits ou dénombrer	Faits numériques	Ordre des nombres
Calcul mental, ou en ligne	Addition, multiplication (et leurs propriétés) calcul réfléchi	

2 Compétences en résolution de problèmes

Anticipation, stratégies gagnantes ou d'obstruction	Tester différentes possibilités	Pbs d'optimisation
Optimiser le score	Chercher	Anticipation, repérer les positions gagnantes, maximiser le nombre de points à chaque tour



Figure 3. Les réponses des groupes sur les compétences mathématiques en jeu

Nous résumons ainsi les principales compétences en jeu :

- **Compétences numériques** :
  - Calculer mentalement des sommes en ligne ou en colonne.
  - Utiliser le répertoire multiplicatif.
  - Comparer des nombres.
- **Compétences spatiales** : associer des tuiles en prenant en compte la position et l'orientation des tuiles et des constellations les unes par rapport aux autres.
- **Compétences en résolution de problèmes** : mettre en œuvre un raisonnement par essais et ajustements, par exhaustivité des cas, optimiser le placement de la tuile via le calcul.
- **Autres compétences (non mathématiques)** : compétences psycho-sociales liées au fait de jouer à un jeu à règles et à plusieurs.

V - FAISONS UN PAS DE CÔTÉ : EXERCICES DE JEU ET MÉMOIRES DE JEU

1 Mémoire de jeu

Il y a deux façons d'aborder le jeu mathématique en classe de la part de l'enseignant. Soit l'enseignant part d'une notion mathématique et crée un jeu pour introduire ou consolider la notion par l'entrainement, dans ce cas on parle de « ludification » (ou « ludicisation ») d'une notion mathématique (Haye et Bronner, 2020). Soit l'enseignant part d'un jeu mathématique existant et l'utilise à des fins pédagogiques et d'apprentissage, mais dans ce cas, le simple fait de jouer n'est pas garant de l'apprentissage escompté. Dans ce cas, l'enseignant doit organiser la pratique du jeu à des fins d'apprentissage, on parlera alors de « didactisation » du jeu (Rodriguez, 1993 ; Eysseric et al., 2012).

> *Si on veut que ces jeux deviennent de véritables outils au service des apprentissages à l'école, il est nécessaire de surmonter la contradiction apparente entre le jeu dont la vocation première est le loisir, la distraction, … et l'école centrée sur les apprentissages. Le simple repérage de savoirs mathématiques associés à un jeu ne garantit pas l'existence d'un apprentissage de savoirs mathématiques en jouant. Tout au plus aura-t-on une mise en œuvre dans le jeu de connaissances mathématiques que l'élève sera ensuite incapable de réutiliser en-dehors du contexte de jeu. Il est nécessaire de procéder à un minimum de « didactisation » du jeu afin que chacun des acteurs de la situation ait conscience que certes on joue, mais qu'on joue pour apprendre !*
>
> *Dans tous les cas, l'efficacité du jeu pour les apprentissages va résider dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu « pur » qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les « exercices de jeu » qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés. Ces exercices de jeu vont se matérialiser dans la classe par des écrits collectifs et/ou individuels que nous qualifierons de « mémoire de jeu ».* (Eysseric et al, 2012, p. 331-332)

Une mémoire de jeu consiste en une trace écrite qui peut rendre compte :

- Soit de tous les instants du jeu.
- Soit de certains moments décisifs : lorsqu'un choix doit être fait par le joueur, pour décider du gagnant en fin de partie, …

Cette trace écrite est élaborée par chaque joueur et lui permet de revenir en arrière au cours d'un jeu pour analyser ses choix et leur impact : analyse d'erreurs, comparaison et formulation de stratégies. Elle peut s'appuyer dans un premier temps sur des exercices de jeu proposés par l'enseignant, conduisant à mettre en lumière certaines procédures ou certaines stratégies.

Elle peut ensuite déboucher sur des exercices de jeu dont l'objectif est d'améliorer certaines stratégies ou de s'entraîner à la mise en œuvre de techniques dont la maîtrise s'est avérée importante dans le jeu.

Des mémoires de jeux pourront aussi être utilisées en classe comme illustrations lors des phases d'institutionnalisation des savoirs mathématiques rencontrés dans les jeux, mais il faudra penser à la décontextualisation et donner aussi des exemples pris en dehors des jeux.

Dans le cadre de *Match Point*, on peut donner quelques idées de mémoires de jeu :

- Essayer plusieurs solutions (les 4 positions d'une pièce, les emplacements, le calcul du score, …).
- Calcul de score à une étape du jeu (équivalence entre addition itérée et multiplication, mémorisation de faits numériques, …).
- Calcul de score final (organiser des calculs, faire un tableau de scores, écrire les opérations et pas uniquement les résultats …).

Dans ce jeu, constituer des mémoires de jeu a presque un caractère nécessaire pour faciliter le comptage du score, qui peut vite s'avérer très difficile si le joueur n'a pas la possibilité d'écrire au fur et à mesure par exemple.

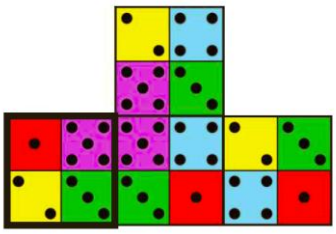
2 Exercices de jeu

Les exercices de jeu participent de la mise à distance du jeu (s'extraire du « play »). Le cadre du jeu est maintenant bien connu des élèves grâce aux parties effectuées et l'enseignant peut s'y référer sans jouer. La décontextualisation des savoirs mathématiques sous-jacents peut débuter. Malgré tout, pour une différenciation adéquate, le jeu reste disponible pour les élèves qui éprouveraient des difficultés à trop abstraire. Ainsi, un exercice de jeu peut être traité de deux manières distinctes et complémentaires : avec ou sans le jeu lui-même. Les exercices de jeu peuvent donner lieu à des institutionnalisations partielles qui constitueront des mémoires de jeu.

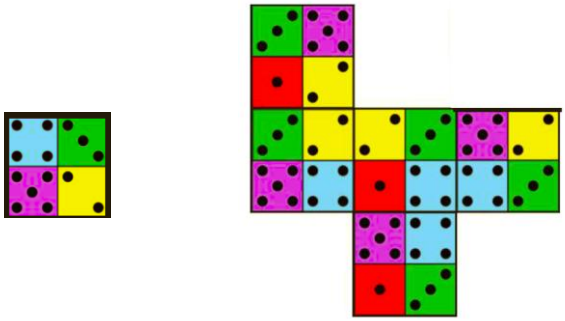
Dans le cadre de *Match Point*, on peut donner quelques idées d'exercices de jeu :

Exemple 1 : Une configuration de jeu (photo) est projetée, le but est de calculer le nombre de points obtenu en plaçant la pièce entourée en gras et d'écrire le calcul réalisé.

Objectif : écrire un calcul qui mêle additions itérées et additions simples, calcul en ligne, concaténation de l'addition itérée en multiplication, utilisation des parenthèses…

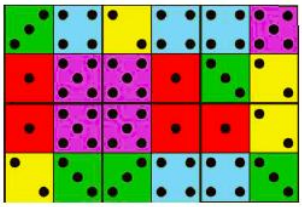


Exemple 2 : Une configuration de jeu est donnée ainsi qu'une pièce. Quel est le meilleur endroit pour placer la pièce ?
Objectif : Calcul mental, optimisation, rotation et manipulation mentale…

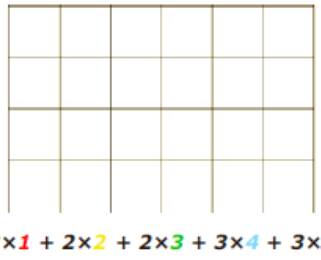


Une variante pourrait être de demander « Créer la pièce de jeu qui maximiserait le nombre de point dans cette configuration ».

Exemple 3 : Une configuration de jeu est donnée, il s'agit de donner le total des points de la configuration.
Objectif : calcul en ligne.

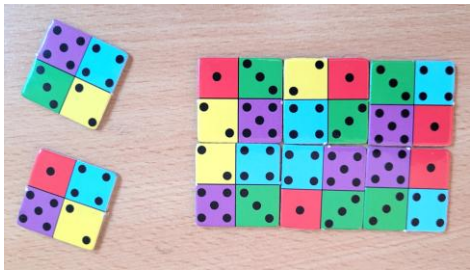


Exemple 4 : Un total de score est donné ainsi qu'un canevas de jeu, il s'agit reconstruire le jeu pour qu'il corresponde au score obtenu.
Objectif : Chercher, raisonner, tâtonner.

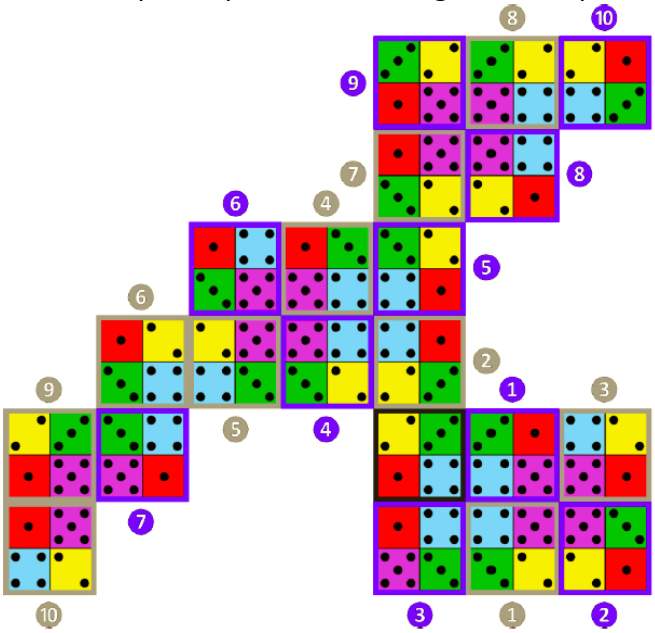


Une variante pourrait être de proposer un calcul qui ne fait pas apparaitre les résultats intermédiaires. Par exemple « 2 + 4 + 6 + 12 + 15 ».

Une solution de cet exercice de jeu est :



Exemple 5 : Une organisation de jeu est proposée avec l'historique des coups de chaque joueur. Il s'agit de savoir lequel des deux joueurs a gagné.
Objectif : compréhension d'un historique de partie, chronologie des coups, calcul mental.



VI - INTERROGEONS-NOUS SUR LE JEU *MATCH POINT* EN FORMATION

Les participants, répartis en sept groupes (G1 à G7), ont envisagé une utilisation de ce jeu en formation. Quatre grands types de public de formation ont émergé des discussions pour former à l'usage de ce jeu : en formation continue (G1, G2, G7) mais aussi en constellation (G6), en licence (G4, G5) et en Master (G3).

Nous proposons ci-dessous une synthèse des discussions réalisées à la suite de la construction des affiches qui se trouvent en annexes.

1 En formation continue (Voir annexe 1)

Il est mentionné tout d'abord qu'en formation continue les enseignants peuvent ne pas être habitués à utiliser les jeux, et pourraient par conséquent être déstabilisés par la proposition d'utiliser un jeu dans leur propre classe.

Les groupes s'intéressant à l'utilisation du jeu *Match Point* en formation continue proposent une formation qui se déroulerait en trois temps.

Le premier temps de la formation serait un temps d'appropriation du jeu avec une règle du jeu donnée ou pas. Dans ce dernier cas les enseignants auraient eux-mêmes à imaginer une règle du jeu. Par la suite, il serait demandé aux enseignants en formation de construire une grille pour recueillir des données sur ce que font les élèves et plus particulièrement les écrits que peuvent produire les élèves. Cette grille devrait permettre d'aider les enseignants à observer les élèves en train de jouer.

Pour un autre groupe (G2) s'intéressant à la formation continue, la première séance pourrait être aussi l'occasion de demander aux enseignants d'élaborer un scénario, puis de discuter lors d'une mise en commun des scénarios proposés. Cela permettrait aux enseignants d' « être outillés » pour une mise en place du jeu en classe.

Un deuxième temps de formation consisterait pour les enseignants à expérimenter dans leur classe, à observer leurs élèves, à prendre des photos et des éléments qu'ils souhaiteraient discuter lors du troisième temps de la formation.

Le troisième temps serait alors consacré à une analyse de ce qui a été vécu en classe, et à la poursuite de l'exploitation du jeu avec une focale sur différentes variantes du jeu notamment les parties arrêtées, pour questionner les stratégies des élèves et les connaissances en jeu.

Les participants de l'atelier mentionnent qu'une durée courte entre les deux séances de formation serait idéale pour effectuer un retour de la première séance vécue en classe, l'analyser rapidement pour éviter des pratiques de classe qui consisteraient à rester dans le jeu juste pour jouer, sans tendre vers « utiliser le jeu » avec des objectifs d'apprentissage. Un des intérêts d'utiliser ce jeu en classe serait de développer la fluence en calcul mental.

Une discussion a également eu lieu sur les limites du jeu choisi et la possibilité d'utiliser d'autres jeux. Un participant a suggéré de *proposer « un autre jeu en cas de difficulté avec celui-ci, pour ne pas bloquer la formation »,* sans plus détailler. Cependant, d'autres participants ont estimé que le jeu *Match Point* présentait de nombreuses potentialités pour la formation, même s'il n'était pas nécessairement mis en œuvre en classe.

Les travaux de Haye et Bronner (2020) pourraient servir de base au troisième temps de formation continue. Ces auteurs proposent entre autres une grille d'analyse du jeu ainsi que des éléments d'analyse a posteriori : validation[3], clôture ludique[4], mémoire du jeu.

2 En formation continue de type « constellation » (Voir Annexe 2)

Le groupe G6 propose le déroulement suivant :

Étape 1. État des lieux des pratiques des enseignants de la constellation sur la manière dont ils utilisent des jeux dans leur classe pour identifier les objectifs de la pratique des jeux dans les classes des participants. Découverte du jeu *Match Point* et ses règles. Questionner l'utilisation du jeu : est-ce un jeu pour transférer des compétences ou des connaissances déjà vues ou est-ce un jeu pour introduire une notion (analyse mathématique du jeu) ?

Étape 2. Mise en œuvre en classe.

Étape 3. Retour sur les observations : réussites, difficultés, adaptations, questionner l'enseignement du calcul mental.

[3] Haye et Bronner (2020) considèrent trois niveaux de validation « la validation de l'action d'un joueur comme conforme aux règles du jeu, la validation de la fin de la partie avec la plupart du temps une victoire et une défaite, et la validation des stratégies des élèves » (p. 53). Ils précisent que cette dernière « peut être obtenue plus facilement dans des moments d'exercices de jeu où on pourra trouver, en plus de la phase d'action qui est la seule offerte par le jeu libre, des phases de formulation, de validation et d'institutionnalisation (au sens de Brousseau, 1998) » (p. 54).

[4] Haye et Bronner (2020), en appui sur les travaux de Duflo (1997), définissent la clôture ludique « comme l'ensemble des limites (spatiales, temporelles, relationnelles) fixées par le jeu et dans lequel celui-ci se déroule » (p. 42). Ils ajoutent que « dans le contexte scolaire, le respect de la clôture ludique est un élément fort pour déterminer le contrat mis en œuvre. Le respect de la clôture ludique est un indicateur de la mise en œuvre du potentiel ludique et de l'atteinte du *play*. Si la clôture ludique n'est pas respectée, cela implique soit que les joueurs ne sont pas suffisamment investis dans l'activité pour qu'il y ait *play*, soit que des non-joueurs ne respectent pas cette clôture et vont empêcher les joueurs d'atteindre le *play* » (p. 55).

L'intérêt d'utiliser ce jeu en formation de constellations serait d'avoir des regards croisés grâce à la présence de formateurs lors des séances mises en œuvre en classe.

3 En formation initiale, niveau Master (Voir annexe 4)

Les formateurs font le constat que les étudiants ont bien conscience qu'il faut jouer pour apprendre, mais il est nécessaire de les aider à dépasser le « je joue pour jouer ». L'objectif en Master serait de sensibiliser les étudiants à différentes modalités de travail possibles en classe, comme le travail en ateliers.

Le groupe G3 part du postulat que les étudiants ont ce jeu à disposition, et souhaite amener les étudiants à le questionner « Comment jouer à ce jeu ? Est-ce qu'il a un intérêt pour les apprentissages mathématiques ? Avec une focale particulière sur quels apprentissages visés en cycle 2 : apprentissages nouveaux ? Un entrainement, ce qui nécessiterait des prérequis ? Comment le mettre en place en classe, dans quel but ? Pour quels apprentissages ? »

Le groupe propose alors un déroulement de la formation en Master : Présentation du jeu par le formateur, les étudiants jouent une ou plusieurs parties. Puis présentation par le formateur d'une grille d'analyse de jeu qui aurait été travaillée en amont à un autre moment de la formation et comprenant des questions sur les compétences mathématiques travaillées, des difficultés-obstacles, des possibilités de différenciation, les variables didactiques…

Une mise en commun du travail de groupe serait ensuite réalisée. Puis une nouvelle tâche consisterait à élaborer un scénario par les étudiants en vue d'une expérimentation en stage de Master. Et enfin, un retour en formation sur ce qui aurait été vécu en classe avec la question en filigrane « comment un jeu peut-il permettre de développer des compétences mathématiques chez les élèves ? »

4 En formation initiale, niveau Licence (Voir annexe 3)

En Suisse, la formation en Licence se focalise sur les enjeux didactiques plus que sur les compétences mathématiques. L'analyse didactique du jeu serait à mettre en lien avec le stage effectué par les étudiants. Le jeu pourrait servir de prétexte pour faire des mathématiques. L'objectif de l'utilisation de ce jeu dans une formation en licence pourrait être d'identifier des variables et de discuter leur impact.

Par ailleurs, ce jeu pourrait permettre d'aborder des questions de recherche dans le cadre d'un mémoire. L'analyse de ce jeu pourrait aussi être effectuée en fonction des différents paliers développés dans le cadre d'analyse de la COPIRELEM présenté par Claire Guille-Biel Winder (conférence 1 du colloque, texte disponible dans les actes). Ce cadre d'analyse pourrait permettre d'identifier les allers-retours possibles dans les différents niveaux, passant d'un niveau 0 où les élèves jouent en classe, à des niveaux supérieurs, jusqu'à des questions de recherche sur l'utilisation des jeux dans l'enseignement.

L'atelier s'est terminé sur ces pistes pour la formation et sur des propositions de quelques références bibliographiques sur le jeu en classe ou en formation (voir partie VII), pouvant être utiles aux enseignants et aux formateurs.

VII - BIBLIOGRAPHIE

APMEP (2019). Jeu Match Point, site compagnon. Consulté le 16/06/2025. https://www.apmep.fr/Conseils-d-utilisation

Bautier, E. (2016). Pratiques scolaires dominantes et inégalités sociales au sein de l'école. *Rapport du CNESCO : Comment l'école amplifie les inégalités sociales et migratoires ?*

Bautier, E., Rayou, P. (2009). *Les inégalités d'apprentissage : programmes, pratiques et malentendus scolaires*. Paris, France : Presses universitaires de France.

Bautier, E., Rochex, J.-Y. (2007). Apprendre : ces malentendus qui font la différence. In Terrail, J.-P. et Deauviau, J. (Ed.), *Les sociologues et la transmission des savoirs* (p.227-241), Paris, La Dispute.

Bilgot, A., Billy, C., Celi, V., Grau, S., Guille-Biel Winder, C., Laurençot-Sorgius, I., Mangiante C., Petitfour E., Simard, A., Tempier, F., Thomas, C. (2025). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Les outils du formateur*. Tome 3. ARPEME.

Bolon, J. (1994). Comment analyser un jeu mathématique. *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques tome III*. COPIRELEM, 57-60.

Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard A., Tempier, F. (2022). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Les outils du formateur*. Tome 2. ARPEME.

Duflo, C. (1997). *Jouer et Philosopher*. PUF.

Eysseric, P., Simard, A., Winder, C. (2012). Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques. *In Dorier, J.-L., Coutat, S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 324–336).

Guille-Biel Winder, C., Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations – Ressources – Analyses. Les outils du formateur*. Tome 1. ARPEME.

Haye, T. et Bronner, A. (2020). Outils d'analyse pour l'utilisation de jeux visant les apprentissages mathématiques à l'école primaire. *Grand N*, 105, 39-63.

Houdement, C., et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 16/3*, 289-322.

MENESR (2016). *Les mathématiques par les jeux*. Eduscol, Mathématiques, Ressources transversales. Consultée le 16/06/2025, Url : https://eduscol.education.fr/document/17209/download

Peltier, M.-L. (2001). Les jeux mathématiques sont-ils la panacée à la démotivation des élèves ? *Grand N, 67*, 33-40.

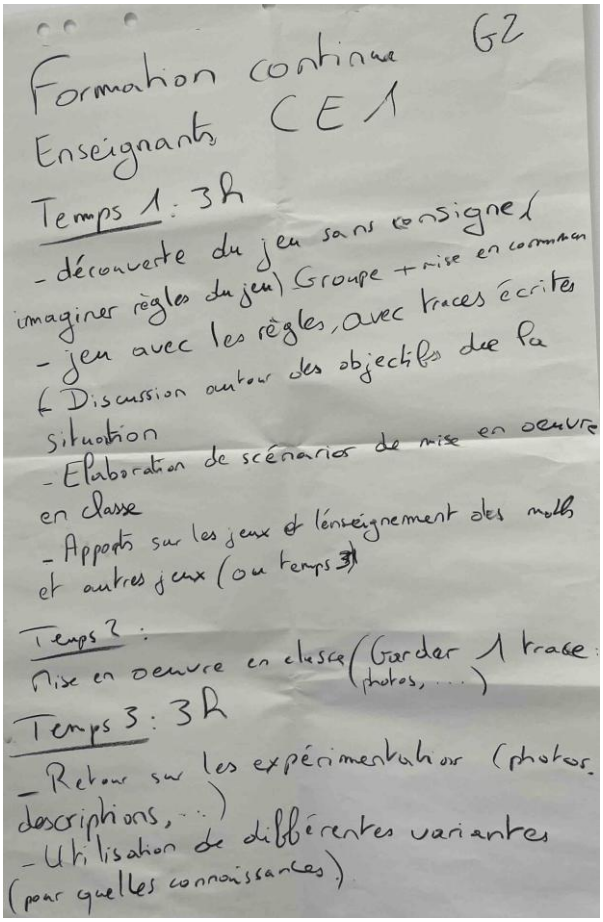
Rodriguez, A. (1993). Dossier Mathématiques : jouez le jeu ! *Journal des Instituteurs, 49-63*.

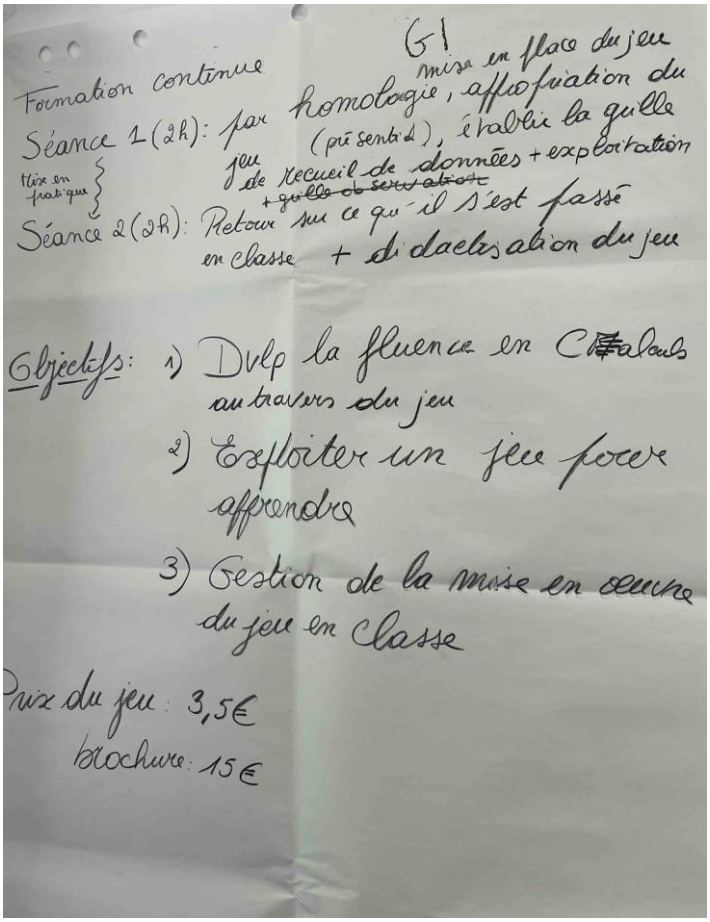
Rodriguez, A. (2010). *Un projet pour associer jeux et apprentissages*. Delagrave.

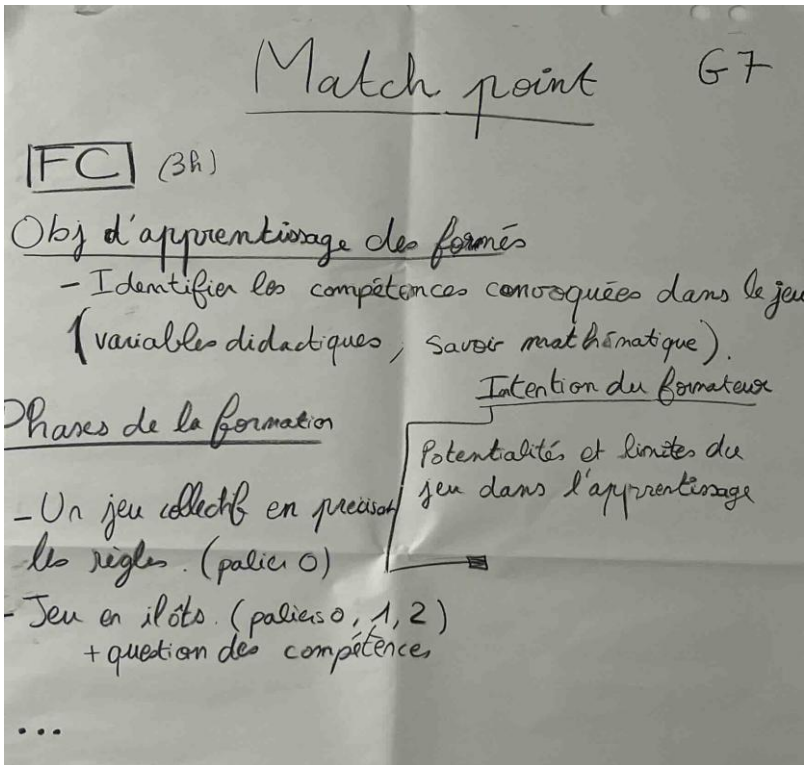
Sitographie

Site du réseau Canopé. Consulté le 16/06/2025, Url : https://www.reseau-canope.fr/apprendre-par-le-jeu/liste-des-jeux.html

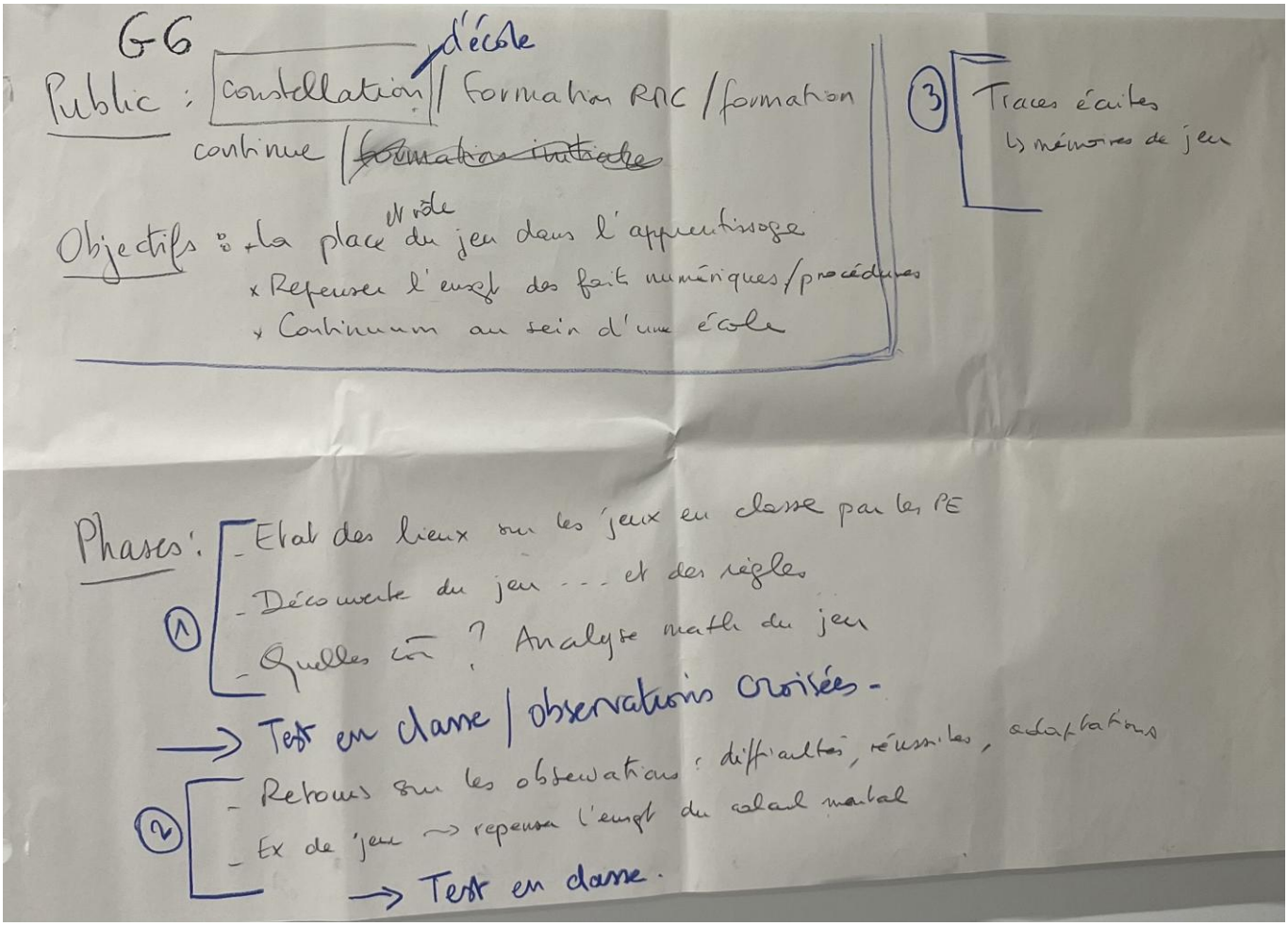
ANNEXE 1 : LES TROIS AFFICHES DES PARTICIPANTS POUR LA FORMATION CONTINUE



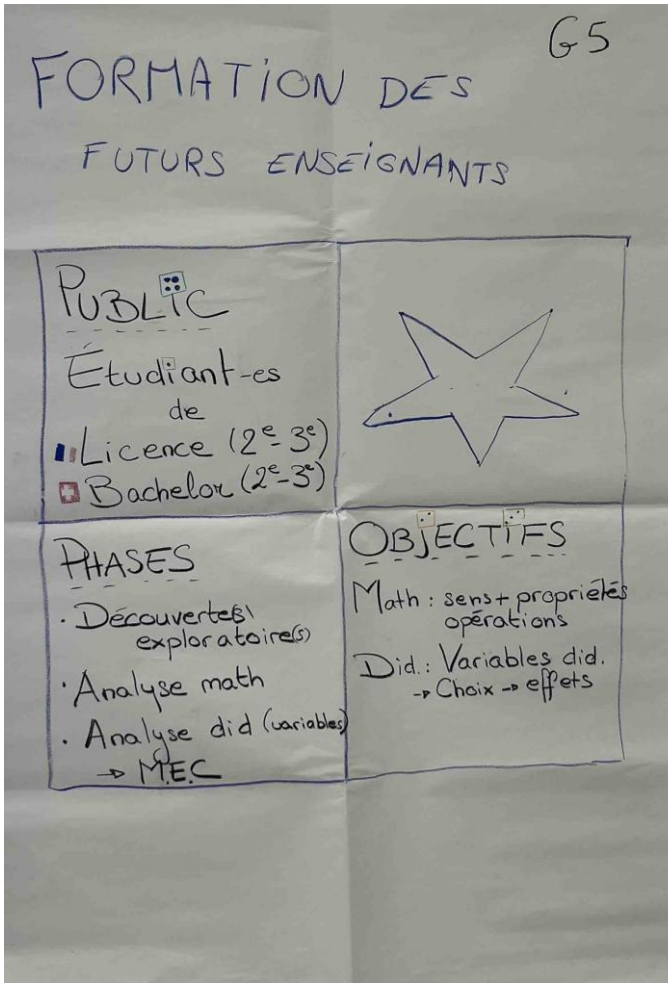


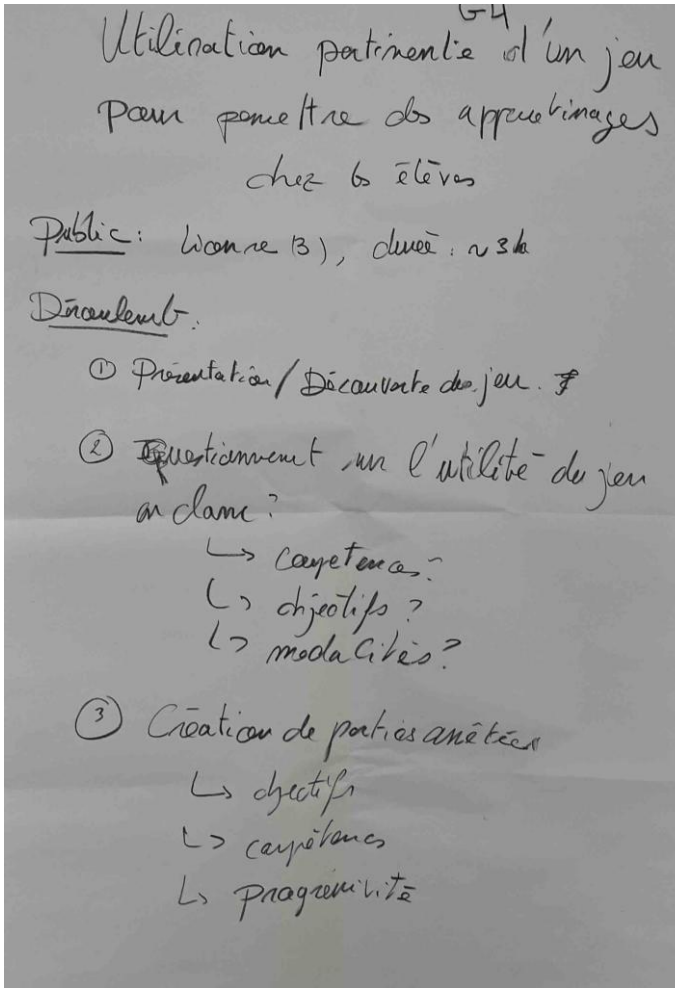


ANNEXE 2 : L'AFFICHE DES PARTICIPANTS POUR LA FORMATION CONTINUE EN CONSTELLATION

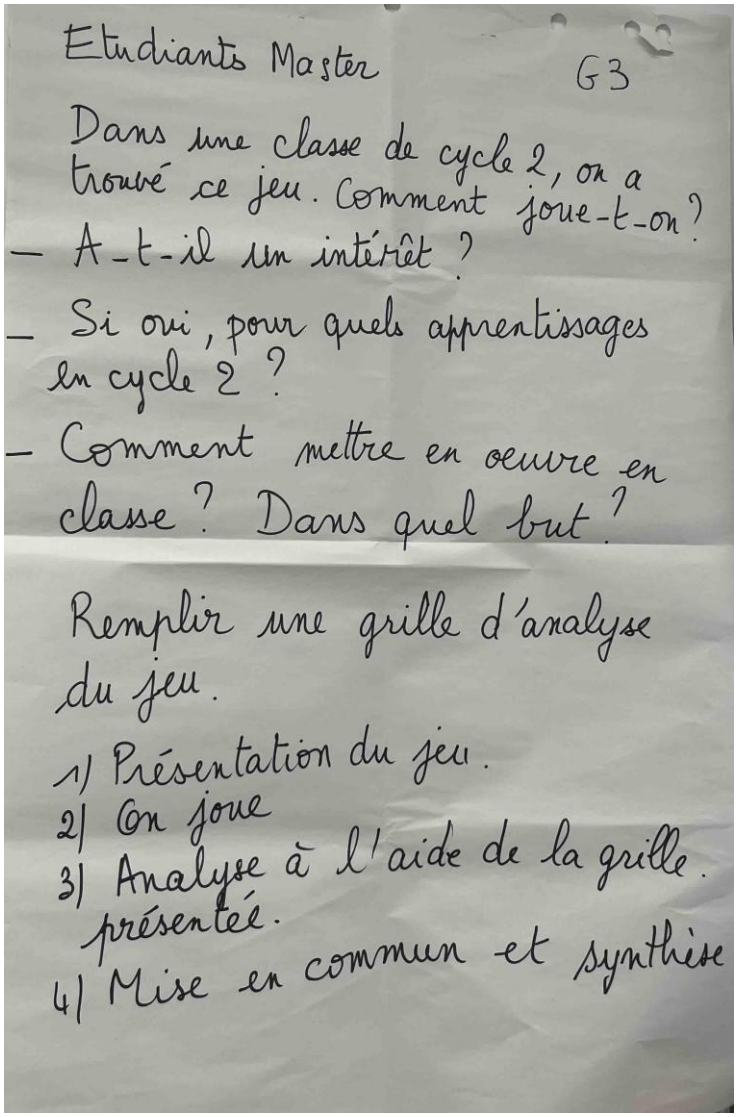


ANNEXE 3 : LES AFFICHES DES PARTICIPANTS POUR LA FORMATION INITIALE NIVEAU LICENCE





ANNEXE 4 : L'AFFICHE DES PARTICIPANTS POUR LA FORMATION INITIALE NIVEAU MASTER


Etudiants Master G3

Dans une classe de cycle 2, on a trouvé ce jeu. Comment joue-t-on?

- A-t-il un intérêt ?
- Si oui, pour quels apprentissages en cycle 2 ?
- Comment mettre en oeuvre en classe ? Dans quel but ?

Remplir une grille d'analyse du jeu.

1) Présentation du jeu.
2) On joue
3) Analyse à l'aide de la grille présentée.
4) Mise en commun et synthèse

LA SITUATION “BANDE UNITÉ”, POUR ALLER DES FRACTIONS AUX NOMBRES DÉCIMAUX AVEC ERMEL

Julien ANGLARD
PE[1], IREM de Strasbourg, école Jean Racine d’Ostwald
julien.anglard@ecole-ostwald.fr

Olivier METTER
PE, IREM de Strasbourg, école Jean Monnet à Sélestat
olivier.metter@ac-strasbourg.fr

Sven SEYFRIED
PE, IREM de Strasbourg, école Aristide Briand à Benfeld
sven.seyfried@ac-strasbourg.fr

Gwen URVOY
PE, IREM de Strasbourg, école Tomi Ungerer à Duttlenheim
gwenola-od.urvoy@ac-strasbourg.fr

Résumé
A la suite de la parution de leur brochure (Anglard et al., 2024), le groupe “Enseigner avec la ressource ERMEL” de l’IREM de Strasbourg anime un atelier pour présenter ses travaux. Celui-ci complète par un autre point de vue, plus ancré sur les pratiques de classe, l’atelier issu des mêmes travaux et présenté à Bonneuil-sur-Marne lors du colloque 2024 (Thomas, 2025).
Après avoir présenté la ressource (ERMEL, 2005, 2021) utilisée par le groupe, l’atelier vise à faire vivre et à analyser la situation “Bande unité” tirée de celle-ci. Ce sera l’occasion d’analyser les productions des participants et de les mettre en perspective avec celles des d’élèves. La discussion sur les remédiations possibles à cette situation permettra de découvrir la publication.
A la suite de la situation “Bande unité”, ERMEL propose de faire évoluer la notion de fraction jusqu’au nombre décimal. Notre travail est de mettre en lien cet apprentissage avec nos propositions d’évolution : dans les institutionnalisations et le langage.

Cet atelier explique comment mettre en œuvre la situation “Bande unité” qui introduit l’enseignement des fractions au CM1 dans l’objectif de pouvoir la "réussir" en classe. Nous savons d’expérience que, malgré tout le soin d’Ermel à détailler l’activité, elle reste difficile à mettre en œuvre, pour des raisons que nous analyserons dans l'atelier. La réussite voulue est double : pour l'enseignant il s'agit de ne pas se retrouver en difficulté avec les modalités de la situation, et pour l'élève de construire une première conception des fractions qui ne constituera pas un obstacle pour la suite. En introduction de l'atelier, nous rappelons ce qu’est la ressource Ermel et décrivons le déroulement de la situation "Bande unité". Ensuite, nous proposons dans un premier temps de vivre la situation avec des contraintes (propres à un public expert) puis de faire une analyse de productions d’élèves en lien avec celles des participants. Nous évoquons alors nos propositions d’aide à la mise en œuvre de la situation, en essayant de répondre au maximum aux difficultés posées par la situation, que ce soit celles que nous avons rencontrées dans notre pratique, ou celles observées par les participants. Enfin, en conclusion, nous nous intéressons entre autres choses au nouveau programme, au changement qu'ils causent dans l'apprentissage des fractions à l'école,

1Professeur des écoles (PE)

et à l'impact qu'ils pourraient avoir sur la situation Bande unité. Cette conclusion amène une discussion avec les participants.

I - ORIGINE ET PRÉSENTATION DE LA RESSOURCE

Dans l'optique d'amener les participants à mieux comprendre la situation "Bande unité", il est important de présenter la ressource Ermel qui la propose et la programmation dans laquelle elle s'inscrit. "Bande unité" n'est en effet pas une situation isolée, elle reprend des modalités de travail et une base didactique identique à d'autres situations proposées par la ressource. Elle s'inscrit donc dans un tout cohérent : une programmation allant de la grande section jusqu'à CM2 et entre donc dans des habitudes implicites prises par des élèves ayant rencontré la ressource régulièrement. Ces habitudes ne correspondent pas à la réalité du milieu scolaire, où les supports mathématiques utilisés par les enseignants sont très variables (Leroy, 2012). Il semble donc nécessaire de connaître les prérequis implicites afin d'être mieux préparé aux difficultés que la situation peut poser.

1 Présentation de ERMEL

Notre groupe travaille avec la ressource Ermel depuis plusieurs années. La situation "Bande unité" a été au cœur de nos échanges et nos recherches. Ce que nous présentons est le fruit de plusieurs mises en œuvre, et ajustements.

1.1 Origine historique

Ermel est un groupe de didacticiens formés à la suite de l'échec de la réforme des mathématiques modernes dans les années 70. Formé en 1985, l'équipe Ermel mène ses recherches sur les premiers apprentissages numériques au sein de l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique). Se revendiquant des courants didactiques qui sont en train d'émerger[2], les travaux du groupe Ermel sont orientés vers la résolution de problèmes. Ainsi, à partir de 1990, les premiers ouvrages du groupe destinés aux enseignants du premier degré sont publiés : "*Apprentissages numériques et résolution de problèmes*", de la GS au CM2.

Aujourd'hui, on retrouve des mallettes et des exemplaires d'Ermel dans la plupart des écoles. Il existe deux éditions principales en circulation : les anciennes, datant de 1998 à 2005, mettent à égalité la partie formation et les situations. L'ouvrage se présente comme un livre A5 en noir et blanc avec une partie théorique sur les fondements didactiques de la partie pratique qui la suit et qui comprend des situations à mettre en œuvre dans la salle de classe. Sur le terrain, nous avons constaté que ces éditions sont parfois boudées par les enseignants, souvent en raison des parties didactiques trop volumineuses et des difficultés de mise en œuvre des situations proposées. A partir de 2021, la version "*15 situations problèmes pour l'apprentissage de la numération et du calcul*" a été publiée. En format A4, colorisée, avec un CD ou des liens vers des ressources imprimables, cette édition cherche à rendre les situations plus facilement lisibles : les parties didactiques ne sont pas détachées des situations mais sont disponibles sous formes d'encarts à la lecture. Elles sont également plus courtes que dans les éditions précédentes. La programmation y est plus claire sous la forme de trois situations par période de classe, s'inscrivant ainsi dans la pratique de classe des enseignants.

La situation que nous présentons est présente dans les deux versions et ne diffère pas de l'une à l'autre.

Lors de l'atelier, les participants, qui viennent de différentes régions de France, connaissent tous Ermel. Les formateurs présents témoignent de sa place importante en tant qu'outil de formation et déplorent son absence dans les pratiques effectives au sein des classes. Ils ont parlé d'une ressource "encouragée",

2 On peut ainsi trouver en introduction de la ressource Ermel une mention directe aux travaux de Guy Brousseau sur la TSD, à ceux d'Yves Chevallard sur les transposition didactique, à Régine Douady sur la dialectique outil/objet, et à cause de Gérard Vergnaud (sur sa théorie des champs conceptuels)

mais "peu utilisée" car elle "fait peur". L'apparence de l'ouvrage des années 90 est mis en avant comme un frein pour les nouveaux enseignants qui préfèrent se tourner vers des ressources moins denses et avec des ressources imprimables directement disponibles. La difficulté des situations est pointée également. Les situations demandent souvent à l'enseignant un temps de préparation conséquent, d'un point de vue matériel et organisationnel dont il ne dispose pas au début de sa carrière. La ressource finit par être utilisée non pas dans son ensemble, mais comme une banque dont on peut sortir certaines situations qui ont pour réputation d'être "solides" et de produire des résultats facilement exploitables par de nouveaux enseignants ("*les fourmillions*", et "*les trombones*" ont ainsi été cités).

Malgré sa faible utilisation sur le terrain, Ermel est toujours vu comme une ressource solide. Les participants saluent la capacité de la ressource à prévoir les productions des élèves et à anticiper les difficultés qu'ils pourront avoir. Enfin, c'est principalement la robustesse des situations qui a été pointée : malgré leur grand âge, certaines des situations sont encore utilisées par les formateurs et les nouveaux enseignants.

L'actualisation au nouveau programme nécessaire, et la version "15 situations problèmes" ont également été évoqués par les personnes présentes. Ces deux éditions ne sont pas mises à jour aussi régulièrement que d'autres manuels.

1.2 Notions didactiques sur lesquelles s'appuie ERMEL

Comme évoqué précédemment, le cadre didactique sur lequel s'appuie la ressource Ermel est dense. On peut analyser les situations proposées avec le prisme de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1984, a). En particulier, Brousseau développe la notion de *contrat didactique,* défini comme l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et de l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Il nomme *situation didactique* un ensemble de dispositions prises par l'enseignant obligeant l'élève à découvrir un nouveau savoir afin de résoudre un problème auquel il fait face. Complétant les apports de Guy Brousseau, Régine Douady est également à citer pour sa dialectique outil-objet (Douady, 1986).

Ermel prend appui sur ce cadre en proposant une majorité de situations didactiques. Les situations proposées sont réfléchies pour amener l'élève à construire un nouveau savoir (situation didactique). Pour que la situation soit une réussite, l'enseignant devra obtenir la dévolution de l'élève sur la situation : celui-ci doit en effet comprendre que la difficulté de la situation et son caractère "insurmontable" est une étape nécessaire à l'élaboration d'un nouveau savoir, tandis que l'enseignant attend de l'élève plusieurs façons de répondre à la situation proposée (contrat didactique). Les nouveaux savoir mathématiques construits à l'issue d'une situation sont réutilisées comme référence lors d'entraînements ultérieurs. Ils sont amenés à devenir des objets mathématiques, intégrés et réutilisables (dialectique outil-objet).

La ressource Ermel propose ses situations en enchaînement. On peut ainsi retrouver des modalités de travail croissantes en difficulté au fur et à mesure des années. Nous reviendrons plus précisément sur la modalité émetteur-récepteur qui est au cœur de la situation "Bande Unité". Les situations s'enchaînent en suivant la programmation d'une période à l'autre, mais aussi d'une année sur l'autre.

De ce fait, des difficultés apparaissent dès lors qu'on isole une situation pour la proposer à des élèves qui n'ont pas vécu les situations antérieures : pour chacun il convient donc de chercher tous les prérequis implicites qu'elle suppose, pour l'élève et l'enseignant. Cela demande une analyse et une réflexion qu'Ermel n'aborde pas toujours puisque la ressource est conçue comme un tout et non pas comme une banque d'exercices, contrairement à l'utilisation qu'elle peut avoir sur le terrain. Sans cette analyse et cette réflexion de la part de l'enseignant, de multiples difficultés risquent d'apparaître. Cela a été notre cas lors de nos premières mises en classe de la situation "Bande Unité".

1.3 La situation "Bande unité"

Cette situation est initialement prévue pour la classe de CM1, en période 3. Mais elle était abordée par les membres du groupe en période 1 ou 2 afin d'être en cohérence avec les programmes de 2016 plaçant l'introduction des fractions le plus tôt possible dans l'année de CM1. Cela a depuis changé, les fractions inférieures à l'unité étant introduite au CE1. Ce changement étant encore récent, nous le traiterons en fin d'article.

Si l'élève a suivi la ressource Ermel pendant toute sa scolarité, il a déjà utilisé les notions de moitiés et de quarts dans les activités de grandeurs et mesures avec *horloges* (avec le quart d'heure et la demi-heure), dans *le jeu des 6 cartes* (un jeu de pioche où selon le signe de la carte que l'on pioche, on en gagne la valeur, ou la moitié de la valeur, ou le quart de la valeur, définie comme la moitié de la moitié, ou le demi du demi) et dans une situation appelée *graduations* sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

La situation relève de la modalité "émetteur-récepteur" : les élèves sont amenés à communiquer entre eux par écrit avec un rôle changeant. Au départ émetteur, l'élève cherche à caractériser la longueur d'un segment et à écrire un message pour que son destinataire retrouve un segment de la même longueur que le sien. Ensuite, il prend le rôle du récepteur. L'élève reçoit un message et doit le comprendre et l'utiliser pour trouver un segment parmi une liste dont la longueur est la même que le segment de l'émetteur du message. Le récepteur a la possibilité de demander plus de précisions, avant de donner sa réponse en nommant le segment qu'il pense être le bon. Finalement, un dernier échange a lieu où on vérifie si son partenaire a trouvé la bonne réponse. Pour réussir la tâche, les élèves disposent d'une bande de papier dont la longueur est identique pour tous les élèves de la classe.

Enfin, cette situation se conclut par une mise en commun, où l'enseignant met en lumière quelques vécus et techniques de la classe. La nécessité d'un nouveau concept apparaît alors, celui-ci permettant de nommer une longueur plus petite que l'unité, ce que l'enseignant institutionnalise par la notion de fraction de l'unité.

2 Mise en situation du groupe : Les consignes et les contraintes

Les participants étant formateurs ou enseignants, nous avons légèrement adapté la situation afin de pouvoir intéresser tout le monde et permettre aux membres qui la connaissaient de la revivre autrement. Placé en îlots de 2 à 4 membres, chaque groupe ainsi composé dispose de 2 feuilles, une première où figure un segment d'une longueur variable, et une seconde où les participants peuvent écrire un message.

Les consignes pour les participants reprennent d'abord les même consignes données par Ermel :

> *« Sur la feuille n°2, vous devez écrire un message qui permettra à ceux qui le recevront de trouver sur la feuille n°3* (distribuée par après) *le segment qui a la même longueur que le vôtre. Vous ne pouvez pas mesurer votre segment avec le double décimètre mais vous pouvez utiliser la bande comme unité de longueur et l'appeler bande unité »* (Apprentissage numériques et résolution de problèmes, Ermel 2005, p. 407*)*

Nous avons rajouté des contraintes spécifiques à chaque groupe. Les contraintes ont été choisies pour révéler certaines difficultés que pouvaient avoir les élèves. Elles permettent également de nourrir la partie discussion qui suit la fin de la situation :

> Groupe 1 : Vous ne pouvez utiliser que des lettres (écrire en langue naturelle). [Les participants n'ont donc pas droit à l'écriture chiffrée]
>
> Groupe 2 : Vous ne pouvez utiliser que le terme "moitié" pour désigner une longueur inférieure à l'unité. [Les participants ne disposent pas de leur vocabulaire expert pour exprimer les fractions]
>
> Groupe 3 : Vous ne pouvez pas utiliser l'écriture fractionnaire.
>
> Groupe 4 : Vous ne pouvez écrire que des chiffres.

3 Analyse des productions

3.1 Productions des participants

Les participants, rompus à l'exercice, n'ont pas attendu une mise en commun pour commencer à échanger entre eux. Les contraintes qui leur ont été proposées ont suscité des questionnements et analyses.

- La contrainte du groupe 4 demandant de n'écrire que des chiffres a amené l'équipe à l'écriture d'un nombre décimal. Il est arrivé dans d'autres formations que ce soit sous la forme d'une écriture fractionnaire que le nombre soit écrit, ou encore qu'une écriture inventée par le participant émerge.
- La limitation au terme *moitié* pour définir une longueur inférieure à l'unité a amené l'équipe qui avait cette contrainte à rédiger un message plus long, puisque celui-ci disposait d'un segment dont la longueur nécessitait l'utilisation du huitième rédigé sur leur message comme "la moitié de la moitié de la moitié". On a ainsi eu plusieurs lignes d'écriture pour cette deuxième contrainte, contrastant avec le groupe disposant de la quatrième contrainte qui ne disposait que de trois signes (deux chiffres et une virgule). La vitesse d'exécution entre ces deux groupes n'a pas été la même. Pour terminer sa tâche, le groupe de la contrainte 2 a mis 10 minutes de plus que celui de la contrainte 4.
- Les autres contraintes, celle d'écrire en langue naturelle comme celle de ne pas utiliser l'écriture fractionnaire n'ont pas posé de difficultés aux participants, mais sont utiles pour expliquer notre processus d'institutionnalisation.

L'activité a donné de nombreux échanges sur les difficultés que pouvaient poser cette situation au sein de la classe. Elles étaient de deux natures, à propos de l'enseignant d'une part, et des élèves de l'autre.

3.2 Les difficultés

Pour l'enseignant, les difficultés évoquées sont :

- Sa mise en retrait afin de ne pas influencer les élèves dans l'écriture du message. Mentionné dans les parties didactiques d'Ermel, cet aspect important des situations didactiques amène les enseignants à laisser les élèves évoluer dans la situation sans intervenir. C'est un geste professionnel qui n'est pas utilisé par l'unanimité des enseignants. Il est par exemple contraire à la "pratique guidée", deuxième étape de la pédagogie explicite.
- La difficulté à gérer le groupe classe dans les différences de rythmes qu'il peut y avoir entre les groupes. Difficulté inhérente à tout enseignant, elle est ici exacerbée par le rythme très différent qu'il peut y avoir entre deux groupes. On peut prendre en exemple les deux groupes respectivement de la contrainte 1 et 4. Il faut donc que l'enseignant se prépare à cette différence de rythme en amont de la situation.
- La gestion de l'hétérogénéité des groupes qui peut amener à la passivité de certains élèves. Dans la situation, tous les élèves n'ont pas la même tâche, certaines longueurs de segments sont effectivement plus difficiles à mesurer que d'autres. Il existe des longueurs de segment n'utilisant que le demi, tandis que d'autres nécessitent le huitième (et le demi et le quart selon la méthode). De même que pour le point précédent, un travail de préparation supplémentaire est nécessaire pour gérer une différenciation dans le choix de la longueur des segments et de la composition des groupes.

- La connaissance précise de la situation afin que l'enseignant sache quel est son objectif et comment le faire émerger chez les élèves. L'objectif de la situation n'apparaissant pas forcément clairement en raison des nombreuses tâches que les élèves doivent mettre en place, la situation demande une lecture attentive de l'enseignant. Les multiples phases, la longueur de la situation et ses nombreux points de vigilance peuvent amener l'enseignant à perdre l'objectif premier de la situation : l'introduction des fractions.
- La gestion de la mise en commun. Contrairement à d'autres moments de classe où elle conclut une phase où les élèves ont eu le même vécu, il faut ici réussir à lui donner un rythme alors que toutes les communications entre les élèves ont été différentes. Il faut également repérer et trier ce qui pourrait être intéressant à utiliser pour les élèves avec ce qui ne le serait pas pendant la situation.

Toutes ces compétences sont des gestes professionnels à construire. Les formateurs présents pouvaient témoigner du temps nécessaire afin d'y parvenir.

Pour l'élève, les participants ont pu se rendre compte de plusieurs difficultés :

- Le fait de penser à plier la bande de papier. Le matériel de le situation est donné par l'enseignant, il est parfois sacralisé et certains élèves n'osent pas l'abîmer. Ermel anticipe par une situation antérieure (graduations), qui demande le même geste de pliage pour trouver la moitié de la longueur de nombres entiers pairs. Malgré cela, le geste ne survient pas spontanément dans tous les groupes.
- Caractériser la longueur du "petit bout" qui reste. Cette expression est trouvable chaque année dans les productions des élèves. Il s'agit du cœur de l'activité. La définition de ce bout est l'objectif de la séance. Cependant, cette longueur résiduelle peut être parfois due à des imprécisions dans le pliage : même si l'élève a la bonne technique, il se retrouve parfois avec une bande pliée qui ne tombe pas "juste" ce qui peut générer de la frustration.
- S'exprimer en langue naturelle à l'écrit. Dans ses parties didactiques, Ermel insiste sur l'écrit "comme moyen de communication avec ses pairs". Mais l'écrit revêt un autre sens pour certains élèves, terrain d'échec et de frustration. La situation s'inscrit donc dans une démarche plus globale à la séance de mathématiques. L'élève doit pouvoir s'autoriser à écrire, même mal, toujours dans le but d'être compris. Dans le cas où il est impossible pour certains élèves, le travail par groupe, aussi défendu par Ermel, permet le partage des compétences.

Ces difficultés énumérées peuvent être retrouvées dans les productions faites par les élèves que nous avons distribuées.

3.3 Productions des élèves

Il s'agit maintenant pour les participants de classer un corpus de productions d'élèves choisies par nos soins (Annexe 1) et de justifier le classement qu'ils en ont fait. Nous avons essayé de choisir à la fois des productions représentatives de ce qu'on trouve systématiquement lorsque nous faisons vivre la situation aux élèves, et en même temps d'y inclure des faits rares, ou des échanges particulièrement intéressants qui ont pu avoir lieu (plusieurs allers-retours de messages entre élèves). Toutes les productions viennent de nos salles de classes. Les participants n'avaient pas accès à la longueur du segment associée à chaque production (il s'agissait des mêmes longueurs que celles de l'atelier) et ont donc dû faire appel à la déduction pour la connaître. Vous retrouverez le classement fait par les groupes dans le tableau 1, ainsi que le nom qu'ils ont donné à chaque catégorie.

<table>
<tr><th></th><th>Groupe 1</th><th>Groupe 2</th><th>Groupe 3</th><th>Groupe 4</th><th>Notre proposition</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Classements</td><td>Évasif/à l'à peu près</td><td>Utilisation du vocabulaire des fractions</td><td>Message manquant de précision</td><td>Message précis sans ambiguïté</td><td>Erreurs de mesures</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mesure avec l'étalon n'est non précise</td><td rowspan="2">Utilisation du mot "petit bout" pour définir ce qui n'est pas entier</td><td rowspan="3">Message faux</td><td rowspan="2">Langage manquant de précision</td><td>Langage mathématique</td></tr>
<tr><td>Présence du "petit bout"</td></tr>
<tr><td>Utilisation du mot moitié</td><td rowspan="3">Descriptive de la tâche imprécise</td><td>Utilisation du fractionnement mais message compliqué</td><td>Langage incompréhensible</td></tr>
<tr><td>Décomposition avec unités de fractions</td><td rowspan="2">Message correct</td><td rowspan="2">Message ne permettant pas d'identifier le segment</td><td>Hors sujet</td></tr>
<tr><td>Avec unité de fraction "l'unité entière"</td><td>Autres</td></tr>
</table>

Tableau 1. Propositions de classements des productions des élèves par les participants

Il a été observé que parfois, les messages étaient justes mais l'interprétation qu'en faisait le récepteur n'était pas correcte. Un participant a souhaité soumettre son message à une intelligence artificielle avec laquelle il travaillait afin de prouver selon lui le côté interprétable de ce qu'avaient pu écrire des élèves. Comme il s'agit pour eux des premiers écrits cherchant à caractériser une longueur inférieure à l'unité, ils sont encore hésitants dans le langage, et inventent eux-mêmes des expressions abandonnées plus tard. Ces écrits sont temporaires et n'ont pour but ni de communiquer avec des modèles de langage, ni de les alimenter.

II - NOS PROPOSITIONS D'AIDE À LA MISE EN ŒUVRE DE LA SITUATION

Après avoir découvert les difficultés que pouvaient avoir les élèves et les enseignants, il s'agit maintenant d'y répondre. Nous commençons par celles des élèves. Pour les surmonter, il convient de s'interroger sur leurs origines. La situation se situant dans un enchaînement, il nous faut donc étudier les prérequis sur lesquelles elle repose et proposer des situations antérieures permettant de les acquérir.

1 Les prérequis

La colonne 1 du tableau 2, que nous avons présenté, expose les prérequis de la situation que nous avons identifiés lors de nos premières expérimentations, relevant d'autres années ou des mois précédents. Les colonnes suivantes listent les activités Ermel permettant de les travailler.

Prérequis	CP	CE1	CE2	CM1 *(période 1 et 2)*
Rôle de l'écrit (outil de travail)	P3 Le jeu du banquier-Échange 10 contre 1 P4 Carrelages (groupement de 10)	P1 Les billes P2 Le panneau Le zoo, Julie au centre commercial, P4 les factures	P2 production libre d'énoncés	P2 Les bandes colorées
Situation émetteur récepteur (modalité)	P1 Les mosaïques P5 Les carrelages (algorithme addition)	P2 Le panneau P4 Les factures	P2 Les règles bizarres P4 Mise bout à bout	
Activité de mesures de longueurs (avec étalon/longueur non conventionnelle)		P1 Les billes P3 le couloir	P2 Activités environnantes (report d'unité) P2 Les règles bizarres & La règle effacée P4 Mise bout à bout	P2 Les bandes colorées
Le pliage / la moitié	P4 : Jeu des 5 cartes	P3 Loto des doubles	P3 Les masses marquées P5 Le jeu des six cartes	P1 Graduations P2 Des rectangles qui ne manquent pas d'air. P1 Le jeu des 6 cartes

Tableau 2. La réponse aux prérequis par l'analyse de la programmation d'Ermel

Il est évidemment impossible de refaire toutes les situations antérieures à Bande unité en début de CM1 mais analyser les situations qui lui répondent est important. Cela nous permet de nous rendre compte de tout ce dont les élèves ne disposeront pas si on leur fait vivre l'activité Bande unité sans avoir suivi la progression d'ERMEL. Nous avons donc cherché des situations qui reprenaient le plus de prérequis possibles, afin de réduire les difficultés.

2 Nos propositions

2.1 Fruits et légumes

Pour remédier aux difficultés de mise en œuvre de la situation émetteur-récepteur, nous avons imaginé de faire travailler les élèves sur des fruits et légumes à faire identifier par un autre groupe. Pour cela, les élèves utilisent les mêmes supports que ceux qui sont utilisés lors des échanges ayant pour objectif de faire identifier un segment.

Changer l'objet d'étude en s'intéressant à des aliments du quotidien plutôt qu'à des segments qui sont utilisés dans un second temps permet aux élèves de travailler sur des objets réels et connus, tout en leur permettant de prendre conscience de la nécessité de s'intéresser aux caractéristiques spécifiques des objets afin de permettre aux autres d'identifier sans ambiguïté (Figure 1).

groupe 1

citron	framboise	petit pois	carotte	myrtille
pamplemousse	mandarine	pêche	courgette	mûre
banane	concombre	haricot	tomate	cerise

groupe 1 doit faire découvrir au groupe 2 :
a) cerise
b) banane
c) haricot

Figure 1: Fruits et légumes

Ici, pour faire découvrir le mot "cerise", l'indice du type, de la forme, de la taille, ou de la couleur ne suffit pas. Il faut donner plusieurs indices précis au risque de voir le récepteur échouer à la reconnaissance du bon fruit/légume.

La modalité « émetteur/récepteur » et le rôle de l'écrit sont ici exploités une première fois avec succès.

2.2 Les rectangles

« Les rectangles » est une autre situation émetteur-récepteur que nous proposons. Les modalités sont les mêmes que pour Bande unité, et les feuilles dont disposent les élèves suivent le même principe : une feuille avec un rectangle à caractériser, une autre pour écrire un message et une dernière où se trouvent tous les rectangles distribués à la classe. La différence réside dans la bande unité et son rapport avec la longueur et largeur des rectangles : celles-ci sont toujours des multiples entiers de la longueur de la bande et ne nécessitent donc pas de pliage.

En proposant une situation dont l'objectif final n'est pas le même que "Bande unité", mais dont les modalités sont similaires, on prépare un terrain connu pour les élèves.

Notons que cette situation relève du cycle 2.

2.3 Multiples et sous-multiples

Il s'agit de feuilles de calculs entraînant les élèves à utiliser les doubles, les moitiés, les quadruples ou les quarts, dans le domaine des nombres entiers. Il s'agit de se familiariser avec le langage et d'être capable de le mobiliser facilement.

Ces différentes propositions sont entrées dans les habitudes des membres du groupe, et sont des étapes importantes pour lever les futures difficultés posées par "Bande unité". Nous pouvons, à notre petite échelle, témoigner de leur efficacité.

Toutes ces activités sont proposées en détail sur le site de l'IREM de Strasbourg, à la page dédiée à notre brochure.

III- LES SAVOIRS EN JEU ET QUESTIONNEMENT DES PARTICIPANTS

1 Les savoirs en jeu

1.1 Des savoirs inhérents aux modalités de la situation

Le fait pour les élèves de ne pouvoir échanger dans un premier temps qu'uniquement par écrit entraîne des interactions souvent riches. Le premier échange peut être un échec : l'équipe ayant reçu le message n'a pas réussi à identifier correctement le segment, ou au contraire l'a identifié alors que les indices n'auraient pas dû le permettre. Cet échec n'est que temporaire. Dans un cas, la situation le corrige : lorsque les indices ne sont pas assez précis, et que la feuille revient au groupe qui l'avait envoyée afin de l'éditer, la précision de la caractérisation de la longueur se fait sentir. Les élèves s'engagent dans de nouvelles stratégies, ou se rendent compte au minimum du manque d'un outil. Dans l'autre cas, c'est la discussion qui va suivre, et la mise en commun qui sont essentielles. L'erreur qui a été faite n'a pas été régulée par la situation et a donc besoin de la lumière des autres élèves ou de l'enseignant pour se rendre compte de son inefficacité. Heureusement, les enfants sont rarement dans cet unique cas : ils sont tour à tour émetteurs et récepteurs, et il n'est pas encore arrivé qu'ils aient réussi "par erreur" dans les deux positions.

Pendant la situation, le rôle de l'écrit est majeur. L'écriture tient une place importante à l'école. Réussir à produire un message écrit compréhensible pour un camarade est un exercice dépassant le cadre de la séance de mathématiques. La formulation du message oblige un effort de la pensée et la production d'un écrit non modifiable une fois envoyé.

Lors de l'atelier, les participants, une fois les messages envoyés, ont longuement discuté de leurs objectifs en l'écrivant, et du processus par lequel ils étaient passés pour y parvenir. Nous pouvons faire le même constat dans les classes, où les échanges entre les élèves sont souvent assez riches lorsque la mise en commun se fait.

1.2 Des savoirs spécifiques aux mathématiques et leur institutionnalisation

A la suite de la séance, nous proposons une succession d'institutionnalisations pour suivre les apprentissages faits par les élèves.

Brousseau (1984, b) la définit ainsi : « l'institutionnalisation produit la reconnaissance du savoir comme un élément échangeable entre élèves. Le savoir doit donc être extrait du contexte dans lequel il est apparu pour devenir autonome ». Une institutionnalisation est toujours temporaire et amenée à évoluer vers une future autre.

1. D'abord les fractions unitaires en langue "naturelle" : un demi, un quart, un huitième. On retrouve ici la contrainte n°1 et 2 à laquelle nous avions soumis un groupe. Nous pensons que la nouveauté que représente les fractions ne peut pas être abordée rapidement sans que le langage oral ait déjà été maîtrisé. C'est une étape nécessaire, même si cela demande plus de temps dans l'écriture (voir Tableau 1 : productions des participants).

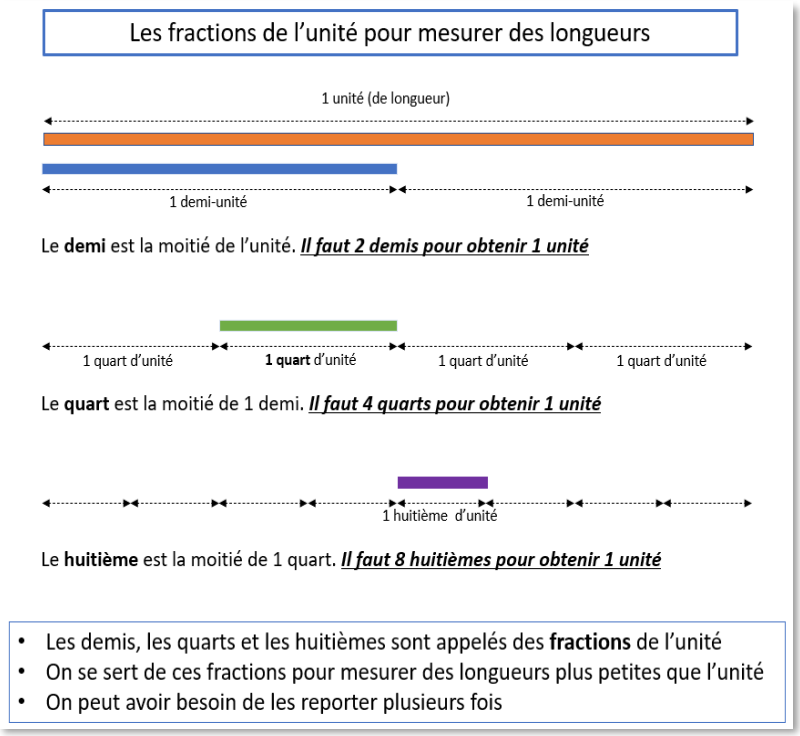


Figure 2: Institutionnalisation n°1.1 : les fractions de l'unité

2. Utilisation de l'écriture symbolique pour les fractions unitaires seulement, donc avec un numérateur égal à 1 pour l'instant.

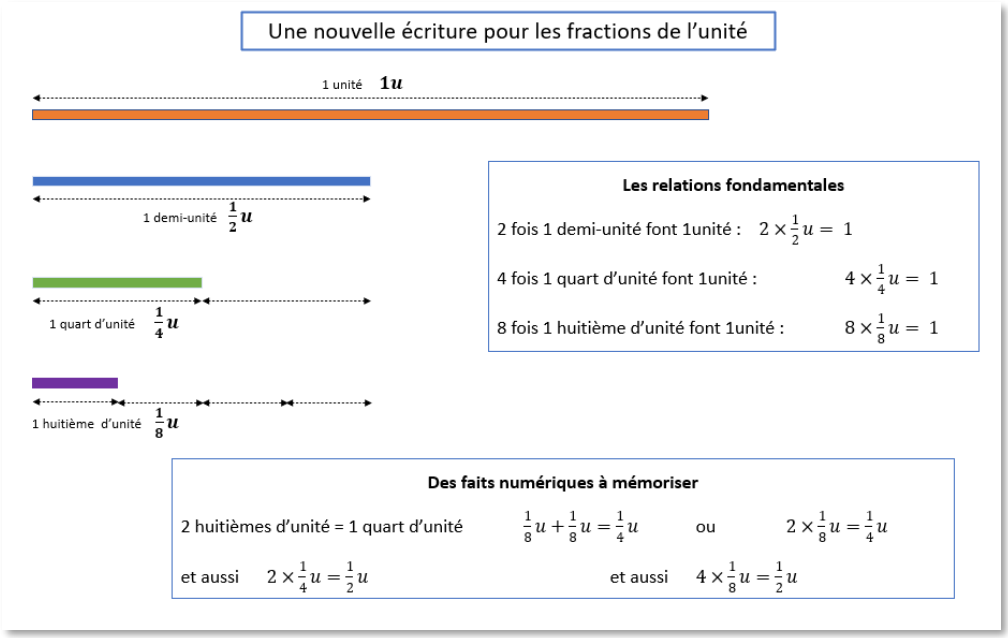


Figure 3: Institutionnalisation n°1.2 : une nouvelle écriture symbolique pour les fractions de l'unité

3. Les multiples des fractions de l'unité sont ensuite introduits : 3 quarts comme 3 fois un quart
4. Puis on étend enfin l'écriture fractionnaire à toutes les fractions
5. On abandonne enfin la mention de l'unité, qui l'accompagnait auparavant, lors des activités décontextualisées des longueurs.

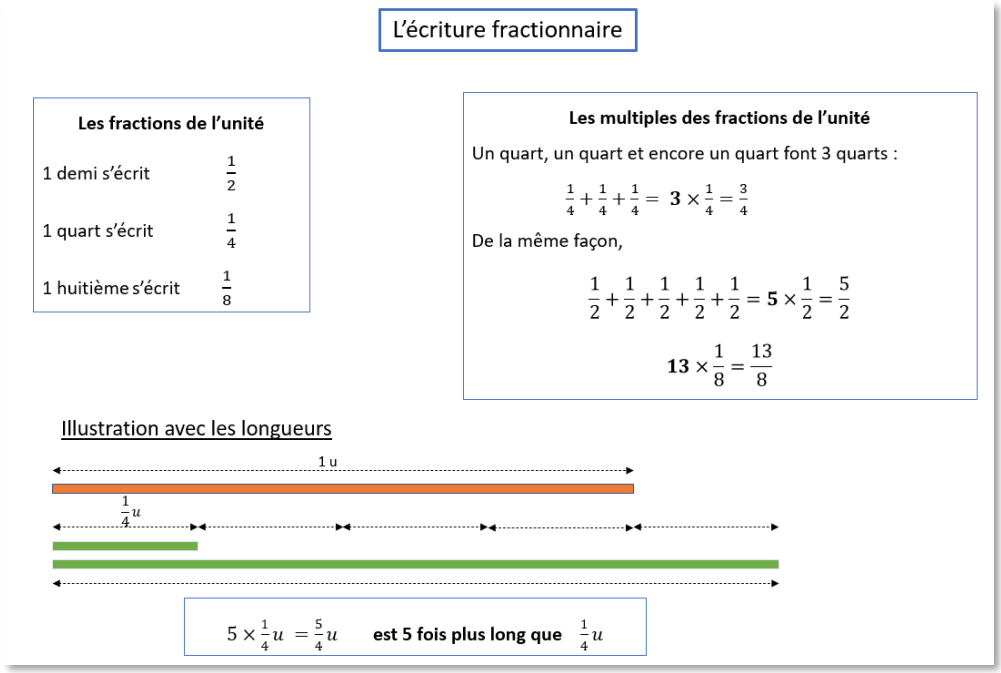


Figure 4: Institutionnalisation n°2 - L'écriture fractionnaire

2 Les questionnements des participants

Nos propositions d'institutionnalisation ont soulevé des questions.

Leur temporalité pour commencer. Quand est-ce qu'on doit passer d'une institutionnalisation à l'autre ? Nous pensons que la première institutionnalisation (Figure 2) doit se borner à la première phase de la

situation Bande unité[3] (en affichage par exemple). A l'écrit, son coût est trop important pour les élèves. Elle permet cependant de faire naître un besoin : celui d'un outil langagier plus court à écrire que la langue "naturelle". C'est pourquoi elle est transitionnelle. Ces institutionnalisations s'accompagnent d'un langage oral de la part de l'enseignant et des élèves. On se réfère toujours à l'unité de longueur, tant que nous sommes dans ce contexte initial. Et, au début, "trois quarts d'unité" s'écrit "3 x $\frac{1}{4}$ u". La dernière institutionnalisation (Figure 4) vient quant à elle clôturer le travail fait.

Un participant s'est interrogé sur la disparition de l'unité principale *u* (Figure 3), et à partir de quand on peut considérer les fractions comme un objet mathématique à part entière, décontextualisé de la situation vécue.

Nous pensons que ce détachement, que ce soit de l'unité ou de la situation servant de contexte, se fait au fur et à mesure et ne nécessite pas forcément d'être l'objet d'une séance spécifique avec les élèves. Ce n'est pas la première fois qu'ils voient l'unité disparaître : c'est déjà le cas en maternelle avec l'apparition de la numération. Les nombres, au début contextualisés et complétés d'un mot d'objet unité (six voitures par exemple), finissent par se passer du mot d'objet sans que cela ait été formulé explicitement.

Dans le cas des fractions, commencer par présenter les fractions unitaires va dans ce sens. Notre but étant de définir la fraction unitaire comme un nombre qui répété n fois (n étant son dénominateur) donne une unité de référence. Cette fraction unitaire joue le rôle d'une nouvelle unité de mesure, relative à l'unité de référence. Il n'y a pas de difficulté ensuite à mesurer avec cette unité : 1 quart, 2 quarts, 3 quarts, 5 quarts, etc. La difficulté réside dans l'écriture fractionnaire $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ … qui montre « quatre » plutôt que « quarts ». D'où l'importance de travailler le langage avant d'introduire cette écriture.

Les nouveaux programmes, et le grand changement qu'ils amènent dans l'enseignement des fractions à l'école primaire ont également beaucoup été discutés. En lien bien sûr avec notre travail dans un premier temps : la situation Bande-Unité est-elle encore possible comme introduction aux fractions alors que celles-ci sont désormais introduites en CE1 ? Elle est d'abord vue comme « fraction d'un tout », et n'est pas le même objet mathématique de la situation vue lors de l'atelier. Cependant, dès le CE2, les fractions de l'unité sont introduites dans un contexte de mesure de longueur, et nous retrouvons notre activité, même s'il est mentionné que les fractions utilisées doivent rester inférieures à 1 avant le CM1. Nous pensons que l'activité « Bande unité » est compatible avec les programmes du CE2, et nous pouvons peut-être même nous réjouir que le langage mathématique concernant les fractions arrive plus tôt à l'école : cela pourrait permettre aux élèves de mieux réussir à s'exprimer lors de la situation.

Une crainte est cependant demeurée commune aux participants et à notre groupe. La difficulté que revêt l'enseignement des fractions ne saurait être enlevée par un simple ajustement programmatique. C'est une notion mathématique difficile, tant pour les élèves que les enseignants. Si les nouveaux programmes ne s'accompagnent pas d'une formation des enseignants, il est à craindre que cela engendre des difficultés, plus ou moins autant que cela pourrait en résoudre.

En particulier, la première question qui se pose est celle de la transition entre les fractions d'un tout du CE1 et les fractions de l'unité du CE2.

La base didactique sur laquelle s'appuie la situation, et la richesse qu'elle fait naître dans la salle de classe lui permet d'après nous de toujours avoir sa place dans l'apprentissage. Nous observerons les évolutions des élèves dans nos classes, et cela alimentera les futures discussions que nous aurons la joie d'avoir.

3 Lors de l'atelier, nous n'avons pas eu le temps de développer la suite de la situation qui comprend plusieurs phase. La première phase correspond à ce que nous avons fait vivre aux participants. Nous n'avons pas non plus évoqué la suite suite de la situation : droite graduée 1 et droite graduée 2, qui visent à découvrir les nombres décimaux par l'utilisation des fractions.

IV- BIBLIOGRAPHIE

Anglard, J., Kieffer, J., Metter, O., Seyfried, S., Urvoy, G. et Thomas, C. (2024). Introduire les fractions à l'école primaire, ou comment réussir en classe la situation Bande unité de la ressource ERMEL. IREM de Strasbourg, S. 201.

Brousseau G**.** (1984, a). *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.* IMAG Grenoble En ligne : https://ardm.eu/guy-brousseau/guy-brousseau.com/2332/le-role-central-du-contrat-didactique-dans-l'analyse-et-la-construction-des-situations-1984/index.html

Brousseau G. **(**1984, b). *Le rôle du maître et l'institutionnalisation*, en ligne : https://ardm.eu/guy-brousseau/guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l'institutionnalisation-1984/index.html

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-31.

ERMEL (2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes. CM1 Cycle 3. Paris : Hatier.

ERMEL (2021). Les essentielles CM1. 15 SITUATIONS pour l'apprentissage de la numération et du calcul. Hatier.

LEROY M. (2012), Rapport n°2012-036 (2012). Les manuels scolaires : situation et perspectives. Inspection générale de l'éducation nationale.

Thomas, C. (2025). Introduire les fractions à l'école primaire, ou comment réussir en classe la situation Bande Unité de la ressource ERMEL. *Actes du 50ème colloque international de la COPIRELEM*. Bonneuil-sur-Marne, juin 2024

ANNEXE 1 PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

Prénom de l'émetteur : Gina, Nathan 2, Gaël et Nathan — Feuille n°2

Message : Le segment a comme longueur 2 bande d'unité et 1 tiers.

Prénom du récepteur : Charlie Léon, Nina, Emilie

Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques Nous avons trouvé votre segment : c'est le segment : (4)

Prénom de l'émetteur : Timéo, Lucas H, Zoé — Feuille n°2

Message : Notre segment fait 2 fois la bande unité plus un demi.

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : leur segment est le 2

Remarques vous auriez plus préciser et donc on a mieux combrie leurs indisent.

Prénom de l'émetteur : Emilie, Nina & Léon Charlie — Feuille n°2

Message : Vous pliez en quatre fois la bande unité et vous le mesurez 16 fois.

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : Nous pensons que c'est le 6.

Remarques On a eu du mal à comprendre.

Prénom(s) émetteur(s) : Némie Emy Inkender — feuille n°2

Message pour identifier le segment : deux bend édemi c'est long

Prénom(s) récepteur(s) : Jade Mathilde Morashin

Numéro du segment qu'il fallait identifier : 1

Remarques à propos du message : sa fait pas pas dans édemi sa fait mois de 1 édemi.

Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : Walid

Message : Mon feuil à le double de la bonde papier et a la fin j'ai le moitier de la bonde papier. Et toi Valentin? Moi j'ai eu et le

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 5

Remarques : écris mieux on dit mes feuille, bonde de papier, j'ai la moitier, bonde, c'est le 5ème segement. tour ne la pas trouver

Prénom de l'émetteur :

Message :

Tu commence a du point C avec la bonde de papier. après tu peux écrire le restant du segment dans ta bonde. Sur le segment tu fais ce que je t'ai dis.

Prénom du récepteur : Walid

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message :

Remarques : Tu a pas écrit comment ton segment a trouver écri plus préci !

Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : Tasnime

Message : Pour trouver mon segment plit ton papier et mesure trois fois un petit bout ma dépasse. Le bout de segment et de peu du segment

Prénom du récepteur : Yanel

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 1X

Remarques : Est-ce que c'est le bout de la feuille ou du segment Je pense que c'est le segment 3X

Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : Francesca

Message : Non le segment 2 est trop grand mon trait ne fait pas de bonde c'est pas ce le segment 3.

1 mon trait est plus grande que la bonde

2 mon trait fait 7 quart de la bonde + le quart du quart la moitié 4 fois

3 mon trait fait une bandelette, une moitié et un quart

Prénom du récepteur : Nellya

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message :

Remarques : Est-ce que tu parle de la deuxième Est-ce que tu parle du segment 2 ? Le mien le 1 ? bravo

MOTIFS À L'ÉCOLE PRIMAIRE À TRAVERS L'ACTION « 4 JOURS, 4 DÉFIS » DE LA MISSION MATHÉMATIQUES 67

Nathalie BOGARD
CPC- RMC, Académie de Strasbourg
nathalie.bogard@ac-strasbourg.fr

Hélène CHILLES-BRIX
Formatrice et enseignante 2nd degré, Académie de Strasbourg
Helene.Chilles@ac-strasbourg.fr

Stéphanie DENIZOT
CPD Mathématiques, DSDEN 67, Académie de Strasbourg
stephanie.denizot@ac-strasbourg.fr

Emmanuelle LECOINDRE-KIM
PE-RMC, Académie de Strasbourg
emmanuelle.lecoindre-kim@ac-strasbourg.fr

Résumé
Dans le cadre de la Semaine des Mathématiques, la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 (Bas-Rhin) conçoit chaque année des défis mathématiques à destination des classes du cycle 1 au cycle 3. Outre les supports élèves, des documents pédagogiques conçus par les formateurs sont mis à disposition comme des ressources pouvant contribuer à la formation et à l'accompagnement des enseignants.
Cet atelier permet de découvrir cette action, de sa logique de conception jusqu'à sa mise en œuvre en classe.
Lors de temps en groupe, un « focus » est fait sur les défis « motifs » (aussi appelés « patterns »), permettant une mise en réflexion des participants concernant les mises en œuvre possibles des motifs du cycle 1 au cycle 3. Le tout est étayé d'apports didactiques et pédagogiques.

I - INTRODUCTION

La Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 est un groupe pluri-catégoriel (composé de formateurs du 1er degré, du 2nd degré et de formateurs de l'INSPE) dont les missions principales sont la formation mais également la production de ressources à destination des enseignants et des formateurs.
Depuis 2011, à l'occasion de la Semaine des mathématiques, la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 conçoit chaque année une série de défis pour l'ensemble des écoles du département du Bas-Rhin. Cette action est intitulée « 4 jours, 4 défis » : un défi est proposé aux élèves chaque jour de classe de la semaine des mathématiques.
Ces dernières années, la veille pédagogique effectuée par la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 nous a amenés à découvrir les activités de type « pattern » dans diverses ressources et à les introduire peu à peu dans les défis conçus à destination des enseignants.

II - PRÉSENTATION DE L'ACTION « 4 JOURS, 4 DÉFIS »

Les défis peuvent être réalisés durant la semaine des mathématiques ou de manière décrochée de cette action nationale. Ils restent en ligne par la suite sur le site dédié. Il s'agit donc d'une banque de défis disponible pour les enseignants. Aucune inscription n'est requise.
Pour chaque cycle, la mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 propose :

- 4 défis (de niveau 1 ou 2, avec une version bilingue français/allemand).
- Un document pédagogique à l'intention des enseignants (indiquant des réponses attendues, des procédures possibles, des difficultés éventuellement rencontrées et leurs leviers, des prolongements envisageables).
- Une mise en scène ludique et motivante pour les élèves.

Les défis mathématiques sont accessibles sur le site Pédagogie 1er degré : https://pedagogie67-1d.site.ac-strasbourg.fr/maths/
Une fois sur la page d'accueil, l'accès aux défis mathématiques de l'année en cours est possible en cliquant sur l'onglet « Défis mathématiques ». Le mot de passe est : defis67 (sans accent). Les défis des années précédentes sont également disponibles dans l'onglet « Archives ».
Les défis peuvent être présentés aux élèves en version papier ou en version numérique (Genially). Une version en allemand est également proposée aux classes bilingues.
Un des enjeux de notre action est de promouvoir une image attrayante des mathématiques et de proposer des défis permettant de faire des mathématiques avec plaisir.
Ainsi, chaque année, une vidéo d'introduction est proposée aux classes, afin de motiver les élèves et de les engager dans l'action. Chaque jour, la réponse au défi donne un indice qui permettra d'accéder à un message de félicitations final.
À titre d'exemple, en 2025, la thématique de la Semaine des Mathématiques étant « Hors les murs », les bonnes réponses quotidiennes au défi permettaient de briser l'une des briques d'un mur et de découvrir un indice (chiffre). Le dernier défi résolu et tous les chiffres obtenus, les élèves pouvaient alors saisir le code secret permettant de briser le mur. Un diplôme, téléchargeable sur le site des défis, pouvait leur être remis afin de valoriser leur participation à cette action.
Chaque année, nous concevons les défis selon la thématique nationale de la Semaine des mathématiques, thématique qui est à la fois notre contrainte et notre source d'inspiration.
Pour mémoire, voici les intitulés des thématiques des dernières années :
2020 : « Mettons en scène les mathématiques »
2021 : « Mathématiques et société »
2022 : « Maths en forme »
2023 : « Maths à la carte »
2024 : « L'important c'est de participer ! »
2025 : « Maths hors les murs »

Au-delà du fait d'encourager la pratique des mathématiques de manière ludique, les défis conçus à partir de ressources existantes ou à partir de nos propres ressources sont pensés pour permettre de travailler la résolution de problèmes dans une logique de coopération et de mobilisation de compétences transversales.
Dans le cadre de ces défis, les élèves doivent se retrouver dans des situations de recherche, d'essais, d'erreurs et de discussions.
Les pistes données pour la mise en œuvre précisent qu'il ne s'agit pas d'enseigner une procédure de résolution efficace voire experte mais de permettre à chaque élève de développer une solution personnelle et valide. Cette dernière sera amenée à être confortée ou à évoluer grâce aux échanges au sein du groupe.

La mise en œuvre des défis permet de mobiliser les 6 compétences spécifiques aux mathématiques dans les programmes en vigueur actuellement : calculer, modéliser, représenter, chercher, raisonner et communiquer, en lien avec les différents domaines du socle commun.
Une de nos intentions est également de promouvoir de nouvelles pratiques en fonction des actualités pédagogiques.
C'est cette intention qui nous a amenés à proposer ces dernières années des défis « pattern », aussi appelés « motifs », en lien avec la parution progressive de ressources les évoquant.

III - VERS UNE PREMIÈRE APPROCHE DES PROBLÈMES DITS « PATTERNS »

1 Découverte des « patterns » dans des ressources

La veille pédagogique effectuée par la Mission mathématiques et Plan Mathématique 67 nous a permis de découvrir ces activités de type « pattern » dans diverses ressources et de les introduire peu à peu dans les défis conçus à destination des enseignants du département.

Suite à la parution du guide « *Résolution de problèmes mathématiques au collège* », publié par Éduscol en décembre 2021, la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 a porté un intérêt au chapitre 4 « Patterns. Des problèmes pour travailler les pensées algorithmiques et algébriques ».

Le guide « *Résolution de problèmes mathématiques au collège* » définit les patterns de la manière suivante : « Le pattern est un anglicisme signifiant « motif », « règle de structure », « modèle à reproduire ». C'est une suite d'objets appelés éléments, reliés les uns aux autres par une règle spécifique. » (MEN, 2021, p. 111).

À cette date, l'introduction du chapitre précise :

> *En France, les patterns sont surtout synonymes de jeux de logique et ils sont peu présents dans les programmes, bien qu'apparaissant à l'école primaire sous le vocable « suites organisées ». La mise en œuvre des problèmes de ce chapitre illustre la manière dont les patterns développent les pensées algorithmiques et algébriques. La stratégie de résolution de problèmes, fondée sur l'observation, le questionnement ou l'expérimentation, consiste à chercher des invariants, des régularités, des relations entre les motifs. Ces problèmes favorisent le développement des compétences « chercher », « représenter » et « raisonner » autour de problèmes atypiques, dans la continuité du cycle 3.* (MEN, 2021, p. 106).

Les patterns nous sont alors apparus comme des types de problèmes pertinents à proposer dans nos défis mathématiques afin de les donner à connaître aux enseignants du cycle 3, mais aussi à ceux des cycles 1 et 2.

Si le programme de cycle 3 ne faisait pas (encore) mention de compétences à acquérir en algèbre, le guide collège précisait : « Ce genre de problèmes peut être proposé dès le cycle 3. Il peut se gérer sans le recours à la lettre, en exprimant la régularité en langage naturel » (MEN, 2021, p. 87).

Nous y avons également vu une occasion de favoriser la liaison CM2-sixième, dans la mesure où les problèmes algébriques sont évoqués dans la partie « problèmes atypiques » du guide « *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* » (MEN, 2021).

En juin 2023 est parue une note du CSEN intitulée « *Les motifs, source d'éveil aux mathématiques en maternelle et au primaire* » (Ciccione et Dehaene, 2023). Un temps d'échange dans le cadre de la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 nous a permis de nous saisir des contenus de cette note, qui indique : « La recherche scientifique suggère (sans toutefois prouver de façon irréfutable) que les activités scolaires avec des motifs peuvent améliorer les compétences mathématiques » (p. 10).

Cette note définit les motifs de la manière suivante : « Les motifs sont des séquences d'items (objets, nombres, sons…) dans lesquelles nous reconnaissons un ordre, une régularité, et donc une prévisibilité. » (p. 10).

Faisant le lien avec la notion de pattern découverte dans le guide « *Résolution de problèmes mathématiques au collège* », la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 s'est inspirée des suggestions d'activités de cette note pour étayer les défis cycle 1 et cycle 2.

2 Les différents types de « patterns »

Pour la suite de cet atelier, afin de clarifier la notion de pattern, nous prenons appui sur les définitions proposées dans l'article de l'APMEP « *Des patterns dans les classes !* » (Piolti-Lamorthe, Roubin et Trgalová, 2023), à savoir :

- Pattern : « Un ensemble de nombres ou d'objets dont tous les éléments sont reliés les uns aux autres par une règle spécifique ».
- Motif : « un élément qui, conjugué avec une règle, va permettre de générer la série de nombres ou de figures ».

Nous proposons aux participants une première mise en activité permettant de découvrir les types de patterns. À partir de deux patterns, l'un de nombres et l'autre figuratif (cf. figure 1 ci-après), il leur a été proposé de trouver le ou les éléments suivants en explicitant la règle trouvée et si possible de trouver plusieurs règles.

Pattern figuratif	
Pattern de nombres	1 – 4 – 7 ….

Figure 1. Deux patterns donnés en exemple pour une première mise en activité

Voici un tableau récapitulant des règles identifiées par les participants, ainsi que leurs remarques.

Patterns proposés	Règles identifiées	Remarques verbalisées
	- Ajouter une colonne de 3 carrés à gauche - Ajouter un cube dans le prolongement du cube le plus à droite ainsi qu'un cube au-dessus et au-dessous de ce cube. - Répétition de la séquence 	Difficulté à sortir de la représentation initiale pour trouver d'autres possibilités Concernant la consigne : l'absence de la caractérisation du motif (répétitif ou évolutif) et l'absence de l'indication du nombre d'éléments constituant le motif ouvrent le champ des possibles.
1 – 4 – 7 ….	- Répétition du motif : 1-4-7 - 10- 13- 16- 19… par ajouts successifs de 3	Tendance plus marquée, à partir d'une figure, à la faire évoluer.

Tableau 1. Règles identifiées et remarques verbalisées par les participants à l'atelier.

L'enjeu de cette mise en activité était de montrer différentes règles possibles à partir d'une même amorce, et d'aboutir à la définition de pattern répétitif (activités dans lesquelles le motif se répète à l'identique, dit *repeating pattern* dans les pays anglo-saxons) et celle de pattern évolutif (activités dans lesquelles le motif est modifié à chaque étape, dit *growing pattern* dans les pays anglo-saxons) (cf. figure 2 ci-après).

	PATTERN ÉVOLUTIF	PATTERN RÉPÉTITIF
Figuratif		
De nombres	3 – 6 – 9 – 12 8 – 17 – 26 – 35 1 – 4 – 9 – 16	183 183 183

Figure 2. Les types de pattern cités dans (Piolti-Lamorthe, Roubin et Trgalová, 2023)

Pour ce faire, nous nous référons aux définitions de l'article de l'APMEP « *Des patterns dans les classes !* » (Piolti-Lamorthe, Roubin et Trgalová, 2023) et à certains de leurs exemples de régularités pour ces patterns (cf. figure 3 ci-après).

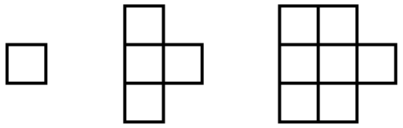
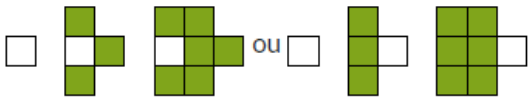
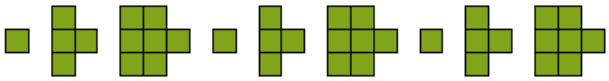
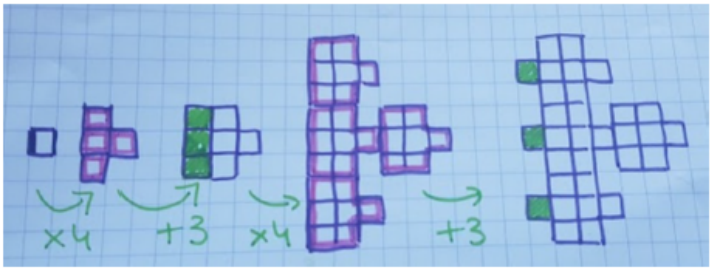
PATTERN DE NOMBRES	PATTERN FIGURATIF
Écrire l'élément suivant de la série en expliquant une règle qui a permis de le calculer. 1 4 7 ☐	Dessiner l'élément suivant de la série en expliquant une règle qui a permis de le construire. 
RÉGULARITÉ N° 1	
1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 16 … On compte de 3 en 3 à partir de 1 (*pattern* évolutif)	
RÉGULARITÉ N° 2	
1 – 4 – 7 – 1 – 4 – 7 – 1 – 4 – 7 … On répète les trois nombres (*pattern* répétitif)	
RÉGULARITÉ N° 3	
1 – 4 – 7 – 28 – 31 – 124 … On fait ×4 puis +3 et on continue en alternant.	

Figure 3. Exemple de régularités possibles

Ce même article souligne que cette activité de questionnement sur les règles de prolongement possibles pour un même motif est propice au développement de la créativité chez les élèves.

En effet, parmi les régularités possibles (notamment pour les pattern évolutifs), nous observons des règles simples et des règles plus élaborées, selon la créativité en mathématiques propre à chaque personne.

À l'occasion d'un échange, les participants à l'atelier ont pu réinvestir le champ des possibles à partir d'une autre amorce de pattern. Voici quelques-unes des propositions qui ont été retenues dès lors que la logique sous-jacente a pu être expliquée (cf. tableau 2 ci-après).

Amorce	Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3	Proposition 4
	Itérer en remplaçant la bougie bleue aux deux extrémités par une bougie d'une autre couleur.	Remplacer la bougie verte par une bougie d'une autre couleur.	A partir de la bougie verte, mettre de part et d'autre 2B 2R V 2R 2B 3B 3R V 3R 3B.	On peut jouer sur les couleurs et les tailles des bougies, l'orientation des flammes...

Tableau 2. Propositions à partir d'une autre amorce

Nous retenons la définition suivante concernant la créativité :

> *Dans le cas des mathématiques, la créativité peut être définie comme une activité intellectuelle conduisant à l'élaboration de nouvelles idées, approches ou réponses dans la résolution d'un problème mathématique.*
>
> *Cette activité est caractérisée par quatre composantes :*
>
> - *la fluidité, c'est-à-dire la capacité à générer de nombreuses idées ou réponses à un problème ;*
> - *la flexibilité, c'est à dire la capacité à aborder le problème sous différents angles ;*
> - *l'originalité, c'est-à-dire la capacité à produire des idées/réponses inattendues ;*
> - *l'élaboration, c'est-à-dire la capacité d'approfondir les idées ou de redéfinir la situation initiale pour en créer de nouvelles.* (Piolti-Lamorthe, Roubin et Trgalová, 2023).

Cette notion de créativité nous paraissait intéressante et peu exploitée en classe. Cela nous a convaincus de proposer des défis de type pattern dans le cadre de nos défis, d'autant plus qu'elle est citée dans le guide « *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* » :

> *Outre les notions mathématiques en jeu, la résolution des problèmes atypiques doit permettre aux élèves de développer des compétences transversales, comme l'autonomie, la prise de décisions, la créativité, etc., qui leur seront utiles pour la suite de la scolarité et dans leur vie quotidienne.* (MEN, 2021, p. 31).

3 Introduction progressive des « patterns » dans nos défis mathématiques

Une présentation succincte des défis pattern proposés depuis 2022 est faite aux participants (cf. figure 4 ci-après).

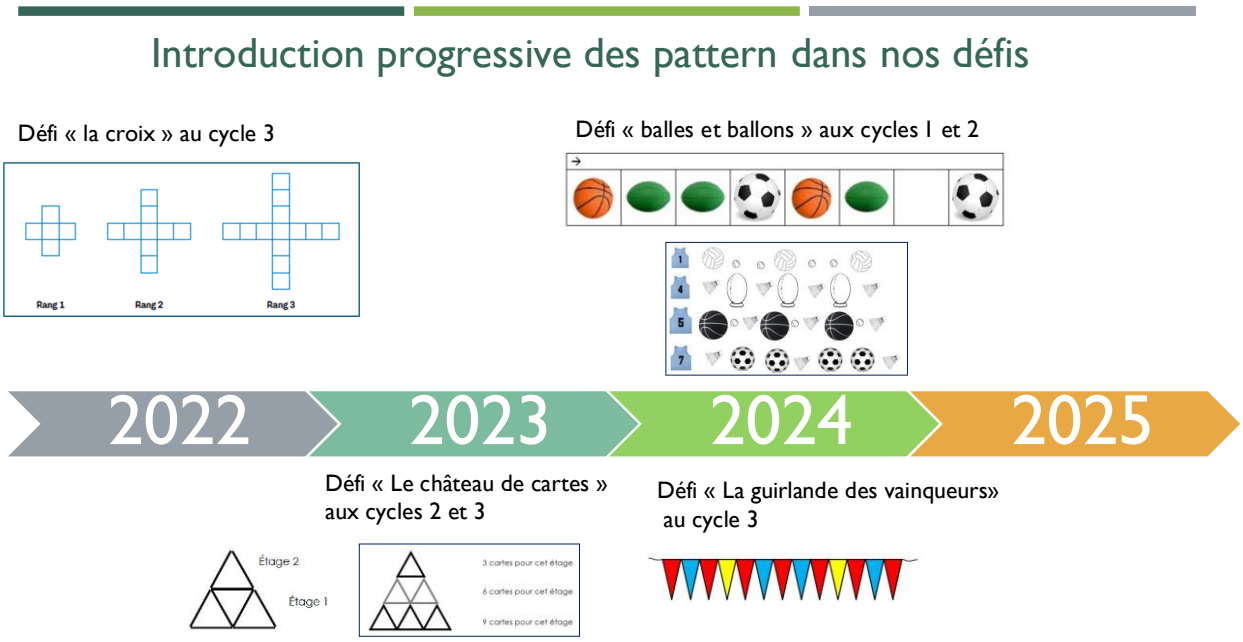


Figure 4. Introduction progressive de défis de type pattern par année

4 Apparition des « patterns » dans les programmes d'enseignement

Si les ressources explorées ont pu être une source d'inspiration dans nos défis, le lien entre les défis proposés et les compétences visées par les programmes en vigueur (MEN, 2021) n'était pas évident à établir, étant donné que l'étude des « patterns » ou « motifs » n'y était pas clairement mentionnée.

Néanmoins, à l'école maternelle, le programme de 2021 évoquait les suites organisées, qui s'apparentent aux patterns répétitifs.

Au cycle 2, on retrouvait simplement la notion de suite de nombres à compléter, la règle étant donnée (ajout de 2, de 10, de 100…).

Aux cycles 2 et 3, la catégorie « problèmes pour chercher » pouvait inclure ce type d'activités.

En effet, le programme du cycle 2 de 2021 préconisait : « On veillera aussi à proposer aux élèves dès le CP des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas de simples problèmes d'application à une ou plusieurs opérations mais nécessitent des recherches avec tâtonnements ». Cette place des problèmes pour chercher était réaffirmée dans le programme de cycle 3 de 2020 : « On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements. ». Cette entrée de problèmes pour chercher était donc, jusqu'à présent, la seule nous permettant de proposer des défis du type pattern.

Mais un changement a été opéré dans les programmes des trois cycles. Ils intègrent explicitement l'étude des motifs ou des suites dans la version en vigueur à partir de septembre 2025.

- Au cycle 1 : apparition d'un nouveau sous-domaine intitulé « Se familiariser avec les motifs organisés » ;
- Au cycle 2 : ajout d'un objectif **«** Utiliser les nombres ordinaux dans le cadre de l'étude de suites de symboles, de formes, de lettres ou de nombres. » ;
- Au cycle 3 : ajout d'un nouveau domaine : Algèbre. Objectifs CM1 (en vigueur en 2025) :

- Identifier et formuler une règle de calcul pour poursuivre une suite de nombres.
- Identifier des régularités et poursuivre une suite de motifs évolutive.

Au moment de la rédaction de nos défis 2025, nous avons donc pris appui sur ces nouvelles préconisations des programmes de cycle 1 et de cycle 2 (le programme de cycle 3 n'étant paru qu'en avril 2025). Dans la suite de l'atelier nous proposons des temps de mise en activité aux participants afin de questionner la mise en œuvre pédagogique des défis patterns dans les classes, à travers les défis proposés en 2025.

IV - MISE EN ŒUVRE PÉDAGOGIQUE DES DÉFIS « PATTERNS » OU « MOTIFS » DANS LES CLASSES DU CYCLE 1 AU CYCLE 3

1 Mise en activité 1 en groupe : échanges à partir de motifs proposés dans les défis 2025

À partir de motifs choisis pour les défis de la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 en 2025 (cf. figure 5 ci-après), un temps de travail en groupe est proposé aux participants.
Ils sont invités à envisager :

- des consignes qui pourraient être données lors de la mise en œuvre en classe en niveau 1 et en niveau 2. Chacun de ces niveaux correspond à un degré de difficulté différent et progressif.
- les procédures que les élèves pourraient mobiliser pour chacune des situations.

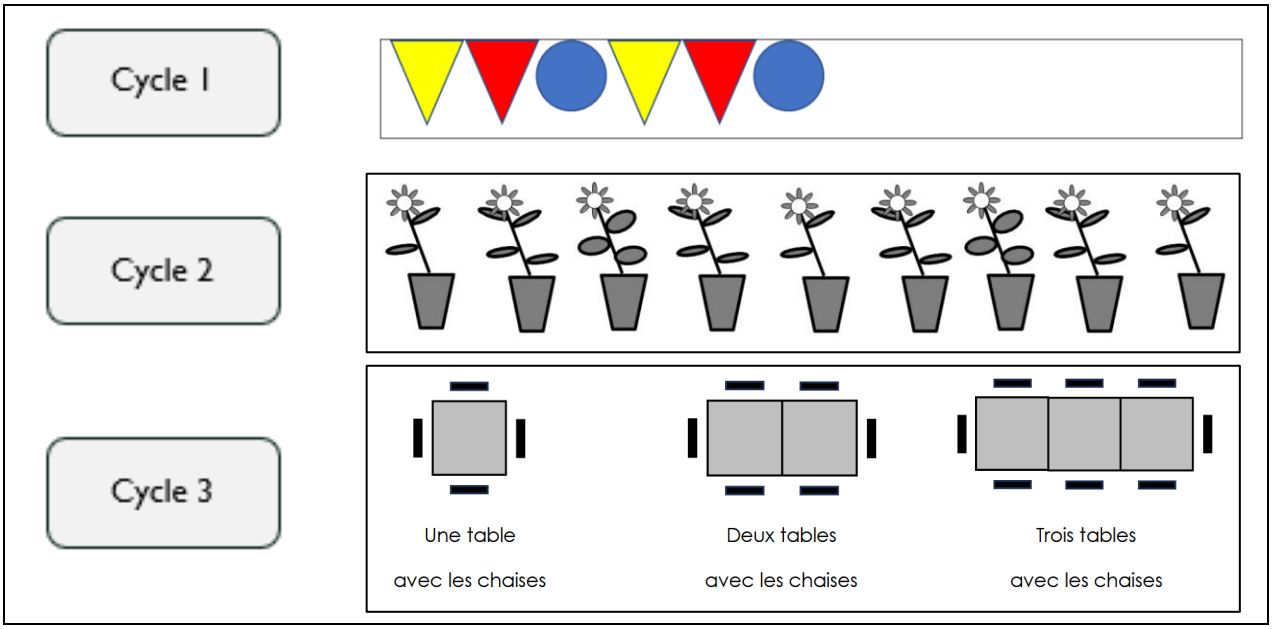


Figure 5. Extrait des défis patterns proposés en 2025

Les enjeux de cette mise en activité sont :

- d'envisager des mises en œuvre possibles des motifs dans le continuum du cycle 1 au cycle 3 ;
- de présenter les choix faits par la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 lors de la conception des défis 2025.

Voici un tableau avec quelques propositions recueillies auprès des participants :

Cycle/ niveau	Consignes	Procédures	Remarques
Cycle 1 **Niveau 1**	Observe bien les formes et les couleurs.	Mise en œuvre immédiate après avoir identifié le motif.	

	Continue de décorer la frise et explique ton choix.		
	Quel est l'objet qui vient après ?		L'espace libre dans le cadre induit le sens de la suite à donner.
	Observe la suite. Que remarques-tu ?	Repérer la récurrence.	
	Continue la guirlande. Quelle est la règle ?		
Cycle 1 Niveau 2	Avec ce matériel (gommettes d'autres couleurs par exemple), reproduis cette frise.	Transposition.	Introduire le verbe « transcrire » en lien avec les programmes.
Cycle 2 Niveau 1	Observe bien et dessine le pot suivant.	Dessin.	La présentation de la suite bornée par le cadre, est moins inductive.
	Quel est le motif répété ? Continue la suite.	Pots et tiges donnés, dessin ou collage des feuilles. Recours à des jetons : 2 4 3 … Recours à des lettres ABCB ABCB.	Le remplacement des éléments figuratifs par des symboles chiffrés ou par des lettres facilite la perception du motif. La variable « nombre de feuilles » et la variable « leur implantation au niveau de la tige » rendent l'identification du motif complexe.
Cycle 2 Niveau 2	Crée un autre motif qui lui ressemble avec 6 éléments.	Manipulation-transposition.	
	Quel est le 10e élément ? Quel est le 15e élément ?	Faire des empans de 4 en 4.	
Cycle 3 Niveau 2	Continue la suite.	Par le dessin.	Ce défi paraît plus facile que celui du cycle 2.
	Quelle est la table suivante ?		
Cycle 3 Niveau 2	Quand j'ai 8 tables, combien y a-t-il de chaises ?		
	Il y a tant d'invités dans la salle, combien de chaises faut-il pour que les tables soient complètes ?	Recours à la division.	

Tableau 2. Propositions des participants à l'atelier

2 Présentation des choix de la Mission Mathématiques

Les choix de la Mission mathématiques ont été présentés aux participants par la monstration d'extraits des fiches élèves et des documents pédagogiques des défis 2025 (cf. Annexe 1).

3 Mise en activité 2 en groupe : analyse de production d'élèves (à partir du défi « les tables »)

Ce défi (cycle 3 - niveau 2) a été mis en œuvre et filmé dans une classe de CM1. Son énoncé est en annexe 1. À partir de productions d'élèves (cf. Annexe 2), un temps de travail en groupe permet aux participants d'analyser, de classer et de hiérarchiser ces traces.

Les enjeux de cette mise en activité sont :

- d'identifier pour un élève diverses techniques de résolution possibles ;
- de clarifier les phases classiques d'un questionnement dans un contexte de problème de type pattern ;
- de comprendre l'intérêt des motifs pour développer la pensée algébrique.

Réactions des participants :

- Certains participants relèvent qu'on ignore si l'élève C a eu recours à un brouillon. Cela dit, la mise en commun fait apparaître d'emblée les démarches dites « expertes » selon les critères suivants : absence de dessin, moins de traces écrites en raison d'une activité mentale, la formulation de la règle et l'usage de la lettre.
- Les démarches les plus élémentaires ont recours au dessin exclusivement (cf. élèves B, D, H).
- Le dessin observé dans la production de l'élève A semble avoir un autre statut que celui des autres dessins : il semble s'agir d'un dessin effectué pour valider un résultat, en lien avec un possible contrat didactique. Un focus porte sur le calcul à opérer : ajout de 2 chaises à chaque étape. Il y a une ébauche de règle. Le dessin quant à lui peut rassurer l'élève dans la construction de la logique. La représentation par segment présente l'intérêt d'être moins couteux par rapport au dessin figuratif.

4 Les techniques de résolution dans les activités de type pattern

On peut distinguer trois techniques de résolution envisageables pour répondre aux questions relatives à ce type de problème (Wozniak, 2021).

4.1 La technique dessin

Cette technique consiste à représenter le nombre de tables au rang demandé, puis à dénombrer les chaises autour des tables.

Elle peut être utilisée dès lors que le motif proposé est figuratif, et sous réserve que le rang demandé ne la rende pas cognitivement trop coûteuse. Ici, on aurait pu penser que la technique dessin n'allait pas être utilisée en raison du rang demandé, mais elle reste rassurante et plus explicite pour un certain nombre d'élèves. (Cf. figure 6 ci-après).

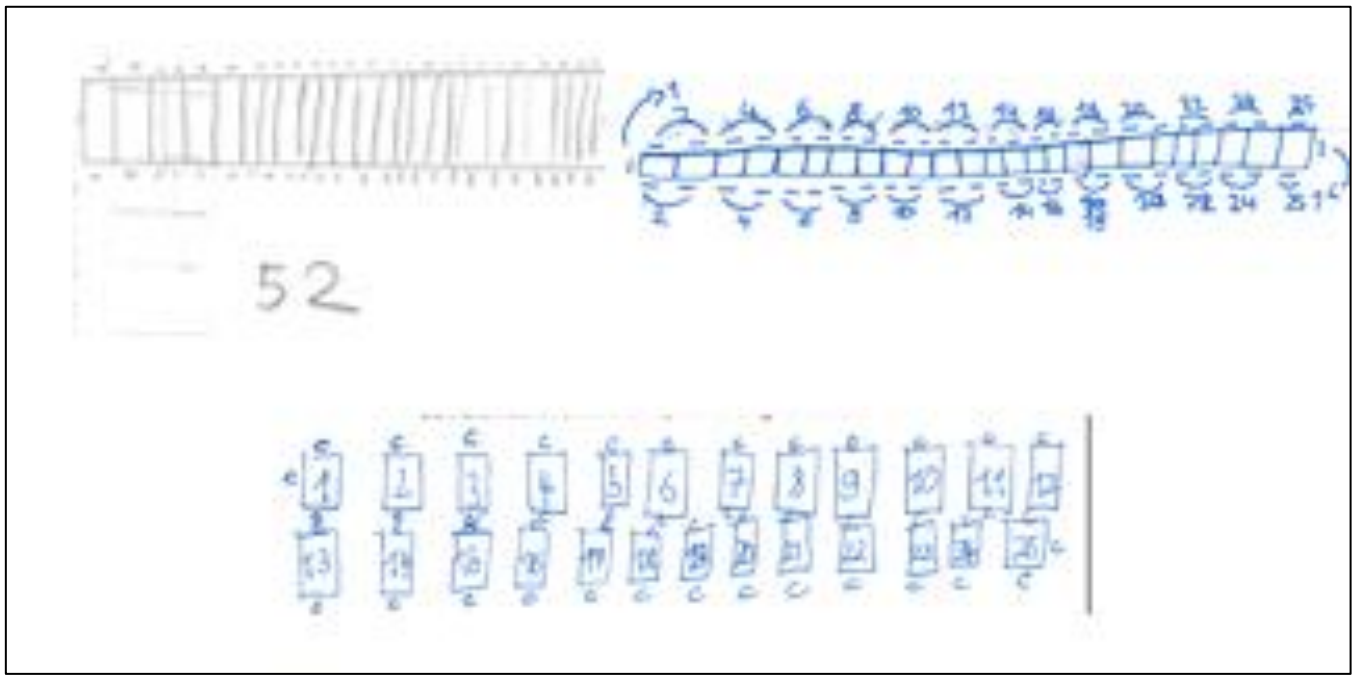


Figure 6. Exemples de productions type « technique dessin »

4.2 La technique relation de récurrence

Cette technique repose sur l'identification d'une régularité et le processus qui fait passer d'un résultat à un autre est identifié lorsque l'invariant est repéré. Lorsqu'un dessin est possible comme dans les problèmes « A table ! » (…), la découverte de cette régularité d'un cas à un autre peut être faite à partir des dessins (…). Néanmoins, on dira que l'élève utilise la technique relation de récurrence uniquement lorsqu'il n'éprouve plus le besoin de dénombrer sur un dessin. L'identification de l'invariant permettant de répondre pour un cas donné lorsqu'on connait la réponse pour un cas précédent.

Dans le problème « A table ! », le processus repose sur le fait qu'ajouter une nouvelle table revient à ajouter deux chaises, donc deux nouvelles personnes. Du point de vue des résultats numériques, cela correspond donc à ajouter 2 d'un résultat à l'autre. (Wozniak, 2021, p. 9)

Durant l'atelier, nous avons également parlé de raisonnement de proche en proche pour désigner cette technique, et repéré les productions élèves correspondantes (cf. figure 7 ci-après).

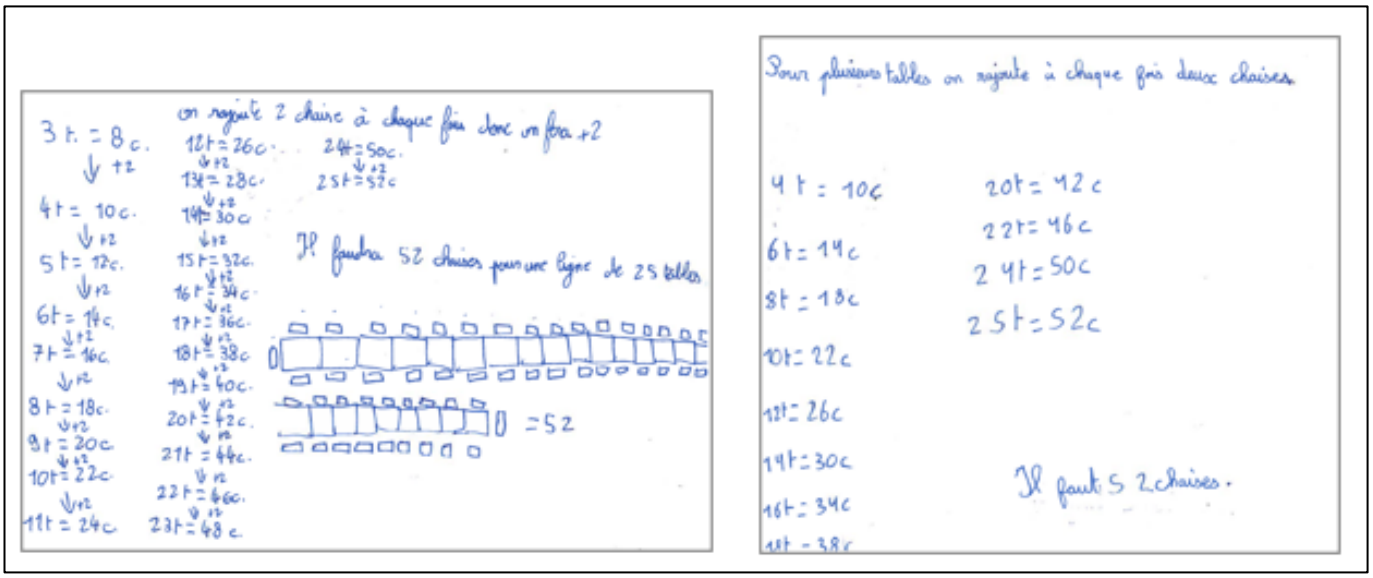


Figure 7. Exemples de productions type « technique relation de récurrence »

4.3 La technique relation fonctionnelle

Cette technique repose sur l'identification d'une relation entre un nombre et le résultat associé et non plus entre deux résultats comme pour la technique relation de récurrence. (…) L'identification de la relation fonctionnelle permettant de donner directement le résultat pour n'importe quel cas. (…). Par exemple, dans le problème « A table ! » il est possible de considérer qu'il y a 2 rangées de chaises de part et d'autre des tables alignées et deux chaises (une à chaque bout). Ce modèle de la situation conduit à la relation fonctionnelle T(n)=2n+2, où n représente le nombre de tables et T(n) le nombre de personnes assises. Évidemment, il n'est pas attendu un tel formalisme de la part d'élèves du cycle 3 mais plutôt des formulations verbales ou des calculs qui explicitent le processus. (Wozniak, 2021, p. 9)

Durant l'atelier, nous avons sélectionné les productions élèves correspondant à cette technique (cf. figure 8 ci-après).

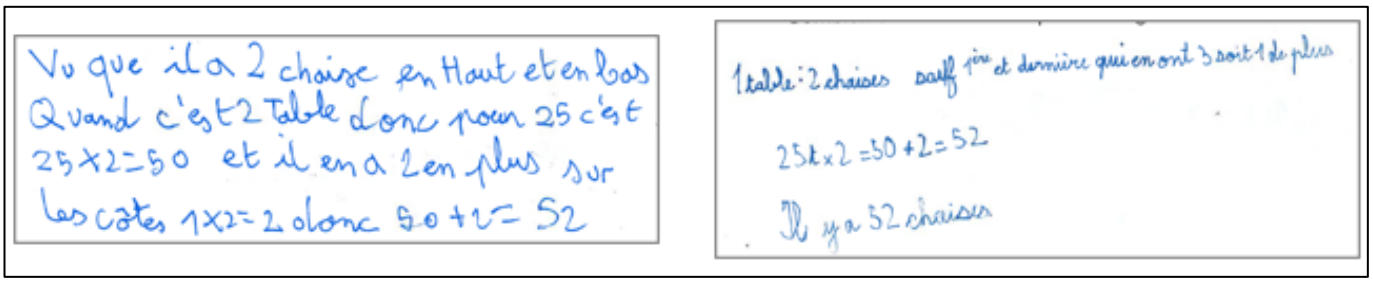


Figure 8. Exemples de productions type « technique relation fonctionnelle » pour un cas donné

Lors de la mise en œuvre en classe, l'enseignante est allée plus loin que la consigne proposée dans le défi et a demandé aux élèves d'essayer de trouver un calcul qui pourrait fonctionner avec n'importe quel nombre. Voici des réponses d'élèves :

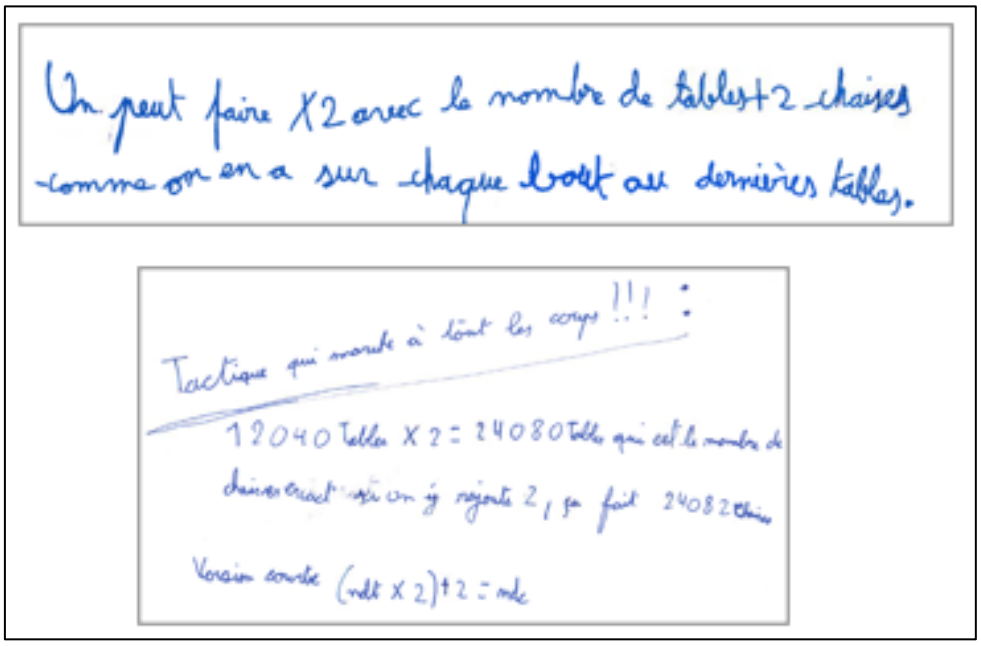


Figure 9. Exemples de productions type « technique relation fonctionnelle » pour n'importe quel cas

Ici, la relation fonctionnelle n'est pas exprimée par le recours à la lettre, mais par la verbalisation de la règle repérée.

5 Les phases classiques d'un questionnement dans les activités de type pattern

Il s'agit d'amener très progressivement les élèves à faire évoluer une démarche de raisonnement du registre numérique vers le registre algébrique, en mobilisant le contexte et le langage naturel. Ces phases de questionnement sont amenées à être automatisées pour pouvoir être mobilisées dans une situation de résolution "experte" d'un tel problème (où seule la question de la généralisation est habituellement posée).

5.1 Présenter le motif aux rangs 1, 2 et 3

Cette étape permet de présenter le motif aux élèves, en leur précisant que ce motif va évoluer.

5.2 Demander de dessiner le motif aux rangs suivants

Cette étape permet de vérifier la bonne compréhension de la structure du motif.

5.3 Demander le nombre d'éléments du motif pour un rang proche

Lors de cette étape, on peut demander le nombre d'éléments au rang 10. Ce rang est assez proche pour que les élèves ayant besoin de dessiner puissent encore le faire, mais assez éloigné pour que la technique dessin commence à devenir fastidieuse. Si le rang 5 est demandé avant le rang 10, on peut aller questionner une relation de proportionnalité : le nombre d'éléments au rang 10 est-il le double de celui au rang 5 ? Si non pourquoi ? Ce questionnement permet de mettre en évidence une régularité du motif pour les élèves ne l'ayant pas perçu mais offre également la possibilité de mettre en évidence une situation de non proportionnalité dans un problème.

5.4 Demander le nombre d'éléments du motif pour un rang éloigné

Cette étape va permettre aux élèves de commencer à inférer une relation entre le nombre d'éléments et le rang du motif, en s'appuyant sur les régularités mises en évidence sur les « petits » rangs. Lorsqu'on éloigne le rang du motif, le recours à la récurrence ou au dessin devient trop fastidieux. Les élèves doivent

donc entrer dans une démarche de recherche de relation fonctionnelle entre le numéro du rang et le nombre d'éléments (le terme relation fonctionnelle n'est pas explicité aux élèves).

5.5 Demander le nombre d'éléments du motif pour un rang quelconque ou connaissant un nombre d'éléments, retrouver le rang du motif

Ces deux propositions vont questionner la généralisation du raisonnement.

La première consiste en la recherche de l'expression du cas général, de manière un peu artificielle.

Dans la seconde s'opère un changement de paradigme : plutôt que de demander explicitement l'expression du cas général, il est intéressant de demander aux élèves d'étudier le problème inverse pour une valeur donnée afin que la recherche du cas général leur apparaisse comme un besoin pour répondre à une question (Wozniak, 2020, p. 45). En école élémentaire, les élèves pourront exprimer le cas général en langage naturel, sans introduire un recours à la lettre qui serait trop précoce.

Lors de la conception de ce défi, nous avons tenu compte de ces phases classiques d'un questionnement dans la proposition de démarche du document pédagogique pour le cycle 3 (cf. Annexe 1) ainsi que sur les techniques envisageables pour décrire, dans ce même document, les procédures pouvant mener à une réponse correcte. Dans l'attente de ressources d'accompagnement officielles pour la mise en œuvre des activités type patterns, nous espérons ainsi pouvoir outiller les enseignants.

6 Introduction de l'algèbre au cycle 3 et lien avec les « pattern »

Le nouveau programme du cycle 3 propose une « initiation à la pensée algébrique ». Ce terme d'algèbre fait son apparition dans les programmes qui seront en vigueur en septembre 2025 pour le cycle 3 et nécessitera sans doute d'être clarifié pour les enseignants (et pour les formateurs) du premier degré. Nous avons consulté diverses ressources pour tenter de définir la pensée algébrique et pour accompagner les enseignants dans cette appropriation.

Tout d'abord, le guide « *La résolution de problèmes mathématiques au collège* » nous rappelle que :

> *Traditionnellement, l'algèbre n'est pas enseignée avant le niveau secondaire (cycle 4 en France). Cependant, dans les années 1990, l'idée de développer la pensée algébrique dès l'école primaire émerge et donne lieu au courant de recherche étiqueté Early Algebra ou pré-algèbre. Cette perspective amène à définir la pensée algébrique autrement que par le recours au symbolisme algébrique.* (MEN, 2021, p. 110).

On y trouve une première définition de la pensée algébrique, qui selon Luis Radford (2014), est caractérisée par :

> *- L'indéterminée, c'est-à-dire que le problème met en jeu des quantités ou nombres non connus ;*
>
> *- La dénotation, qui consiste à désigner cette indéterminée de différentes manières possibles (langage naturel, geste, etc.) ;*
>
> *- L'analyticité, qui suppose de pouvoir traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues.* (MEN, 2021, p. 110).

L'article de l'APMEP « *Des patterns dans les classes !* » nous donne une clé de lecture supplémentaire et caractérise ce qu'est la pensée algébrique selon Kieran (2004).

> *D'après Kieran, la pensée algébrique dans les premières années implique le développement de modes de pensée au sein d'activités pour lesquelles l'algèbre symbolique des lettres peut être utilisée comme outil, mais qui ne sont pas exclusives à l'algèbre et dans lesquelles on pourrait s'engager sans utiliser aucune algèbre symbolique des lettres. Il propose des exemples de ce type d'activités : analyser des relations entre les quantités, reconnaître une structure, étudier une évolution, généraliser, modéliser, justifier, prouver ou encore prédire.* (Piolti-Lamorthe, Roubin et Trgalová, 2023)

Quels liens faisons-nous entre ces définitions et l'étude des motifs au cycle 3 ?

Le type d'activités proposées par Kieran laisse à penser que les activités du type pattern sont pertinentes pour développer la pensée algébrique, dans la mesure où elles mettent en jeu la reconnaissance d'une structure, la généralisation de cette structure par l'expression d'une règle qui permet d'anticiper et donc de prédire, des éléments éloignés du pattern.

Le nouveau programme de cycle 3 fait explicitement apparaître les activités de type patterns, appelés « motif » dans le texte :

> *À partir du cycle 3, l'introduction de la pensée algébrique marque un changement de paradigme : il s'agit de raisonner sur des nombres inconnus, qui seront représentés au cycle 4 par des lettres. Le passage progressif de l'arithmétique à l'algèbre nécessite du temps et une approche adaptée. Pour accompagner cette transition, le programme du cycle 3 introduit quelques modèles pré-algébriques (schémas en barre, balances, motifs évolutifs). Ces outils permettent de manipuler des nombres inconnus représentés par des symboles ou par des mots, facilitant l'accès à ce nouveau mode de raisonnement »* (MEN, 2025, Partie : Principes - L'initiation à la pensée algébrique et à la pensée informatique, p. 4).

Ce même programme précise que les élèves sont « *amenés à identifier et à généraliser des structures, notamment dans le cadre de suites de motifs ou de suites de nombres ou de symboles en exprimant la relation entre deux éléments consécutifs ou entre le rang d'un élément et la valeur associée.* » (MEN, 2025, Partie : Algèbre, p. 9).

À partir de septembre 2025, les activités de type pattern auront donc toute leur place dans l'enseignement des mathématiques.

V - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Avec les études *Early algebra*, la perspective du développement précoce de la pensée algébrique est devenue une préoccupation importante dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques depuis la fin des années 1990. Divers travaux ont montré l'intérêt, voire la nécessité, d'un enseignement plus progressif qui débuterait dès l'école primaire (Squalli et al., 2020).

Parmi les pistes proposées, on retrouve l'introduction dès l'école primaire de problèmes dont la résolution conduit à mettre en œuvre un processus de généralisation, l'identification d'un modèle (un « pattern »).

La veille pédagogique effectuée par la Mission mathématiques et Plan Mathématiques 67 nous a amenés à découvrir ces activités de type pattern dans diverses ressources et à les introduire peu à peu dans les défis conçus à destination des enseignants de notre département.

À partir de septembre 2025, l'entrée en vigueur des nouveaux programmes faisant explicitement apparaître ce type d'activité, nous serons encouragés à poursuivre la conception de défis intégrant des études de motifs variés, afin de les donner à connaître mais aussi afin d'outiller les enseignants quant à la démarche pédagogique car aucun document d'accompagnement n'a été jusqu'alors publié à l'attention des enseignants du 1er degré.

Dans les temps à venir, la formation des formateurs et des enseignants du 1er degré au développement de la pensée algébrique sera sans aucun doute un enjeu important, dans laquelle la Mission Mathématiques et Plan Mathématiques 67 sera investie, non seulement à travers la conception de défis, mais aussi via la formation.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Ciccione, C. et Dehaene, S. (2023). Note du CSEN n°10 : *Les motifs, source d'éveil aux mathématiques en maternelle et au primaire*. En ligne : https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_CSEN_2023_10.pdf

MEN (2021*). La résolution de problèmes mathématiques au collège*. EDUSCOL. En ligne : https://eduscol.education.fr/3107/guides-fondamentaux-pour-l-enseignement

MEN (2021). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.* EDUSCOL. En ligne : https://eduscol.education.fr/3107/guides-fondamentaux-pour-l-enseignement

Piolti-Lamorthe, C., Roubin, S. et Trgalova, J. (2023). Des patterns dans les classes ! A*u fil des maths* (547). En ligne : https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/des-patterns-dans-les-classes/

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. En ligne : https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-0

Wozniak, F., (2020). Les problèmes de généralisation à l'école élémentaire. Une étude française. Dans Squalli, H. et al. (éd.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. En ligne : https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-0

Wozniak, F., (2021). Modéliser au cycle 3 : les problèmes de généralisation. *Grand N* (107), 53-77. En ligne : https://bibnum.publimath.fr/IGN/IGR21003.pdf

ANNEXE 1 : EXTRAITS DES DÉFIS 2025

Pour accéder à l'ensemble des défis mathématiques et leur version en allemand : https://pedagogie67-1d.site.ac-strasbourg.fr/maths/

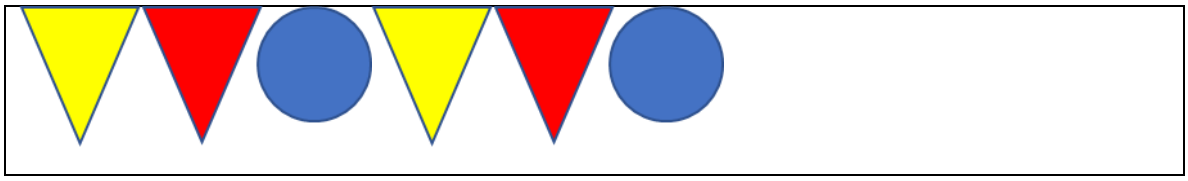
CYCLE 1 : LA GUIRLANDE - Support élèves

Niveau 1

Pour la fête de l'école, la classe veut construire une guirlande.

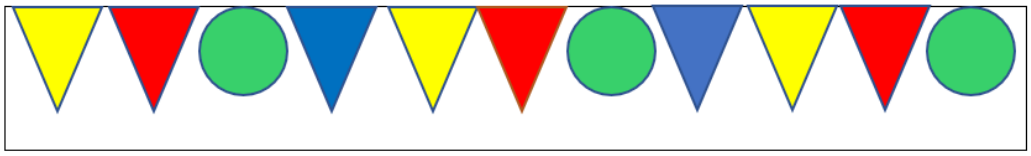
Observe ce début de guirlande. Trouve la règle qui permet de prolonger le motif.

Prolonge au moins une fois la suite.

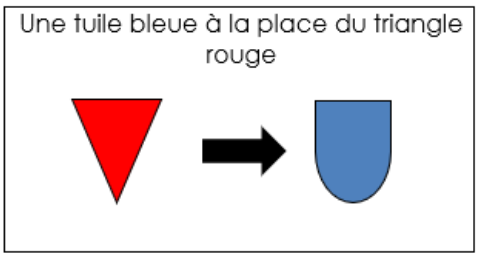


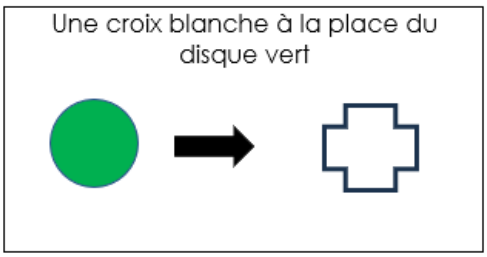
Niveau 2

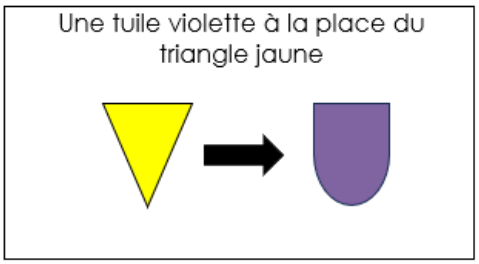
Observe bien la guirlande ci-dessous. Trouve la règle qui permet de prolonger le motif.

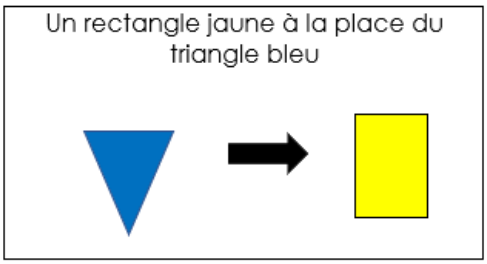


Pour la fête de l'école, la classe veut construire une guirlande qui ressemble à celle-ci, mais en utilisant d'autres formes :









CYCLE 1 : LA GUIRLANDE - Document pédagogique

Connaissances et compétences mobilisées :

Découvrir les nombres et leurs utilisations :

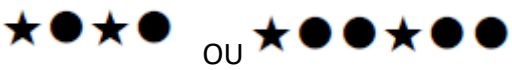
- ✓ Compétences mathématiques :
  - **Niveau 1** : compléter une suite algorithmique
  - **Niveau 2** : transcrire une suite algorithmique (c'est-à-dire la reproduire en utilisant des formes différentes)
- ✓ Compétences langagières (à adapter selon le niveau : avant 4 ans / après 4 ans)
  - Comprendre et utiliser un lexique spécifique :
    - ✓ La/une guirlande, formes géométriques (le/un triangle, le/un disque, le/un cercle…)
    - ✓ Marqueurs temporels : d'abord/avant/après/ensuite/puis
    - ✓ Marqueurs spatiaux : gauche/droite/à côté/avant/après
    - ✓ Couleurs : blanc/rouge/jaune/vert/violet (niveau 2)

Remarque : dans ce document, le terme « motif » sera employé pour désigner des séquences d'items (objets, nombres, sons…) dans lesquelles nous reconnaissons une règle, une régularité, et donc une prévisibilité. Ce terme apparait dans le programme qui sera en vigueur en septembre 2025 : « Se familiariser avec les motifs organisés »

Prérequis :

L'enseignant peut prévoir en amont des activités durant lesquelles les enfants vont utiliser dans différents contextes :

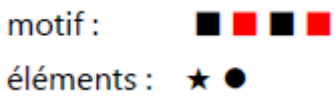
- ✓ Le lexique spécifique : la/une guirlande, formes (le/un triangle, le/un disque, le/un cercle…), des marqueurs temporels et spatiaux, des couleurs,
- ✓ Les différents supports matériels (perles, cubes, foulards, objets du quotidien…) pour :
  - Reproduire un motif
  - Prolonger l'amorce d'un motif répétitif visuel :



  - Trouver l'intrus dans le motif suivant



Pour le niveau 2 : l'élève pourra avoir été amené à transcrire le motif de la première ligne en utilisant les éléments de la deuxième ligne :



(Images extraites du nouveau programme qui sera en vigueur en septembre 2025)

Proposition de démarche :

Pour la démarche générale de mise en œuvre des défis, se référer à la page d'introduction du document pédagogique.

Procédures pouvant mener à une réponse correcte :

Niveau 1 :

- Essais et erreurs avec comparaison avec le motif de base
- Verbalisation orale de la règle du motif

Niveau 2 :

- Association des formes et des couleurs
- Essais et erreurs avec comparaison
- Verbalisation orale de la règle du motif

Difficultés et erreurs possibles :

Niveaux 1 et 2 :

- ✓ Les élèves ne maintiennent pas en mémoire plusieurs objets et leur position
- ✓ Les élèves ne respectent pas l'algorithme proposé (lecture de la gauche vers la droite, ordre des formes …)
- ✓ Les élèves n'identifient pas la suite algorithmique pour la transcrire (c'est-à-dire la reproduire avec d'autres formes).

Aides à proposer :

Niveaux 1 et 2

- ✓ Verbaliser la suite algorithmique au fur et à mesure pour leur permettre de repérer le motif de base
- ✓ Proposer une correspondance terme à terme avec le motif de base (placer le motif de base au-dessus de leur prolongement)

Niveau 1 :

- ✓ Proposer une bande déjà complétée (formes en noir et blanc) à colorier

Niveau 2 :

- ✓ Accompagner les élèves dans l'utilisation du tableau de correspondance. Éventuellement, fournir aux élèves le tableau de correspondance proposé dans l'ordre du motif de base de la guirlande modèle (cf. matériel).

Prolongement éventuel :

- ✓ Dossier du CSEN : Les motifs, source d'éveil aux mathématiques en maternelle et au primaire
- ✓ En musique : proposer des motifs de nature musicale. Exemple : *tambourin/tambourin/triangle, tambourin/tambourin/triangle …*
- ✓ En graphisme : prolonger un motif visuel.

Réponses au défi :

Niveau 1 :

Les enfants identifient la forme qui complète la suite algorithmique. Ils prolongent au moins une fois la suite algorithmique.



→ **Réponse à entrer sur le site :**
OUI, si le défi est réussi.
NON, si le défi est échoué.

Niveau 2 :

Les enfants transcrivent sans erreur le motif (=reproduisent le rythme de la guirlande avec d'autres formes)

→ **Réponse à entrer sur le site :**
OUI, si le défi est réussi.
NON, si le défi est échoué.

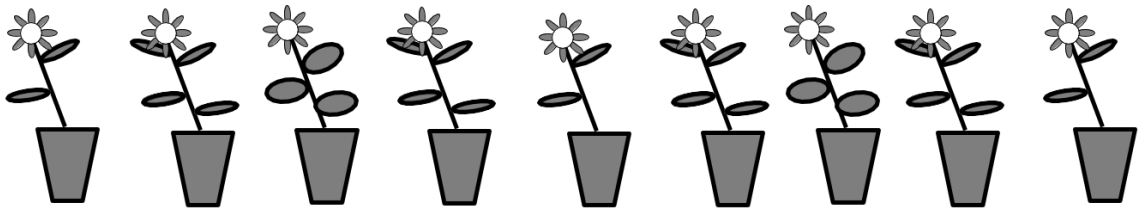
Matériel :

- ✓ **Niveau 1 :**
  - Bande vierge pour prolonger la suite (avec gommettes ou en dessinant)
  - Suite algorithmique solution (permet la vérification).
  - Aides : motif de base et suite algorithmique (avec formes, sans couleur) à compléter
- ✓ **Niveau 2 :**

- Suite algorithmique à transcrire
- Aides : motif de base et tableau de correspondance proposé dans l'ordre du motif de base de la guirlande modèle
- Suite algorithmique solution (transcrite)

CYCLE 2 : LES PARTERRES DE FLEURS - Support élèves

Pour la kermesse, les enfants décorent la cour avec des plantes ordonnées suivant la même logique :



Niveau 1 : Quelle plante sera en 10e position ?

Niveau 2 : Quelle plante sera en 51e position ?



Plante **A**



Plante **B**



Plante **C**

CYCLE 2 : LES PARTERRES DE FLEURS – Document pédagogique

Connaissances et compétences mobilisées :

- ✓ S'engager dans une démarche de résolution de problèmes
- ✓ Repérer des similitudes dans des dispositions ordonnées d'éléments qui se répètent (suites, aussi dites « motifs ») selon une certaine règle. (Cf. Note du CSEN - juin 2023 n°10 – Les motifs, source d'éveil aux mathématiques en maternelle et au primaire)

Vers le programme de cycle 2 en vigueur en septembre 2025 :
Nombres, calcul et résolution de problèmes

- ✓ *Utiliser les nombres ordinaux dans le cadre de l'étude de suites de symboles, de formes, de lettres ou de nombres.*

Prérequis :

- ✓ Repérer une organisation simple : récurrence d'un motif.

Proposition de démarche :

Pour la démarche générale de mise en œuvre des défis, se référer à la page d'introduction du document pédagogique.

Concernant ce défi plus particulièrement, nous vous proposons :

- ✓ D'observer auparavant des algorithmes simples pour repérer des motifs répétitifs.
- ✓ Afin de souligner le caractère abstrait des règles sous-jacentes aux motifs, nous suggérons de les décliner de différentes manières : le même motif ABABAB peut être présenté aux élèves sous la forme de sons, de perles, de lettres, de gestes, …

Procédures pouvant mener à une réponse correcte :

- ✓ Reconnaitre le motif qui se répète.
- ✓ Prolonger l'algorithme (Niveau 1), anticiper une réponse grâce à l'analyse de la régularité de l'algorithme.
- ✓ Prolonger l'algorithme (Niveau 2), anticiper une réponse grâce à l'analyse de la régularité de l'algorithme. Cet exercice ne permet pas de passer par la manipulation car l'algorithme recherché est trop éloigné de l'exemple. Il nécessite un degré d'abstraction plus important que dans le niveau 1.

Difficultés et erreurs possibles :

Niveau 1 :

- ✓ Difficulté à différencier les éléments de la suite.
- ✓ Difficulté à repérer le motif de base, de base quaternaire (ACBC) à partir de 3 éléments.

Niveau 2 :

- ✓ Idem niveau 1
- ✓ Utilisation de stratégies coûteuses en énergie passant par une représentation figurative.
- ✓ Erreur dans le prolongement de l'algorithme.

Aides à proposer :

Niveau 1 :

- ✓ Identifier la différence entre les pots (nombre et forme des feuilles de chaque plante).
- ✓ Coller des gommettes de couleur selon le type de plante (2 feuilles, 4 feuilles, 3 feuilles, 4 feuilles) pour rendre l'algorithme plus visible et faire le parallèle avec le collier de perles (plus proche des exercices connus par les élèves).
- ✓ Entourer le motif de base.

Niveau 2 :

- ✓ Idem niveau 1
- ✓ Apposer un code sur chaque plante (par exemple des lettres comme ABC, ou des nombres comme 2-4-3-4) pour simplifier la représentation de l'algorithme.

Prolongement éventuel :

- ✓ Reproduire des motifs. Au-delà des simples alternances ABABAB, les élèves pourront par la suite être confrontés à des régularités plus complexes, par exemple des répétitions (AABBAABB…), ou impliquant un nombre plus important d'éléments (ABCDABCD… ; AABBCC…), ou même par la suite des motifs évolutifs (ABAABBAAABBB…)
- ✓ Créer des motifs en utilisant librement des objets donnés et décrire ensuite le motif créé.
- ✓ Détecter un ou plusieurs intrus dans un motif.
- ✓ Prolonger ou compléter un motif.
- ✓ Passer du motif à un algorithme numérique, géométrique, musical, visuel, etc.

Réponses au défi :	
Niveau 1 : → **Réponse à entrer sur le site : C**	**Niveau 2 :** → **Réponse à entrer sur le site : B**

Matériel :

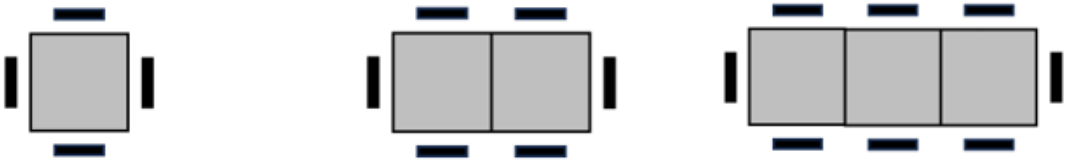
- ✓ Gommettes de couleur (si besoin)

CYCLE 3 : LES TABLES - Support élèves

Pour la kermesse, il faut installer des tables pour le goûter.

Les tables seront mises côte à côte pour former une seule grande ligne.

Voici la manière choisie pour disposer les tables et les chaises :



Une table avec les chaises

Deux tables avec les chaises

Trois tables avec les chaises

Niveau 1 : Combien de chaises faut-il pour une ligne de 25 tables ?

Niveau 2 : Combien de chaises faut-il pour une ligne de 25 tables ?

CYCLE 3 : LES TABLES – Document pédagogique

Source :
Eduscol, guide mathématiques collège 2021, La résolution de problèmes mathématiques au collège.

Dans les problèmes de type « pattern » proposés à partir du collège, les élèves sont amenés à chercher, identifier une structure en repérant une régularité et en argumentant. Ce genre de problèmes de généralisation introduit naturellement l'algèbre au cycle 4. Il peut néanmoins être proposé dès le cycle 3 et peut se gérer en exprimant la régularité en langage naturel.

Connaissances et compétences mobilisées :

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux :

- ✓ Mobiliser les faits numériques mémorisés au cycle 2

Prérequis :

Éventuellement, il pourrait être pertinent que les élèves aient déjà rencontré des problèmes de ce type (exemple : prolongement d'un motif).

Proposition de démarche :

Pour la démarche générale de mise en œuvre des défis, se référer à la page d'introduction du document pédagogique.

Pour ce défi en particulier, voici les différentes phases d'un questionnement sur un problème de type pattern :

- ✓ Dessiner l'étape, le rang suivant ce qui engage l'élève dans l'action et permet à l'enseignant de vérifier que l'élève s'est bien représenté le problème et a compris la construction du pattern.

- ✓ Chercher une relation (comprendre la construction du motif avec les étapes proches) (seul ou en groupe) et la verbaliser (en classe) : la règle évoquée est une description de la construction du motif, elle peut être donnée sous forme d'indices sur le dessin, de phrases utilisant des termes spatiaux.
- ✓ Faire calculer le nombre d'éléments en étapes proche et lointaine, mais pas inatteignable : trouver un moyen de calculer les éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.

Procédures pouvant mener à une réponse correcte :

Les élèves pourront commencer par chercher à dessiner le motif pour des rangs inférieurs (exemples ci-dessous pour les rangs 4,5) :

- ✓ **Pour les rangs 4 et 5** : il est attendu que les élèves dessinent les motifs et dénombrent les chaises tout en se questionnant sur la règle régissant la construction de ce motif.

Niveau 1 :

- ✓ **Pour le rang 10** : dessiner la répétition du motif reste possible et sera certainement choisi par un grand nombre.
  L'enjeu pour ce niveau est la compréhension du motif : la compréhension du passage d'une étape à l'autre. Les élèves qui ne dessineront pas seront ceux qui auront remarqué qu'on ajoute 2 chaises à chaque étape ou qu'il y a 5 chaises d'un côté, 5 chaises de l'autre et 1 chaise à chaque extrémité.

Niveau 2 :

- ✓ **Pour le rang 25** : dessiner la répétition du motif devient une procédure coûteuse pour les élèves, quoiqu'encore réalisable.
  Les élèves pourront utiliser une règle de récurrence (j'ajoute 2 chaises à chaque étape) ou la règle de construction du motif établie en langue naturelle. En effet, au rang 25, les élèves pourront remarquer qu'il y a 25 chaises d'un côté, 25 chaises de l'autre et 1 chaise à chaque extrémité.
  Ils pourront donc produire le calcul 25 x 2 + 2 = 52
  Cela permettra de passer avec les élèves à une possible généralisation.

Difficultés et erreurs possibles :

Certains élèves peuvent avoir une compréhension erronée du motif et ils utiliseront les tables représentées pour répondre

- ✓ **Pour le rang 10**, ils pourront répondre 40 en imaginant utiliser 10 tables comme dans la première représentation, ou compter toutes les chaises pour les 6 tables déjà représentées puis ajouter 4 tables (4 fois la table de l'étape 1 ou 2 fois la table de l'étape 2).
- ✓ **Pour le rang 25**, même procédure erronée que pour le niveau 1 ou une généralisation erronée.

Aides à proposer :

- ✓ Les élèves doivent dessiner le motif au rang 4 au minimum afin d'entrer dans la résolution du problème.
- ✓ Pour aider à la résolution, utiliser un tableau pour organiser les données permet de passer du registre figuratif au numérique. Avoir recours à cette représentation est une stratégie de résolution à développer chez les élèves et peut permettre un passage plus aisé à la verbalisation de la règle de construction du motif puis à l'expression du calcul du nombre de chaises au rang *n* en fonction de *n*.

Par exemple dans notre cas :

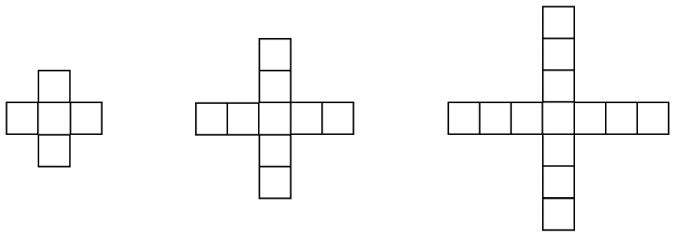
Rang du motif	1	2	3	4	
Nombre de chaises	4	6	8	10	
	+2	+2	+2		

Représenter la situation à l'aide d'un tableau de nombres permet de visualiser que l'écart est constant.

Prolongement éventuel :

- ✓ D'autres exemples de patterns dans le chapitre « Patterns » du guide La résolution de problèmes mathématiques au collège .
- ✓ Les défis mathématiques de 2022 : la croix (jour 1)

  Avec des petits carrés tous identiques, on construit des motifs selon le modèle évolutif ci-dessous :

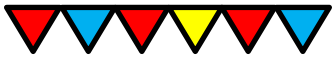


Rang 1 Rang 2 Rang 3

NIVEAU 1 : Trouve le nombre de petits carrés du motif au rang 20.
NIVEAU 2 : Trouve le nombre de petits carrés du motif au rang 100.

- ✓ Les défis mathématiques de 2024 : la guirlande des vainqueurs (jour 1)

  Stella enfile des fanions pour faire une guirlande pour les vainqueurs.
  Pour cela, elle reproduit plusieurs fois le motif ci-dessous :



Voici le début de la guirlande de Stella :



NIVEAU 1 : Trouve la couleur du 15ème fanion.
NIVEAU 2 : Trouve la couleur du 64ème fanion.

Réponses au défi :

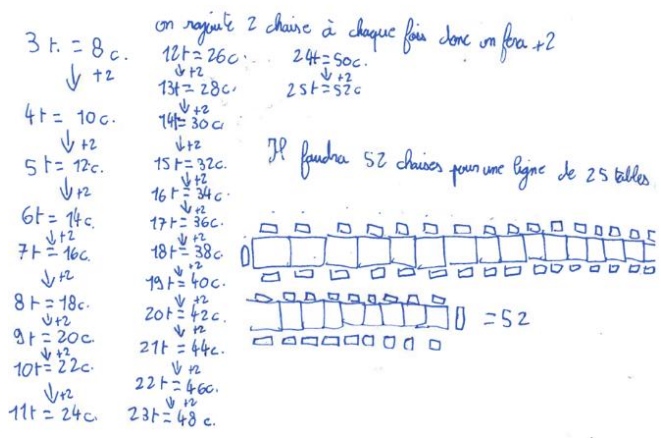
Niveau 1 : Au rang 10	**Niveau 2 :** Au rang 25
→ **Réponse à entrer sur le site :** **22**	→ **Réponse à entrer sur le site :** **52**

Matériel

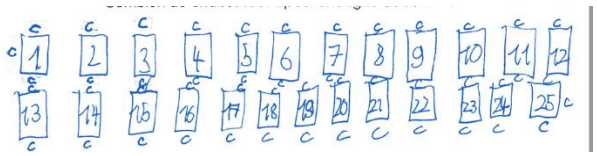
- Feuille A3
- Crayon de papier
- Règle

ANNEXE 2 : PRODUCTIONS D'ÉLÈVES - DÉFI « LES TABLES » (CYCLE 3)

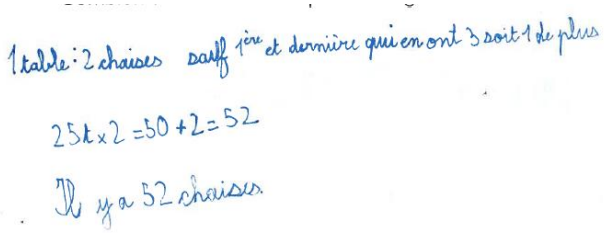
Élève A



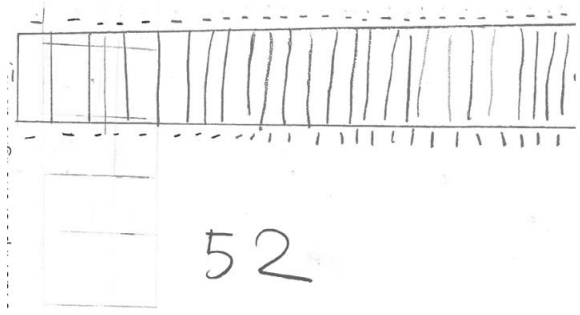
Élève B



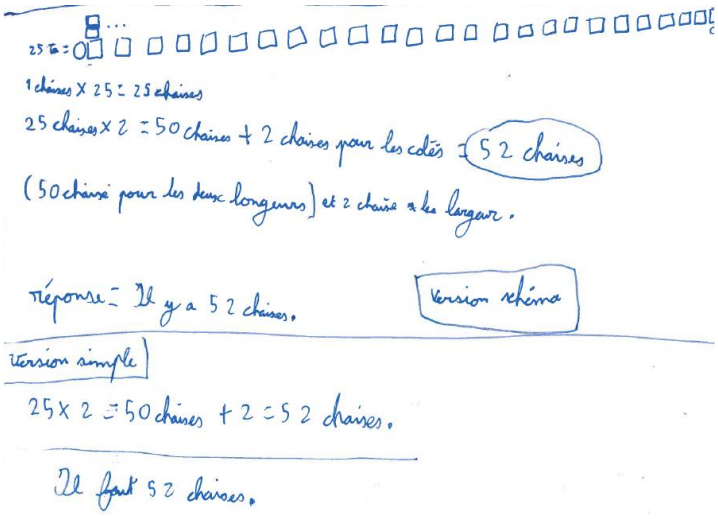
Élève C



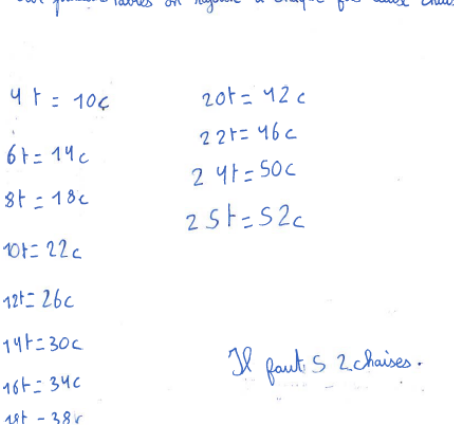
Élève D



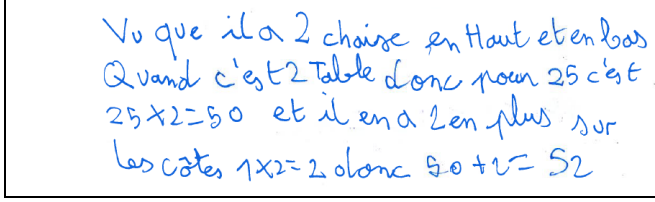
Élève E



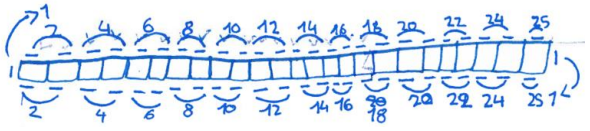
Élève F



Élève G



Élève H



COMMUNICATIONS

C11 Page 455	Processus de conception d'une ressource inclusive pour l'enseignement de la symétrie axiale au cycle 3	Florence PETEERS, Elann LESNES
C13 Page 472	Quels savoirs envisager dans le domaine de l'usage des lettres dans le cadre de l'introduction à l'algèbre au cycle 3 ?	Sophie BAUERLE, Hélène CHILLES, Lucie FLEURENCE, Jean Claude RAUSCHER IREM de Strasbourg
C14 Page 485	Enseigner la géométrie en licence : de Vasarely au parking et vice-versa !	Maha ABBOUD, Cécile KERBOUL, Assia NECHACHE
C15 Page 501	Co-construction et évaluation d'une séquence d'apprentissage de l'axe gradué au cycle 2	Marie-Caroline CROSET, Marie-Line GARDES, Audrey GUY, Sandrine POINAS, Sophie SOURY-LAVERGNE
C16 Page 516	Réussites et procédures en résolution de problèmes basiques additifs à l'école élémentaire : quelles influences du niveau scolaire et du genre ?	Camille ANGIBAUD, Soraya CHERIF-MESSAOUDI, Juliette TIBI, Charlotte DEROUET
C17 Page 531	Maths & Mater, un labo math pour l'école maternelle	Aude GRAU, Marie-Laure FIORITO, Aurélie POYNARD, Alexa SALVADOR, Fayçal Benoit CHEIK ALI, Pierre EYSSERIC
C18 Page 548	Ruptures et continuités dans l'enseignement des fractions à la transition école – collège en France : le cas de l'addition de fractions	Stéphanie WACHTEL
C21 Page 564	Mémoriser des faits numériques : d'un dispositif de formation d'une équipe d'école aux acquis des élèves	Karine VIEQUE
C22 Page 581	Analyse de séances conçues dans le cadre d'un dispositif de formation portant sur l'usage de l'histoire des mathématiques à l'école primaire	Françoise CHENEVOTOT, Antonietta DEMURO, Christine MANGIANTE-ORSOLA
C23 Page 610	Rapport au savoir mathématique dans la formation professionnelle spécialisée des professeurs des écoles : souvenirs et récits professionnels	Teresa ASSUDE

C24 Page 620	Les jeux en mathématiques : entre plausibilité et nécessité	Richard CABASSUT
C25 Page 633	Une ingénierie coopérative pour travailler les robots de sol	Aurélie VERGON DARTOIS, Francine ATHIAS
C26 Page 647	Formation à la créativité didactique au service de la créativité mathématique	Maya ACHKAR, Sonia CONSTANTIN
C28 Page 658	Développer des connaissances spatiales au CP : d'un atelier de la COPIRELEM à une ressource en ligne	Sophie GASTAL, Matthieu LAFON, Floriane WOZNIAK
C29 Page 672	Caractérisation des connaissances préservées et des difficultés spécifiques des élèves avec un trouble des apprentissages : le cas des fractions	Marie-Line GARDES, Luc-Olivier BÜNZLI, Michel DERUAZ Layla AYARI, Fabienne BARROCA-PACCARD, Christelle CARVALHINHAS, Estelle CUDRE-MAUROUX, Francesca GREGORIO, Pauline RUEGG-REYMOND, Christine SCALISI NEYROUD, Liliane VIALLE
C31 Page 687	Une utilisation du boulier pour la construction du nombre et l'approche du calcul en grande section de maternelle	Chantal TUFFÉRY-ROCHDI, Anne CORTELA, Rémy MICHEL, Pauline POLGE, Nadège RIBO
C33 Page 703	Un environnement virtuel au profit du développement des connaissances et représentations spatiales des élèves du primaire (7 à 10 ans)	Sabrina MATRI, Sylvia COUTAT, Jean-Luc DORIER
C34 Page 718	Conception et analyse d'une séquence d'enseignement-apprentissage sur les fractions : une ingénierie coopérative	Sophie JOFFREDO-LE BRUN, Carine JEGO-FRAPPIER
C35 Page 729	Résolution de problèmes arithmétiques verbaux en CP-CE1 en contexte collaboratif : analyse des gestes évaluatifs quotidiens des professeurs des écoles pour la formation et la recherche	David BEYLOT, Aline BLANCHOUIN
C36 Page 749	D'une formation spécifique à destination d'enseignants de CP à l'acquisition de connaissances et de compétences des élèves dans le domaine « nombres et calculs »	Jean-Baptiste MAYENSON, Catherine GERMAIN
C37 Page 765	Des systèmes hypermédias de documentation de la pratique	Catherine JOURNAL, Jérôme SANTINI, Jean-Noël BLOCHER
C38 Page 781	Multiplication et musique : une approche sémiotique des apprentissages	Paula JOUANNET
C39 Page 795	Suivi de cohorte et résolution de problèmes : quel test diagnostique ?	Zeina FARES

PROCESSUS DE CONCEPTION DE RESSOURCES INCLUSIVES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMÉTRIE AXIALE AU CYCLE 3

Florence PETEERS
MCF, CY Cergy Paris Université
Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen,
LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France
florence.peteers@cyu.fr

Elann LESNES
MCF, Univ Rouen Normandie,
Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille,
LDAR, F-76000 Rouen, France
elann.lesnes@univ-rouen.fr

Résumé
Dans un précédent article (Lesnes et Peteers, 2024), nous avons analysé des manuels destinés aux élèves à besoins éducatifs particuliers, en nous focalisant sur la symétrie axiale. À l'issue de cette étude, nous avons monté le projet CRIEM (Conception de Ressources Inclusives pour l'Enseignement des Mathématiques) visant à concevoir et analyser des ressources accessibles, au sens de Assude et al. (2014), en mathématiques. En ce qui concerne la symétrie axiale, nous nous sommes basé·es sur la situation adidactique des napperons (Peltier, 2000-2001) et l'avons adaptée suivant les principes de la conception universelle de l'enseignement-apprentissage, afin de prendre en compte la diversité des élèves. Nous présentons notre démarche pour la conception de la première version des ressources à destination des enseignant·es de CM1-CM2 ainsi qu'une analyse de la mise en œuvre de la séquence. Nous étudions plus spécifiquement les procédures de résolution de certain·es élèves signalé·es en difficultés en mathématiques par les enseignantes, les obstacles qu'ils/elles rencontrent et la façon dont ils/elles les dépassent (ou non) en s'appuyant sur le milieu, avec ou sans l'aide de l'enseignante. Nous analysons également la manière dont les enseignantes ont implémenté la séquence. Ces analyses nous permettent ainsi de poser les bases pour la conception d'une deuxième version des ressources.

I - INTRODUCTION

Depuis 2018, plusieurs éditeurs français proposent sur le marché une série de manuels de mathématiques qualifiés d'« adaptés » à tout ou partie des élèves à besoins éducatifs particuliers (BEP). Lors de l'édition 2023 de la COPIRELEM, nous avons proposé un atelier visant à analyser les chapitres portant sur la symétrie axiale dans le manuel « Vivre les Maths pour les élèves dys CE1 » et le cahier « Pour Comprendre Maths CM1-CM2 spécial dys » (Lesnes et Peteers, 2024). Le travail mené dans cet atelier nous a permis de mettre en évidence que les adaptations proposées concernent principalement la forme (couleur de la page, police d'écriture, mots surlignés dans les consignes, pages plus aérées, etc.) et peu ou pas du tout le contenu mathématique lui-même. Il y a donc une volonté des éditeurs de rendre accessibles les consignes mais cela nous amène à nous interroger sur l'accessibilité didactique des concepts mathématiques eux-mêmes, définie par Assude et al. comme l'ensemble des conditions qui permettent aux élèves d'accéder à l'étude des savoirs (Assude et al., 2014, p. 35).

Suite à ces premiers constats, nous nous sommes demandé s'il était possible de concevoir une séquence à destination de l'enseignement ordinaire rendant accessible la symétrie axiale. Pour répondre à cette question, nous avons élaboré le projet CRIEM (Conception de Ressources Inclusives pour l'Enseignement des Mathématiques) avec pour objectifs l'analyse et la conception de ressources inclusives autour de la symétrie axiale dans le premier degré (cycles 2 et 3). Le projet a tout d'abord été financé en 2023 par le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et a obtenu ensuite un financement par le PIA3 100% IDT (100% Inclusion, un Défi, un Territoire) dans le cadre de l'Action 6 « Concevoir un répertoire de ressources pédagogiques inclusives » (de septembre 2024 à décembre 2025). Par « ressources inclusives » nous entendons des ressources à destination des enseignant·es qui cherchent à prendre en compte l'ensemble des élèves dans leur diversité en accordant une attention particulière à l'accessibilité de l'environnement pédagogique ainsi qu'à l'accessibilité didactique des concepts étudiés. En ce sens, les ressources conçues prennent appui sur la conception universelle de l'enseignement-apprentissage. En effet, cette démarche pédagogique vise la création de situations d'apprentissage accessibles pour toutes et tous en misant sur l'accès à une multitude de chemins pour atteindre un objectif commun d'apprentissage (Rose et Meyer, 2002).

Ce texte sera organisé en trois parties. Dans une première partie nous présenterons notre démarche pour la conception de la première version de nos ressources à destination des enseignant·es de CM1-CM2. Nous proposerons ensuite, dans une deuxième partie, une analyse de la mise en œuvre de la séquence. Enfin, dans une troisième partie, nous montrerons comment nous avons pris en compte ces analyses pour concevoir une deuxième version des ressources.

II - DÉMARCHE DE CONCEPTION

Les ressources que nous avons conçues prennent la forme d'une fiche de préparation d'une séquence sur la symétrie axiale et de documents annexes (documents à projeter et à imprimer). Dans cette partie, nous présentons successivement des éléments théoriques ou des travaux sur lesquels nous nous sommes appuyé·es et les principes que nous en avons tirés pour la conception de nos ressources.

1 Appropriation des ressources par les enseignant·es

Avant les élèves, ce sont les enseignant·es qui doivent s'emparer des ressources que nous concevons pour pouvoir mettre en œuvre leur contenu dans leurs classes. C'est pourquoi, il nous semble indispensable de penser à l'appropriation des ressources par les enseignant·es, d'autant plus que des modifications non appropriées des situations par les enseignant·es peuvent se constituer en obstacles aux apprentissages des élèves (Assude et al., 2012). Or, dans la continuité des travaux d'Arditi (2011), Tempier note que « l'appropriation par les enseignants des enjeux des différentes activités ne semble pas aller de soi, ce qui peut les amener à faire des modifications non adaptées ou bien à suivre ce qui est proposé sans en comprendre les enjeux » (Tempier, 2013, p. 174). D'un autre côté, une ressource trop fournie en informations (notamment didactiques) pourrait ne pas être jugée utilisable par les enseignant·es, ce qui est corroboré par les recherches montrant que les enseignant·es lisent peu les guides pédagogiques liés aux manuels qu'ils et elles utilisent (Leroyer et Bailleul, 2010).

Selon Cèbe et Goigoux (2018), qui conçoivent des outils pour l'enseignement de la lecture, il faut que ceux-ci soient « dès le départ, conçus pour répondre aux préoccupations des enseignants et aux besoins d'enseignement des élèves qui ont le plus besoin de l'école pour apprendre. Il faut aussi qu'ils puissent s'intégrer sans trop de bouleversements dans les conditions d'exercice ordinaire des maîtres débutants ou chevronnés. Il faut [qu'ils incluent] des justifications théoriques et empiriques permettant aux utilisateurs de comprendre les principes qui les sous-tendent et la nature des activités proposées » (Cèbe et Goigoux, 2018, p. 81). Cèbe et Goigoux (2018) expliquent également que pour éviter une surcharge de travail aux enseignant·es mettant en œuvre les outils conçus, il est préférable de construire les supports

d'enseignement (notamment les fichiers distribués aux élèves), en particulier s'ils diffèrent beaucoup des pratiques ordinaires.

En mathématiques, pour décrire les ressources autour de la numération qu'il produit, Tempier (2015) retient ces principes : une présentation claire des objectifs, la proposition de variantes des situations principales qui guident la progression, une description des éléments essentiels des situations, des exemples d'exercices d'entraînement et d'évaluation, des aides pour l'institutionnalisation et des apports pour l'enseignant·e sur la notion en jeu avec des prolongements possibles en lien avec d'autres notions.

En plus de ces conseils, nous nous appuyons sur les critères développés par Tricot et al. (2003) pour évaluer des EIAH (environnements informatiques pour l'apprentissage humain) et étendus ensuite à l'évaluation de ressources en général :

- l'utilité, la ressource permet-elle bien d'atteindre les objectifs définis par les concepteurs/conceptrices ?
- l'utilisabilité, la ressource est-elle compréhensible par les enseignant·es ? Parviennent-ils et elles à s'en saisir ?
- l'acceptabilité, la ressource apparaît-elle cohérente avec les attentes, les valeurs et les contraintes institutionnelles perçues des enseignant·es ?

Pour concevoir les ressources, nous avons donc pris en compte les conseils de Cèbe et Goigoux (2018) et de Tempier (2015) tout en veillant aux critères mis en avant par Tricot et al. (2003).

2 Accessibilité des savoirs

Nous avons établi des lignes directrices pour la conception des ressources afin d'en assurer l'appropriation par les enseignant·es. Dans la partie qui suit, nous nous intéressons maintenant aux apprentissages visés pour les élèves et donc à l'accessibilité des savoirs.

2.1 Situations adidactiques

Dans l'objectif d'élaborer des ressources inclusives pour l'enseignement, on peut concevoir de nouvelles situations adaptées à la diversité (par exemple Petitfour 2017 ; 2018) mais on peut aussi reprendre des situations déjà construites et, en particulier en didactique des mathématiques, les situations adidactiques conçues dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). C'est cette approche qu'ont exploré les travaux de Bloch et Salin (2004), Butlen et Vannier (2010), Assude et al. (2011, 2012) ou encore Houle et Bachand (2023) dans plusieurs contextes de l'enseignement spécialisé. Ces travaux montrent que les situations adidactiques ne perdent pas de leurs intérêts dans ces environnements même si leur implémentation peut nécessiter certaines adaptations spécifiques (par exemple un découpage en plus de séances, des séances plus courtes ou un autre jeu sur les variables didactiques des situations).

Les situations adidactiques ayant ainsi montré leur potentiel inclusif dans différents contextes de l'enseignement ordinaire et spécialisé, nous avons décidé à notre tour de nous appuyer sur une telle situation pour concevoir notre séquence (à destination du milieu ordinaire dans lequel sont scolarisé·es des élèves à BEP). Nous nous basons donc sur la situation des napperons développée par Peltier (2000-2001) qui permet de travailler la notion de symétrie axiale. Les élèves ont à disposition des carrés de papier et des ciseaux et ont pour objectif de reproduire un napperon modèle (voir figure 1 pour un exemple) à partir de pliages et de découpages. Un napperon réalisé par un·e élève sera considéré comme « conforme » au modèle si les formes géométriques des découpes, leur nombre, leurs positions relatives et leur orientation sont respectés.

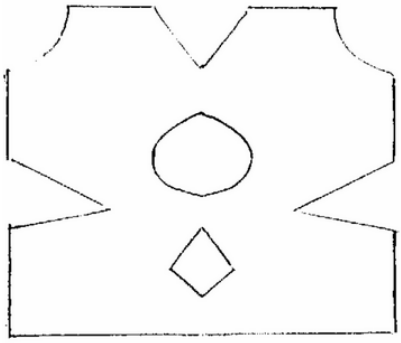


Figure 1. Premier exemple de napperon donné par Peltier (2000-2001, p. 24)

La situation de Peltier (2000-2001) est en particulier au cœur des deuxième et troisième séances mais toute la séquence a pour objet la fabrication de napperons par le biais de pliages et découpages.

2.2 Paradigme de la conception universelle de l'enseignement-apprentissage[1]

En plus de nous appuyer sur la situation adidactique des napperons pour concevoir nos ressources, nous nous situons dans le paradigme de la conception universelle de l'enseignement-apprentissage (Bergeron et al., 2011 ; Rose et Meyer, 2002). Ainsi, notre objectif n'est pas de construire autant de situations adaptées (a priori) aux besoins spécifiques (envisagés) des différent·es élèves de la classe (ou des différent·es élèves possibles en général) mais de penser la mise en oeuvre de cette situation de manière à anticiper les difficultés et éliminer celles qui feraient obstacle aux apprentissages, sans que les complexités liées à la notion de symétrie axiale elle-même ne soient supprimées puisque les attentes ne sont pas revues à la baisse. Pour mettre en oeuvre un tel paradigme, plusieurs modèles existent (Rao et al., 2014) dont l'« Universal Design for Learning » (UDL) développé par le CAST[2] (2018) qui repose sur trois grands principes : (1) assurer divers moyens de représentation, (2) assurer divers moyens d'action et (3) assurer divers moyens d'engagement dans la tâche pour les élèves (CAST, 2018).

Nous avons appliqué ces principes de différentes façons en faisant attention à ne pas modifier les objectifs d'apprentissage et en veillant à ce que les ressources restent acceptables (Tricot et al., 2003) pour les enseignant·es. Ainsi, pour le premier principe lié aux moyens de représentation, nous avons précisé tout au long de la fiche de préparation que les consignes devaient être à la fois écrites et orales. De plus, le vocabulaire non usuel (à commencer par le mot « napperon », mais aussi le mot « conforme ») doit être expliqué aux élèves. Le napperon à reproduire est également à projeter au tableau et à fournir au format individuel (d'une taille différente des feuilles de papier dans lesquelles les élèves ont à découper les napperons pour éviter la reproduction par transparence). Pour le deuxième principe lié aux moyens d'action, les élèves sont amené·es à manipuler (plier, découper) et à verbaliser des procédures, des erreurs, des critères de conformité… selon différentes modalités (en binôme, en classe entière). De plus, les élèves ont le choix dans la procédure qu'ils et elles mettent en œuvre pour réaliser les napperons et plusieurs institutionnalisations locales sont prévues pour permettre le partage de celles-ci. Enfin, pour le

[1] L'expression la plus répandue est « conception universelle de l'apprentissage » (CUA), cependant, comme l'a expliqué Sylvie Cèbe dans sa conférence lors de la COPIRELEM de 2024 ou dans une interview diffusée sur le site web du REP+ « Marc Seguin » de la Loire (https://repplusmarcseguin.edu42.ac-lyon.fr/2022/01/20/sylvie-cebe-une-didactique-inclusive-avec-la-conception-universelle-de-lenseignement-apprentissage/), les principes de la CUA s'adressent aux enseignant·es, pas aux élèves. De plus, s'il est possible de garantir un enseignement universel (au sens de l'un ou l'autre des modèles existants), cela ne dit pas forcément quelque chose des apprentissages ainsi provoqués. Nous préférons donc employer le terme de « conception universelle de l'enseignement-apprentissage ».

[2] Fondé en 1984, le CAST (Center for Applied Special Technology) est une organisation à but non lucratif composée de professionnel·les issu·es de différents secteurs (éducation, éducation spécialisée, langues, ergothérapie, neuropsychologie, ingénierie, psychologie clinique, technologies…) qui se donne pour mission de « rendre l'apprentissage accessible, efficace et inclusif ». https://www.cast.org/what-we-do/

troisième principe lié à l'engagement des élèves, en appui sur les travaux cités dans la partie II.2.1, nous pensons que la situation adidactique des napperons favorise effectivement l'engagement des élèves, notamment parce que le milieu matériel est rétroactif et permet donc une validation autonome. Également pour favoriser l'autonomie des élèves, nous distribuons une fiche récapitulative des critères de conformité qu'ils et elles ont repérés lors de la séance 2 afin qu'ils et elles puissent s'en resservir lors des reproductions de napperons qui suivent. De plus, les élèves ont le choix parmi plusieurs modèles à reproduire lors des séances 1 et 3, ce qui peut participer à les motiver.

En appui sur ces concepts et travaux de recherche, nous émettons l'hypothèse de travail suivante : il est possible de concevoir des ressources accessibles sur la symétrie axiale en s'appuyant sur une situation adidactique que l'on adapte et en appliquant les principes de la conception universelle de l'enseignement-apprentissage. En particulier, nous reprenons la situation des napperons (Peltier, 2000-2001) pour concevoir une séquence de trois séances qui respecte les principes de l'UDL (CAST, 2018) comme nous l'avons présenté dans cette partie.

III - ANALYSE DE LA PREMIÈRE IMPLÉMENTATION

1 Méthode pour la mise en œuvre de la séquence

Les ressources ont été testées dans deux classes rurales du nord de la France par deux enseignantes que nous appellerons Agathe et Océane. Dans les deux cas, il s'agissait de classes de double niveaux CM1-CM2. Plusieurs semaines avant l'implémentation de la séquence, nous avons fourni aux enseignantes la fiche de préparation de la séquence ainsi que tous les documents à photocopier ou à projeter. Nous n'avons pas fourni les carrés de papier mais avons donné des exemples de mesures adéquates. Nous avons laissé l'opportunité aux enseignantes de nous poser toutes les questions qu'elles voulaient mais nous n'en avons pas reçues. En février et mars 2024, nous avons filmé les trois séances (au rythme d'une par semaine) dans les deux classes. Une caméra était posée au fond de la classe pour capter les moments de mise en commun et deux caméras mobiles étaient utilisées pour filmer le travail des élèves à différents endroits de la classe. Nous avons également demandé aux enseignantes de nous signaler les élèves à besoins éducatifs particuliers ou celles et ceux qu'elles considèrent « en difficultés » en mathématiques. Ces éléments ont orienté notre choix de cadrage lors des moments de travail individuel ou en groupes.

Dans la suite du texte, nous nous concentrerons uniquement sur la deuxième séance de la séquence. La mise en activité se déroule en deux temps. Tout d'abord, un modèle de napperon (voir figure 2) est projeté au tableau et le même modèle est distribué aux élèves dans un format plus petit.

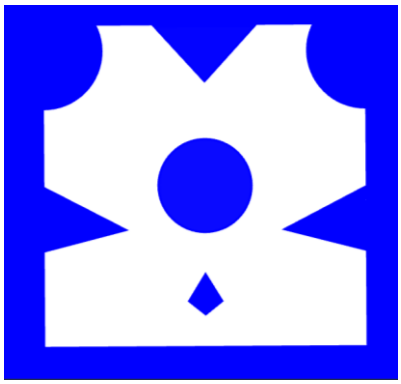


Figure 2. Napperon modèle de la séance 2

La consigne est la suivante : « Vous devrez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela, vous devrez effectuer tous les pliages et tous les découpages que vous jugerez nécessaires. Vous pouvez recommencer autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir le napperon affiché ». Les élèves travaillent individuellement

à la réalisation du napperon. Puis, dans la suite de la séance, les élèves doivent, par binôme, comparer leurs réalisations avec le modèle et identifier les ressemblances et différences.

2 Accessibilité des savoirs

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'accessibilité des savoirs, c'est-à-dire que nous nous concentrons sur ce que les élèves font et disent pendant la séance pour essayer de déterminer ce qu'ils et elles pourraient avoir appris. Nous nous concentrons sur la phase de travail individuelle.

2.1 Accessibilité des savoirs

Pour étudier les apprentissages des élèves, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TADM, Vandebrouck, 2008). Celle-ci approche les apprentissages d'un·e élève via son activité (ce qu'il ou elle développe, y compris mentalement, pour réaliser une tâche) et approche l'activité d'un·e élève via son « activité possible » en récoltant des indicateurs dans ce que l'élève montre de son activité en classe (Vandebrouck, 2008, p. 7).

Pour étudier l'accessibilité des savoirs en jeu dans nos ressources, nous nous concentrons ici sur l'activité des élèves signalé·es à BEP ou « en difficulté » par les enseignantes car, par définition, ils/elles sont les plus susceptibles de rencontrer des obstacles (cela ne signifie pas forcément qu'ils/elles en rencontreront ou que les autres élèves n'en rencontreront pas). Nous nous demandons : les élèves à BEP s'engagent-ils/elles dans la tâche proposée lors de la séance ? Comment la résolvent-ils/elles ? Et comment surmontent-ils/elles (ou non) les éventuelles difficultés rencontrées ?

Pour répondre à ces trois questions, nous étudions les enregistrements vidéos pour repérer ce que font les élèves tout au long de la phase de recherche. S'agissant de la première question, nous nous demandons : manifestent-ils/elles une volonté de trouver la réponse, notamment en faisant plusieurs essais ? Pendant combien de temps ? Abandonnent-ils/elles la recherche ? Pour répondre à la deuxième question, nous observons les stratégies mises en œuvre par les élèves à partir de leurs gestes, de leurs découpages et de leurs éventuels échanges avec leurs camarades ou l'enseignante. Enfin, pour répondre à la troisième question, nous cherchons d'abord à identifier les difficultés (par exemple : l'élève ne sait pas commencer, l'élève obtient un napperon non conforme…) puis à déterminer ce qui lui permet de les dépasser le cas échéant.

2.2 Analyse de l'activité des élèves

Dans la classe d'Océane, nous avons filmé trois élèves à BEP (Ollie en CM1, Isaac et Alfred en CM2) et nous avons filmé deux élèves signalées « en difficulté » dans la classe d'Agathe (Lily en CM1 et Lucie en CM2). Nous analysons ici en détail les activités d'Alfred et de Lily qui sont particulièrement révélatrices de certaines difficultés rencontrées par les élèves. Nous ne proposerons qu'un résumé pour les autres élèves sachant que les stratégies d'Ollie, Isaac et Alfred ainsi que leurs interactions avec leur enseignante (Océane) sont décrites dans (Lesnes et Peteers, à paraître).

Analyse de l'activité d'Alfred (classe d'Océane)

Alfred utilise tout le temps imparti (environ 18 minutes dans cette classe) pour réaliser de nombreux essais qui ne sont pas tous filmés. Ainsi, il en réalise plusieurs au début et appelle l'enseignante au bout d'environ 7 minutes de travail individuel car il sait que son napperon ne convient pas (voir figure 3).



Figure 3. Premier napperon qu'Alfred montre à l'enseignante

L'enseignante dit : « dis-moi ce qui ne va pas / regarde par rapport à ton modèle ». Alfred désigne la partie arrachée du napperon (en haut). L'enseignante acquiesce et ajoute « ça tu l'as fait vers le haut [en parlant de la tentative de cerf-volant arrachée] alors que sur ton modèle il est vers le ? », Alfred complète en disant « bas ». Ainsi, l'enseignante aide Alfred à verbaliser une des erreurs sur son napperon mais elle ne l'interroge pas sur la procédure qu'il a utilisé et n'évoque pas non plus une autre erreur du napperon : l'absence de symétrie. Nous ne pouvons d'ailleurs pas savoir si Alfred appelait l'enseignante pour lui parler effectivement du mauvais placement du cerf-volant ou s'il était focalisé sur la déchirure dans son napperon.

Alfred réalise ensuite plusieurs napperons (non conformes) sans que son travail soit filmé jusqu'à découper un nouveau napperon au bout d'environ 11 minutes de travail individuel (voir figure 4 pour les étapes de réalisation du napperon).

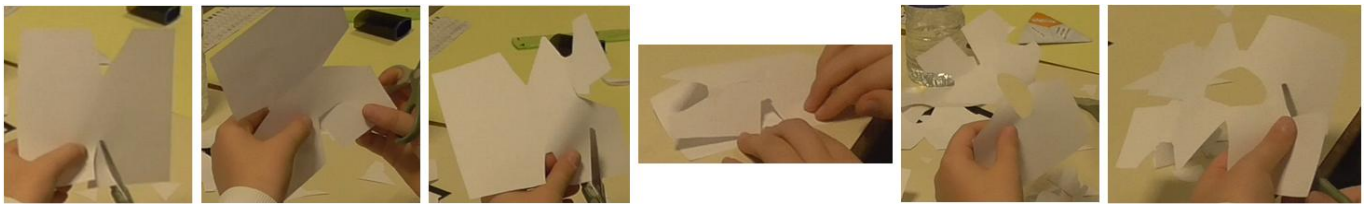


Figure 4. Succession des découpages d'Alfred

Pour réaliser ce nouveau napperon, Alfred ne plie pas le carré et découpe directement les deux triangles sur les bords (face à face) puis il découpe le triangle du haut mais il arrache la feuille en tirant sur le morceau de papier qu'il veut retirer. Pour les quarts de disque, il ne découpe pas dans les coins de la feuille mais juste en-dessous (ce qui ne semble pas lui poser problème à ce stade). Pour découper le disque central, Alfred plie le carré selon un axe qui n'est pas l'axe de symétrie du napperon modèle. Cependant, il ne reprend pas cette idée pour découper le cerf-volant puisqu'il part du bord du napperon.

Alfred appelle l'enseignante en demandant : « madame, j'ai réussi ? ». Celle-ci prend le napperon sans répondre et tente de le plier selon l'axe de symétrie du modèle sans y parvenir. Elle dit à Alfred : « alors toi t'as pas pris d'axe de symétrie si ? ». L'élève ne répond pas. L'enseignante plie ensuite le napperon selon l'axe utilisé par Alfred pour découper le disque et elle dit : « déjà la feuille tu me l'as mal pliée ». L'élève ne répond toujours pas. L'enseignante lui donne alors un nouveau carré de papier pour recommencer et part avec le napperon réalisé par l'élève (pour l'utiliser plus tard dans la phase de mise en commun). Dans cet échange, il est cette fois bien question des procédures mais c'est l'enseignante qui fait des hypothèses sur ce qu'a fait Alfred sans que celui-ci s'exprime. De plus, les hypothèses sont contradictoires puisqu'elle dit d'abord à l'élève qu'il n'a pas utilisé d'axe de symétrie avant de lui dire que l'axe n'est pas le bon. On peut supposer qu'Alfred ne comprend pas vraiment ce qu'il doit faire après le départ de l'enseignante et il n'est pas certain qu'il sache ce qu'est « l'axe de symétrie » évoqué ici. En effet, juste après, Alfred plie le nouveau carré selon une de ses médianes mais le déplie aussitôt pour découper les deux triangles sur les bords comme précédemment. Les étapes de réalisation de ce nouveau napperon sont donc les mêmes pour les triangles sur les bords, le triangle du haut, les quarts de disque et le disque central (en utilisant ici le pli précédent, ce qui correspond donc bien à l'axe de symétrie du modèle). Pour le cerf-volant, il plie la feuille selon l'axe et découpe un cerf-volant, ce qui donne deux cerfs-volants de part et d'autre de l'axe une fois la feuille dépliée. Alfred a ainsi du mal à anticiper les résultats du découpage, ce dont il se rend compte en dépliant mais il ne semble alors pas savoir comment résoudre le problème car il demande à son voisin comment lui a réussi. Le voisin répond « avec mon imagination ». Alfred n'a plus de feuille pour recommencer et la mise en commun débute peu de temps après.

Ainsi, Alfred ne surmonte pas ses difficultés au cours de la séance même s'il montre un bon engagement dans la situation puisqu'il réalise de nombreux essais. L'enseignante vient le voir à plusieurs reprises et

pointe notamment des erreurs sur le napperon. Elle ne l'interroge jamais directement sur sa procédure et fait plutôt des hypothèses sur sa stratégie. Ainsi, les aides qu'elle lui apporte ne lui permettent pas de comprendre l'intérêt du pliage ni la façon dont il faut s'y prendre pour obtenir les figures à découper. Le disque central fait figure d'exception puisqu'Alfred semble avoir compris que pour pouvoir le découper, il fallait plier le napperon en deux (mais pas forcément sur l'axe de symétrie du napperon). La fin de la phase individuelle montre un potentiel transfert de cette stratégie pour le cerf-volant mais Alfred aurait au moins eu besoin d'autres essais pour la mettre au point.

Analyse de l'activité de Lily (classe d'Agathe)

Comme Alfred, Lily utilise tout le temps imparti au travail individuel (12 minutes ici). Dans un premier temps, elle plie le carré en deux sur une des médianes pour découper les triangles latéraux. Elle déplie ensuite son carré. Pour découper le disque central, elle plie de nouveau le carré mais perpendiculairement au premier axe et pas selon une des médianes (son pli est axe de symétrie du disque mais pas du napperon). Pour les quarts de disque, elle plie de nouveau le carré mais toujours pas selon l'axe de symétrie du napperon (voir figure 5), elle n'obtient d'ailleurs pas vraiment des quarts de disques mais quelque chose qui ressemble à ce qu'Alfred avait dans l'autre classe. Comme lui, cette différence par rapport au modèle ne semble pas lui poser problème. Lily déplie ensuite le carré pour découper le triangle du haut sur l'axe directement. Elle n'est pas filmée par la suite mais elle a probablement de nouveau plié le carré pour pouvoir découper un triangle sous le disque central (voir figure 5, à droite). Lily montre son napperon à sa voisine. Elles en discutent (de façon inaudible à l'enregistrement) et Lily appelle l'enseignante. L'enseignante arrive mais interagit d'abord avec un élève derrière Lily qui l'a appelée pour faire valider son napperon. L'enseignante demande à cet élève de placer côte à côte le modèle et le napperon pour les comparer. S'ensuit une discussion sur la taille et la position des figures sur le napperon jusqu'à ce que l'élève se rende compte qu'il a oublié une découpe. Lily semble attentive à cette interaction.

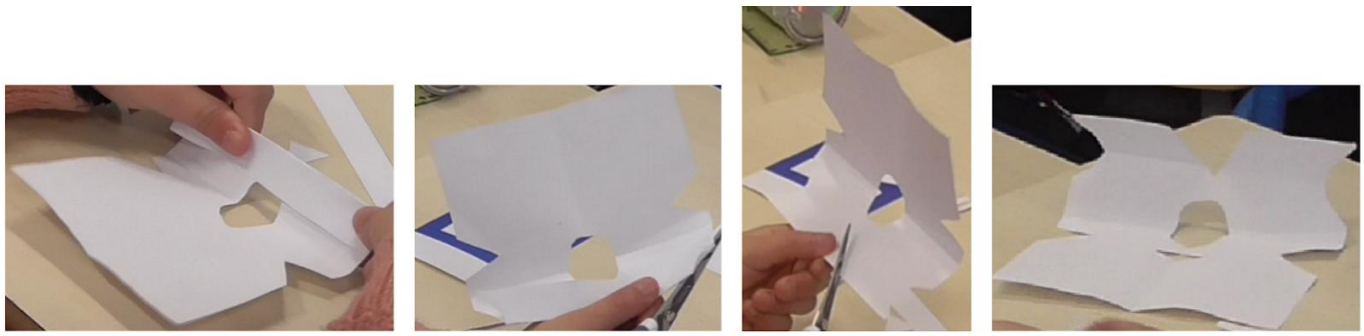


Figure 5. Découpages successifs de Lily et napperon 1 final

Lily recommence ensuite à travailler sur un nouveau carré de papier. Elle le plie d'abord en quatre (selon les deux médianes) puis seulement en deux (selon une médiane) et découpe un demi-disque au milieu. Elle déplie puis replie en quatre le carré et découpe un segment. Elle déplie et constate que le segment découpé a donné des « encoches ». Elle replie en quatre et découpe un autre segment ayant la même origine, ce qui forme une « croix » au moment de déplier (voir figure 6). Elle ne semble pas se référer à son modèle posé à côté. Lily plie de nouveau en deux le carré et découpe un coin. Elle s'apprête à faire de même dans l'autre coin mais se ravise et déplie la feuille pour constater qu'elle a bien obtenu un début des deux quarts de disque. Elle recommence pour les agrandir. Elle semble ensuite regarder le modèle individuel et découpe le triangle sur l'axe sans plier le carré. Elle le plie par contre en deux pour découper les triangles sur les bords. À cause des croix, le résultat n'est pas parfait au sommet des triangles. Elle agrandit donc les triangles pour englober les croix. Elle accentue le problème en coupant à travers. Lily montre le résultat à sa voisine qui lui signale qu'il « manque un truc » en indiquant l'espace sous le disque. Lily plie le carré en deux et découpe un petit demi-cerf-volant. Le résultat n'est pas très précis (voir figure

6), ce qui semble l'embêter et elle remontre le résultat à sa voisine. Lily montre ensuite son napperon à l'enseignante en même temps que celui de sa voisine. L'enseignante dit « c'est pas mal ».



Figure 6. Découpages successifs de Lily sur son deuxième napperon et napperon 2 final

Lily n'interagit donc qu'une fois avec l'enseignante (à la fin, lors de la validation) mais au moins deux fois avec sa voisine et prend garde aux échanges entre l'élève derrière elle et l'enseignante. Toutes ces interactions portent sur le résultat. Il s'agit à chaque fois de valider la conformité d'un napperon par rapport à un modèle ou d'identifier ce qu'il manque. Pour la procédure et en particulier le fait de plier le napperon, il est probable que Lily se soit inspirée de sa voisine (qui est reconnue comme une bonne élève et qui ne semble pas rencontrer de difficultés ici). Ainsi, elle s'empare de cette idée, notamment pour les formes centrales et celles qui se répètent (les quarts de disque et les triangles sur les bords) mais, dans un premier temps, sans forcément plier selon l'axe de symétrie du napperon. Pour le triangle supérieur, Lily ne voit visiblement pas l'intérêt de plier. Ainsi, Lily semble avoir compris que « les deux côtés du napperon doivent être les mêmes » mais sans exiger une grande précision (découper le triangle supérieur à l'oeil suffit donc). Comme, à ce stade, l'enseignante ne valide que l'aspect final sans plier ou faire plier le napperon, le défaut de symétrie n'est pas remarqué.

Résumé de l'activité des élèves

En résumé, pour tou·tes les élèves filmé·es, nous avons observé un fort engagement. Même les élèves qui rencontrent le plus de difficultés réalisent plusieurs napperons (Ollie, Alfred, Lily). Deux élèves (Isaac dans la classe d'Océane et Lucie dans la classe d'Agathe) mettent directement en œuvre une stratégie experte pour réaliser le napperon. Les autres stratégies sont diverses mais nous notons des difficultés propres à l'un·e ou l'autre des élèves (mauvaise motricité fine, problème de compréhension de la consigne) et des difficultés communes : la nécessité de plier pour obtenir un napperon symétrique n'est pas toujours perçue, il est difficile de repérer l'axe de symétrie du napperon (et donc l'axe de pliage du carré de papier) et il est difficile d'anticiper les effets d'un découpage d'une feuille pliée en deux. Ces dernières difficultés sont en lien avec l'apprentissage de la symétrie axiale, il était donc attendu que les élèves les rencontrent mais il semble que ce début de séance ne permette pas à tou·tes les élèves de les dépasser.

3 Implémentation des ressources par les enseignant·es

3.1 Question de recherche et méthode

Nous avons analysé l'activité de deux élèves lors de la phase de recherche individuelle de la deuxième séance de la séquence. Comme le révèlent les interactions dans la partie III.2.2, les enseignantes jouent un rôle important dans les potentiels apprentissages des élèves et cela passe aussi par tout ce qu'elles disent ou mettent en place en amont, pendant et après le déroulé de la séance. Ce sont ces éléments que nous avons (au moins en partie) décrits dans la fiche de préparation de la séquence. Ainsi, dans cette section, nous cherchons à analyser plus en détails la manière dont les enseignantes ont perçu les ressources à travers la façon dont elles ont implémenté la deuxième séance. Nous nous demandons en particulier : les éléments clés de la séance ont-ils été mis en œuvre tels que prévus dans la fiche de préparation ?

Pour répondre à cette question, nous ne disposons pas d'entretiens avec les enseignantes. C'est pourquoi nous nous intéressons uniquement à la mise en œuvre en classe. Pour cela, nous avons d'abord dressé une liste des éléments clés de la séance 2 en nous basant sur la fiche de préparation (voir annexe 1). Ensuite, nous avons, pour chacune des enseignantes, en nous appuyant sur les enregistrements vidéos réalisés en classe, vérifié la présence ou non de ces éléments clés dans le déroulement de la séance. Pour chaque élément présent nous avons également identifié les modifications et prises de liberté éventuelles de l'enseignante. Ces éléments seront décrits et discutés dans la suite de cette section.

3.2 Appropriation des ressources

Nous présentons ici les éléments clés absents ou modifiés dans les mises en oeuvre de chacune des enseignantes, et dont nous pouvons donc faire l'hypothèses qu'ils n'ont soit pas été suffisamment explicités dans les ressources (les enseignantes n'auraient alors pas perçu notre intention) soit que leur mise en oeuvre n'est pas utile, utilisable ou acceptable (les enseignantes auraient alors choisi de les adapter ou de les écarter).

Parmi les éléments clés absents, on retrouve l'écriture des consignes au tableau. Dans les deux classes, les consignes ont uniquement été données oralement, sans doute pour des raisons pratiques. En effet, dans la classe d'Océane, le diaporama est projeté sur le tableau, il n'y a donc plus d'espace pour écrire. Dans la classe d'Agathe, le diaporama est projeté sur un tableau interactif mobile placé devant le tableau noir, il est donc difficile pour elle de jongler entre les deux supports. Le même constat peut être fait pour l'écriture des critères de conformité à l'issue de la discussion collective. Pour ces derniers, l'intérêt de l'écriture au tableau n'a peut être pas non plus été perçu par les enseignantes étant donné qu'une fiche individuelle était prévue.

Dans les deux implémentations, nous avons également noté une ou plusieurs modifications dans la consigne principale qui ont pu avoir des répercussions sur l'activité des élèves ou ont pu se dresser en obstacles à l'accessibilité de la situation (par exemple, dans la classe d'Agathe, l'utilisation des instruments géométriques peut complexifier la tâche ; dans la classe d'Océane, le fait de ne pas rappeler que le pliage s'effectue sur un axe de symétrie du napperon peut rendre la validation plus opaque pour les élèves). En ce qui concerne la phase de mise en commun, même si dans les deux classes les enseignantes procèdent à une discussion collective autour des procédures de résolution du napperon, nous constatons des difficultés à institutionnaliser une procédure (Océane ne procède d'ailleurs à aucune institutionnalisation). Il semble également qu'aucune des deux enseignantes n'ait perçu l'importance du repérage de l'axe de symétrie du modèle car aucune n'en fait mention. Une autre difficulté récurrente concerne l'utilisation et la définition du terme « conforme » par les enseignantes, soit parce qu'elles ne savent pas elles-mêmes très bien ce qu'il signifie dans cette situation, soit parce qu'elles le jugent trop inhabituel pour les élèves et lui préfèrent d'autres mots ou périphrases.

Enfin, outre ces points communs dans les mises en œuvre, on constate deux formes d'appropriation contrastées des mêmes ressources. En effet, si Agathe suit assez fidèlement le déroulement prévu, Océane, elle, s'éloigne du scénario initial, en écartant complètement le travail prévu en binôme sur les critères de conformité et en le remplaçant par une discussion collective de laquelle elle dégage elle-même les critères.

Les écarts dans l'implémentation de la séance par rapport à ce que nous avions prévu, ainsi que l'analyse de l'activité des élèves, nous donnent ainsi des indications sur ce qu'il faut rendre plus explicite dans les ressources pour que nos intentions soient comprises par les enseignantes, mais aussi sur ce qu'il faut modifier pour rendre les ressources à la fois plus utilisable et acceptable. C'est ce que nous présentons dans la partie suivante.

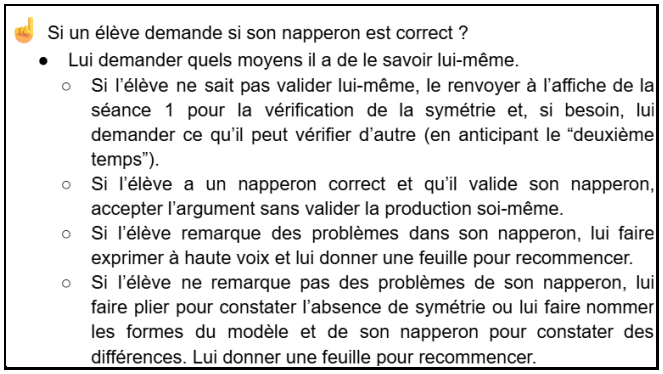
IV - CONCEPTION DE LA DEUXIÈME VERSION DES RESSOURCES

1 Modifications pour favoriser l'accessibilité des savoirs

L'analyse de l'activité des élèves a révélé que l'intérêt du pliage dans la production d'un napperon conforme n'était pas systématiquement perçu, comme l'illustrent les cas de Lily ou Alfred. Pour remédier à cette difficulté, nous avons tout d'abord modifié la séance 1 afin de mieux expliciter le caractère symétrique des napperons travaillés dans la séquence et de souligner le lien entre le pliage et la symétrie. Ainsi, la fiche de préparation intègre désormais une indication précise : « L'enseignante exemplifie le pliage sur les trois napperons en papier, à chaque fois : "Ce napperon est symétrique par rapport à cet axe [le montrer avec le doigt] car quand on plie le napperon sur cet axe, les deux parties se superposent exactement." ». Par ailleurs, nous avons retravaillé la consigne pour rendre la symétrie (et le pliage) incontournable. La formulation initiale « Pour cela, vous devrez effectuer tous les pliages et tous les découpages que vous jugerez nécessaires » a été remplacée par : « Pour cela, vous devez effectuer tous les pliages que vous jugez nécessaires. Puis, vous devez effectuer tous les découpages que vous jugez nécessaires. Enfin, vous déplierez et comparerez votre napperon au modèle. » Cette reformulation vise à contraindre les élèves à réaliser leurs découpages sur papier plié, et ainsi à prévenir des productions sans pliage préalable, comme cela avait été observé chez certains élèves (Lily notamment).

Nous avons également observé que certains napperons étaient validés par l'enseignante alors même qu'ils ne respectaient pas la symétrie attendue. Par exemple, Agathe ne plie pas systématiquement les napperons réalisés par les élèves pour en vérifier la conformité, comme c'est le cas avec le napperon de Lily. Afin de clarifier les attendus et de soutenir l'évaluation cohérente des productions des élèves, nous avons donc choisi d'ajouter explicitement la symétrie parmi les critères de conformité figurant dans la fiche de préparation.

Afin de faciliter les régulations de l'enseignant·e en cours de séance et de les rendre aussi efficaces que possible, dans la continuité de ce qui a été observé avec Alfred, nous avons cherché à éviter que ces interventions ne constituent un obstacle pour les élèves ou ne nuisent à l'accessibilité de la tâche. Dans cette perspective, un encart a été ajouté à la fiche de préparation. Il propose un ensemble de questions pouvant être posées par les élèves (sur la base, notamment, de ce que nous avons pu observer lors de l'expérimentation) au cours de la résolution ainsi que les principales difficultés susceptibles d'apparaître. Pour chacune, des pistes de relances ou d'aides sont suggérées (voir exemple sur la figure 7), afin d'outiller l'enseignant·e dans sa gestion des imprévus tout en maintenant l'équilibre entre aide et maintien de l'obstacle. Cet ajout vise à soutenir des régulations ajustées et cohérentes avec les intentions didactiques initiales.



☝ Si un élève demande si son napperon est correct ?

- Lui demander quels moyens il a de le savoir lui-même.
  - Si l'élève ne sait pas valider lui-même, le renvoyer à l'affiche de la séance 1 pour la vérification de la symétrie et, si besoin, lui demander ce qu'il peut vérifier d'autre (en anticipant le "deuxième temps").
  - Si l'élève a un napperon correct et qu'il valide son napperon, accepter l'argument sans valider la production soi-même.
  - Si l'élève remarque des problèmes dans son napperon, lui faire exprimer à haute voix et lui donner une feuille pour recommencer.
  - Si l'élève ne remarque pas des problèmes de son napperon, lui faire plier pour constater l'absence de symétrie ou lui faire nommer les formes du modèle et de son napperon pour constater des différences. Lui donner une feuille pour recommencer.

Figure 7. Exemple de conseil fourni dans la fiche de préparation

Enfin, nous avons remarqué que l'utilisation des instruments de géométrie pouvait constituer un obstacle supplémentaire pour les élèves sans apporter de valeur ajoutée à la tâche puisque la précision dans les

tracés n'est pas recherchée. Une mention explicite a ainsi été ajoutée dans la fiche de préparation pour indiquer que les instruments de géométrie ne devaient pas être utilisés.

2 Modifications pour favoriser l'appropriation des ressources

L'analyse des interactions entre les élèves et les enseignantes ainsi que l'analyse de l'implémentation de la séance par les enseignantes présentée dans les sections III.2 et III.3. a mis en évidence des écarts, plus ou moins marqués, entre les pratiques observées et les intentions initiales de conception, en particulier dans le cas d'Océane. Afin de limiter ces variations et de soutenir une mise en œuvre plus fidèle à nos objectifs, nous avons choisi, en plus des propositions de conseils mentionnés précédemment, de retravailler la fiche de préparation en adoptant un pas à pas détaillé (voir figure 8), permettant de réduire les zones d'interprétation laissées aux enseignant·es. Par ailleurs, nous avons enrichi la fiche à l'aide de pictogrammes afin de distinguer visuellement les consignes à formuler, les actions attendues de l'enseignant·e (et les éléments sur lesquels il ou elle doit insister), les activités des élèves, ainsi que des pistes de différenciation, notamment à destination des élèves les plus avancé·es. Cette structuration vise à renforcer l'accessibilité des ressources pour les enseignant·es et à favoriser une appropriation plus cohérente des intentions didactiques.

En ce qui concerne l'écriture des consignes au tableau, qui faisait défaut dans les deux classes observées, nous avons choisi d'intégrer directement les consignes écrites dans les supports à projeter. Cette même démarche a été appliquée à la fiche de conformité, également intégrée au diaporama. Ce choix vise à alléger la charge cognitive des enseignant·es en leur évitant de jongler entre plusieurs supports, et à leur fournir un document unique et complet, facilitant ainsi la mise en œuvre de la séance.

Concernant l'usage du terme « conformité », qui s'est révélé source de confusion dans certaines classes, nous avons choisi d'introduire progressivement cette notion en proposant d'abord aux élèves de « valider » ou non les productions. Ce n'est qu'ensuite que le terme « conforme » est introduit, avec une définition explicite figurant dans la fiche de préparation : « Les napperons que nous avons validés car ils correspondent au modèle sont appelés des napperons conformes. Les autres napperons qui ne correspondent pas au modèle sont dits non conformes ».

20 min	**Mise en commun** Matériel : fiche "critères de conformité" (cf. annexe 2iB). Premier objectif : établissement des critères de conformité.	Collectif
	S'assurer que les élèves comprennent les mots "conforme", "conformité" et si besoin les définir. L'enseignante affiche au tableau des napperons "non conformes" avec différents types d'erreurs (manque de formes, formes en trop, formes mal orientées, positions relatives des formes incorrectes) et demande : « *Ces napperons sont-ils conformes au modèle ? Pourquoi ?* ». L'enseignante et les élèves en déduisent qu'un napperon sera considéré comme conforme au modèle si (les critères sont écrits au tableau) : - il y a le même nombre de formes découpées ; - les formes découpées sont les mêmes ; - les formes sont placées au même endroit. Les élèves peuvent vouloir ajouter d'autres critères (exemple : il faut que le napperon soit "exactement" proportionnel au modèle), l'enseignante peut trancher en disant que dans la situation on se limite à ces trois critères. Distribuer la fiche "critères de conformité" (cf. annexe 2iB) qui va servir de référence par la suite.	

15 min	**Ce qu'il faut retenir** Matériel : fiche "critères de conformité" (annexe à imprimer, page 4 + annexe à projeter, diapo 6). L'enseignante affiche au tableau des napperons avec différents types d'erreurs (manque de formes, formes en trop, formes mal orientées, positions relatives des formes incorrectes, absence de symétrie) et des napperons corrects. Question : « *Validez-vous ces napperons ? Pourquoi ?* ». Les élèves repartent des ressemblances/différences trouvées en binômes pour répondre. L'enseignante rassemble sur le tableau les napperons validés entre eux et les napperons non validés entre eux. « *Les napperons que nous avons validés car ils correspondent au modèle sont appelés des napperons conformes. Les autres napperons qui ne correspondent pas au modèle sont dits non conformes.* » Question : « *Pourrait-on déterminer quels critères un napperon doit respecter pour être conforme au modèle ?* ». Les élèves généralisent les ressemblances/différences identifiées auparavant sur des exemples. L'enseignante projette la fiche de conformité (annexe à projeter, diapo 6) et distribue les fiches de conformité (annexe à imprimer, page 4). L'enseignante lit la fiche avec les élèves : Un napperon est conforme au modèle si : • il est symétrique ; • il y a le même nombre de formes découpées ; • les formes découpées sont les mêmes ; • les formes sont placées au même endroit.	Collectif

Figure 8. Extrait de la première version de la fiche de préparation (à gauche) et de la deuxième (à droite)

Enfin, nous avons relevé des difficultés chez les enseignantes à institutionnaliser une procédure claire pour la fabrication d'un napperon, ainsi qu'à faire émerger l'importance de l'identification de l'axe de

symétrie du modèle. Nous avons choisi d'avancer le moment d'institutionnalisation à la fin de la première séance, réservant ainsi la deuxième séance à un travail centré sur les critères de conformité. Afin de soutenir cette phase, la fiche de préparation propose une liste de questions guidant la mise en commun, telles que : «·Que faut-il faire pour fabriquer un napperon ? », « Comment sait-on où il faut plier la feuille ? », « Que se passe-t-il quand on découpe une forme sur une feuille pliée en deux ? ». Ces questions visent à aider l'enseignant·e à faire émerger collectivement les éléments essentiels de la procédure. Une trace écrite synthétisant ces éléments est également fournie parmi les supports à imprimer (voir annexe 2).

V - LIMITES, PERSPECTIVES ET LIEN AVEC LA FORMATION

Cette recherche présente plusieurs limites qu'il convient de souligner. Tout d'abord, certains obstacles potentiels aux apprentissages n'ont pas été pleinement pris en compte à ce stade de la conception. Par exemple, la séquence repose fortement sur des supports visuels, ce qui peut constituer une difficulté pour les élèves ayant des troubles visuels. Par ailleurs, les tâches de la séquence exigent une importante part de manipulation (pliages et découpages) pouvant poser problème à certains élèves en difficulté motrice, même si de légères difficultés entraînent des imprécisions dans les découpages n'empêchent pas la réalisation des tâches proposées, la précision n'étant pas un enjeu de la séquence. Sur le plan méthodologique, l'étude s'appuie sur un échantillon restreint d'élèves et d'enseignant·es, ce qui limite la portée des résultats. De plus, les contraintes techniques n'ont pas permis d'enregistrer l'ensemble des interactions en classe, rendant l'analyse partielle. Enfin la question des apprentissages effectifs des élèves que ce soit à court ou à long terme demeure ouverte.

Nous envisageons plusieurs pistes de prolongement de cette recherche. Il serait tout d'abord pertinent d'analyser l'activité des élèves qui ne sont pas identifié·es comme à BEP, afin de déterminer si les difficultés rencontrées par les élèves à BEP sont partagées plus largement, et si les stratégies pour les surmonter sont similaires ou non. Une autre perspective consiste à analyser la mise en œuvre de la deuxième version de la séquence, testée en mars-avril 2025, en s'intéressant de manière fine à l'activité des élèves et à la manière dont les enseignantes se sont appropriées les ressources. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode présentée dans cet article en y ajoutant l'analyse d'entretiens menés avec les enseignantes sur les raisons qui expliquent leurs choix. Ces analyses serviront d'appui pour la conception d'une troisième version de la séquence. Se posera ensuite la question de la diffusion des ressources à plus large échelle. Enfin, nous travaillons actuellement au développement d'un travail analogue autour d'une séquence destinée au CE2.

Cette recherche ouvre également des perspectives intéressantes pour la formation initiale et continue des enseignant·es. Le fait qu'il s'agisse d'une séquence courte portant sur un sujet autonome pourrait permettre son expérimentation en classe par des étudiant·es en formation. Cette mise en œuvre permettrait aux futur·es enseignant·es de faire vivre des situations de résolution de problèmes géométriques à leurs élèves, de constater que ceux-ci et celles-ci peuvent s'engager dans des tâches mathématiques complexes, et de réfléchir à des modalités d'inclusion qui ne reposent pas nécessairement sur une différenciation individualisée. Plus largement, cette séquence pourrait constituer un support pour engager un travail de fond sur l'adaptation de situations (a)didactiques, en veillant à ne pas perdre de vue les enjeux de savoir qu'elles véhiculent.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Arditi, S. (2011). *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII].

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : Une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 33–57.

Assude, T., Perez, J.-M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation & Didactique, 5*(2), 65–84.

Assude, T., Tambone, J. et Vérillon, A. (2012). Situations d'enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat. In J.-L. Dorier et S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - actes du colloque EMF2012* (p. 1058–1066).

Bergeron, L., Rousseau, N., et Leclerc, M. (2011). La pédagogie universelle : au cœur de la planification de l'inclusion scolaire. *Éducation et francophonie, 39*(2), 87–104.

Bloch, I. et Salin, M.-H. (2004). Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS. Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de 2003* (p. 171–185).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage.

Butlen, D. et Vannier, M.-P. (2010). Un exemple de situation pour la formation ASH (option D). Dans *Actes du XXXVIIe colloque COPIRELEM* (p. 2–18).

CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 3.0*. http://udlguidelines.cast.org

Cèbe, S. et Goigoux, R. (2018). Lutter contre les inégalités : outiller pour former les enseignants. *Recherche et formation, 87*, 77–96.

Houle, V. et Bachand, S. (2023). Enseignement des mathématiques dans une classe d'élèves ayant une déficience intellectuelle légère : étude de deux situations adidactiques. *Didactique, 4*(1), 1–25. https://doi.org/10.37571/2023.0101

Leroyer, L. et Bailleul, M. (2010). Les enseignants travaillent aussi hors la classe : comment ? Dans *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) 2009 : Enseignement des mathématiques et développement. Enjeux de société et de formation*.

Lesnes, E. et Peteers, F. (2024). Manuels de cycle 2 et 3 pour les élèves à besoins éducatifs particuliers : quelles adaptations pour la symétrie axiale ? Dans *Actes du 49e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles (COPIRELEM)* (p. 398–426). IRES d'Aix-Marseille.

Lesnes, E. et Peteers, F. (à paraître). Analyse de la mise en oeuvre d'une séquence à visée inclusive sur la symétrie axiale au cycle 3. Dans *Actes du neuvième colloque EMF* (p. XX–XX). XX

Peltier, M. L. (2000-2001). Le napperon : un problème pour travailler la symétrie axiale. *Grand N, 68*, 17–27.

Petitfour, E. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x, 103*, 5–31.

Petitfour, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N, 101*, 45–70.

Rao, K., Ok, M. W. and Bryant, B. R. (2014). A review of research on universal design educational models. *Remedial and special education, 35*(3), 153–166. https://doi.org/10.1177/0741932513518980

Rose, D.H., et Meyer, A. (2002). *Teaching every student in the digital age: Universal Design for Learning*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot].

Tempier, F. (2015). La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques ARDM* (p. 99–117).

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G. et Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. Dans C. Desmoulins, P. Marquet et D. Bouhineau (dir.), *Actes du colloque Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain 2003* (p. 391–402).

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.

ANNEXE 1 : LISTE DES ÉLÉMENTS CLÉS DE LA SÉANCE 2

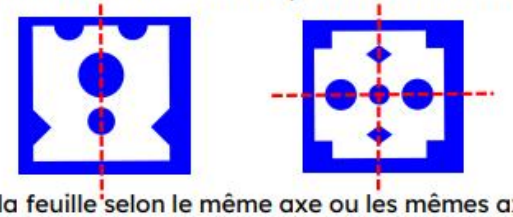
Items	Oui	Non	Commentaires
Temps 1 : Rappels			
Evocation du pliage pour réaliser le napperon			
Temps 2 : Mise en activité			
Affichage du modèle au tableau			
Lecture de la consigne : « Vous devrez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela, vous devrez effectuer tous les pliages et tous les découpages que vous jugerez nécessaires. Vous pouvez recommencer autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir le napperon affiché. »			
Ecriture de la consigne au tableau			
Chaque élève dispose d'un modèle individuel de taille différente des feuilles carrées			
Repérage des procédures de réalisation des élèves et des napperons non conformes			
Lecture de la seconde consigne : « Par 2, vous comparerez votre réalisation avec le modèle et identifierez les ressemblances et les différences. »			
Ecriture de la consigne au tableau			
Repérage des critères de ressemblance choisis par les élèves			
Temps 3 : Mise en commun			
S'assurer que les élèves comprennent les mots "conforme", "conformité" et si besoin les définir			
Affichage au tableau de napperons "non conformes" avec différents types d'erreurs			
Question : « Ces napperons sont-ils conformes au modèle ? Pourquoi ? »			
Identification des critères de conformité et écriture des critères au			
Ecriture des critères au tableau			
Distribution de la fiche « critères de conformité »			
Mise en évidence des procédures possibles pour réaliser le napperon 1			

ANNEXE 2 : PROPOSITION DE TRACE ÉCRITE POUR LA V2

Comment fabriquer un napperon ?

1) Plier la feuille sur son axe de symétrie

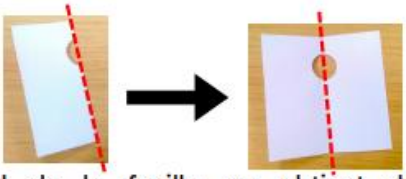
- Plier le modèle ou imaginer le pliage dans sa tête
- Repérer l'axe ou les axes de symétrie sur le modèle



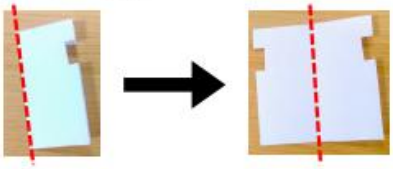
- Plier la feuille selon le même axe ou les mêmes axes

2) Découper les formes

Sur l'axe de symétrie, on obtient une seule figure quand on déplie.



Sur un bord de la feuille, on obtient deux figures symétriques quand on déplie.



3) Vérifier que le napperon est symétrique

Plier la feuille sur l'axe de symétrie ou les axes de symétrie et vérifier que les formes se superposent.

L'INITIATION À L'ALGÈBRE AU CYCLE 3

Jean-Claude RAUSCHER
MCF retraité
IREM Strasbourg
jc.rauscher@wanadoo.fr

Sophie BAUERLE
Professeur Collège Romain Rolland ERSTEIN
IREM Strasbourg
sophie.bauerle@ac-strasbourg.fr

Lucie FLEURENCE
Professeur Collège Arbogast MUTZIG
IREM Strasbourg
lucie.fleurence@ac-strasbourg.fr

Hélène CHILLES-BRIX
Professeur Collège Bugatti MOLSHEIM
IREM Strasbourg
helene.chilles@ac-strasbourg.fr

Résumé
Quels sont les premiers pas à faire faire aux élèves dans l'apprentissage de l'algèbre ? Quelles sont les conditions pour qu'ils puissent accéder à la compréhension et à l'acquisition de connaissances en algèbre ainsi qu'à leur utilisation spontanée en dehors des mathématiques pour résoudre des problèmes ? La résolution d'un problème requiert la prise de conscience par chacun des élèves de l'opération de condensation par une lettre d'une liste ouverte de nombres et de l'opération de désignation fonctionnelle. De même, ces deux opérations sémio-cognitives sont prérequises pour toutes les activités de généralisation qui sont habituellement didactiquement privilégiées dans le but d'initier les élèves à l'algèbre. À partir des travaux menés depuis plusieurs années par le groupe IREM de Strasbourg intitulé « *Apprentissages algébriques au collège* »[1] nous présentons les micro-tâches que nous avons spécifiquement élaborées et expérimentées dans le but de permettre aux élèves dès le début du collège de prendre conscience de ces deux opérations. Nous montrerons également pourquoi les activités mathématiques proposées par les programmes de Cycle 3 ne peuvent que conduire les élèves en impasse dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire.

I - LA PROBLÉMATIQUE : COMMENT DÉPASSER LES CONSTATS RÉCURRENTS D'ÉCHEC AU COLLÈGE

C'est en écoutant un élève, Jonathan (Rauscher, 2020), face aux activités données en classe, au cours de trois années scolaires, et en lui proposant des micro-tâches pour lui faire dépasser ses blocages, que nous avons développé une méthode pour recueillir et interpréter les productions orales et écrites des élèves. Les comparaisons des productions et les changements d'attitude de Jonathan vis-à-vis des « maths » avaient mis en évidence les prises de conscience progressives des opérations sémio-cognitives qui sont sous-jacentes à l'utilisation de connaissances algébriques pour résoudre des problèmes mathématiques et non-mathématiques.

Une prise de conscience se caractérise par *une reconnaissance irréversible* de ce qu'auparavant on ignorait et que l'on était même incapable de soupçonner. La prise de conscience n'est en rien une acquisition de

[1] Sophie Bauerle, Lucie Fleurence, Ann Maeseele, Hélène Chilles Brix en collège, Cathy Burck en lycée, JC Rauscher IREM

connaissance. Elle en est le contraire sur deux points. Elle est le prérequis cognitif, et non pas mathématique, de l'acquisition de connaissances mathématiques au primaire et au collège. Et elle se révèle plus solide et plus fiable que l'institutionnalisation, cette dernière impliquant l'acquisition de connaissances « institutionnalisées » au terme d'une séquence d'activités, ce qui est loin d'être vrai comme le montrent les évaluations nationales !

Par ailleurs, les micro-tâches proposées pour susciter des prises de conscience peuvent aussi être utilisées comme des tests diagnostiques de prises de conscience ou non que chaque enseignant peut élaborer et dont il discute avec ses élèves.

Naturellement l'expérience de Jonathan avait soulevé la question de ce qui en est extrapolable en classe compte tenu des trois contraintes suivantes :

(1) Se limiter à une année scolaire

(2) Permettre à chaque élève de travailler à son propre rythme

(3) « Respecter le programme » de l'année, et donc prendre peu de temps sur les séances de cours.

Il est également essentiel que les enseignants aient pris eux-mêmes conscience de la différence entre l'écriture d'expressions incomplètes qui désignent *un nombre* ou *un ensemble de nombres*, et les expressions complètes, c'est-à-dire les égalités numériques ou littérales dont la résolution donne la solution d'un problème ou d'un champ de problèmes[2]. Ces différentes opérations de désignation et les substitutions d'expressions incomplètes qu'elles impliquent sont des opérations sémio-cognitives.

Le premier seuil à faire faire franchir aux élèves est la prise de conscience des deux types d'opérations de désignation qu'une lettre peut remplir. Le premier type est celui de condensation d'un ensemble de nombres, la lettre ayant alors le statut de variable. Il doit venir avant la désignation d'un nombre, la lettre ayant alors celui d'inconnue. Le deuxième type est la désignation fonctionnelle, qui n'existe pas en français ni dans aucune langue parlée. Dans une langue naturelle, on désigne deux objets différents comme par exemple pour l'énoncé de problème en note[3] avec des syntagmes nominaux différents *(« la masse du bouchon », « la masse de la bouteille »).* En algèbre on utilise une seule lettre pour désigner les deux objets et leur relation *(« x » et « x+100 »)*. Et c'est là le piège pour les élèves et pour les enseignants lorsqu'ils se contentent d'expliquer ou de corriger oralement.

Les premières expériences d'extrapolation en classe ont été faites avec un groupe d'enseignants dans le cadre de l'IREM de Strasbourg. L'interprétation des données orales (recueillies par un observateur) et des photocopies des productions des élèves, s'est faite à la fois à partir des comparaisons des productions écrites et orales et des réactions ou commentaires spontanés des élèves face à ce qu'ils découvraient. Car chaque élève doit se sentir libre de s'exprimer dans l'apprentissage des mathématiques, c'est la condition pour développer son autonomie intellectuelle et le goût de la recherche.

[2] 2a ou a+1 sont des expressions « incomplètes » parce qu'elles ne sont ni vraies, ni fausses à la différence des expressions « complètes » comme 2a+1= a-1 ou 4a>2a+1 où se pose la question des conditions de vérité de ces égalités ou inégalités.

[3] *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?*

II - MICRO-TÂCHES POUR UNE PRISE DE CONSCIENCE DES OPÉRATIONS SÉMIO-COGNITIVES DE CONDENSATION ET DE DÉSIGNATION FONCTIONNELLE

1 Condensation d'une liste de nombres par une lettre : une activité expérimentée dans des classes de 6e[4]

En classe de 6e en cycle 3, nous avons proposé aux élèves une micro-tâche visant exclusivement la prise de conscience de l'opération de condensation d'une liste de nombres par une lettre.

Elle a été expérimentée, deux années de suite (2024 et 2025), à chaque fois au mois de juin, dans quatre classes différentes de 6e par Sophie Bauerle au collège d'Erstein. Une tâche, très simple au départ, donne lieu à des échanges qui permettent de prendre conscience de la question primordiale de ce qu'une lettre peut désigner : *une valeur numérique manquante ou toute une liste de nombres sans qu'il soit nécessaire de dire lequel*.

Au départ, cette tâche très simple consiste à compléter la liste des nombres suivants en comblant les espaces en pointillés : « 1,2,3, ……,11,12, ……, 37, 38, …… ». Comme nous nous y attendions, certains élèves ont demandé jusqu'où il fallait aller après 38. La tâche présentée a donc très vite mobilisé l'idée que « *ça ne s'arrête jamais* » et « *qu'on peut aller jusqu'à l'infini* ». Les deux suggestions faites alors par les élèves pour compléter la liste furent de mettre « *trois petits points* » ou « *etc.* ». Reprenant ces propositions, la professeure a alors demandé : « *De façon mathématique, comment pourrait-on continuer autrement la liste sans recourir à « etc. » ou « trois petits points ? ».* Sa question a d'abord suscité une certaine perplexité ; puis chaque élève a répondu en écrivant ce qu'il suggérait sur sa feuille. Par écrit, car il était important que chaque élève ait le temps de prendre conscience de la question posée et celui de réfléchir à ce qu'il allait répondre. Les suggestions faites par les élèves, dont nous n'avions aucune idée attendue au départ, ont alors été à la base d'échanges entre la professeure et ses élèves dont voici un exemple dans lequel nous distinguons quatre moments essentiels :

a. **Premiers tâtonnements**

Élève 1 : *« On pourrait mettre un nombre géant, ou 1 million. »*
Élève 2 : *« On pourrait mettre 0000000…… »*
Professeur : *« Oui, mais on s'arrêterait quand ? »*
Élève 3 : *« Mettre le symbole de l'infini, ∞, pour dire que ça ne s'arrête jamais »*

b. **Une première lettre, intégrée au langage courant,** met sur la voie :

Élève 4 : *« On pourrait mettre π, le nombre π ! »*
Professeur : *« Ah oui ? Pourquoi ? Quel est le rapport avec notre situation ? »*
Élève 4 : *« C'est trop long. On ne peut pas écrire toute la liste non plus comme c'est infini »*
Élève 5 : *« Ah oui, parfois 3,14 ou 3,1415, etc. »*
Professeur : *« Oui, c'est pourquoi les mathématiciens ont inventé ce symbole. Qu'est-ce qu'on pourrait faire alors ? »*
Élève 4 : *« On pourrait mettre π »*

c. **À la recherche d'autres lettres**

Professeur : *« Alors oui, on pourrait, mais qu'est-ce que vous en pensez ? »*
Élève 6 : *« Les gens ne vont peut-être pas comprendre car π est déjà connu. »*
Professeur : *« Alors on pourrait mettre quoi ? »*
Élève 7 : *« Par exemple un P avec une double barre ? »* (pour désigner une probabilité ?)
Élève 8 : *« Ou un V avec un trait plus grand »* (référence au signe « racine carrée » ?)

[4] 1ère année de collège en France, 3ème année du cycle 3

d. **Enfin une lettre, en l'occurrence « x », mais avec un tout autre sens que celui d'inconnue**

Professeur : *« Ah oui, racine carrée, mais ce n'est pas la même chose ! »*
Élève 9 : *« Ou des signes inventés. »*
Élève 10 : *« Ou des lettres, par exemple x. »*
Élève 11 : *« Oui, mais on utilise x pour dire que c'est un nombre inconnu. »*
Professeur : *« Oui, mais dans notre cas que représenterait la lettre x ? »*
Élève 9 : *« Tous les nombres »*

Ces échanges aboutissent donc au bout des échanges dirigés par le professeur à l'idée de la possibilité de condenser par une lettre une liste de nombres qui ne s'arrête jamais. Dans la foulée, l'enseignante a proposé aux élèves la micro-tâche présentée dans le paragraphe 2 qui suit.

En effet, l'idée de cette expérimentation innovante que nous venons de présenter nous est venue après avoir expérimenté dans plusieurs classes de la 6e à la 3e de 2020 à 2024 une autre micro-tâche qui visait la prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle et de leur articulation (Rauscher, Bauerle, 2024, p. 28-31). Dans les deux cas, ces micro-tâches portent sur des opérations devant se faire dans le cadre nécessaire d'une conversion se faisant dans les deux sens du registre de l'écriture des nombres et des opérations et celui de la langue naturelle.

Cette autre micro-tâche consiste à faire remplir deux listes de nombres entiers corrélées par une relation qui peut être désignée par un syntagme nominal (« *le double de …* », « *le successeur de ….* », « *le carré de …* », etc.), jusqu'à sentir la nécessité de condenser les deux listes de nombres par une lettre qui désigne leur corrélation.

2 Condensation de deux listes corrélées de nombres à l'aide d'une lettre : une activité expérimentée dans des classes de la 6e à la 3e

Dans une première phase, cette activité se présente sous forme d'un tableau à deux colonnes à compléter. Ce tableau ne se réfère à aucun contexte de problème « concret » à résoudre ou à des grandeurs. Les deux colonnes mettent en regard deux listes corrélées de nombres entiers, qui *peuvent être indéfiniment allongées.* Elle consiste à remplir les cases vides du tableau pour amener les élèves à condenser les deux listes à l'aide d'une lettre. Pour cela la marge du tableau en dessous des deux listes pose deux questions, l'une sur la lettre qui condense la première liste, et l'autre sur l'utilisation de la même lettre associée à un symbole opératoire.

1	4
2	5
3	6
4	….
…..	…..
6	9
…….	…..
…….	…..

……..	…….
……..	…….
50	53
51	….
……..	……..

……..	…….
……..	…….
107	110
108	…….
…….	…….

Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?*

Figure 1 : tableau 1

Dans un premier temps les élèves ne rencontrent pas de difficulté : la relation à trouver est simple et la partie numérique du tableau est complétée rapidement.
Mais ensuite, quand il s'agit de répondre aux deux questions relatives à la marge inférieure la plupart des élèves s'arrêtent. Ils appellent le professeur pour demander de l'aide : « *Que faut-il faire ?* » ou parfois « *C'est juste ce que j'ai fait ?* ». Certains proposent l'opérateur « *+3* » dans la case qui fait face à la lettre ou encore « *ajouter 3* ». De façon plus surprenante encore, nous avons souvent rencontré, à tous les niveaux de collège, des propositions qui consistent à choisir une lettre pour la première case *(« une lettre ? »)* et la lettre située trois rangs plus loin dans l'ordre alphabétique pour la case suivante *(« Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ? »)*. Les réactions sont similaires de la 6e à la 3e et même en lycée.

Pour que chaque élève puisse alors prendre conscience de la façon de décrire les deux listes et leur relation à l'aide d'une lettre, le professeur doit alors savoir résister à ces demandes d'explications ou de corrections immédiates. Afin de *laisser à chaque élève l'initiative de choisir une lettre* pour procéder aux désignations littérales, il suffit dans la majorité des cas de rappeler simplement la consigne *(« avec la même lettre »*). Les prises de conscience, marquées par des expressions de satisfaction, ne se font alors pas toutes en même temps (20 à 40 minutes selon la classe).

Dans une deuxième phase d'autres tableaux sont proposés aux élèves. La distribution de ces tableaux, au fur et à mesure, élève par élève permet de réguler de façon pratique les différences d'avancement du travail de chaque élève lors de la première phase.

Voici deux exemples de ces tableaux proposés alors :

Nombre choisi	.....
0	0
1	2
2	4
3	6
4	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
50	100
51	.....
.....	.....
107	214
108	.....
.....	.....
Une lettre ?	***Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?***

Nombre choisi	.....
0	0
1	1
2	4
3	9
4	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
50	2500
.....	.....
106	
107	11449
.....	.....
.....	.....
Une lettre ?	***Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?***

Figure 3. Les tableaux 2 et 3

C'est au cours de cette deuxième phase, que *la prise de conscience réalisée lors du premier tableau (figure 1) par chaque élève se révèle irréversible*. En effet lorsque les élèves ont rempli la partie numérique des tableaux et trouvé le lien entre les deux colonnes, ils remplissent immédiatement et sans hésitation la partie littérale du tableau.

Ces tableaux ressemblent au premier mais comportent en plus une marge supérieure qui appelle à désigner le lien entre les deux listes par une expression verbale incomplète par exemple, « *le nombre ajouté à lui-même* » ou « *le double du nombre choisi* » pour le tableau de gauche. La difficulté de la très grande majorité des élèves est en effet de passer de la formulation en langue naturelle des données d'un problème à l'écriture symbolique des opérations et des équations permettant de le résoudre (Duval, Pluvinage, 2016, p .141-145).

Consécutivement, sollicitée par le professeur, la comparaison des productions variées à propos de la première et dernière ligne des tableaux amène les élèves à discuter sous la conduite de l'enseignant pour différencier ou à mettre en correspondance des désignations fonctionnelles. En faisant commencer ces listes par quelques nombres négatifs**,** ils ont alors l'occasion de prendre conscience d'équivalences telles que « $a + a = 2a$ », « $a \times a = a^2$ », et de différences (ex : « *carré du nombre ≠ double du nombre* »). La considération d'écritures comme « $2a$ » ou « a^2 », non seulement comme des formules de calcul où on est amené à remplacer la lettre par un nombre, mais aussi comme des représentants de listes ouvertes de nombres est essentielle en algèbre. Elle permettra notamment par la suite de désigner l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs *(« 2n »)* et *« 2n + 1 »)* ou encore l'ensemble des carrés des nombres « a^2 » pour éviter la réaction réflexe qui s'installe dès le collège de considérer que « $a^2 = 4$ » n'a qu'une solution « *puisque* 2 *est solution de l'équation* ».
Les élèves deviennent très demandeurs de ces activités qui, menées régulièrement à raison de séquences de quelques minutes, s'avèrent être un accélérateur de découvertes, par exemple à propos des calculs avec les relatifs, à l'occasion de la recherche de la corrélation entre deux listes de nombres mettant en jeu la désignation fonctionnelle à découvrir *« 1 – a ».*

III - QUAND ET COMMENT PROPOSER CES MICRO-TÂCHES SÉMIO-COGNITIVES DE PRISE DE CONSCIENCE ?

1 Pourquoi proposer ces activités dès le cycle 3 ?

De l'avis des enseignants, a priori l'introduction de lettres dans le calcul numérique *ne doit pas, didactiquement soulever de grosses difficultés pour les élèves*.
Cela semble juste pour la majorité des élèves, *tant qu'on ne leur demande pas* de résoudre un problème demandant l'utilisation d'une ou deux lettres ! Comme par exemple pour l'énoncé suivant :

> *Si l'on additionne les âges de Sabrina, d'Ursule et de leur fils Thierry, on obtient 89. Sabrina a le triple de l'âge de son fils Thierry. Et Ursule a 5 ans de plus que Sabrina. Quel est l'âge de chacun ?*

Une évaluation en fin de collège et en début de lycée portant sur des énoncés de ce type nous a montré des échecs massifs (Rauscher, Bauerle, 2024, p. 45). Malgré l'enseignement de l'algèbre en cycle 4, on observe que quasiment aucun élève n'entreprend une démarche algébrique. Beaucoup tentent des démarches arithmétiques, certains en restent à schématiser les données, parfois avec des lettres, ou encore se lancent dans des essais par tâtonnements.
Comme l'a très bien fait remarquer un participant lors de la présentation de cette communication au colloque :

> *« Il y a la lettre qu'on utilise dans la formule de géométrie, il y a un sens derrière cette lettre.*
> *Que désigne la lettre ? Un nombre, des nombres ? Et dans ce qu'on utilise au cycle 3, c'est rare que la lettre désigne les nombres. »*

Dès lors, sans la prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle dès le cycle 3, on crée des blocages insurmontables pour la très grande majorité des élèves dus à la conception monolithique et insuffisante « *une lettre = un nombre* » lorsqu'il s'agit de résoudre un problème comme on peut le constater dans un épisode avec Jonathan (Rauscher, 2020, p. 471-474).

2 Le gap de l'utilisation des lettres pour résoudre des problèmes

En difficulté en mathématiques, Jonathan était suivi dans le cadre d'un tutorat en parallèle avec son parcours scolaire de la quatrième jusqu'en seconde). Voici ses réactions lorsqu'il a été confronté à l'énoncé suivant (bien connu par les professeurs) :

> *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?*

Sa réponse spontanée (il était alors en seconde) a été de dire :

« la bouteille pèse 100 g et le bouchon 10 g »

Suite à une relecture phrase par phrase de l'énoncé, il a compris que sa réponse ne répondait pas aux contraintes énoncées. Mais il restait paralysé. Pour le débloquer, le tuteur lui a alors proposé d'appeler « *x* » le poids de la bouteille. Cette proposition ne l'a pas surpris parce qu'il l'avait souvent rencontrée en classe « *pour désigner l'inconnue* ». Néanmoins il a préféré appeler **:**

« x le poids du bouchon »

Le tuteur, lui a alors demandé d'exprimer :

« le poids de la bouteille en fonction de x »

Il a répondu immédiatement :

*« **on ne peut pas savoir car on ne sait pas le poids du bouchon… !** ».*

Pour lui, *une lettre représentait UN nombre fixé au départ*, indépendamment de tout lien fonctionnel avec un autre nombre. Les réactions de Jonathan illustrent une conception des lettres qui est majoritaire — non pas chez les enseignants, bien sûr – mais chez les élèves tout au long du collège et encore au lycée.

Elle crée un obstacle infranchissable, car pour amorcer la mise en équation, il est nécessaire de considérer d'abord la lettre comme libre de toute détermination préalable, puis de redésigner par une lettre *« x » par* exemple le syntagme nominal, *« le poids du bouchon »,* puis par une expression algébrique incomplète *« **x + 100** » « La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon »* et enfin par une expression algébrique complète ***«** x + (x + 100) = 110 **»*** la phrase *« Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 g »*.

Dans cette suite d'opérations, on peut voir que la redésignation des désignations verbales de l'énoncé est une première phase qui aboutit aux expressions incomplètes que sont les désignations fonctionnelles. Effectuer cette phase nécessite la prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle à l'aide d'une lettre (Duval, Pluvinage, p143). Mais il ne s'agit là que de la première phase. La mise en équation d'un énoncé exige aussi que les élèves aient pris conscience de la différence entre ***expressions incomplètes*** et ***expressions complètes.*** Les expressions incomplètes correspondent **aux *syntagmes nominaux*** présents dans les phrases de l'énoncé par condensation d'une liste de nombres et désignation fonctionnelle. L'expression complète est ***l'équation*** qui modélise l'énoncé en articulant autour du symbole relationnel « = » les expressions incomplètes. Elle repose sur une relation d'équivalence sémantique désignant en référence à l'énoncé un même objet ou nombre (Duval, Pluvinage, 2016, p. 144)

Le problème qui s'est alors posé à nous fut celui de l'élaboration de micro-tâches qui permettant aux élèves de prendre conscience de cette complexité sémio-cognitive.

3 Comment faire comprendre la conversion des énoncés de problème en une équation ?

Il s'agit là d'un saut sémio-cognitif que les élèves doivent faire plus ou moins spontanément et qui n'existe dans aucune autre discipline que les mathématiques.

La démarche didactique classique part en général d'énoncés de problèmes pour expliquer aux élèves comment les modéliser par une équation, cela souvent à l'aide d'une « méthode » qu'on trouve présentée dans les manuels. Mais elle ignore la complexité sémio-cognitive de cette conversion, et ne permet qu'à très peu d'élèves de devenir autonomes par la suite. Pour que la très grande majorité des élèves puissent le devenir, un renversement de la démarche didactique classique est nécessaire (Duval, 2017, p. 91-92). Nous avons élaboré une séquence de micro-tâches que nous avons expérimentée en 3e de la fin novembre 2022 à la fin janvier 2023. Le lecteur pourra prendre connaissance en se reportant à l'article *« Comment des élèves de 3e ont commencé à entrer dans l'algèbre élémentaire* » (Rauscher, Bauerle, 2025, p. 31-41). Le temps pris par cette expérimentation a été minime par rapport au temps imparti pour l'acquisition des connaissances fixées dans le programme de l'année. L'expérience a été reprise dans d'autres classes de

4e et de 3e dans les trois dernières années (2023 à 2025) et s'est effectuée chaque fois en 4 ou 5 épisodes de 15 à 40 minutes et 3 évaluations intermédiaires d'une dizaine de minutes chacune. Ces évaluations ont permis de mesurer les progrès réalisés par les élèves. En général, dans les classes où l'expérience a été menée, pour plus des trois quarts des élèves, la conversion en toute autonomie d'un énoncé de problème en équation ne fut alors plus un obstacle. Pour tous ces élèves, dans la phase de conversion, la lettre avait d'abord **le statut de variable**, avant d'avoir, dans la phase de résolution de l'équation obtenue, celui d'**inconnue.**

4 Quelle différence entre nos activités de prise de conscience et les activités de généralisation ?

Quand nous présentons les micro-tâches destinées à faire prendre conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle par une lettre (paragraphe II2) à des enseignants ou à des chercheurs, elles sont assimilées dans un premier temps aux activités de généralisation qui recouvrent des problèmes de patterns, des activités de programmes de calcul, et l'utilisation ou non de tableurs. Pourtant ces micro-tâches et les activités de généralisation, n'ont absolument rien en commun, *même pas l'utilisation d'une liste indéfiniment ouverte de nombres à condenser en une lettre, laquelle est la première des deux micro-tâches*. Les activités de généralisation sont au contraire **des raisonnements inductifs pour trouver une règle générale** à partir d'une suite de nombres générée par une progression. Or cette progression se formule dans une expression incomplète — (a + 1) ou (3a), par exemple —, la lettre prenant alors **des valeurs différentes selon le rang qu'elle désigne** dans la suite de nombres générée par la progression. Comment des élèves de collège pourraient-ils découvrir par eux-mêmes les opérations cognitives de condensation et de désignation fonctionnelle par des activités mathématiques de généralisation qui les présupposent acquises et que ces activités sont justement censées leur en faire prendre conscience ?

Pour voir la différence, il suffit de faire une analyse a priori de ce que chacun de ces deux types de tâche demande aux élèves de faire, soit dans la question posée, soit dans la consigne donnée.

Dans les activités de généralisation, il faut balayer du regard chaque nombre *en le comparant au précédent, puis retenir la liste des augmentations,* et aussi *calculer le nombre suivant* le dernier de la liste donnée pour vérifier, et enfin *désigner cette progression* par une expression incomplète (a + …) ou (…a) ou par une formule. Ce qui est demandé aux élèves peut être également donné dans une consigne expliquant qu'il s'agit de coder ce que l'on trouve à l'aide d'une lettre ! Or les enseignants et les chercheurs constatent que l'usage d'une lettre pour coder la règle trouvée et exprimée en langage naturel ne se fait pas spontanément et doit être suggérée ou montrée par l'enseignant (Rauscher, Bauerle, 2024, p. 30). Lors de la présentation de notre communication au colloque de la COPIRELEM, l'intervention d'un participant a indirectement corroboré la nécessité d'une prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle :

> « J'ai testé en cycle 3, en CM1[5], CM2[6]. Il y a une situation d'Ermel, la boîte noire. Ils donnent un nombre d'entrée, on donne un nombre de sortie et on généralise les programmes avec une lettre et ça ne leur posait pas de problème. C'est de la généralisation mais *ça a dû leur servir un peu. La lettre ne venait pas d'eux, effectivement* »

En réalité donner la lettre ne sert à rien, puisque que dans d'autres activités, les semaines et les mois suivants, il faudra à nouveau leur donner la lettre et aussi la désignation fonctionnelle relative au problème à résoudre.

Dans les micro-tâches de prise de conscience, les élèves n'ont rien d'autre à faire qu'une ou deux comparaisons pour compléter les tableaux (un ou deux trous par ligne du tableau), et pour la suite ils

[5] Cours moyen 1 à l'Ecole Primaire en France , 1ère année du cycle 3 ,

[6] Cours moyen 2 à l'Ecole Primaire en France , 2ème année du cycle 3

n'ont rien à retenir puisqu'ils **ont tout en permanence sous les yeux.** Les élèves de cycle 4 qui avaient eu l'occasion de pratiquer nos activités recouraient ensuite très spontanément à l'utilisation d'une lettre pour généraliser une règle trouvée relative à une progression de type pattern ou autre, sans que l'enseignant ait besoin de le suggérer. Les activités de prise de conscience des opérations sémio-cognitives de désignation à l'aide d'une lettre arment les élèves pour aborder les problèmes de généralisation.

IV - L'INTRODUCTION DE LETTRES ENVISAGÉE DANS LE PROGRAMME DE CYCLE 3

Le travail de recherche effectué depuis plusieurs années dans notre groupe IREM ne pouvait que nous rendre attentifs au nouveau programme de cycle 3 qui consacre une de ses sections à l'initiation à l'algèbre. À ce sujet, nous nous posons deux questions :

- Quelles sont les conceptions des lettres qui y sont évoquées et promues ?
- Les difficultés didactiques et cognitives de l'introduction de l'algèbre au collège sont-elles prises en compte ?

Pour repérer les réponses à la première question, référerons-nous d'une part à ce que les indications du programme entendent par l'initiation à l'algèbre qui est appelée « *Initiation à la pensée algébrique* » et d'autre part aux exemples proposées « *pour la mise en œuvre des programmes* », exemples appelés « *exemples de réussite* » mis chaque fois en regard avec les « *objectifs d'apprentissage* » associés.

Dans la partie du programme consacrée aux « *Principes* » (MEN, 2025a, p 4), l'initiation à la pensée algébrique est annoncée comme un changement de paradigme par rapport au cycle 3 :

« Jusqu'au CE2, les problèmes mathématiques proposés sont essentiellement de nature arithmétique, dans le sens où ils mettent en jeu des nombres ou des grandeurs. Dans les raisonnements que l'élève met en œuvre pour les résoudre, il progresse du connu vers l'inconnu. À partir du cycle 3, l'introduction de la pensée algébrique marque un changement de paradigme. »

Le nouveau paradigme est alors décrit comme indiqué ci-dessous dans la première colonne du tableau. En nous plaçant du point de vue des enseignants qui voudraient le comprendre pour le mettre en œuvre dans leur classe, nous avons mis dans la deuxième colonne, en regard de certains passages, quelques questions pratiques :

Description du paradigme (MEN, 2025a, p 4)	**Questions**
*Il s'agit de **raisonner sur des nombres inconnus**, qui seront **représentés au cycle 4 par des lettres***	Qu'en est-il des lettres avant le cycle 4 ?
Le passage progressif de l'arithmétique à l'algèbre nécessite du temps et une approche adaptée.	Quelques mois ou quatre années ?
Pour accompagner cette transition, le programme du cycle 3 introduit quelques modèles pré-algébriques (schémas en barre, balances, motifs évolutifs)	Quel rapport entre des motifs évolutifs et la balance de Roberval ? De quoi sont-ils des modèles pré-algébriques ?
*Ces outils permettent de manipuler **des nombres inconnus représentés par des symboles ou par des mots**, facilitant l'accès à ce nouveau mode de raisonnement*	Comment passe-t-on des modèles pré-algébriques à l'écriture de nombres avec des lettres ?

Il s'agit donc de donner aux élèves des occasions de raisonner sur des nombres inconnus représentés au cycle 3 par des symboles ou par des mots qui seront remplacés au cycle 4 par des lettres. L'examen des

exemples donnés pour la mise en œuvre des programmes confirme cette orientation. En annexe nous avons mis une sélection d'exemples représentatifs.

Les exemples proposés par les programmes se présentent en majorité sous forme de « *problèmes à résoudre* » dans lesquels **la lettre** (ou un symbole qui en tient lieu) représente **un nombre inconnu** à chercher à partir d'égalités à trous présentées directement ou à élaborer (Annexe, exemples 1 et 2, MEN, 2025b).

Mais dans d'autres exemples, il s'agit aussi de nombres donnés pour appliquer une formule (Annexe, exemple 4, MEN, 2025b) et enfin, au seuil d'une activité de généralisation, un nombre considéré au cas par cas (Annexe, exemple 3, MEN, 2025b).

Dans les exemples donnés et dans les objectifs qui y sont associés, on peut repérer des progressions au sein d'un niveau ou marquant le passage d'un niveau à l'autre. Par exemple, pour l'objectif « *Trouver le nombre manquant dans une égalité à trou* », des égalités seront proposées en CM1 comme « *347 = 20 + …* » ou, plus difficile, « *24 × 5 = … × 10* » alors qu'en CM2 seront donnés des exemples où « *les membres des égalités proposées contiennent deux opérations* » comme *« 8 + (2 × …) = 11 ou 18 = 10 + (… ÷ 5)* ».

Mais le fait principal à souligner est que dans l'ensemble des exemples donnés, les lettres ou les symboles sont assignés à un statut de nombres inconnus ou de nombres donnés ou considérés au cas par cas.

Alors, les propositions de mise en œuvre par des exemples de réussite ne peuvent que renforcer la conception spontanée des élèves *« une lettre = un nombre »* et en conséquence les rendre aveugles à l'utilisation d'équations pour résoudre des problèmes ou même le traitement de problèmes de généralisation. Et, plus grave encore, entraîner l'échec dans l'utilisation de formules dès lors qu'il ne s'agit pas simplement de remplacer des lettres par des nombres comme on peut le voir dans une enquête PISA (Duval, Pluvinage, 2016, p.119-121, p. 147-148). On y constate que les élèves savent utiliser la formule de la vitesse v = d / t quand on donne la distance et le temps mais ne savent pas retrouver la distance si on leur donne la vitesse et le temps, tâche dans laquelle il est nécessaire dans un premier temps de considérer les lettres libres de toute détermination préalable pour transformer la formule. Chaque enseignant peut lui-même le vérifier avec les élèves des classes où il enseigne, en faisant un test diagnostique, simple et rapide, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction.

V - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le domaine de l'algèbre au collège et au lycée, rien n'exprime mieux l'incompréhension profonde qui a conduit initialement au décrochage de Jonathan que :

« Ils sont fous en math. Ils ne savent pas ce qu'ils veulent… » (Rauscher, 2020)

Afin qu'une grande majorité d'élèves comme Jonathan ne soient pas amenés à désespérer, il est donc nécessaire de leur proposer des activités qui permettent de comprendre comment on travaille en algèbre avec des chiffres, des lettres, des symboles d'opération et le symbole « = » et en articulant le langage naturel avec les écritures symboliques correspondantes. Il s'agit donc d'entreprendre **un travail d'alphabétisation** indispensable pour que les élèves puissent résoudre des problèmes de mathématiques ou de la vie réelle et par exemple soient capables de modéliser des situations réelles complexes. Nous avons présenté des activités qui permettent dès la 6e, dernière année du cycle 3, de prendre conscience des opérations sémio-cognitives en jeu lorsqu'on aborde une mise en équation d'un problème ou un problème de généralisation.

La question est de savoir si on pourrait déjà envisager ou **élaborer de telles activités pour les deux premières années du cycle 3.** Les réactions que nous avons recueillies lors de la présentation nous montrent que des collègues sont prêts à envisager une telle prospection, une prospection que nous entamerons nous-mêmes au sein de notre groupe de recherche IREM.

La spécificité de notre démarche pose aussi la question de la sensibilisation des enseignants à cette dimension d'alphabétisation qu'il est nécessaire de prendre en compte par l'observation des réactions et productions des élèves et par la proposition d'activités spécifiques lorsqu'on veut préparer les élèves à comprendre comment on travaille en mathématiques. Dans notre groupe IREM, composé de professeurs de collège, il a fallu un certain temps de tâtonnement et de remises en question pour comprendre que les activités à élaborer étaient spécifiques et se distinguaient des activités mathématiques habituelles préconisées par les programmes. Cette difficulté nous est apparue aussi lorsque nous avons eu l'occasion de présenter notre travail à d'autres collègues. En particulier, comme nous l'avons déjà évoqué, nos activités sont souvent de prime abord confondues avec des activités d'exploration et de généralisation, avec ou sans des supports tableurs.

Se pose alors **la question des formations.** Comment provoquer une prise de conscience rapide de l'enjeu de telles activités ? Dans les stages que nous avons animés pour les professeurs de collège, nous avons constaté qu'il est efficace de demander aux professeurs d'observer les réactions de leurs élèves devant des activités mathématiques nécessitant certaines opérations sémio-cognitives, plus efficace qu'un exposé ou une référence préalable à des écrits théoriques. Mais la question de la formation des enseignants de CM1 et CM2 qui ne sont pas des professeurs de mathématiques est bien sûr encore plus complexe et demanderait à être sérieusement envisagée.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Bauerle, S. (2025). Quoi faire pour introduire l'algèbre ? *Au Fil des Maths,* n°(557), 25 - 29

Duval, R. Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives* (21), 117 – 152.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Book, Springer

MEN (2025a) Programme de mathématiques pour le cycle 3. Consultée le 02/08/2025 (ensel620_annexe2-v2.pdf)

MEN (2025b) Exemples pour la mise en œuvre des programmes. Consultées le 02/08/2025 (CM1 download, CM2 download, 6e download)

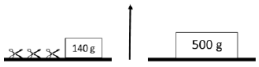
Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans P. M. T. Moretti et C. Finck Brandt (Dir.), Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (consulté 02 12 2025) (456– 485) GPEEM/UFSC. Educação Matemática – Repositório Institucional da UFSC.

Rauscher, J-C., Bauerle-Schoenenberger, S. (2023). Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?. Dans *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique*, (377-388). Strasbourg : IREM.

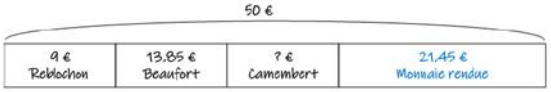
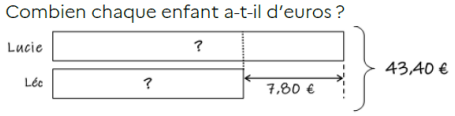
Rauscher, J.C., Bauerle, S. (2024) Comment des élèves de e3e ont commencé à entrer dans l'algèbre élémentaire. *Repères IREM*, *volume* (135), 25 – 46.

VII - ANNEXE : EXEMPLES DE MISE EN ŒUVRE DES PROGRAMMES

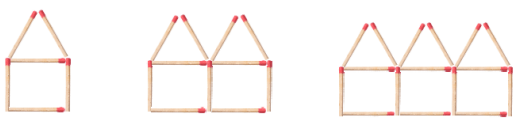
Exemple 1 (MEN 2025b, CM1 page 12) :

Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
• Trouver le nombre manquant dans une égalité à trou.	Dans des cas simples, en utilisant ses connaissances en calcul et les propriétés des opérations, l'élève sait trouver mentalement le nombre manquant dans une égalité comme les suivantes : 347 = 20 + … ; 5 760 – … = 5 360 ; 4 000 – … = 3 999 ; 2 × 137 × 5 = 137 × … ; 24 × 5 = … × 10 ; 144 + 7 = 142 + … ; 142 – 14 = … – 17. À l'écrit, l'élève sait trouver le nombre manquant dans une égalité à trou comme 748 + … = 1200 ; 24 × 5 = 20 × 5 + … × 5 ; 28 – 18 = … ÷ 5.
• Déterminer la valeur d'un nombre inconnu en utilisant un symbole ou une lettre pour le représenter.	L'élève comprend que des nombres inconnus peuvent être représentés par des symboles ou par des lettres. L'élève sait résoudre des problèmes où des nombres sont représentés par des symboles ou des lettres comme : ▸ On dispose de crayons tous identiques. On a le résultat suivant :  Quelle est la masse d'un crayon ? ▸ Maxime a mis trois paires de ciseaux identiques sur un plateau de sa balance et a obtenu l'équilibre en ajoutant différents poids comme indiqué sur le schéma ci-dessous.  Quelle est la masse d'une paire de ciseaux ? ▸ Rose a choisi un nombre noté N et a effectué le calcul suivant 3 × (2 + N). Elle a trouvé 27. Quel est le nombre N qu'elle a choisi ?

Exemple 2 (MEN 2025, CM2, page 10) :

Objectifs d'apprentissage	Exemples de réussite
• Résoudre des problèmes additifs en une ou plusieurs étapes.	Dans la continuité de ce qui a été mené au CM1, l'élève résout des problèmes additifs (parties-tout) en une ou plusieurs étapes en s'appuyant, si nécessaire, sur des schémas en barre ou des schémas avec un déplacement sur un axe. ▸ « Qassim a acheté un reblochon à 9 €, une tranche de Beaufort à 13,85 € et un camembert. Il a donné un billet de 50 € au fromager qui lui a rendu 21,45 €. Quel est le prix du camembert ? ».  ▸ Léo et Lucie ont 43,40 € à eux deux. Lucie a 7,80 € de plus que Léo. Combien chaque enfant a-t-il d'euros ? 

Exemple 3(MEN 2025, 6e, page 12)

• Identifier la structure d'un motif évolutif en repérant une régularité et en identifiant une structure.	L'élève résout des problèmes comme, par exemple, le suivant : On fabrique des petites maisons avec des allumettes, comme indiqué sur le dessin ci-dessous :  Étape 1 Étape 2 Étape 3 Combien faut-il d'allumettes pour réaliser : ▸ 1 maison ? ▸ 4 maisons ? ▸ 25 maisons ?

<table>
<tr><td></td><td>L'élève identifie une relation entre le nombre de maisons et le nombre d'allumettes, par exemple en organisant ses calculs dans un tableau :
<table>
<tr><th>Nombre de maisons</th><th>Nombre d'allumettes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$11 = 6 + 1 \times 5$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$16 = 6 + 2 \times 5$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$16 = 6 + 3 \times 5$</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td>25</td><td>$6 + 24 \times 5 = 126$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Exemple 4 (MEN, 6e, page 12)

• Connaitre la formule de l'aire d'un carré ou d'un rectangle. • Calculer l'aire d'un carré ou d'un rectangle.	L'élève verbalise la formule de l'aire d'un carré sous la forme « l'aire d'un carré est égal au produit de son côté par son côté ». Il l'écrit sous la forme « aire = côté × côté » avant de la formaliser sous la forme littérale $A = c \times c$. Il adopte une démarche similaire pour l'aire du rectangle. Le calcul numérique de l'aire d'un rectangle est exploité pour illustrer la commutativité de la multiplication entre deux nombres décimaux et entre un nombre entier et une fraction. En lien avec l'initiation à la pensée algébrique, l'élève utilise les formules du périmètre et de l'aire d'un rectangle dans lesquelles il substitue des valeurs numériques aux deux lettres. Cependant, le passage à la formule ne doit pas se faire prématurément

ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE EN LICENCE : DE VASARELY AU PARKING ET VICE-VERSA !

Maha ABBOUD
LDAR, INSPÉ de l'Académie de Versailles – CY Cergy Paris Université
maha.abboud-blanchard@u-cergy.fr

Cécile KERBOUL
INSPÉ de l'Académie de Versailles – CY Cergy Paris Université
cecile.kerboul@cyu.fr

Assia NECHACHE
LDAR, INSPÉ de l'Académie de Versailles – CY Cergy Paris Université
assia.nechache@cyu.fr

Résumé
Cette contribution présente et examine l'impact d'un scénario d'enseignement conçu pour développer les compétences géométriques d'étudiants en licence, en les confrontant à des tâches de reproduction de figures dans la dynamique micro et méso-espace. L'objectif du scénario est de favoriser une reconstruction active des connaissances en combinant le processus de visualisation et l'utilisation d'artefacts adaptés à la taille de l'espace. Même si les objectifs du scénario n'ont pas été complétement atteints, les résultats révèlent que les « interactions collaboratives » et la médiation des formateurs ont permis une évolution positive des procédures des étudiants.

L'ouverture à la rentrée 2026 de la licence professorat des écoles (LPE) met à l'ordre du jour la question des profils des étudiants intégrant une telle licence et leur rapport aux mathématiques et à leur enseignement. En effet, le MEN prévoit cette licence comme « une formation pluridisciplinaire et universitaire de haut niveau »[1], dont un des objectifs est « la consolidation des connaissances fondamentales » pour enseigner l'ensemble des champs disciplinaires de l'école et en particulier le français et les mathématiques. Or dans les années passées plusieurs types de formation ont déjà vu le jour dans les INSPÉ avec pour but une certaine préparation au professorat des écoles dès le premier cycle universitaire. Certaines de ces formations ont pris la forme de licences qui accueillent les bacheliers dès la L1. L'expérience d'enseignement dans ces licences révèle un public ayant un profil particulier vis-à-vis des mathématiques, ce qui soulève plusieurs questions et défis quant aux contenus à enseigner et modalités pour le faire, qui vont au-delà d'une « consolidation » ou d'une revisite des connaissances fondamentales.

Dans un article récent, Emprin (2024) propose des éléments de réflexion sur ces questions, en s'appuyant sur une expérimentation menée en licence pluridisciplinaire en sciences de l'éducation, visant à accueillir les étudiants se destinant au métier de PE[2]. Il y montre en particulier que les étudiants inscrits dans ce parcours ont, pour une grande majorité, un rapport assez négatif aux mathématiques et que le défi majeur s'avère être celui de transformer cette relation initiale difficile, voire anxieuse, et de restaurer un rapport positif à la discipline.

Notre propre expérience dans un contexte similaire corrobore ce constat sur le profil des étudiants et nous amène à poser la question des contenus mathématiques et la façon de les aborder avec eux. En effet, l'INSPÉ de Versailles propose depuis peu d'années une Licence Science Médiation et Éducation dans laquelle nous intervenons auprès des étudiants de L1, L2 et L3. Cette licence accueille majoritairement des étudiants issus de baccalauréats non scientifiques. Ces étudiants arrivent souvent avec des a priori négatifs et une vision réductrice des mathématiques, les associant principalement à des tâches techniques plutôt qu'à des outils de raisonnement et de résolution de

[1] https://www.education.gouv.fr/mieux-former-pour-mieux-faire-reussir-nos-eleves-reforme-de-la-formation-initiale-des-professeurs-450109

[2] Professeur des Écoles

problèmes. En préparant et mettant en œuvre nos cours, nous sommes confrontés à la problématique du rapport de nos étudiants aux mathématiques et son influence sur leur engagement dans les tâches que nous leur proposons et leur capacité à s'approprier les concepts en jeu. De plus, nous nous efforçons de concevoir les situations d'enseignement en relation avec le métier visé par les étudiants, en l'occurrence celui de professeur des écoles ou de médiateur scientifique. D'ailleurs, dans son travail, Emprin (ibid) propose de transformer la perception des mathématiques de ses étudiants en les exposant à des méthodes d'enseignement variées qu'ils pourraient reproduire. Dans la même lignée, les activités que nous faisons vivre à nos étudiants sont conçues pour leur permettre de vivre des situations qu'ils pourraient éventuellement réinvestir en classe avec des élèves où dans un contexte de médiation extra-scolaire.

Le domaine géométrique nous paraît être un bon terrain pour mettre les étudiants en posture de manipulation et de raisonnement sur des objets tangibles. De plus, nombre de recherches ont montré que les étudiants en formation au professorat des écoles rencontrent des difficultés dans ce domaine (Kuzniak et Nechache, 2020, 2021). Gibel et Blanquart-Henry (2017) font par exemple le constat des difficultés des enseignants à proposer à leurs élèves « des situations d'enseignement permettant le passage d'une géométrie instrumentée, principalement axée sur l'utilisation des outils usuels (règle, équerre, compas), à une géométrie déductive reposant sur des justifications fondées sur les propriétés géométriques des figures. » (Ibid., p. 38). D'autres recherches en didactique de la géométrie soulignent en plus l'importance de la diversité des espaces et des milieux pour favoriser l'apprentissage et la modélisation géométrique chez les élèves. Berthelot (2000) montre en particulier que le travail dans le micro-espace seul ne permet pas aux élèves de distinguer l'espace modélisé des espaces de représentation, et met en avant les apports du méso-espace, qui favorise la mobilisation et l'articulation des notions géométriques grâce aux déplacements et recollements d'informations.

Partant de ces éléments et constats, nous avons conçu et mis en œuvre un scénario de formation dont les fondements sont :

- choisir des activités que les étudiants se considèrent être capables de traiter ;
- (re-)travailler le rapport, majoritairement conflictuel, aux mathématiques de ces étudiants ;
- faire vivre aux étudiants des situations qu'ils pourraient réinvestir en classe avec des élèves à l'école ou lors de médiations scientifiques.

Dans ce qui suit, nous commençons par présenter la conception du scénario et les choix faits à ce propos. Nous mettons ensuite en avant les éléments qui fondent nos analyses du déroulement en précisant les moments dont nous présenterons l'analyse dans ce texte. Nous terminons par une discussion sur notre travail ainsi que des perspectives plus larges sur la formation mathématique à l'entrée en licence préparant au professorat des écoles.

I - CONCEPTION DU SCÉNARIO

1 Géométrie hors les murs

L'enseignement de la géométrie, traditionnellement associé à des supports papier, connaît un renouveau grâce à des initiatives visant à élargir les espaces d'apprentissage.

Les programmes officiels de 2025 soulignent explicitement, pour la classe de 6e, que « la feuille de papier n'est pas le seul support aux activités géométriques : les objets de la vie courante, mais aussi l'environnement ordinaire de l'élève (la salle de classe ou la cour de récréation), s'y prêtent également » (MEN 2025, p.22).

Sur certains sites académiques, des retours d'expériences (avec les élèves, ou avec des enseignants en formation continue) sont partagés et illustrent la mise en œuvre concrète de ces préconisations, en particulier autour de la reproduction de figures dans un espace « extérieur » à la classe (méso-espace), qu'il soit à l'intérieur de l'établissement scolaire ou à l'extérieur ou encore dans des lieux dédiés à la médiation scientifique.

De même, des initiatives de médiation culturelle et scientifique, comme celles portées par l'association *Mathématiques vagabondes*, visent à démocratiser l'accès aux mathématiques. Leur projet *StreetMath* (Corson et al., 2023) incite à investir l'espace public pour y dessiner des œuvres mathématiques, transformant ainsi les rues en supports d'apprentissage collectif et participatif.

Ces démarches, qu'elles soient institutionnelles, académiques ou associatives, convergent vers un objectif commun : ancrer les mathématiques dans le réel et rendre leur apprentissage plus accessible, concret et engageant pour tous

les élèves. Et nous avons souhaité faire vivre ce type d'expériences à nos étudiants, pariant sur le fait que ce serait nouveau pour eux et bénéfique pour leurs apprentissages mathématiques.

2 La dialectique micro et méso espace, un atout pour l'apprentissage de la géométrie

Selon Brousseau (2000), un sujet interagit avec différents types d'espaces pour lesquels celui-ci développe des modèles conceptuels différents. Cette différence porte sur la taille qui donne lieu à trois sortes d'espaces (Brousseau, 2000 ; Berthelot & Salin, 1992 ; Bloch & Salin, 2004) : micro-espace, méso-espace et macro-espace. Le macro-espace (que nous n'évoquerons pas ici) concerne l'espace dans lequel le sujet est immergé et qui est trop grand pour l'appréhender d'un simple regard. Le méso-espace est aussi un espace dans lequel le sujet est immergé mais à l'opposé du macro-espace son appréhension peut être réalisée par un simple regard. Il s'agit de l'espace « où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements » (Brousseau, 2000, p.7). Il peut s'agir d'une salle de classe, de la cour de l'établissement scolaire, etc. Le dernier espace, est le micro-espace où, à l'inverse des deux précédents, le sujet est en dehors de cet espace (par exemple, une feuille de papier, un écran d'ordinateur, etc.) et l'appréhende par les différents mouvements qu'il exerce dessus.

Si les travaux antérieurs s'accordent sur l'importance croissante des connaissances géométriques mobilisées dans le méso-espace, comme le relève Salin (2007), les mécanismes sous-jacents à ce phénomène restent encore à éclaircir. C'est dans cette perspective que les travaux de Gibel et Blanquart-Henry (2017) s'inscrivent. Ces derniers ont proposé à des élèves de cycle 3 (CM1-CM2) une tâche de reproduction d'une figure plane (un quadrilatère) dans le méso-espace en supprimant la contrainte liée à la mesure. De plus, ils ont fait le choix de ne pas contraindre les élèves à suivre un protocole de construction particulier en laissant ainsi libre cours, à leur créativité.

Au niveau de l'enseignement secondaire, Munier et Merle (2007) montrent que l'articulation entre ces différents espaces - notamment dans le cadre d'une approche interdisciplinaire - favorise le passage d'un problème spatial à un problème géométrique et l'acquisition de compétences en modélisation. Cette dernière est une piste pertinente pour l'enseignement de la géométrie, car elle fait émerger des questionnements théoriques à partir des finalités pratiques (Perrin-Glorian et Salin, 2010). Par ailleurs, l'articulation des situations d'enseignement mises en œuvre successivement dans le méso et le micro-espace contribue selon Bloch et Osel (2009) à aider les élèves à progresser dans leur compréhension des représentations de figures.

3 Description du scénario

Nous avons conçu un scénario de formation de six heures, autour de l'œuvre « Hatsoerg-5 » de Vasarely (Figure 1). Il se déroule en début d'année universitaire. Il est structuré en trois séances, chacune visant à explorer différents aspects de l'enseignement de la géométrie à l'école. Nous détaillons ci-dessous les objectifs spécifiques visés, les phases de travail, ainsi que les modalités choisies.



Figure 1. Hatsoerg-5. Vasarely (1970).

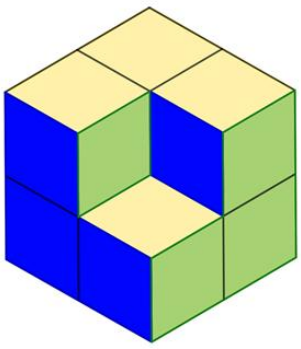


Figure 2. Modèle à reproduire.

3.1 Séance 1

Les objectifs visés dans la première séance (d'une durée de 1,5h) sont d'abord de reproduire un extrait de l'œuvre de Vasarely (Figure 2) dans le micro-espace puis de communiquer la démarche mise en œuvre en utilisant un lexique adapté.

Différentes phases sont prévues pour la mise en place.

Phase 1 (en collectif, 10 min) : les étudiants découvrent et décrivent l'œuvre projetée au tableau.

Phase 2 (par groupes de 3 ou 4 étudiants, 1h) : les étudiants ont pour mission de reproduire la figure 2 « à l'identique » (chacun d'eux reçoit un modèle[3]). Ils doivent s'accorder sur un protocole possible que chacun suivra pour reproduire la figure, puis communiquer par écrit ce protocole. Les instruments autorisés sont les outils traditionnels de construction géométrique, familiers des étudiants, à savoir le compas, la règle, la règle graduée, l'équerre et le rapporteur.

Phase 3 (en collectif, 10 min) : un bilan collectif est prévu pour revenir sur les réussites et difficultés ressenties par les étudiants. La validation des tracés sera questionnée.

3.2 Séance 2

Les objectifs principaux visés dans la seconde séance (d'une durée de 3h) sont d'analyser des productions de protocoles de camarades puis de reproduire la figure 2 dans le méso-espace.

Différentes phases sont prévues et se succèdent.

La séance débute en classe, les étudiants reconstituent les mêmes groupes qu'à la séance précédente. Après un rapide rappel du travail mené à la séance précédente, chaque groupe se voit attribuer trois des protocoles réalisés pour reproduire la figure 2 dans le micro-espace. Il s'agit de les analyser. Pour guider les étudiants, la question suivante leur est posée : *« D'après vous, ce protocole permettrait-il à une personne qui n'a pas vu la figure initiale de la construire ? Justifiez votre réponse. »*

Un bilan est ensuite mené en collectif pour mettre en évidence les éléments nécessaires pour rendre un protocole opérationnel. Enfin, un complément sur la construction d'un hexagone régulier à l'aide du compas et de la règle est apporté (en s'appuyant sur les protocoles produits).

En milieu de séance, les étudiants se rendent sur le parking de l'INSPÉ, dont une zone a été sécurisée et « rubalisée » (ce sera notre prochain espace de travail !). Chaque groupe a pour défi de reproduire la figure 2 (choix de l'échelle laissée à la charge des étudiants) puis de rédiger un nouveau protocole de construction. Le matériel autorisé est constitué d'outils non conventionnels : ficelles, tasseaux, craies de trottoir.

3.3 Séance 3

L'objectif principal visé dans cette séance (durée : 1,5h) est d'analyser des protocoles de la séance 2 en insistant sur la mise en mots (à l'oral, comme à l'écrit) des éléments de savoirs et en explicitant les connaissances géométriques mises en œuvre.

Différentes phases sont encore prévues pour la mise en place.

Phase 1 (en collectif, 5 min) : recontextualisation.

Phase 2 (par groupes de 3 ou 4 étudiants, 45 min) : les étudiants analysent trois protocoles réalisés lors de la séance 2 en répondant aux questions suivantes : *« D'après vous, ce protocole permettrait-il à une personne qui n'a pas vu la figure initiale de la construire ? Justifiez votre réponse. »* ; *« Relevez-vous la présence de vocabulaire relatif à la géométrie / de notations mathématiques ? Sont-ils correctement utilisés ? »*

Phase 3 (en collectif, 40 min) : un bilan est prévu sur la reproduction de figures (et la validation), l'écriture de protocoles. Les étudiants sont amenés à expliciter les connaissances géométriques mobilisées et à réfléchir sur les concepts géométriques de manière plus approfondie. S'en suit une institutionnalisation relative aux objets géométriques rencontrés.

II - DÉROULEMENT ET CHOIX D'ANALYSE

Dix-neuf étudiants de L2, répartis en six groupes, ont participé à l'ensemble du scénario.

Au fil des séances, différentes données ont été recueillies à travers plusieurs méthodes, incluant des observations, des productions des étudiants et des échanges en classe :

[3] Le côté du grand hexagone mesure 7,6 cm sur le modèle distribué.

- les productions écrites des étudiants (figures géométriques réalisées, protocoles des séances 1 et 2, ainsi que des éléments d'analyse) ont été analysées pour évaluer leur compréhension des concepts géométriques ;
- les enregistrements audio de moments d'échanges entre étudiants, entre formatrices et étudiants ont été transcrits pour permettre d'analyser les différentes interactions.

Pour l'analyse présentée dans ce texte, nous choisissons quelques moments de ce scénario qui nous paraissent significatifs relativement à l'activité des étudiants et celle des formatrices[4].

Dans un premier temps, nous nous centrons sur le protocole du groupe n°6 élaboré lors de la séance 1 (reproduction dans le micro-espace) qui illustre bien la difficulté des étudiants à produire un écrit compréhensible et valide (difficulté prégnante, que l'on retrouve dans quasiment tous les protocoles produits à ce stade du scénario), puis sur l'échange entre les étudiants et les formatrices lors de l'analyse de ce protocole et enfin, sur un extrait du bilan collectif qui s'en est suivi (séance 2).

Dans un second temps, nous revenons sur l'activité du groupe n°4 dans le parking (reproduction dans le méso-espace). Après avoir comparé les deux protocoles réalisés par ce groupe (respectivement en séances 1 et 2), nous nous concentrons sur l'échange entre les étudiants et les formatrices lors de l'analyse du protocole réalisé dans le méso-espace (séance 3, phase 2).

Enfin, nous nous focalisons sur quelques extraits de la dernière mise en commun (séance 3, phase 3) menant à une institutionnalisation sur certains objets géométriques rencontrés, en particulier le milieu d'un segment et le cercle.

1 Choix pour l'analyse des protocoles produits par les étudiants

Notre scénario porte sur une tâche de reproduction de figures complexes. Sa résolution nécessite que les étudiants exercent un processus de déconstruction dimensionnelle afin d'identifier les éléments clés à partir desquels ils pourront mener la reproduction de figures avec des outils de construction adaptés. En effet, une déconstruction dimensionnelle suppose selon Duval et Godin (2005), une coordination entre des compétences visuelles et discursives, où la perception des figures ne se limite pas à une reconnaissance globale (*visualisation iconique*), mais repose sur l'identification des éléments clés d'une figure et des relations entre eux. Par ailleurs, Duval et Godin (2005) précisent que la déconstruction dimensionnelle s'articule étroitement avec le langage, où les objets (points, droites) et leurs relations (alignement, parallélisme) sont nommés et mis en relation par l'énonciation. Ainsi, la visualisation et le discours s'enrichissent mutuellement.

Dans le cadre de l'école, *« l'objectif du travail autour de la reproduction de figures consiste, […], à amener progressivement les élèves à enrichir leur regard sur les figures, d'une vision iconique à une vision non iconique des figures, dans un mouvement de déconstruction dimensionnelle »* (Barrier et al, 2012, p. 327). Concernant les étudiants de licence, il s'agit de les aider à (re)construire leur regard sur les figures dans un mouvement de déconstruction dimensionnelle associé à la fois à un travail d'opérationnalisation des propriétés géométriques pour établir un discours (protocole de reproduction et justification de ce dernier), mais aussi à l'usage d'outils de construction géométrique adéquats pour reconstruire les éléments constitutifs de la figure à reproduire.

Plusieurs chercheurs (Berthelot et Salin, 1992 ; Brousseau, 2000 ; Combier et Pressiat, 2003) ont pointé l'importance de proposer des tâches géométriques dans le méso-espace. Cette importance relève de plusieurs points essentiels selon Berthelot et Salin (1992). Un premier point concerne la résolution de tâches de construction ou de reproduction spatiale. Ils soulignent que le passage du micro au méso espace incite les élèves à solliciter les connaissances géométriques nécessaires pour accomplir la tâche. Selon ces chercheurs, la mobilisation de ces connaissances se justifie par le fait que la résolution de ces tâches dans le méso-espace exige le choix d'artefacts autres que ceux employés dans le micro-espace, tels que la règle graduée, l'équerre, le compas. Barrier et al. (2012) ajoutent que l'introduction d'artefacts non usuels, comme la corde, peut favoriser l'émergence et l'institutionnalisation de connaissances géométriques fondées sur des propriétés. Un autre point porte sur la validation du processus de construction ou de reproduction dans le méso-espace. Berthelot et Salin (1992) indiquent que la communication des procédures de résolution dans le méso-espace contribue de manière

[4] Les formatrices qui ont mis en œuvre ce scénario sont la deuxième et troisième autrices de ce texte

significative à révéler l'importance d'utiliser un langage à la fois spatial et géométrique. De ce fait, la confrontation à des tâches géométriques dans le méso-espace est considérée comme un levier dans la construction de concepts géométriques. Les programmes de cycle 3 et 4, incitent aux recours à la construction de concepts de la géométrie dans le micro (feuille de papier par exemple) et le méso-espace (la cour de récréation).

Notre choix est fondé sur le fait que dans une tâche de reproduction d'une figure complexe, l'analyse de la figure est nécessaire pour déterminer les éléments clés nécessaires pour anticiper la reproduction. Elle permet ensuite d'expliciter, sous forme d'un protocole, les étapes pour reconstruire les éléments constitutifs de la figure. Ce protocole est opérationnalisé grâce au choix d'un ensemble d'artefacts adaptés. Par conséquent, notre dispositif d'enseignement est fondé sur la résolution de tâches de reproduction géométrique mettant en jeu la dialectique entre trois éléments : figure, artefacts et propriétés (Kuzniak et Nechache, 2014).

Pour rendre compte du travail effectif des étudiants, nous avons d'abord analysé les protocoles qu'ils ont produits. Cette analyse repose sur l'identification de la manière dont l'entité (figure, artefacts, propriétés) est mobilisée par les étudiants pour expliciter le protocole de reproduction et choisir les artefacts, et ceci en relation avec les propriétés géométriques mobilisées pour valider la production finale. Pour analyser les protocoles produits par les étudiants, nous allons nous concentrer sur plusieurs indicateurs :

- la sélection et la manière dont les artefacts (de construction) sont utilisés dans les deux espaces (micro et méso) et le but de leurs usages ;
- les propriétés géométriques mobilisées pour construire et justifier la reproduction des figures ;
- la validation de la production finale

2 Choix pour l'analyse du discours des formatrices

Pour analyser les enregistrements, nous avons mis le focus sur l'analyse de l'activité des formatrices en relevant dans leur discours des éléments se rapportant : 1) aux savoirs qu'elles mettent en jeu et ce qui en est explicité vis-à-vis des étudiants ; 2) à la vigilance didactique qu'elles exercent, notamment lors des moments d'échange avec les étudiants.

Concernant le premier point nous nous référons à la typologie des savoirs de formation définis par Sayac (2012) qui distingue deux types de savoirs imbriqués les uns aux autres dans une même situation. Il s'agit d'abord des savoirs disciplinaires qui se scindent à leur tour en trois dimensions : ceux travaillés sous un angle strictement mathématique ou épistémologique ; ceux concernant les mathématiques convoquées dans l'organisation du savoir à enseigner et enfin ceux concernant l'approche didactique des savoirs mathématiques et la transposition du savoir prescrit au savoir à enseigner. Étant donné que nos étudiants ne sont pas encore dans des situations de formation professionnelle, les savoirs ainsi distingués par Sayac ne sont pas tous à l'œuvre dans notre scénario. Nous nous centrons sur les premiers travaillés sous l'angle strictement mathématique et épistémologique.

Sayac définit également un deuxième type plus transversal qui se scinde également en trois dimensions qui concerne : les gestes professionnels élémentaires en classe ; la connaissance des élèves avec des approches sociologique, psychologique ou cognitive ; les connaissances institutionnelles et les instructions officielles, les programmes d'enseignement, les documents d'accompagnement ou autres. Là encore nous nous centrons sur une des dimensions, la dernière citée, puisqu'un de nos objectifs est bien de sensibiliser les étudiants au rapport entre ce que nous leur proposons comme activités et ce qu'il est possible de faire avec de jeunes apprenants dans le cadre d'un enseignement scolaire ou de médiation.

Bien que nous privilégiions le travail sur les deux types de dimensions que nous venons de préciser, il n'empêche que d'autres peuvent à l'occasion être convoquées comme ce qui concerne l'organisation du savoir à enseigner.

Quant à la vigilance didactique, rappelons d'abord qu'elle a été introduite par Charles-Pézard (2010) pour l'étude des pratiques enseignantes afin de rendre compte de l'ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux : global, local et micro[5]. De leur côté, Houdement et Masselot (2019) ont adapté le concept de la vigilance didactique pour les

[5] Composantes et niveaux d'organisation des pratiques font références à la théorie de la double approche (Robert et Rogalski, 2002) dans laquelle les travaux de Charles Pézard sont inscrits.

situations de formation en postulant que le formateur l'exercerait dans l'intention d'outiller au mieux les futurs PE de connaissances cognitives (quelles connaissances professionnelles utiles/accessibles aux débutants ?) et de connaissances médiatives (quelles modalités pour faire passer ces connaissances ?), sous les contraintes imposées par l'institution de formation. Dans notre travail nous relevons les moments où les formatrices exercent cette vigilance afin d'aider les étudiants à revoir et consolider leurs connaissances mathématiques et la façon dont ils les verbalisent et les mettent en fonctionnement.

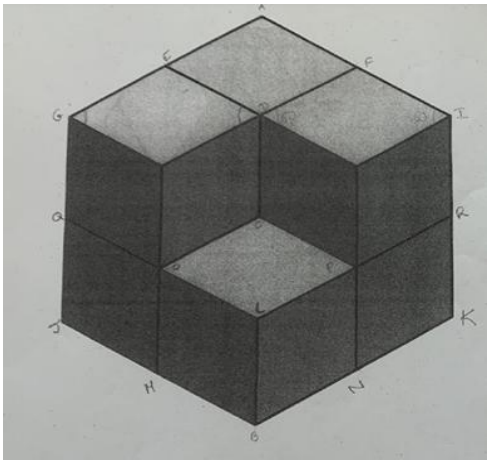
Ainsi une analyse en termes de types de savoirs en jeu et de vigilance didactique exercée nous amène à discuter des postures que les formatrices adoptent pour à la fois permettre aux étudiants de s'engager dans la situation et les accompagner dans la (re) construction de leurs connaissances géométriques et aussi les sensibiliser à une projection dans leurs pratiques futures relatives à ces connaissances.

III - ANALYSES ET RÉSULTATS

Dans cette section nous présenterons d'abord l'analyse du protocole du groupe 6, produit dans le micro-espace, puis celui du groupe 4, élaboré dans le méso-espace. Nous le comparerons également à ce que ce même groupe avait produit dans le micro-espace. Après chacune de ces analyses, nous exposerons et analyserons les échanges du groupe classe avec les formatrices à la suite de la présentation du protocole. Nous conclurons par une étude d'extraits de la phase d'institutionnalisation/bilan menée en fin de scénario.

1 Analyse d'un protocole établi pour la reproduction dans le micro-espace

Le protocole de reproduction de ce groupe d'étudiants est constitué d'une liste de huit instructions. L'analyse de ce protocole permet d'identifier les artefacts mobilisés et leur rôle, les sous unités figurales identifiées par les étudiants ainsi que les propriétés géométriques mobilisées.



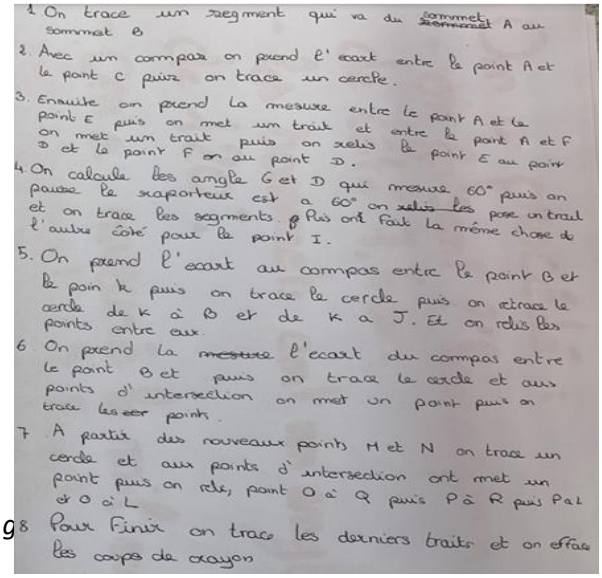

1. On trace un segment qui va du ~~sommet~~ A au sommet B
2. Avec un compas on prend l'écart entre le point A et le point C puis on trace un cercle.
3. Ensuite on prend la mesure entre le point A et le point E puis on met un trait et entre le point A et F on met un trait puis on relie le point E au point D et le point F au point D.
4. On calcule les angle G et D qui mesure 60° puis on pause le rapporteur est a 60° on ~~relie~~ les pose un trait et on trace les segments. Puis ont fait la même chose de l'autre côté pour le point I.
5. On prend l'écart au compas entre le point B et le pain K puis on trace le cercle puis on retrace le cercle de K à B et de K a J. Et on relie les points entre eux.
6. On prend la ~~mesure~~ l'écart du compas entre le point B et puis on trace le cercle et aux points d'intersection on met un point puis on trace les ~~cer~~ points.
7. A partir des nouveaux points M et N on trace un cercle et aux points d'intersection ont met un point puis on relie, point O à Q puis P à R puis P a L et O à L
8. Pour Finir on trace les derniers traits et on efface les coups de crayon

Figure 3. Protocole du g

1.1 L'identification des éléments clés.

L'analyse du protocole indique que les étudiants suivent une logique séquentielle pour construire la figure pas à pas. Cette logique est basée sur une décomposition de la figure initiale en un ensemble de segments. Aucune référence à des figures planes telles l'hexagone régulier, figure indispensable pour reproduire la figure, n'est indiquée dans le protocole. La démarche se limite ici à une succession d'instructions sans analyse approfondie des relations entre les éléments constitutifs de la figure. Ainsi, est indiqué le tracé de segments entre des points sans expliquer comment ces segments s'inscrivent dans la construction globale de la figure. Ces instructions constituent une liste d'action dépourvue d'une réflexion sur les relations entre les objets géométriques. Les étudiants semblent ne pas avoir identifié les éléments clés adéquats pour réaliser correctement la reproduction.

Les étudiants utilisent les lettres (comme A, B, C, etc.) pour rédiger le protocole. Or ces lettres ne servent pas pour indiquer des objets géométriques ou les relations entre ces objets. En écrivant par exemple « on trace un segment qui va du sommet A au sommet B », les lettres A et B ne sont pas utilisées ici pour décrire une relation géométrique (sommets, points d'intersection, etc.), mais simplement pour indiquer une action à effectuer (*« tracer un segment entre A et B »*) et en utilisant le vocabulaire relatif à l'action (*« un segment qui va de ... à … »*). Les lettres sont alors des codages qui servent à guider les actions à réaliser et non pas pour désigner des objets géométriques (Offre et al., 2006). Cela reflète le fait que les étudiants se focalisent sur l'exécution d'une liste d'instructions dépourvue d'une analyse des propriétés géométriques des sous-figures.

1.2 Usage des artefacts

Le protocole de reproduction fait référence à plusieurs artefacts de construction géométrique, tels que la règle graduée, le compas et le rapporteur, mais leur utilisation révèle des limites dans la compréhension des concepts géométriques en jeu. La règle graduée est principalement employée pour mesurer des longueurs et relier des points déjà construits. Le compas, quant à lui, est utilisé pour tracer des cercles passant par des points déjà construits, mais les étudiants ne semblent pas saisir la notion de cercle comme un ensemble de points équidistants du centre. Enfin, bien que le rapporteur ne soit pas explicitement mentionné, l'utilisation d'angles de 60° suggère son emploi, mais sans justification claire de l'intérêt de cette instruction. Ainsi, les artefacts sont utilisés de façon technique et mécanique sans expliciter les propriétés géométriques qui fondent leur usage.

1.3 Vocabulaire géométrique.

Le vocabulaire utilisé par les étudiants est imprécis, ce qui rend leur protocole difficile à suivre et révèle une maîtrise insuffisante du vocabulaire géométrique. Par exemple, des expressions comme *« on met un trait »* au lieu de *« on trace un segment »* montrent un manque de rigueur dans l'utilisation des termes géométriques. De plus, les étudiants ne mentionnent pas explicitement certains termes spécifiques aux figures planes mobilisées, comme rayon et centre pour le cercle.

Le protocole des étudiants est structuré en un ensemble d'étapes rédigées de façon chronologique. L'emploi d'un vocabulaire peu précis et l'absence de justification des choix indiquent un manque d'analyse de la figure initiale, en particulier une difficulté à mener une déconstruction dimensionnelle de la figure.

2 Analyse des échanges à la suite du premier protocole dans le micro-espace

À la suite de la présentation du groupe 6 de son protocole, les formatrices invitent les autres étudiants à réagir. Pendant ce temps où la plupart des étudiants approuve le protocole et le fait qu'il soit bien organisé, on observe que les formatrices n'interviennent pas explicitement mais plutôt se mettent en retrait pour laisser l'échange s'installer entre étudiants. Les seules interventions qu'elles font ne sont pas en termes de contrôle mais plutôt en termes de vigilance didactique, notamment relativement au vocabulaire utilisé, par exemple :

E : Nous on a dit que c'était bien car ça facilite le truc, heu…

F2 : La reproduction ? C'est ça ?

E : Oui la reproduction

Un étudiant a cependant exprimé son désaccord car le protocole n'inclut pas les valeurs des mesures des segments. S'en suit un échange peu structuré que les formatrices laissent se dérouler, mais décident ensuite de récapituler pour amener les étudiants à prendre conscience que le respect des mesures ici n'était pas exigé et attirer de nouveau leur attention sur le vocabulaire géométrique à utiliser :

F2 (récapitulant l'échange) : Donc, pour vous, vous dites qu'il n'y a pas la présence des mesures, donc ça complique, ça va complexifier le fait de reproduire cette figure-là sans avoir vu le modèle. C'est ça que vous voulez dire ?

E : Et aussi, […] il faut qu'on sache où sont les points pour pouvoir faire les traces.

F2 : Pour faire les traces et les points, les sommets, en fait, parce qu'ils les ont nommés A, B, C, D… Il y a tous les points […] (en s'adressant au groupe ayant réalisé le protocole) E dit que vu qu'on ne sait pas où se trouvent ces points-là, c'est un peu difficile. Qu'est-ce que vous en pensez, vous ?

E : On ne savait pas, nous, que ça allait être utilisé pour une reproduction

F2 : Vous ne saviez pas ? Sinon, vous auriez fait encore mieux que ça.

E : Exactement.

F1 : Qu'est-ce que vous auriez changé dans votre protocole ?

E : On aurait rajouté des mesures.

On voit ici que le besoin de faire appel aux mesures relevées sur le modèle pour effectuer la reproduction d'une façon précise est très présent dans le discours des étudiants, d'ailleurs ces mesures sont précisées dans la majorité des protocoles produits (Figure 4.a). De plus, l'ensemble des échanges montrent une certaine confusion entre l'action de reproduire une figure et la rédaction, des étapes de la reproduction, argumentée par les connaissances géométriques mobilisées. De plus, le codage des points semble nécessaire aux étudiants plutôt pour désigner ces points lors de la reproduction et non pour les associer aux segments dont ils sont les extrémités.

Les formatrices, quant à elles, restent dans une posture de retrait animant les échanges et exerçant une vigilance didactique pour une utilisation précise du vocabulaire géométrique et des notations mathématiques, et aussi pour l'organisation de la rédaction en étapes bien identifiées et justifiées mathématiquement. D'ailleurs, on retrouve ce dernier point dans le bilan collectif qui a suivi la présentation de l'ensemble des protocoles :

F2 : Donc finalement, si on voulait rendre les protocoles un peu plus fonctionnels et plus opérationnels, qu'est-ce qu'on pourrait faire ?

E : Les étapes.

F2 : Les étapes, oui.

E : Par exemple, mettre des tirets, qu'on peut dire étape par étape.

F2 : Le déroulement, oui, exactement. Ça, ça veut dire que dans un protocole, quand on vous demandera de le faire, parce que vous allez en refaire et puis vous serez évalués dessus. [..]. Et on n'écrit pas comme un texte en français, si je me permets, mais plutôt, c'est synthétique. Et dans les tirets …

E : Étape 1, étape 2…

F2 : Donc, il faut que ça soit comment ?

E : Les étapes, c'est... Dans l'ordre.

F2 : Dans l'ordre de la construction […]. Il y a un ordre précis pour pouvoir faire la reproduction.

F1 : Et avant, d'ailleurs, de trouver cet ordre-là, et pour trouver, j'ai envie de dire, cet ordre-là, qu'est-ce que vous êtes amenés à faire ? [Réponses inaudibles des étudiants] Oui, analysez la figure, regardez tous les éléments de la figure, regardez comment les éléments de la figure sont reliés les uns avec les autres, et ensuite, en effet, réfléchir à une chronologie de construction.

Notons en plus la complémentarité du discours des formatrices (F1 et F2). F2, de son côté insiste sur l'organisation et la forme précise du texte. F1, revient sur un point essentiel, préalable à la rédaction, qui est l'analyse de la figure pour identifier ses éléments clés et les liens entre ses éléments constitutifs.

Les formatrices insistent également sur le fait qu'il y a des éléments de ce bilan à retenir car ils seront sujets d'évaluation. On verra dans ce qui suit que les étudiants vont retenir ces éléments et les mettre en œuvre lors de la rédaction des protocoles dans la méso-espace.

3 Analyse comparée des protocoles établis par le groupe 4 pour la reproduction dans le micro-espace et le méso-espace

L'analyse comparée des protocoles élaborés par le groupe 4, dans le micro-espace (feuille A4) et le méso-espace (parking de l'INSPÉ), met en évidence une évolution dans leur protocole de reproduction, influencée par les retours des formatrices lors du bilan fait après les présentations des premiers protocoles.

Dans le micro-espace, le protocole est structuré en six instructions, rédigées de manière succincte. Le vocabulaire employé est peu précis, par exemple lorsque le terme « centre » est utilisé sans indiquer si c'est le centre d'une figure particulière (cercle, carré, etc.). On peut supposer que le terme « centre » est employé pour indiquer le centre des deux hexagones qui permettent de reproduire la figure. En effet, deux instructions du protocole font référence à deux hexagones *« nous avons pu tracer le premier hexagone »*, *« permis d'avoir le deuxième hexagone »* (Figure 4.a.). Les étudiants proposent de construire *« le premier hexagone »* en utilisant son centre, probablement en faisant référence au centre du cercle circonscrit à cet hexagone. Le deuxième hexagone est obtenu à partir de la décomposition du premier en un ensemble de carrés : *« nous avons tracé des carrés qui ont permis d'avoir le deuxième hexagone ».* Par ailleurs, aucune référence quant à l'usage des artefacts n'est explicitée dans ce protocole.

En revanche, dans le méso-espace, le protocole est rédigé de façon détaillée indiquant correctement la chronologie des étapes de reconstruction.

Les artefacts sont indiqués dans le protocole. La corde par exemple est utilisée pour tracer des cercles, reporter des distances, et pour déterminer le milieu d'un segment. Ainsi, telle qu'elle est utilisée, la corde matérialise la propriété de la conservation des distances et permet de donner du sens à la définition du cercle en termes de centre et de rayon, mais également à la définition du milieu d'un segment. Le tasseau en bois est utilisé pour construire les segments entre deux points déjà construits.

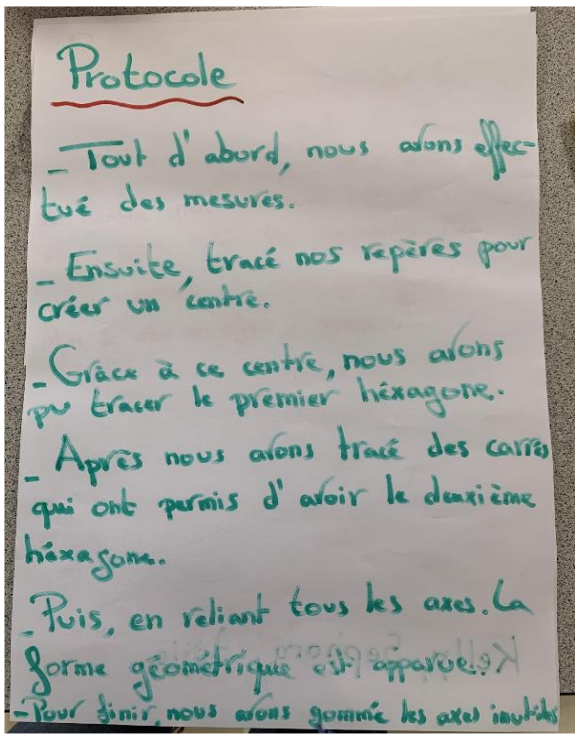


Figure 4.a. Protocole dans le micro-espace pour réaliser la figure sur une feuille A4.

Protocole sur la figure faites en groupe sur le parking de Vasarely

Tout d'abord, nous avons eu besoin de plusieurs craies, d'une corde et d'un long bout de bois rectangulaire qui servait de règle. Je vais maintenant vous présenter les différentes étapes :

- **1ère étape:** Faire un cercle à l'aide de la corde et de la craie, nous avons pris la corde, accrochez la craie au bout et la 1ère personne était à l'extrémité de la corde pour la tenir pendant que la 2ème personne traçait le cercle en bougeant juste la craie avec la corde tendue.
- **2ème étape:** Après avoir fini le premier cercle, nous avons fait un point pour le centre qu'on appellera O et placé un premier point A n'importe où sur le cercle.
- **3ème étape:** On a mesuré l'écart entre le point O et le point A, à l'aide de la corde.
- **4ème étape:** En repartant du point A et en gardant le même écart on a pu placer le point B(sur le cercle).
- **5ème étape:** Puis tout en gardant le même écart, en partant du point B on trace le point c et ainsi de suite.
- **6ème étape:** On relie tous les points ensemble pour que ça forme un hexagone.
- **7ème étape:** Ensuite, on a plié la corde en deux et sur le même principe que le premier, tout en partant du centre, nous avons tracé un deuxième cercle à l'intérieur du premier.
- **8ème étape:** Nous avons de nouveau placé un point au hasard sur le cercle (ce qui à été une erreur puisque lors du rassemblement des points vu que les points n'étaient pas alignés, il n'y avait pas les bonnes formes), donc nous recommençons comme la quatrième et cinquième étape.
- **9ème étape:** on retrace l'hexagone grâce aux points que l'on a tracé avant.
- **10ème étape:** À l'aide du modèle, on a pu reconstruire la figure de Vasarely.
- **11ème étape:** Enfin, on a colorié en 3 couleurs.

Figure 4.b. Protocole dans le méso-espace pour réaliser la figure dans le parking de l'INSPÉ.

À l'inverse du protocole élaboré pour la reproduction dans le micro-espace, le tasseau en bois est aussi utilisé pour contrôler la construction en mobilisant la propriété de l'alignement de points (Figure 5.a.).



Figure 5.a.



Figure 5.b.



Figure 5.c

Ce contrôle, indiqué dans l'étape 8, a permis de détecter une erreur portant sur la position des sommets du deuxième hexagone par rapport à ceux du premier, mais aussi le centre des cercles circonscrits aux hexagones. Ce contrôle a permis de rectifier le protocole à partir de la quatrième étape, permettant par la suite de reproduire correctement la figure initiale (Figure 5.c.).

Le vocabulaire géométrique utilisé dans ce protocole est plus précis que dans le premier, mais il subsiste certaines imprécisions, notamment en raison du fait que les étudiants ne font pas toujours référence de manière explicite aux objets géométriques identifiés. Par exemple, dans la première étape, où il est écrit : *« Faire un cercle à l'aide de la corde et de la craie : nous avons pris la corde, accroché la craie à une extrémité, et une première personne s'est placée à l'autre extrémité pour tenir la corde tendue, tandis qu'une deuxième traçait le cercle en déplaçant la craie ».* Bien que cette description soit compréhensible pour effectuer la construction, elle reste implicite. En effet, cette étape met en évidence la construction d'un cercle dont le centre est matérialisé par la position de la première personne (tenant une extrémité de la corde), et dont le rayon est matérialisé par la longueur de la corde tendue et maintenue par la deuxième personne.

Cette analyse comparée montre l'influence du bilan effectué à l'issu de la présentation des protocoles dans le micro-espace. En effet, on y souligne l'évolution en termes de précision du vocabulaire et d'usage pertinent des artefacts en lien avec les points de vigilance que les formatrices ont mis en avant lors de ce bilan.

4 Analyse des échanges lors de la présentation des protocoles élaborés dans le méso-espace et la synthèse collective qui s'en est suivie

Dans l'analyse de ces échanges nous allons mettre le focus sur les types de savoirs (en référence à la typologie de Sayac (ibid) que les formatrices ont mis en avant dans leur discours. Contrairement au premier bilan où elles sont restées dans une posture de retrait, ici elles se sont engagées activement pour faire émerger les savoirs mathématiques en jeu dans cette situation d'enseignement. Nous présentons à titre d'exemple les échanges entrepris pour énoncer/rappeler la définition du cercle. L'épisode correspondant commence par l'intervention suivante de F1 :

> *F1 : Moi j'aimerais bien revenir tout au début [sur le protocole de G4]. Tout au début, faire un cercle à l'aide de la corde et de la craie, nous avons pris la corde, accroché la craie au bout, la première personne était à l'extrémité de la corde pour la tenir, la deuxième personne passait le cercle en bougeant juste la craie avec la corde tendue... Je la trouve très intéressante, cette première étape, parce que vous êtes en train de créer des actions, vous êtes en train de faire des actions dans la cour, mais est-ce que vous arriveriez à dégager la propriété mathématique qu'il y a derrière ? Et à formuler cette propriété mathématique qu'il y a derrière ?*

Face au silence des étudiants, F2 et F1 vont matérialiser l'action en prenant chacune une extrémité de la corde et F2 effectuant le tracé du cercle. F1 demande alors :

> *F1 : Donc elle tourne autour de... Autour de l'autre personne au centre. Et en la tendant... Elle est restée comme ça. C'est quoi ça, la propriété mathématique ? Quelle est la définition du cercle qu'on peut donner ? Qu'est-ce que vous avez utilisé comme définition pour faire ça ? Un cercle, c'est quoi ?*
> *E : Le point et le centre.*
> *F2 : Et moi, je représente quoi ? Mathématiquement. Mathématiquement, je représente quoi ?*
> *F1 : Qu'est-ce qu'elle représente ?*

F1 : C'est tous les points qui forment le cercle. Et donc, ça veut dire qu'un cercle, c'est un ensemble de quoi ? Et comment ?

E : C'est un ensemble de points à la même distance du centre.

On voit dans cet épisode la difficulté des étudiants à prendre du recul par rapport à la description de l'action afin de l'associer à une propriété mathématique. Il a fallu une simulation accompagnée d'un guidage très serré de la part des formatrices pour les amener à formuler une propriété mathématique, pourtant déjà rencontrée et utilisée pendant leur scolarité au collège. Dans leurs discours, les formatrices insistent sur l'approche « mathématique » à adopter pour expliquer les constructions et énoncent le savoir géométrique sous-jacent. Elles soulignent bien dans leurs discours l'importance de ce savoir (à retenir) :

F1 : Sur le cercle, cette définition du cercle, vous prenez des notes ?

Un autre savoir, cette fois-ci de type transversal (à dimension institutionnelle et relative au métier) est également mis en avant par les formatrices. Toujours par rapport à la définition du cercle, et après l'avoir énoncé encore une fois, F1 cherche à faire projeter les étudiants dans leur métier à venir :

F1 : À votre avis, on la voit quand à l'école cette définition ?

E : En sixième. Pour moi, je dis cycle 3.

F1 : C'est ce qu'on voit en effet en cycle 3. Et dans les BO, ça s'appelle la caractérisation des points du cercle.

F2 : Vous avez cette propriété-là, mais sinon le cercle, il est vu en cycle 2.

F1 : Le cercle, il est vu en cycle 2. Il est même vu de toute façon en maternelle. On voit des cercles, mais en cycle 2, c'est l'objet que l'on obtient avec le compas ou en faisant le tour d'un disque. D'accord ? C'est ce qu'on appelle le cercle. Et puis, en cycle 3, on va aller voir qu'en effet, le cercle, c'est l'ensemble de tous les points qui sont à la même distance d'un point donné qu'on appelle le centre. D'accord pour ça ? Il y a une évolution sur la vision sur cercle au fur et à mesure des années.

Dans cet échange, on voit d'une part que les étudiants se souviennent (enfin !) qu'ils avaient déjà vu cette définition en cycle 3. D'autre part, on souligne la volonté des formatrices de se référer aux programmes d'enseignement mais aussi d'informer les étudiants de la progression d'enseignement de cette notion au fil des cycles. Cette mise en avant d'un savoir transversal participerait à la sensibilisation des étudiants au rapport entre la situation qu'ils ont vécue et ce qu'il est possible de faire avec des jeunes élèves dans le cadre scolaire et l'adéquation nécessaire au niveau scolaire.

Les échanges en grand groupe à la suite de la présentation des protocoles établis dans le méso-espace amènent progressivement à la phase de synthèse du scénario où les formatrices font une mise en commun et soulignent les éléments à retenir. D'un côté, on observe là encore une volonté de mettre en avant les savoirs mathématiques mobilisés pendant l'activité.

F2 : […] quelles sont les propriétés mathématiques qui ont été mobilisées ?

Silence des étudiants

F2 : Je me sens seule là... Alors…

E : Cercle

F2 : Une des propriétés mobilisées dans ce protocole est la définition du cercle, plutôt la propriété qui est, on l'a citée tout à l'heure, l'ensemble de points à égale distance d'un point donné appelé le centre.

F1 : Comment se dit aussi à égale distance ?

E : Équidistant

F2 : Oui. Une autre propriété utilisée ? Mobilisée dans ce protocole-là ? Allez... Vous avez pris la ficelle et vous l'avez pliée en deux et pour faire quoi ?

E : le milieu

F2 : Qu'est-ce que le milieu d'un segment ?

D'un autre côté, on observe que les formatrices pressentent que certaines connaissances, a priori simples, ne semblent pas encore totalement acquises par les étudiants, ce qui les incite à s'attarder dessus, même en fin de scénario. C'est le cas du milieu d'un segment. Ainsi F1 trace un segment [AF] au tableau et demande aux étudiants les conditions pour qu'un point I soit le milieu de ce segment :

F1 : Donc il faut combien de conditions ?

E : Qu'il soit sur le segment

F1 : Et ?

E : Équidistant
F1 : De qui ?
E : De A et F
F1 : Des extrémités du segment [AF]. Donc I est le milieu de [AF] signifie que I est sur le segment [AF] et […]
F2 : Donc I appartient au segment [AF] et AI est égale à IF. Notez ce qui est sur le tableau.

Les formatrices rappellent ici encore une fois une définition mathématique ainsi que la nécessité de la retenir. Nous verrons plus loin que même si les étudiants répondaient correctement, ci-dessus, aux questions de la formatrice, la question de la définition du milieu ne sera pas complètement réussie lors de l'évaluation qui a suivi la mise en place du scénario.

IV - UN SCÉNARIO QUI N'A PAS ATTEINT TOUS SES OBJECTIFS. QUELLES PERSPECTIVES ?

1 Retour sur nos objectifs

Notre objectif était de confronter les étudiants de licence à la résolution de tâches géométriques dans la dynamique micro et méso-espace pour favoriser la (re)construction de connaissances géométriques et spatiales. Il s'agissait alors de mettre en œuvre une dialectique entre le processus de visualisation et l'usage des artefacts pour dégager les caractéristiques de la figure à reproduire permettant ainsi de résoudre la tâche prescrite.

L'analyse des séances a révélé l'impact des échanges entre les groupes d'étudiants lors de la résolution de la tâche dans le méso-espace, notamment sur la validation du résultat de la reproduction. En effet, dans certains cas, l'intervention « spontanée » d'un groupe sur la production d'un autre groupe a permis à ce dernier de prendre conscience de la non-conformité de la figure reproduite à la figure initiale. Ainsi, la confrontation à la réalisation de tâches géométriques dans le méso-espace a joué un « effet catalyseur dans les échanges verbaux entre les acteurs » (Dénervaud et al., 2023).

L'analyse des productions des étudiants a montré parfois une évolution positive dans l'élaboration de protocoles de reproduction. Cette évolution est aussi due au rôle clé des formatrices dans les phases d'institutionnalisation. Ainsi, dans le micro-espace, les protocoles construits n'étaient pas précis : seulement une suite décrite d'actions à réaliser, sans une réelle déconstruction dimensionnelle. Ce qui n'était pas le cas dans le méso-espace, où les protocoles ont été plus précis et plus rigoureux. Cette évolution est soutenue par la médiation des formatrices qui ont adopté des postures variées : une posture en retrait pour favoriser les échanges et la recherche par groupe d'étudiants, et une posture directive pour guider activement les étudiants dans la prise de consciences des savoirs géométriques sous-jacents à leurs actions. Les retours des formatrices et les phases d'institutionnalisation apparaissent comme des leviers didactiques pour parvenir à « soigner » le rapport de certains étudiants à la géométrie.

2 Après la mise en œuvre du scénario : une maitrise toujours insuffisante de certaines connaissances mathématiques

Quelques semaines après la mise en place du scénario d'enseignement, nous avons souhaité évaluer ce que les étudiants avaient retenu. Nous leur avons notamment proposé plusieurs « questions de cours ». Nous revenons ici sur les réponses aux deux questions suivantes : *« Donner la définition du milieu d'un segment »* et *« Construire un hexagone régulier de côté de longueur 6 cm. Aucune justification n'est demandée ».*

La majorité des étudiants réussit la construction de l'hexagone, ils sont dans l'action et vraisemblablement habitués à construire des rosaces ! En revanche, les trois quarts d'entre eux ne réussissent pas à définir correctement le milieu d'un segment alors qu'ils savent le placer lorsqu'on le leur demande. Certains mentionnent uniquement l'alignement du milieu avec les extrémités du segment, d'autres uniquement l'équidistance du milieu aux extrémités du segment ; ou le définissent comme le centre d'un cercle passant par les extrémités du segment (Annexe 1). Ceci reflète bien le fait que la majorité des étudiants reste dans l'action et éprouve des difficultés à aller vers la conceptualisation et la décontextualisation.

Par ailleurs, en fin d'année universitaire, afin d'essayer d'avoir un peu de recul sur le vécu « géométrique » des étudiants, nous leur avons proposé la tâche suivante : *« Dessine-moi la géométrie »*[6] (en 10 minutes). Nous notons sur leurs productions (un exemple en Annexe 2) qu'ils ont plutôt retenu ce que nous leur avons fait vivre (notamment l'expérience vécue dans le méso-espace, ainsi que la situation du puzzle de Brousseau dans le micro-espace), l'usage des instruments, certains éléments du programme de géométrie de l'année. Ceci nous amène à penser que la plupart des étudiants semble dissocier les expériences qu'on leur fait vivre et les concepts à retenir.

Nous avons donc le sentiment d'un travail non achevé, l'articulation entre micro et méso espace, entre une expérience « artistique de reproduction » et les connaissances mathématiques mobilisées semble n'avoir pas atteint ses objectifs ! Mais aurions-nous pu faire mieux dans le peu de temps que nous avons pour les cours de mathématiques (d'après la maquette de cette licence) ? S'agit-il d'étudiants, dont le niveau est initialement tellement bas en mathématiques à l'entrée en licence (cf. l'introduction de ce texte) que nos tentatives de rattraper leur retard étaient destinées à ne pas pleinement aboutir ?

En tous cas, avec les maquettes de la nouvelle licence LPE et le nombre d'heures considérables consacrées aux mathématiques (3 x 80h sur l'ensemble de la licence) nous espérons que les contraintes, au moins factuelles, que nous avons éprouvées seront levées !

V - BIBLIOGRAPHIE

Barrier, T., Mathé, A.-C. et De Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x, 90*, 5 – 33.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Bordeaux 1, Bordeaux.

Berthelot, R. (2000). Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle. *Actes du 27e colloque de la COPIRELEM* (297 – 308). IREM Grenoble, France.

Bloch, I. et Osel, C. (2009). L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'une progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations. *Actes du 36e Colloque de la COPIRELEM*. IREM Toulouse, France.

Bloch, I. et Salin, M.-H. (2004). Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. *Actes du 30e Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*. IREM de Marseille, France.

Brousseau, G. (2000). Espace et géométrie. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques du département des sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymnon*.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *30 (2)*, 197 – 261.

Combier, G. et Pressiat, A. (2003). Apprentissages géométriques au début du Collège. *Institut national de recherche pédagogique-INRP, actes du colloque inter-IREM 1er cycle de Montpellier, Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques-IREM de Montpellier.*

Corson, N., Ernoult, A., Lhuissier , M. et Paris-Romaskevich, O. (2023). Activités Streetmath. *Au fil des maths*, *548*, 68 – 71. APMEP.

Dénervaud, S., Dias, T. et Serment, J. (2023). Le méso-espace : un étayage didactique ? *Revue de Mathématiques pour l'école*, *240*, 103 – 114. doi: 10.26034/vd.rm.2023.4118.

[6] Lors de la première séance de l'année, nous leur avions proposé la tâche *« Dessine-moi les maths »*.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7 - 27.

Emprin, F. (2024). Connaissances mathématiques pour enseigner au premier degré - analyse d'une proposition en première année de licence pluridisciplinaire. *Grand N, 114*, 73 - 114.

Gibel, P. et Blanquart-Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation, 43(1)*, 37 – 84.

Houdement, C. et Masselot, P. (2019). La vigilance didactique, un concept à interroger pour les formateurs d'enseignants… *Rencontres Internationales du Réseau Recherche Éducation-Formation*, *REF, Jul 2019*, Toulouse, France.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *Actes du 41e Colloque COPIRELEM - Mont de Marsan*, 234 – 259.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2020). Développer un travail géométrique complet et conforme chez les étudiants de première année de master enseignement en France. *Revue de Mathématiques pour l'école, 233*, 93 - 104.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 70 (2)*, 127 - 142.

MEN (2025). Programmes de mathématiques pour le cycle 3. Consulté le 9/10/2025, https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel620_annexe2-v2.pdf

Munier, V. et Merle, H. (2007). Une approche interdisciplinaire Mathématique-Physique du concept d'angle à l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(3)*, 349 - 388.

Offre, B, Perrin-Glorian, M.-J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés en fin de CM2**.** *Petit x*,72, 6-39.

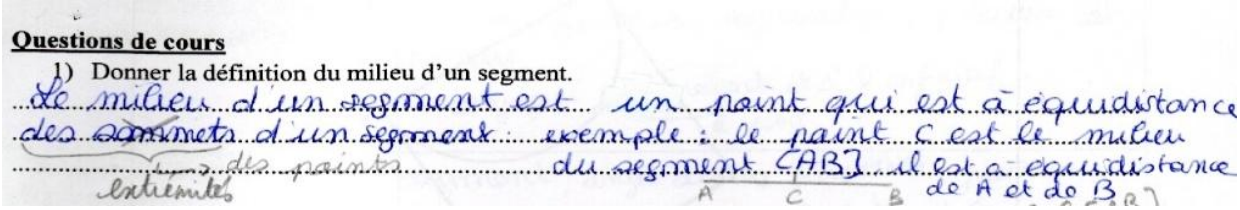
Perrin-Glorian, M.J. et Salin, M.H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2009*, 47 - 81. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques Paris, France : Université Paris – Diderot.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4)*, 505 - 528.

Salin, M.-H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 498, 647-670.

Sayac, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. Les savoirs de la formation. *Recherche et formation*, *71*, 115 - 130.

ANNEXE 1 (PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS – MILIEU D'UN SEGMENT)

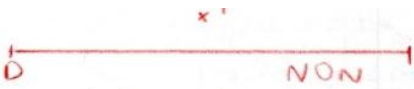


Questions de cours

1) Donner la définition du milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment est un point qui est à équidistance des extrémités des points d'un segment exemple : le point C est le milieu du segment [AB] il est à équidistance de A et de B





Questions de cours

1) Donner la définition du milieu d'un segment.

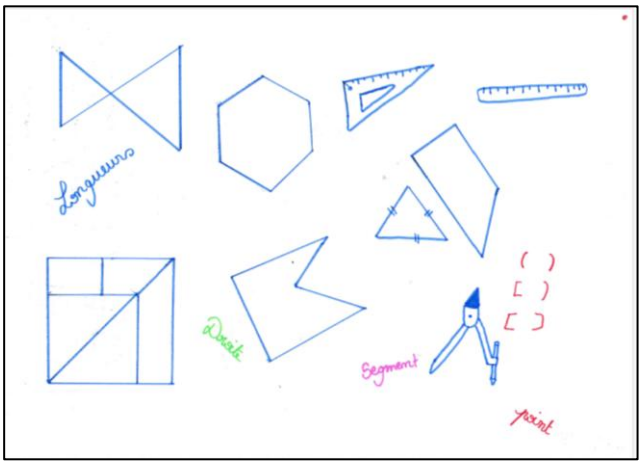
Le milieu d'un segment est un point qui coupe ce segment. Ce point est le point d'intersection du segment à coupé

Questions de cours

1) Donner la définition du milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment est le point permettant de relier les deux points du segment par un cercle

ANNEXE 2 (PRODUCTION D'ÉTUDIANT – DESSINE-MOI LA GÉOMÉTRIE)



Mon dessin représente tout ce que l'on a vu en géométrie durant cette année.
Parmi celà nous retrouvons l'hexagone régulier (tracé à la main), des trapèzes (régulier je crois), le puzzle avec des pièces à agrandir et les outils que l'on a utilisé et enfin certains mots que l'on a revu.

CO-CONSTRUCTION ET ÉVALUATION D'UNE SÉQUENCE D'APPRENTISSAGE DE L'AXE GRADUÉ AU CYCLE 2

Marie-Caroline CROSET
MCF, Université Grenoble Alpes, LIG Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Marie-Caroline.Croset@univ-grenoble-alpes.fr

Marie-Line GARDES
Professeure ordinaire, HEP VAUD
Marie-Line.Gardes@hepl.ch

Audrey GUY
PE, DSDEN de Savoie
Audrey.Guy@ac-grenoble.fr

Sandrine POINAS

CPD, DSDEN de Savoie
Sandrine.Poinas@ac-grenoble.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE
MCF, Université Grenoble Alpes LIG Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Sophie.Soury-Lavergne@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

L'axe gradué est un outil pour l'apprentissage des nombres utilisé du cycle 1 au cycle 4. Bien qu'il soit central pour la représentation des nombres, il reste peu enseigné comme objet d'apprentissage. L'équipe d'enseignantes, chercheuses et conseillères pédagogiques du projet CESALIN a collaboré pour concevoir et évaluer une séquence d'enseignement de l'axe gradué pour des élèves de CE1 ainsi qu'une formation d'enseignants. La séquence, intégrant du matériel tangible et des activités papier-crayon, vise la compréhension des principes clés de l'axe gradué, tels que la correspondance entre graduations et nombres et la constance des écarts. Son effet sur l'apprentissage a été évalué auprès de 23 classes de CE1 dans le département de la Savoie, selon une méthode de pré-test/ intervention/ post-test. Nous observons des progrès significatifs pour les élèves des 15 classes du groupe expérimental, qui maîtrisent mieux l'axe gradué que ceux du groupe contrôle, notamment pour associer points et abscisses ou mesurer des longueurs.

L'axe gradué est un objet central dans l'enseignement des mathématiques (Adjiage & Pluvinage, 2000), mobilisé de la maternelle au lycée, pour représenter de manière organisée les différents types de nombres et les relations qu'entretiennent les nombres entre eux (ordre, intercalation, etc.). Pourtant, son statut didactique reste ambivalent : souvent mobilisé comme un outil, il est rarement enseigné comme un objet d'étude au sens de Douady (1986). Parallèlement, la recherche en éducation et en psychologie cognitive a accordé une place importante à des tâches mettant en jeu un axe gradué : l'estimation de l'abscisse d'un point (*Position-to-Number*) ou le placement d'un nombre donné sur un axe gradué (*Number-to-Position*). Ces tâches se sont imposées comme des instruments d'analyse privilégiés pour explorer la manière dont les élèves construisent une représentation spatiale des nombres. Elles ont montré une forte corrélation avec la réussite générale en mathématiques, comme l'indique la méta-analyse de Schneider et al. (2018). Bien que cette corrélation ne renseigne pas sur un lien causal, elle a contribué à diffuser l'idée que la performance dans ces tâches constituerait un indicateur du développement des compétences en

numératie. Depuis les années 60, la métaphore de la « ligne numérique mentale » est ainsi mobilisée pour décrire une organisation spatiale possible des nombres, fondée sur leur « magnitude » (au sens d'une grandeur des nombres). L'hypothèse est que les nombres ne seraient pas représentés comme des entités discrètes et indépendantes mais comme des positions sur une grandeur continue analogique (Dehaene, 2010). Placer un nombre sur une ligne numérique refléterait la structure de la représentation interne de ces grandeurs. La tâche d'estimation de la position de nombres sur une ligne numérique est utilisée comme un paradigme de mesure de la grandeur : pour positionner un nombre correctement, l'enfant doit connecter le symbole numérique à la grandeur correspondante et l'intégrer dans une organisation spatiale cohérente. Des travaux empiriques montrent que cette compétence se construit progressivement : les jeunes enfants auraient d'abord des représentations plutôt logarithmiques, attribuant davantage d'espace entre les petits nombres, avant que leur représentation ne tende vers une organisation linéaire sous l'effet conjugué du développement naturel (Booth & Siegler, 2008; Siegler & Booth, 2004) et de l'enseignement (Dehaene et al., 2008).

Ces résultats ont entraîné des répercussions sur les politiques éducatives françaises. Une première tâche d'estimation est apparue en 2018 dans les évaluations nationales de cycle 2, en particulier celles de CP, pour identifier les élèves en difficulté. Cette tâche consistait à estimer l'abscisse d'un point sur une ligne numérique dépourvue de graduation intermédiaire, en choisissant parmi plusieurs valeurs proposées. Bien qu'elle n'ait pas été conçue pour orienter l'enseignement en maternelle, de nombreux enseignants de ce cycle ont progressivement intégré des exercices similaires dans leurs pratiques. Quelques années plus tard, en 2024, le format a évolué : les évaluations nationales ont introduit une nouvelle tâche, demandant cette fois de déterminer l'abscisse exacte d'un point sur un axe gradué à partir des informations présentes sur l'axe.

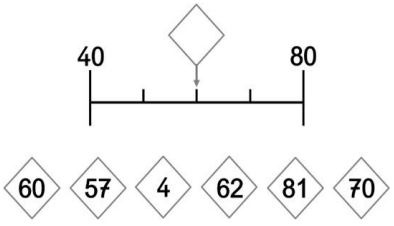


Figure 1. Exemple d'items présents dans les évaluations nationales d'entrée de CE1 en 2024

En 2024, 35,5% des élèves de CE1 réussissaient moins de deux tiers des tâches mettant en jeu un axe gradué montrant ainsi que ce type de tâches ne va pas de soi et qu'il nécessite peut-être un enseignement. Ce constat a motivé la mise en place du projet CESALIN qui s'inscrit dans une perspective de recherche collaborative associant chercheurs et enseignants. Il a été rendu possible grâce au soutien financier de l'Institut français de l'Éducation (IFé) et du pôle Pégase[1], tous les deux favorisant les recherches collaboratives entre enseignants, formateurs et chercheurs. L'objectif général de ce projet a été de concevoir, d'expérimenter et d'évaluer une séquence d'enseignement centrée sur l'axe gradué au cycle 2. La communication présentée ici en rend compte selon trois volets : la première partie revient sur les motivations qui ont conduit à envisager un enseignement explicite de l'axe gradué et sur les questions de recherche qui en découlent ; la deuxième partie décrit la méthode de recherche adoptée et l'expérimentation conduite en classes de CE1 dans le département de la Savoie ; enfin, la troisième partie présente les résultats obtenus ainsi que les limites de l'étude.

[1] https://www.polepilote-pegase.fr/recherche/rd-collaborative/projet-cesalin-curriculum-et-eiah-au-service-de-lapprentissage-de-la-ligne-numerique/

I - PROBLÉMATISATION

1 L'axe gradué, une relation entre géométrique et numérique

1.1 L'exemple d'une tâche portant sur l'axe gradué

La première question à examiner est celle des connaissances nécessaires et des difficultés rencontrées par les élèves pour réussir ce type de tâches, en particulier lorsqu'il ne se résout pas par un simple dénombrement, où l'enfant compterait les traits sur l'axe gradué.

Pour illustrer la complexité et les connaissances requises, prenons l'exemple de la tâche suivante : placer le nombre 20 sur un axe gradué où les nombres 0 et 10 sont déjà positionnés (Figure 2).

« Comment faites-vous pour placer le nombre 20 sur cet axe gradué ? »



Figure 2. Exemple d'une tâche de construction d'un point d'une abscisse donnée.

Pour résoudre cette tâche, un élève pourrait suivre les étapes suivantes :

- Je considère les nombres présents, 0 et 10
- Je calcule l'écart entre les deux nombres présents : 10 – 0 = 10
- Je sais que 20 c'est 10 + 10 ou encore deux fois 10
- Je repère la longueur du segment délimité par les deux points existants
- Je reporte cette longueur à partir du point à droite, je place le point obtenu sur l'axe
- J'écris 20 en regard du point que j'ai construit

Analysons la tâche et sa résolution. Tout d'abord, la consigne est mal formulée : « placer un nombre » pourrait être précisé en « construire un point et lui associer son abscisse ». Ensuite, cette tâche contient un implicite fort : ni la consigne ni l'information présente sur l'axe gradué de la figure 2 ne permettent de déterminer quelle est l'échelle sous-jacente à cet axe gradué. La graduation de l'axe est-elle linéaire avec un report régulier de longueur ou est-ce une autre échelle ? Enfin, au cours de la résolution, le nombre 10 a pris un double statut : il a été parfois associé à l'abscisse d'un point et parfois à la mesure d'une longueur. Cette ambiguïté résulte de la non distinction d'objets de nature différente (géométrique vs. numérique). Premièrement, les points, représentés sur la figure par des intersections de traits avec l'axe doivent être distingués des nobres qui peuvent être des abscisses (« je considère les nombres présents, 0 et 10 ») ou le résultat d'un calcul (« je calcule l'écart entre les deux nombres présents : 10 – 0 = 10 »). Deuxièmement, la notion de longueur (« je reporte cette longueur ») se distingue de la notion de mesure (la différence ou d'écart entre deux nombres). Troisièmement, le nombre en tant que mesure d'une longueur et le nombre en tant qu'abscisse d'un point doivent être distingués[2].

[2] Lorsque cette tâche a été proposée en formation d'enseignants, des expressions langagières ambiguës ont pu être relevées dans les propositions de résolution : par exemple, la « distance entre des nombres ». Cette expression mélange un aspect géométrique (distance) à un aspect numérique. Nous suggérons de distinguer la « distance entre des points » et « l'écart entre deux nombres ».

1.2 Définition d'un axe gradué

Nous avons défini l'axe gradué comme une droite orientée sur laquelle sont associés au moins deux points à des abscisses. Une telle définition permet de caractériser un axe gradué par le couple formé d'un nombre (correspondant à l'écart entre deux abscisses) et d'une longueur (définie par la distance entre les deux points correspondants). Elle offre ainsi un critère pour décider si deux représentations, mobilisant des informations différentes (points, nombres, graduations), relèvent ou non d'un même axe gradué. Cette approche rejoint la définition usuelle de la droite graduée en mathématiques, telle que rappelée par Cerclé et ses collègues (2020), qui consiste à fixer sur une droite un repère en choisissant arbitrairement deux points distincts, une origine et un point unité, définissant à la fois l'orientation de la droite et l'unité de longueur. Dans ce cadre, l'abscisse d'un point est définie comme la mesure algébrique de sa distance à l'origine, exprimée dans l'unité choisie (Cerclé et al., 2020). Avec cette caractérisation, l'usage d'un zoom permet de passer d'un axe gradué à un autre (puisque la longueur change mais pas les abscisses). Cependant, il est important de noter que ces propriétés reposent sur un implicite : celui d'une graduation d'échelle linéaire. En nous plaçant dans l'objectif d'un enseignement à l'école élémentaire, ce choix est tout à fait pertinent. Autrement dit, sur un axe, le rapport entre deux longueurs est toujours égal au rapport entre les écarts des abscisses. Si une longueur d'un segment est doublée, l'écart entre les abscisses des extrémités du segment est doublé.

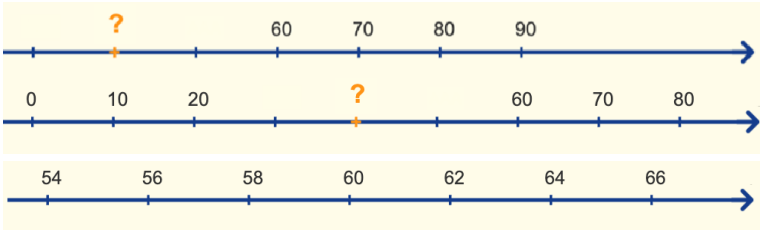


Figure 3. Les deux premières représentations sont celles d'un même axe (une même longueur correspond au même écart entre nombres). Par translation, on peut superposer tous les points de même abscisse. La longueur de l'unité est identique. La 3e représentation est celle d'un autre axe. Un zoom (homothétie) est nécessaire pour pouvoir superposer les points de la 3e représentation sur ceux des deux premières, la longueur de l'unité n'étant pas la même.

Ce travail épistémologique relatif à l'axe gradué nous a permis d'exhiber une caractéristique de l'axe gradué qui est la nécessaire association d'objets géométriques à des objets numériques (au sens du nombre). D'un côté, nous avons des objets géométriques incluant les notions de point et de longueur d'un segment. De l'autre côté, les nombres sont présents et jouent un double rôle : ils peuvent être soit des abscisses, soit des mesures de longueur, obtenues en calculant la différence entre deux nombres. L'enjeu principal de l'utilisation de l'axe gradué nous semble résider dans la mise en relation du nombre en tant que mesure de longueur avec le nombre en tant qu'abscisse d'un point. Elle nécessite de dépasser l'ambiguïté résultant de la confusion entre objets géométriques et objets numériques. De ces difficultés d'apprentissage a émergé notre envie de concevoir une séquence d'enseignement dédiée à l'apprentissage de l'axe gradué.

2 Des questions de recherche

Dans le cadre de cette étude, plusieurs questions de recherche sont identifiées et développées. La première question de recherche concerne la conception et la co-construction d'une séquence d'enseignement centrée sur l'axe gradué. L'objectif est de faire de l'axe gradué un objet d'apprentissage en soi plutôt qu'un simple outil au service d'autres types d'apprentissages, tels que la résolution de problèmes arithmétiques.

- **Est-il possible de concevoir une séquence d'enseignement où l'axe gradué est objet d'apprentissage** (et pas seulement comme un outil au service d'autres apprentissages avec des

caractéristiques implicites de fonctionnement) ?

Une seconde question de recherche porte sur l'évaluation de l'impact de cette séquence d'enseignement sur les apprentissages des élèves. Plusieurs sous-questions sont identifiées pour évaluer cet impact :

- **Est-ce que cette séquence permet d'améliorer l'apprentissage des élèves**, notamment leur capacité à réussir des tâches où l'axe gradué est explicitement proposé et évalué ?
- **Est-ce que les élèves progressent sur les relations additives et multiplicatives entre les nombres** ? En effet, au cours de cette séquence d'enseignement, les élèves sont amenés à travailler les relations entre les nombres, en construisant, par exemple, des axes gradués de 2 en 2, de 5 en 5.

II - CONCEPTION COLLABORATIVE D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT SUR L'AXE GRADUÉ

1 Une analyse didactique et épistémologique

L'analyse épistémologique et didactique de l'axe gradué a permis de faire plusieurs hypothèses quant aux obstacles à l'apprentissage, en particulier la confusion entre longueur et position, ou entre nombre et point, nous assurant ainsi de l'intérêt de concevoir une séquence d'enseignement sur cet objet. Nous rejoignons l'analyse de Térouanne et ses collègues (à paraître) quant à l'intérêt et aux enjeux de l'enseignement de la droite graduée à l'école primaire. Par ailleurs, nous souhaitions que cette séquence soit guidée par des principes didactiques partagés par les chercheuses et les formatrices de ce projet de recherche collaborative : premièrement, nous voulions que les caractéristiques de l'axe gradué soient discutées, construites et comprises par les élèves ; deuxièmement, nous souhaitions que les élèves manipulent du matériel tangible notamment pour réifier les longueurs en jeu et, troisièmement, nous voulions que cette séquence d'enseignement puisse être utilisable par des enseignants en milieu écologique (sans interférence avec un chercheur). De l'étude épistémologique et de ces principes orientant la séquence, trois objectifs d'apprentissage ont alors été dégagés, structurant la séquence d'enseignement :

- Le premier objectif est que les élèves soient capables de reconnaître un axe gradué à partir de ses propriétés et d'en donner les caractéristiques (des points positionnés régulièrement, des nombres associés appelés abscisses et des écarts entre deux nombres proportionnels à la longueur entre les deux points associés).
- Le deuxième objectif est que les élèves soient capables de construire un axe gradué à partir de la donnée d'une longueur associée à un nombre (pas nécessairement 1) et, réciproquement, sur un axe gradué, d'identifier des longueurs et leur mesure.
- Le troisième objectif est que les élèves soient capables de déterminer le nombre (l'abscisse) associé à un point donné sur un axe gradué et, réciproquement, de trouver, voire de construire, le point d'un axe associé à un nombre donné.

2 Co-conception de la séquence

La séquence prévue pour un niveau CE1 a été conçue pendant un an avec des rencontres régulières entre une enseignante, une conseillère pédagogique et des chercheuses. Elle s'est appuyée sur des ressources issues des différents domaines d'expertise des participantes, avec des contenus partagés au niveau de la recherche, telles que la situation de « la corde à linge » d'ERMEL (Colomb et al., 2005) ou « le centimètre à manche » issu d'un mémoire de CAFIPEMF, ressources partagées en formation ou encore issues de la

pratique expérimentée par l'enseignante dans sa classe. Le matériel a été construit par nos soins avec le soutien du Fablab de l'UGA (fabmastic.imag.fr).

2.1 Structure globale de la séquence

Chacun des trois objectifs d'apprentissage présentés ci-dessus s'est décliné en une situation se déroulant sur 3-4 séances. La séquence de 10 séances (de durée variable) est décrite dans le tableau 1 figurant à la fin de ce paragraphe.

Au cours de la situation I (Figure 4), l'axe gradué est introduit, tout d'abord, comme instrument de mesure. Les élèves étant rarement amenés à construire l'objet règle graduée, ils ont l'occasion d'interroger la graduation d'une règle en construisant leur propre instrument de mesure. Cela les amène à faire le lien entre la longueur d'une barre et deux points sur l'axe. Ensuite, l'axe gradué est enseigné comme moyen d'organiser spatialement les nombres entiers en les associant à des points (et plus à une longueur), faisant émerger également la question de l'espacement régulier. Enfin, sur le principe « exemple-oui, exemple-non » de Barth (2011), les élèves doivent analyser diverses représentations et argumenter pour trier celles qui représentent bien des axes gradués de celles qui n'en représentent pas.



Figure 4. Image de la situation I séquence CESALIN. À gauche, construction de l'axe gradué comme outil de mesure. Au centre recherche d'une position pour chaque nombre. À droite, tri des représentations d'axe.

Dans la situation II (Figure 5), le « bond » est objet d'étude. Suite à son apparition spontanée dans la classe de l'enseignante conceptrice, le mot « bond » a été retenu pour désigner le couple formé d'un nombre et d'une longueur, se répétant de manière régulière le long de l'axe. Dans la situation II, le bond est soit précisé dans l'énoncé, soit il est explicitement demandé de trouver le bond. De plus, ce bond n'est plus systématiquement de 1. L'enjeu est de détacher le nombre mesure de l'objet matériel « barre » pour le mettre en relation avec les points extrémités.

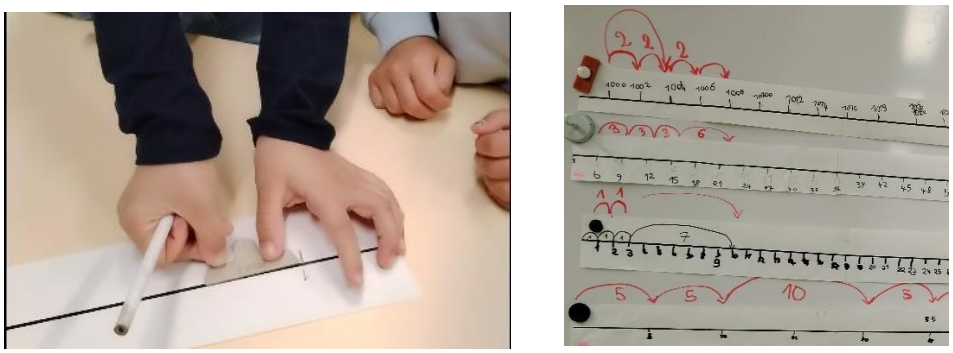


Figure 5. Les bonds dans la situation II de la séquence CESALIN. Le bond est d'abord matérialisé par un objet en

carton (à gauche), il devient ensuite une trace écrite le long de l'axe gradué (à droite).

Dans les séances de la situation III (Figure 6), la matérialisation du bond a disparu pour être remplacée par une valeur numérique correspondant à un écart. L'enjeu est d'utiliser, ici, le bond comme un outil et non comme un objet d'étude (ce qui était le cas dans la situation précédente) : il n'est plus explicite dans

la formulation des tâches des élèves, mais doit être mobilisé pour placer des points d'abscisse donnée ou trouver les abscisses de points de l'axe gradué. L'élève est alors amené à devoir ajouter des points dont la position n'est pas « régulière » par rapport aux autres points.

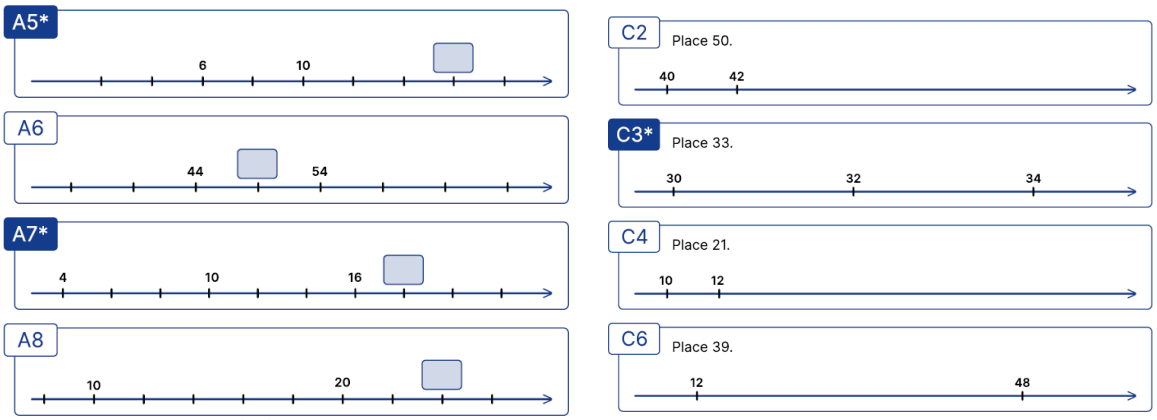


Figure 6. Tâches élève de la situation III de CESALIN. À gauche, il s'agit de déterminer le nombre abscisse d'un point donné, à droite de déterminer ou de construire le point d'abscisse donnée.

Deux grandes procédures sont visées :

- soit la différence de deux abscisses permet de répondre à la question : procédure additive(par exemple Figure 6, exercice C2) ;
- soit il y a besoin de calculer un écart plus petit : pour cela, l'élève est amené à trouver la moitié (ou le tiers…) de la valeur d'un bond initial par une procédure multiplicative (par exemple Figure 6, tous les exercices sauf C2).

Deux autres procédures peuvent apparaître ; que l'enseignant est amené à faire dépasser par le choix des nombres et des points. La procédure d'essai-erreur consiste à essayer différentes valeurs (par tâtonnement ou au hasard) ; elle peut toujours fonctionner car le travail porte sur des entiers. En effet, étant donné qu'entre deux nombres, il y a un nombre fini de nombres entiers, l'élève peut toujours mobiliser une procédure qui consiste à essayer toutes les valeurs numériques comprises entre ces deux nombres et conclure par déduction. Par exemple : « Je vois qu'il y a un seul point entre les points d'abscisses 8 et 10. C'est forcément le point d'abscisse 9 ». La seconde procédure est celle « d'application de la comptine ». L'élève peut ne pas prendre conscience qu'il faut additionner la valeur du bond, en récitant seulement une comptine apprise par cœur : « 2, 4, 6, 8 » associant les mots aux points qui se suivent, sans avoir conscience de l'ajout régulier de 2 entre chaque valeur. Il faut aider les élèves à dépasser ces procédures pour stabiliser les procédures dites additives ou multiplicatives qui seront nécessaires en cycle 3.

Nous avons utilisé une analyse en termes de variables didactiques pour produire et sélectionner les exercices provoquant l'évolution des procédures des élèves, jouant sur les positions des points et les abscisses. Cette analyse nécessite de distinguer les points qui sont associés à leur abscisse, des points sans abscisse. Par exemple, pour les exercices de détermination d'une abscisse, nous avons principalement utilisé les deux variables didactiques suivantes :

- variable « information présente sur l'axe », dont les valeurs possibles sont : (i) graduation complète d'une portion de l'axe (abscisses pour tous les points, exemple C3 de la Figure 6), (ii) abscisses régulières (tous les deux/trois/quatre… points, exemple A7 de la Figure 6) ou (iii) information minimale (deux points et leur abscisse, exemple A5 de la Figure 6) ;
- variable « position du point dont on cherche l'abscisse », dont les valeurs possibles sont : (i) position obtenue par report de la longueur entre deux points avec abscisse (exercices de la Figure

2 ou de la Figure 3) (ii) aucune longueur entre deux points avec abscisse ne peut être reportée à partir d'un point avec abscisse pour obtenir la position du point dont on cherche l'abscisse (tous les exercices de la Figure 6 à gauche).

Objectifs / Situations d'apprentissage	Séances	Messages forts
I. Construire des axes gradués de 1 en 1	Construire un axe gradué comme moyen de mesurer des barres en bois	Sur un axe gradué : - les nombres sont associés à des points, (des points peuvent être sans nombre mais aucun nombre de l'axe n'est sans point) - les nombres placés sont ordonnés, de la gauche vers la droite par convention - les écarts entre deux abscisses sont proportionnels aux distances entre les deux points associés.
	Construire un axe gradué comme moyen d'organiser spatialement les nombres	
	Différencier ce qui est un axe gradué de ce qui semble en être un mais n'en respecte pas toutes les caractéristiques	
II. Associer des bonds à un axe gradué	Construire un axe d'un bond donné, le bond étant matérialisé par la longueur d'un objet (Bond —> Axe)	Un bond correspond au couple d'un nombre et d'une longueur qui apparaît régulièrement sur l'axe. Il peut être entre deux points ou entre deux abscisses. Un axe n'est pas caractérisé par un seul bond.
	Construire un axe d'un bond donné, le bond n'étant plus matérialisé, présence de plusieurs bonds (Bond —> Axe)	
	Trouver un bond qui caractérise un axe gradué donné, le bond étant matérialisé par la longueur d'un objet (Axe —> Bond)	
	Trouver un bond qui caractérise un axe gradué donné, le bond n'étant plus matérialisé, présence de plusieurs bonds (Axe —> Bond)	
III. Associer des points et des nombres sur un axe gradué	Le point étant placé, trouver son abscisse (Point —> Abscisse)	Pour placer un nombre sur un axe gradué, il faut bien faire attention à l'information déjà portée par l'axe : - Il se peut qu'aucune information explicite sur la valeur d'un bond entre deux points ne soit donnée mais cette valeur se retrouve à partir des informations déjà présentes sur l'axe gradué. - On peut avoir besoin de trouver les valeurs de différents bonds. Les bonds doivent être réguliers. Les valeurs sont associées à des longueurs.
	Un nombre étant donné, trouver le point correspondant (Abscisse —> Point)	
	Un nombre étant donné, construire le point correspondant (Abscisse —> Point)	

Tableau 1. Structure de la séquence d'apprentissage

2.2 Gestes pédagogiques

Afin de guider au mieux les enseignants participant à l'expérimentation, nous avons cherché non seulement à expliciter les choix didactiques sous-jacents à la conception des situations d'apprentissage (présentés dans le Tableau 1) mais aussi à détailler les gestes pédagogiques permettant leur mise en œuvre effective en classe tels que l'institutionnalisation ou la différenciation. L'explicitation du contenu

mathématique, de la structure de la séquence et des gestes pédagogiques constitue un guide pédagogique[3] rédigé conjointement par les conceptrices de la séquence.

L'institutionnalisation des savoirs a été conçue de manière progressive et cumulative pour chacune des trois situations d'apprentissage. Chaque institutionnalisation reprend et synthétise les avancées réalisées au sein d'une même situation, tout en assurant un tissage (au sens de Bucheton & Soulé, 2009) entre les séances. L'explicitation de ces institutionnalisations permet aussi à l'enseignant de percevoir la cohérence globale de la situation puis de la séquence. Par exemple, pour la première situation, une trace écrite est proposée dans le guide pédagogique (Figure 7) retraçant l'évolution des concepts abordés : d'abord, le problème initial de mesure de longueurs (avec une barre de longueur 2 et deux barres de longueur 1), puis l'association de nombres à des points sur une ligne, et enfin, à l'issue de la troisième séance, les caractéristiques de la graduation.

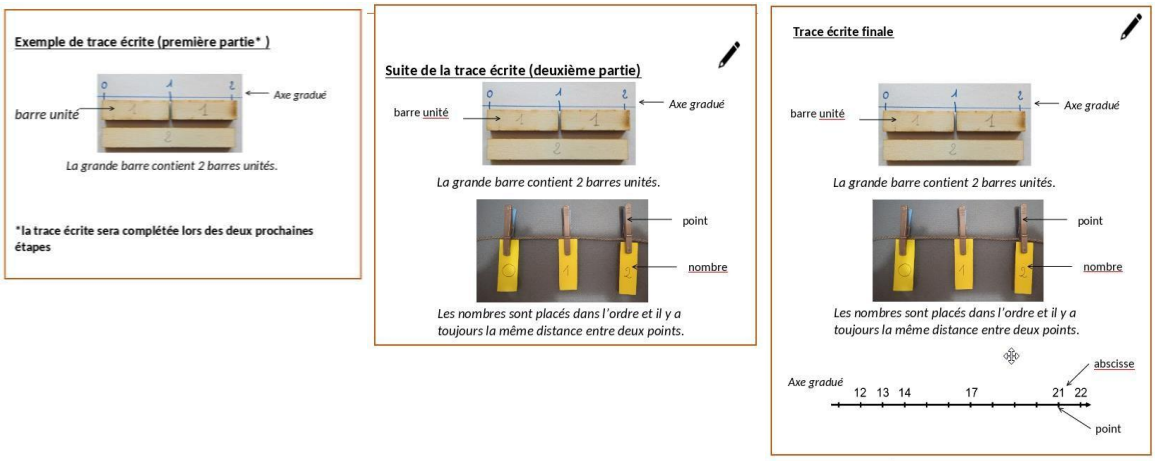


Figure 7. L'institutionnalisation s'enrichit d'une séance à l'autre comme l'illustre cette trace écrite de la situation I : à gauche, trace écrite de la séance 1 ; au milieu, trace écrite de la séance 2 ; à droite, trace écrite de la séance 3.

Par ailleurs, le guide propose des parcours différenciés garantissant que tous les élèves, quel que soit le parcours sélectionné, travaillent sur le même objectif d'apprentissage et mobilisent les procédures visées. Certains exercices sont identifiés comme obligatoires (marqués d'une étoile) ; ils couvrent l'ensemble des valeurs de variables didactiques essentielles avec un nombre réduit d'exercices, tandis que des exercices supplémentaires permettent un approfondissement. Par exemple, un exercice obligatoire (A7) peut être suivi d'un facultatif (A8), sans changement de valeur de variable didactique entre A7 et A8, assurant ainsi que tous les élèves traitent les cas clés avec des niveaux d'approfondissement variables.

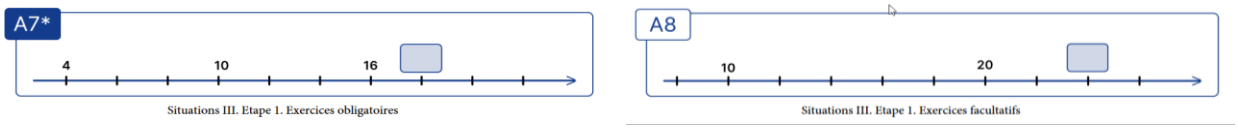


Figure 8. Exemple d'exercices différenciés : les deux exercices demandent à trouver l'abscisse d'un point donné. Les deux exigent de repérer quel est le bond entre deux points et le bond est identique aux deux exercices (2). La différenciation joue ainsi sur la présence d'un exercice supplémentaire (A8), sur des valeurs numériques un peu plus grandes et sur l'itération d'une somme (20+2+2).

[3] Téléchargeable sur https://www.polepilote-pegase.fr/recherche/rd-collaborative/projet-cesalin-curriculum-et-eiah-au-service-de-lapprentissage-de-la-ligne-numerique/

Le guide inclut une sélection d'exercices à corriger collectivement, accompagnée d'un discours à tenir lors de ces corrections. Le choix a été fait de se focaliser sur quelques exercices emblématiques et de ne pas tout corriger. Ce qu'il y a à dire lors de la correction est explicité dans le guide.

Enfin, un dernier principe pédagogique consiste en l'importance de ritualiser voire d'algorithmiser les procédures auprès des élèves. Par exemple, l'élève doit automatiser au cours de la séquence la nécessité d'observer l'axe et de prendre de l'information (présence de points, régularité des positions des points, présence d'abscisses, orientation, présence éventuelle du 0, du 1, etc.) avant de commencer à résoudre l'exercice. Pour cela, le guide incite l'enseignant à poser la question « Que voyez-vous sur cet axe ? » de façon ritualisée, lors de chaque exercice résolu collectivement ou lorsque qu'il passe auprès d'un élève.

III - EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation a été menée selon un protocole pré-test / intervention / post-test, s'étalant de juin 2023 à mars 2024 (Figure 9).

1 Démarche d'expérimentation

Le recrutement des enseignants s'est échelonné sur près de six mois grâce à l'aide d'une autre conseillère pédagogique et du soutien financier de l'Ifé. En octobre 2023, 26 enseignants ont formalisé leur participation et un tirage au sort a permis de les répartir en deux groupes, en contrôlant les effectifs des élèves des deux groupes et l'indice de positionnement social (IPS) afin de garantir la comparabilité des résultats : un groupe expérimental (13 enseignants, 173 élèves de CE1) et un groupe contrôle (10 enseignants, 138 élèves de CE1).

En novembre 2023, une formation spécifique a été dispensée aux enseignants du groupe expérimental (présentée dans la section suivante). Organisée sur deux demi-journées de trois heures, cette formation a été intégrée dans les 18 heures de formation obligatoire des enseignants grâce au soutien de la DSDEN de la Savoie. Elle a marqué le lancement effectif de l'expérimentation, avec la passation des pré-tests auprès de tous les élèves, tant dans le groupe expérimental que dans le groupe contrôle.

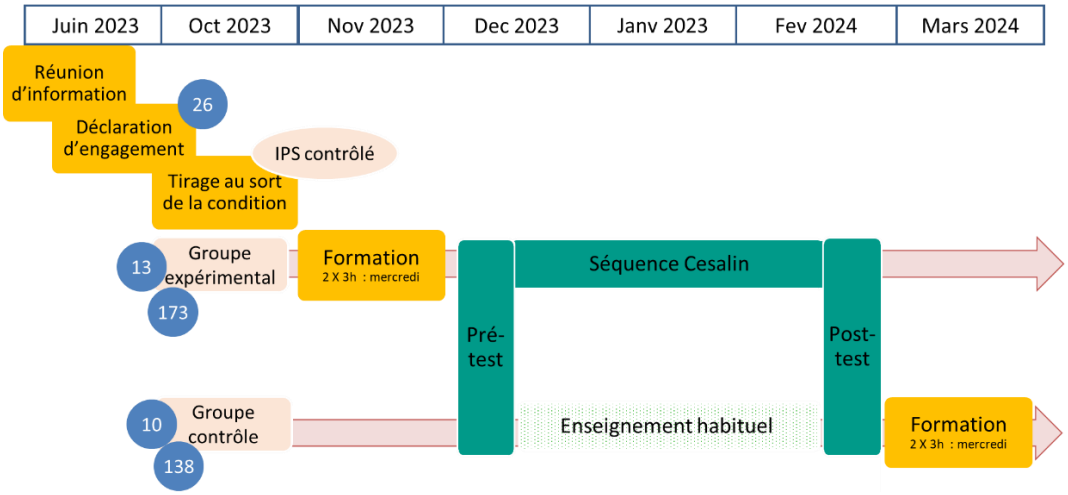


Figure 9. Démarche d'expérimentation du projet CESALIN

La séquence pédagogique a ensuite été mise en œuvre dans le groupe expérimental entre décembre 2023 et février 2024, tandis que le groupe contrôle poursuivait un enseignement « habituel ». En février 2024, des post-tests, identiques aux pré-tests, ont été administrés à l'ensemble des élèves, permettant d'évaluer les progrès réalisés.

Enfin, en mars 2024, une formation a été proposée aux enseignants du groupe contrôle, adaptée pour intégrer les observations et retours issus de l'expérimentation, afin de leur permettre de s'approprier les apports de la séquence sans exiger une implémentation immédiate.

2 Formation

La formation proposée aux enseignants participants visait à clarifier ce qu'est la démarche expérimentale, à leur apporter des éléments théoriques sur l'axe gradué et à préparer concrètement la mise en œuvre de la séquence.

Tout d'abord, les enseignants ont été sensibilisés à la démarche expérimentale, insistant sur des principes clés : ne pas diffuser le contenu de la séquence en dehors du cadre de l'expérimentation et éviter toute initiative s'écartant du protocole établi. Un point particulier a été consacré au rôle et à l'importance du groupe contrôle, dont l'objectif n'est pas d'évaluer les pratiques enseignantes, mais de distinguer, dans les apprentissages des élèves, ce qui relève d'un apprentissage spontané ou de l'effet test-retest (reproposer un test à un sujet dans un intervalle court) ou d'autres activités mathématiques de ce qui est spécifiquement induit par la séquence expérimentale. Des apports théoriques sur l'axe gradué ont ensuite été présentés, proches de ce qui a été proposé au début de ce texte. Les enseignants ont également été familiarisés avec les principes de conception de la séquence et des séances, notamment l'articulation en trois situations distinctes et les enjeux pédagogiques associés à chacune d'elles. Pour faciliter l'appropriation du guide, une mise en œuvre pratique a été illustrée à l'aide de supports vidéo, issus des séances expérimentées par l'enseignante-conceptrice. La lecture du guide pédagogique a été guidée et accompagnée d'échanges collectifs visant à clarifier les points fondamentaux de la séquence et à lever d'éventuelles ambiguïtés.

3 Suivi d'implémentation

Pour assurer un suivi de l'implémentation de la séquence, deux hotlines en visioconférence ont été organisées. Ces temps d'échange avaient pour objectif de permettre aux enseignants de solliciter des réajustements (par exemple, sur le calendrier ou l'adaptation des activités) tout en atténuant le sentiment d'isolement souvent ressenti lors de la mise en œuvre de nouvelles séquences pédagogiques. Ces hotlines offraient également un espace pour exprimer des questions ou partager des retours sur le déroulement des séances.

En complément, un questionnaire de fidélité d'implémentation était envoyé aux enseignants toutes les deux séances. Cet outil permettait d'évaluer la fidélité d'implémentation de la séquence, de suivre l'absentéisme des élèves et de recueillir les perceptions des enseignants sur les enjeux et les points clés des séances au moment même de leur mise en œuvre.

Enfin, des observations directes en classe ont été réalisées par la conseillère pédagogique. Ces observations, documentées par des vidéos et des photographies, ont permis une analyse qualitative (encore en cours) des pratiques enseignantes et des dynamiques de classe, enrichissant ainsi les données recueillies pour l'évaluation globale du dispositif.

IV - RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE

La première question de recherche portait sur la possibilité de concevoir une séquence dans laquelle l'axe gradué serait enseigné comme un objet d'apprentissage à part entière, et pas uniquement mobilisé comme un outil au service d'autres contenus. Nous souhaitions que les élèves vivent des situations qui donnent du sens aux caractéristiques de l'axe, même si certaines sont des conventions. Le travail collaboratif entre chercheurs et enseignants a permis d'élaborer une telle séquence, en veillant à en expliciter chaque étape et en s'appuyant sur des principes pédagogiques partagés. Le premier objectif a donc été atteint.

1 Qu'ont appris les élèves grâce à la séquence sur l'axe gradué ?

Les données recueillies en pré et post-tests ont permis de répondre à la seconde question de recherche en évaluant l'efficacité de cette séquence sur les apprentissages des élèves par comparaison des performances des groupes expérimental et contrôle. Les analyses montrent que les moyennes d'âge des élèves des groupes expérimental et contrôle sont comparables (88,65 pour le groupe expérimental et le 88,56 mois pour le groupe contrôle, soit environ 7 ans et demi). De même, la répartition des filles (166/302 et 104/196) est équilibrée entre les deux groupes.

Plus précisément, pour évaluer si les élèves du groupe expérimental, ayant suivi la séquence d'enseignement, progressaient davantage que ceux du groupe contrôle sur des exercices utilisant explicitement un axe gradué, deux types de tâches ont été proposés (Figure 10). D'une part, l'élève devait trouver l'abscisse d'un point sur un axe gradué (8 items) et d'autre part, l'élève devait trouver le point d'une abscisse donnée sur un axe gradué (8 items). En prétest, les élèves de chacun des groupes réussissaient en moyenne 7 items sur 16. En post-test, le groupe expérimental a atteint une moyenne de 11 items réussis sur 16 tandis que le groupe contrôle a, certes, progressé mais a obtenu une moyenne de 8,5 items réussis (Figure 11).

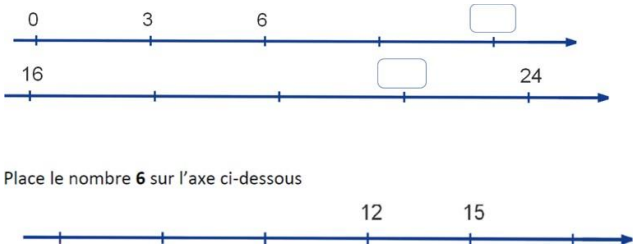


Figure 10. Exemples d'item d'évaluation proposés dans les pré et post tests

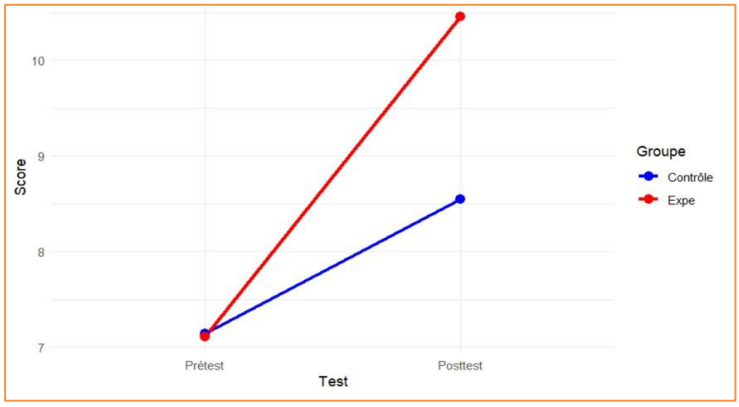


Figure 11. Évolution des résultats aux exercices de repérage de point (resp abscisse) associé à une abscisse (resp. point) donnée

Un autre exercice (Figure 12) évaluait la capacité des élèves à mesurer une longueur à l'aide d'une règle graduée « cassée ». Les résultats indiquent que les élèves du groupe expérimental (passant de 15% de réussite à 35%) ont mieux réussi cet exercice que ceux du groupe contrôle (passant de 10% de réussite à 20%), confirmant ainsi l'efficacité de la séquence sur des tâches directement liées à l'axe gradué.

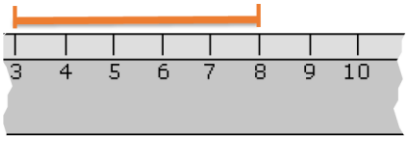


Figure 12. Exercice du pré et post-test portant sur la résolution de problème avec l'axe gradué

Enfin, la dernière question de recherche visait à évaluer si la séquence permettait d'améliorer les compétences des élèves liées aux relations additives et multiplicatives entre les nombres. Un exercice (8 items) a été proposé, demandant aux élèves de répondre à des questions telles que « Quelle est la moitié de 8 ? », « Quel est le triple de 2 ? », ou « Quel est le tiers de 9 ? ». En pré-test, le groupe expérimental obtenait une moyenne de 4,2 items réussis sur 8, contre 4,63 pour le groupe contrôle. En post-test, le groupe expérimental a légèrement progressé (4,95 items réussis), tandis que le groupe contrôle a atteint 4,82 items réussis (Figure 13). Bien que les deux groupes aient progressé, aucune différence significative n'a été observée entre eux ni en pré-test ni en post-test. Cela suggère que la séquence centrée sur l'axe gradué n'a pas eu d'effet de transfert sur les compétences en relations additives et multiplicatives.

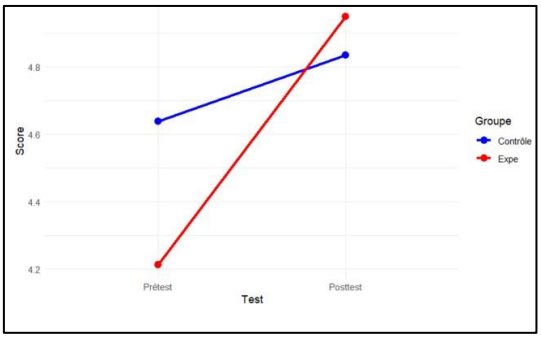


Figure 13. Évolution des résultats aux exercices sur les relations additives et multiplicatives entre les nombres.

Ainsi, la séquence d'enseignement centrée sur l'axe gradué a démontré une efficacité significative pour améliorer les performances des élèves sur des tâches utilisant explicitement un axe gradué. Cependant, aucun transfert de compétences n'a été observé vers le domaine des relations additives et multiplicatives entre les nombres. Des analyses statistiques plus élaborées sont encore en cours.

2 Limites de l'étude

La portée de ces résultats positifs doit cependant être nuancée par la prise en compte de certaines caractéristiques du dispositif expérimental.

En effet, bien que nous ayons encadré fortement l'implémentation de la séquence par les enseignants, grâce au guide pédagogique très détaillé et les six heures de formation, et que nous ayons organisé une hotline et un questionnaire permettant de suivre l'implémentation, nous n'avons pas observé ou recueilli d'informations précises sur la mise en œuvre de la séquence par chaque enseignant expérimentateur. Nous ne connaissons pas la durée réelle du travail, ni la façon dont ont été conduites les mises en commun, ni si chaque élève a bien réalisé les exercices obligatoires. De même, nous n'avons pas recueilli d'informations relatives aux pratiques des enseignants du groupe contrôle pendant les semaines de l'expérimentation. La demande a été qu'ils fassent leurs progressions « comme d'habitude », mais nous ne savons pas si leur habitude inclut ou pas un travail de l'axe gradué pendant la durée de l'expérimentation. Ainsi, la mise en relation des caractéristiques de la séquence avec les apprentissages des élèves mesurés n'est pas directement validée.

Le cadrage temporel de l'expérimentation constitue également une limite. D'une part, la réalisation de l'expérimentation sur une durée de 10 semaines répond à un besoin de sécuriser l'engagement des enseignants, plus difficile à faire perdurer au-delà de quelques semaines, sous risque de perte accrue des participants. Ainsi le post-test est conduit juste après l'enseignement et ne permet pas de savoir si les connaissances des élèves sont pérennes. D'autre part, la séquence proposée nécessite une dizaine

d'heures, ce qui est une durée importante au regard de l'objectif d'apprentissage. Même si de nombreux concepts mathématiques sont travaillés à cette occasion, nous n'en avons pas vu le bénéfice. Or cette durée consacrée à l'axe gradué a pu se faire au détriment d'autres apprentissages, en mathématiques ou dans d'autres disciplines, ce que nous n'avons pas mesuré.

Enfin, ce travail sur l'axe gradué a traité la question des apprentissages des élèves à partir des situations et des tâches analysées a priori et des réussites des élèves aux tests. Nous n'avons étudié ni les procédures effectives des élèves dans les classes, ni décrit leurs connaissances relatives à l'axe gradué. Pourtant, une description des connaissances sur l'axe gradué serait utile à des fins de diagnostic individuel et de conception de nouvelles situations. À la suite de CESALIN, ce travail a été engagé par Poupart (2025) qui a modélisé les conceptions des élèves de cycle 2 relatives à l'axe gradué.

V - CONCLUSION

Le projet de recherche CESALIN a permis de réaliser une analyse didactique et épistémologique approfondie des caractéristiques de l'axe gradué. Cette analyse a servi de fondement à la co-construction d'une séquence d'enseignement, élaborée en partenariat entre enseignants de terrain, conseillers pédagogiques et chercheurs. Le résultat tangible de ce travail est un guide pédagogique explicite et clé en main, conçu pour faciliter la mise en œuvre de la séquence par les enseignants.

En parallèle, des évaluations (pré-tests et post-tests) ont été construites, permettant d'évaluer l'efficacité de l'enseignement proposé. Ces évaluations conçues sur une analyse didactique des tâches peuvent, elles aussi, être considérées comme un résultat en soi[4]. Les résultats obtenus confirment que la séquence a significativement amélioré les compétences des élèves sur les tâches directement liées à l'axe gradué, tout en soulignant que cet apprentissage ne se transfère pas automatiquement à d'autres domaines, comme les connaissances sur les relations additives et multiplicatives des nombres.

Au-delà de ces productions, ce projet a également permis d'établir un partenariat solide entre la recherche et le terrain, favorisant une collaboration entre institutions, DSDEN et université. Une culture commune autour de l'axe gradué s'est développée dans le département de la Savoie, renforçant la cohésion et la compréhension partagée des enjeux pédagogiques liés à cet objet d'étude. La séquence et ses résultats ont été présentés aux formateurs participant à la formation initiale des enseignants, au Printemps des INSPE en avril 2025 (Croset & Soury-Lavergne, 2025), au groupe départemental des RMC de la Savoie, en vue de la formation continue de l'année 2025-2026, aux enseignants d'une école de l'Isère (constellations), ainsi qu'à des enseignants et autres formateurs de Savoie et Haute-Savoie lors les journées de l'innovation organisées par la CARDIE en mai 2025. La diffusion de ce travail soulève une nouvelle question relative à la possibilité d'obtenir les mêmes résultats quant aux apprentissages de l'axe gradué, avec une séquence d'une durée réduite ne reprenant que certaines des tâches ou des situations. En effet, il est probable que les enseignants qui vont s'en saisir ne vont pas lire le guide intégralement et il est certain qu'ils vont s'approprier les situations en les transformant.

Enfin, nous voudrions rappeler que cette recherche n'aurait pu aboutir sans l'engagement des nombreux enseignants qui ont participé à l'expérimentation. Leur confiance et leur ouverture à tester une séquence qu'ils ne connaissaient pas auparavant ont été déterminantes. Nous tenons également à souligner le rôle essentiel du groupe contrôle, dont la participation a permis de mesurer avec précision l'impact réel de la séquence proposée.

[4] Les évaluations sont accessibles ici : https://osf.io/sc25x/files/osfstorage/68dbf74761426a64a5fd05d6 et leurs consignes de passation ici : https://osf.io/sc25x/files/osfstorage/68dbf74720c48901e3d6c650

Nous espérons que ce projet illustre ainsi la richesse (malgré les difficultés !) d'une collaboration entre chercheurs et enseignants et ouvre des perspectives pour de futures recherches visant à approfondir la compréhension de l'axe gradué et de problématiques d'enseignement de cet objet mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *20(1)*, 41-88.

Barth, B.-M. (2011). *L'apprentissage de l'abstraction*. Retz.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79(4)*, 1016-1031.

Bucheton, D., & Soulé, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : Un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation et didactique*, *3-3*, 29-48. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.543

Cerclé, V., Chesnais, A., & Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie). *Petit x*, *113*, 59-88.

Colomb, J., Charnay, R., & Boët, J. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : Cours préparatoire : [CP cycle 2]*. Hatier.

Croset, M.-C., & Soury-Lavergne, S. (2025, avril 1). Recherche collaborative pour l'apprentissage de l'axe gradué, les résultats prometteurs du projet CESALIN. Le printemps de la recherche en éducation, les INSPE au cœur de l'articulation recherche-formation-terrain, en ligne. https://www.youtube.com/watch?v=QFPj6NlitMU

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths : Quinze ans après*. Odile Jacob.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., & Pica, P. (2008). Log or linear ? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science, 320(5880),* 1217-1220.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7(2)*, 5-32.

Poupart, O. (2025). Enseignement de l'axe gradué au cycle 2 : Modélisation et diagnostic de conceptions associées [Mémoire de Master 2]. Université Grenoble Alpes.

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of Number Line Estimation With Mathematical Competence : A Meta-analysis. *Child Development*, *89(5)*, 1467-1484. https://doi.org/10.1111/cdev.13068

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, 75(2), 428-444.

Térouanne, S., Kaspary, D., & Esclafit, P. (à paraître). Placer 9, pour apprendre la droite graduée. *Grand N*.

RÉUSSITES ET PROCÉDURES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES BASIQUES ADDITIFS À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : QUELLES INFLUENCES DU NIVEAU SCOLAIRE ET DU GENRE ?

Camille ANGIBAUD
M2 MEEF 1er degré, INSPE de l'académie de Strasbourg, Université de Strasbourg
camilleangibaud67240@gmail.com

Soraya CHERIF-MESSAOUDI
M2 MEEF 1er degré, INSPE de l'académie de Strasbourg, Université de Strasbourg
sorayachf@gmail.com

Juliette TIBI
M2 MEEF 1er degré, INSPE de l'académie de Strasbourg, Université de Strasbourg
tb.juliette@protomail.com

Charlotte DEROUET
Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques, INSPE de l'académie de Strasbourg, Université de Strasbourg
LISEC UR 2310
charlotte.derouet@unistra.fr

Résumé
Dans cette communication, nous présentons les résultats d'une recherche menée sur plusieurs années à travers quatre mémoires de Master MEEF 1er degré. L'objectif de cette recherche est d'étudier l'évolution des réussites et des procédures en résolution de problèmes basiques additifs chez les élèves du CP au CM2 en fonction du niveau scolaire et du genre des élèves. En appui sur différentes classifications de problèmes, un unique questionnaire avec 14 problèmes basiques additifs de différentes structures, au sens de Vergnaud, a été conçu et administré, en 2021, à 732 élèves au total, de tous niveaux scolaires entre le CP et le CM2. Les résultats obtenus confirment que certains problèmes sont mieux réussis que d'autres et ce, dès le CP, et que la réussite augmente suivant le niveau scolaire. Du point de vue des procédures, nous avons pu mettre en évidence une évolution des stratégies au cours de la scolarité, avec notamment une forte diminution de la présence de schémas et une augmentation de la présence de calculs posés, avec le niveau scolaire. Notre étude ne montre pas de différences entre filles et garçons.

Au sein du thème du colloque « Les savoirs mathématiques de l'école : de la formation des enseignants aux acquis des élèves », notre focale est orientée sur l'évaluation des acquis des élèves en résolution de problèmes arithmétiques basiques additifs, qui constitue un élément des savoirs mathématiques fondamentaux de l'école primaire. Nous présentons les résultats d'un travail de recherche mené sur plusieurs années, entre 2019 et 2024, à travers quatre mémoires de Master MEEF 1er degré[1].

En 2018, suite aux résultats aux évaluations PISA et TIMSS, la résolution de problèmes arithmétiques est devenue une priorité dans l'enseignement aux cycle 2 et 3 (Blanquer, 2018). Beaucoup de recherches sur la résolution de problèmes additifs (citons par exemple Sander, 2018 ; Grapin & Mounier, 2024) font référence à l'étude de Riley et al. (1984) qui met en évidence qu'avec l'aide de la manipulation de matériel,

[1] Les étudiantes impliquées dans ces mémoires sont Marion Bigi (2019-2020), Jennifer Buchy et Cyrielle Lang (2020-2021), Camille Angibaud et Soraya Cherif-Messaoudi (2023-2024), Clémence Mairot et Juliette Tibi (2023-2024)

certains problèmes du champ additif sont maîtrisés avant même l'entrée au CP (6-7 ans), par exemple les problèmes de composition avec recherche du tout, tandis que d'autres (relevant d'autres structures) sont beaucoup moins bien réussis, par exemple les problèmes de comparaison, et que cela évolue avec la scolarité. Cependant cette étude date des années 1980, dans le contexte américain, les élèves ayant à disposition du matériel, et nous n'avons pas accès aux procédures des élèves.
Cela nous a amenées à nous demander : qu'en est-il de la résolution de problèmes basiques additifs chez les élèves français dans les années 2020, avec une entrée sur l'évolution des réussites et des procédures des élèves selon le niveau scolaire et le genre.
Dans une première partie, nous revenons sur les éléments théoriques qui sous-tendent notre recherche. Dans une deuxième partie, nous présentons notre méthodologie. Puis, dans une troisième partie, nous présentons les résultats de notre étude (partie 3), avant de conclure.

I - ELÉMENTS THÉORIQUES

1 Les problèmes basiques additifs

Selon Houdement (2017), on peut classer les problèmes arithmétiques en trois catégories : les problèmes basiques, les problèmes complexes et les problèmes atypiques. Dans notre étude, nous nous intéressons aux problèmes basiques, c'est-à-dire les problèmes impliquant deux données numériques et menant à la recherche d'une troisième.

Au sein des problèmes basiques, notre étude porte sur les problèmes du champ additif, à savoir les problèmes pouvant être résolus par une addition ou une soustraction. Selon Vergnaud (1986), il existe six structures différentes de problèmes additifs : transformation d'une mesure, composition de mesures, comparaison de mesures, composition de transformations, transformation sur une relation et composition de relations. Nous avons limité notre étude aux premières trois structures de problèmes additifs, celles-ci étant les plus présentes à l'école élémentaire.

Les problèmes de transformation d'une mesure (Vergnaud, ibid.) correspondent aux problèmes composés d'un état initial, d'un état final et d'une transformation qui peut être positive ou négative. Il y a donc six classes différentes pour cette même structure de problème : on peut être amené à chercher l'état initial, l'état final ou la transformation, qu'elle soit négative ou positive. En guise d'exemple, voici deux énoncés de problèmes :

"Léo a joué aux billes. À la fin de la partie, il a 15 billes. Sachant qu'il en a perdu 8 pendant la partie, combien avait-il de billes au départ ?"

"Léo a joué aux billes. À la fin de la partie, il a 15 billes. Sachant qu'il en a gagné 8 pendant la partie, combien avait-il de billes au départ ?"

Dans le premier, la transformation en jeu est négative et on recherche l'état initial. Dans le second, on cherche toujours l'état initial mais la transformation est positive.

Les problèmes de composition de mesures (Vergnaud, ibid.) renvoient aux problèmes constitués de deux parties qui sont regroupées pour former un tout : on peut être amené à chercher un tout ou une partie, il existe donc deux classes différentes pour cette même structure.

L'exemple suivant est un problème de composition avec recherche du tout : "Lisa a 12 voitures bleues et 6 voitures rouges. Combien a-t-elle de voitures en tout ?"

Enfin, les problèmes de comparaison de mesures (Vergnaud, ibid.) correspondent aux problèmes composés d'un état référent, un état référé et une relation de comparaison qui peut être positive ou négative : on peut être amené à chercher l'état référent, l'état référé ou la comparaison, qu'elle soit positive ou négative. Il y a donc également six classes différentes pour cette structure. L'exemple suivant peut illustrer les problèmes de comparaison : "Maxime a 10 cartes. Il en a 2 de plus que Louis. Combien Louis a-t-il de cartes ?". Dans ce cas, la quantité de cartes de Louis est l'état référent et la quantité de

cartes de Maxime l'état référé. On recherche la quantité de cartes de Louis, donc de l'état référent. De plus, c'est une comparaison de type positive : avec la présence de l'expression "de plus que".

2 Certains problèmes plus simples que d'autres ?

Dans l'étude de Riley et al. (1984), l'ensemble des élèves de CP (6-7 ans) réussit à résoudre les problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de l'état final et de recherche du tout dans un problème de composition, dès lors qu'ils ont à disposition du matériel. Sander (2018) explique que les problèmes de transformation positive avec recherche de l'état final et les problèmes de recherche du tout dans un problème de composition renvoient à la conception intuitive de l'addition et que les problèmes de transformation négative avec recherche de l'état final renvoient à la conception intuitive de la soustraction. Il parle dans ce cas d'analogie de substitution facilitatrice.

En appui sur les travaux de Riley et al. (1984) et sur leur étude, Floc'h et Pfaff (2005) ont montré que les problèmes de comparaison pouvaient poser des difficultés aux élèves et notamment dans le cas de la recherche de l'état référent. Effectivement dans ce cas, il y a une discordance sémantique. Par exemple, dans le problème "Camille a 6 billes. Camille a 3 billes de plus que Soraya. Combien de billes a Soraya ?", il y a la présence de l'expression "de plus que", or c'est une soustraction qui permet d'aboutir au résultat.

Au-delà de la structure des problèmes, des recherches ont pu mettre en évidence d'autres variables didactiques expliquant des difficultés d'élèves en résolution de problèmes arithmétiques : le contexte des problèmes (Nguala, 2005 ; Rivier & Sander, 2021), les nombres en jeu à savoir la taille des nombres (Grapin & Mounier, 2024) ou encore la facilité ou non à se représenter mentalement la situation (analogie de substitution, Rivier & Sander, ibid.).

3 Procédures des élèves

Butlen (2021) identifie différentes stratégies de résolution de problèmes basiques additifs :

- des stratégies de dénombrement élémentaire, qui regroupent les procédures de manipulation de matériel de numération et la schématisation de chaque élément d'une collection ou de deux collections ;
- des stratégies relevant du dénombrement en s'appuyant sur des représentations symboliques en décomptant ou en surcomptant sur les doigts ou en écrivant les nombres sur la feuille ;
- des stratégies de calcul ou proches du calcul comme une illustration de l'énoncé suivie d'un calcul ou un calcul unique ou une décomposition de plusieurs calculs.

Enfin, certains élèves articulent plusieurs stratégies afin de s'assurer de l'exactitude de la réponse. L'objectif de l'enseignement est d'amener au fur et à mesure les élèves à des stratégies de calcul.

4 Différences filles-garçons en mathématiques

Plusieurs études en sciences de l'éducation et en psychologie sociale ont mis en évidence des pratiques pédagogiques différenciées selon le genre, qui peuvent influencer la réussite scolaire, notamment en mathématiques.

Les travaux de Mosconi (2001) montrent que les enseignants ont tendance à interagir différemment avec les filles et les garçons. Les garçons se voient plus souvent confier des tâches complexes, qui sollicitent leur capacité à expliquer ou à construire du savoir, tandis que les filles sont davantage sollicitées pour des tâches plus simples comme lire ou écrire, ou pour rappeler des connaissances déjà abordées. Ce traitement différencié, même s'il est souvent inconscient, peut avoir des effets sur la construction des compétences. En particulier, l'auteure souligne que ces pratiques donnent aux garçons davantage d'opportunités de développer un rapport positif aux mathématiques.

Cette dynamique fait écho à ce que Rosenthal et Jacobson (1968) ont décrit comme une *prophétie auto-réalisatrice*, également connue sous le nom d'*effet Pygmalion*. Selon eux, les attentes des enseignants influencent leurs comportements vis-à-vis des élèves, ce qui peut conduire à une différenciation involontaire du traitement pédagogique : un climat plus encourageant, des tâches plus stimulantes ou un feedback plus développé envers les élèves perçus comme ayant du potentiel. Ces pratiques renforcent ensuite les performances attendues, ce qui contribue à entretenir les écarts.

De leur côté, Huguet et Régner (2007) ont montré que les stéréotypes de genre peuvent impacter les performances scolaires. Dans une étude, ils ont observé que les filles réussissent moins bien un même exercice lorsqu'il est présenté comme un exercice de géométrie, un domaine encore perçu comme masculin. Ce phénomène s'explique par ce qu'on appelle la menace du stéréotype : le fait de se sentir jugé à travers les stéréotypes liés à son groupe social peut affecter négativement la performance.

Enfin, certaines recherches (Duffy et al., 1997) suggèrent que les filles réussissent mieux les problèmes mathématiques lorsque les procédures de résolution leur sont familières, alors que les garçons sont plus à l'aise face à des situations nouvelles ou des problèmes moins structurés. Cela pourrait refléter des différences dans l'enseignement ou dans la manière dont les élèves sont encouragés à développer certaines compétences : les filles étant souvent valorisées pour leur rigueur et leur mémorisation, tandis que les garçons sont plus souvent encouragés à prendre des initiatives et à expérimenter.

Ces recherches montrent que les pratiques pédagogiques, influencées par des stéréotypes ou des attentes implicites, peuvent contribuer à créer des écarts de réussite entre filles et garçons, en particulier dans des disciplines comme les mathématiques.

5 Questions de recherche

Nos questions de recherche sont les suivantes :

Dans le contexte français actuel,

- Q1 : Comment évoluent les réussites des élèves en résolution de problèmes basiques additifs suivant la structure des problèmes, au cours de l'école élémentaire ?
- Q2 : Comment évoluent les procédures des élèves, au cours de l'école élémentaire ?
- Q3 : Les réussites et les procédures des filles et des garçons sont-elles différentes ?

II - MÉTHODOLOGIE

Afin de répondre à nos questions de recherche, nous avons choisi de concevoir un questionnaire à destination des élèves du CP au CM2.

1 Analyse du questionnaire

Le questionnaire (disponible en annexe) comporte 14 problèmes, afin de tester l'ensemble des différentes structures de problèmes de transformation, composition et comparaison. Pour neutraliser l'influence du contexte, nous avons choisi de mettre un unique contexte simple, celui des billes. Étant donné que le même questionnaire est donné aux élèves de CP et aux élèves de CM2, nous avons décidé de prendre des "petits nombres" à un ou deux chiffres et toujours le même triplet (deux données dans l'énoncé parmi 7, 11 et 18) afin de neutraliser l'influence des nombres en jeu. Cependant, on peut noter que suite à une erreur de formulation, le problème 12 met en jeu les nombres 7, 18 et 25.

Le tableau 1 montre la répartition des problèmes suivant leur structure.

Transformation	**Positive**	**Etat final**	Problème 11 : Nathan avait 7 billes. À la récréation il a gagné 11 billes. Combien Nathan en a-t-il maintenant ?
		Etat initial	Problème 10 : David avait des billes. Puis il a gagné 11 billes. Maintenant David a 18 billes. Combien de billes avait David ?
		Transformation	Problème 7 : Carla est venue à l'école avec 7 billes. À la récréation, elle a gagné des billes. Maintenant, elle a 18 billes. Combien de billes Clara a-t-elle gagné ?
	Négative	**Etat final**	Problème 5 : Marcel avait 18 billes. Puis il a perdu 7 billes. Combien de billes a maintenant Marcel ?
		Etat initial	Problème 13 : À la récréation, Laura a perdu 11 billes. Maintenant, elle a 7 billes. Combien de billes Laura avait-elle au départ ?
		Transformation	Problème 1 : Hugo avait 18 billes. Puis il a perdu des billes. Maintenant Hugo a 11 billes. Combien de billes Hugo a-t-il perdu ?
Comparaison	**Positive**	**Référent**	Problème 4 : Léon a 18 billes. Il en a 11 de plus que Carla. Combien de billes Carla a-t-elle ?
		Référé	X
		Comparaison	Problème 6 : Grégory a 11 billes. Cassandra en a 18. Combien de billes Cassandra a-t-elle de plus que Grégory ?
	Négative	**Référent**	Problème 2 : Louise a 11 billes. Elle a 7 billes de moins que Sam. Combien de billes a Sam ? Problème 12 : Benjamin a 7 billes. Il en a 18 de moins que Laeticia. Combien de billes Laeticia a-t-elle ?
		Référé	Problème 14 : Antoine a 18 billes. Marie a 11 billes de moins qu'Antoine. Combien de billes a Marie ?
		Comparaison	Problème 9 : Lucas a 18 billes. Paul en a 7. Combien de billes Paul a-t-il de moins que Lucas ?
Composition		**Partie**	Problème 3 : Benoit et Léa ont 18 billes ensemble. Léa a 7 billes. Combien Benoit a-t-il de billes ?
		Tout	Problème 8 : Léon a 7 billes. Juliette a 11 billes. Combien de billes ont Léo et Juliette ensemble ?

Tableau 1 : Présentation des problèmes suivant leur structure

Nous nous attendons à ce que les problèmes 11, 5 et 8, relevant de la conception intuitive de l'addition ou de la soustraction (Rivier & Sander, 2021) soient mieux réussis dès le CP, dans le sens de l'étude de Riley et al. (1984). Concernant les problèmes de comparaison, nous nous attendons à ce que les trois problèmes avec recherche de l'état référent soient les moins bien réussis (Floc'h & Pfaff, 2005).

2 Protocole de récolte de données et participants

Le questionnaire a été transmis en 2021 à des enseignants via les étudiants de Master MEEF 1er degré de l'académie de Strasbourg, à l'ensemble des circonscriptions de l'académie de Strasbourg ainsi qu'à quelques enseignants dans l'académie de Nancy-Metz et en Normandie.

Des consignes concernant la passation ont été données aux enseignants volontaires :

- un temps de 5 minutes par problème doit être laissé aux élèves le souhaitant ;
- les problèmes peuvent être effectués au moment de la journée voulu par l'enseignant ;

- il est possible de fractionner la passation des problèmes (3 ou 4 problèmes par jour pendant 4 jours) : la majorité des enseignants ont choisi cette modalité ;
- ne pas aider les élèves lors de la résolution des problèmes ;
- l'élève doit écrire uniquement sur la feuille (en-dessous de chaque problème se trouve un encadré, cf. annexe 2).

Au final, nous avons récolté les réponses complètes (ensemble des 14 problèmes réalisés) de 732 élèves. Le tableau 2 présente les effectifs par niveaux et par genre.

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	Totaux
Nombre d'élèves	91	138	139	190	174	732
Nombre de filles	36	57	59	85	87	324
Nombre de garçons	28	63	64	78	61	294
Nombre d'élèves dont le genre n'est pas identifiable	27	18	16	27	26	114

Tableau 2 : Effectifs des participants suivant leur niveau scolaire et leur genre

3 Méthodes d'analyse

Afin de répondre à nos questions de recherche, nous avons analysé l'ensemble des réponses des élèves à chaque question du questionnaire. Concernant les réussites des élèves, nous avons identifié si la solution proposée est correcte ou non : nous avons fait le choix de la considérer "correcte" si la valeur numérique correcte était présente sur la feuille, et ce même s'il pouvait y avoir une incohérence entre la valeur numérique présente dans la phrase réponse et la valeur numérique à un autre endroit (figure 1).

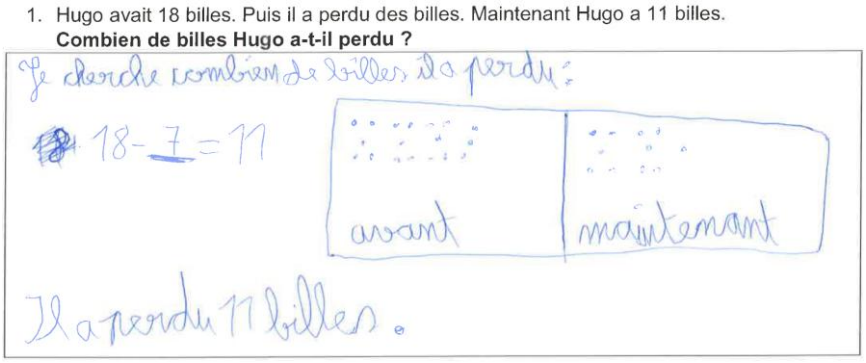


Figure 1 : Illustration d'une réponse considérée comme "correcte" malgré une incohérence dans la phrase réponse

Concernant les procédures des élèves, nous avons identifié les procédures selon les stratégies de Butlen (2021), présentées dans la partie I. Nous illustrons nos analyses par quelques exemples.

Nous pouvons observer en figure 2 deux stratégies de dénombrement élémentaire. À gauche, l'élève a représenté ~~par~~ d'une façon ~~représentation~~ figurative chaque élément d'une collection avant d'en barrer une partie. À droite, il s'agit d'une procédure qui n'a pas été explicitement classée par Butlen (2021). Il s'agit d'une procédure s'appuyant sur de la correspondance terme à terme. L'élève schématise effectivement les deux collections, relie un élément de la première collection à un élément de la deuxième collection puis entoure les éléments solitaires. Cette stratégie nous semble aussi relever de la catégorie de dénombrement élémentaire.

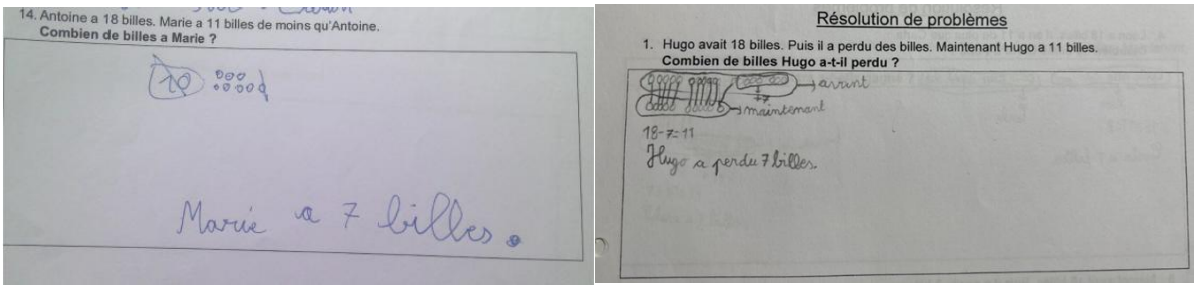


Figure 2 : Illustrations de stratégies de dénombrement élémentaire

En figure 3, l'élève représente une frise numérique et des « ponts » symbolisant le surcomptage à partir de 11. Cette procédure relève de la stratégie de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques.

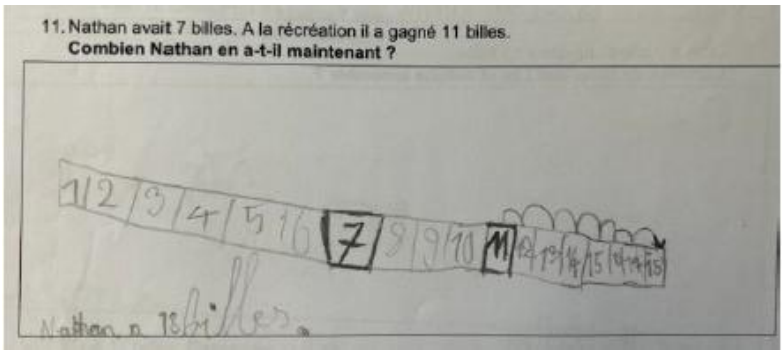


Figure 3 : Illustration d'une stratégie de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques

La figure 4 met en évidence une stratégie de calcul par une illustration de l'énoncé du problème ainsi qu'un calcul en ligne.

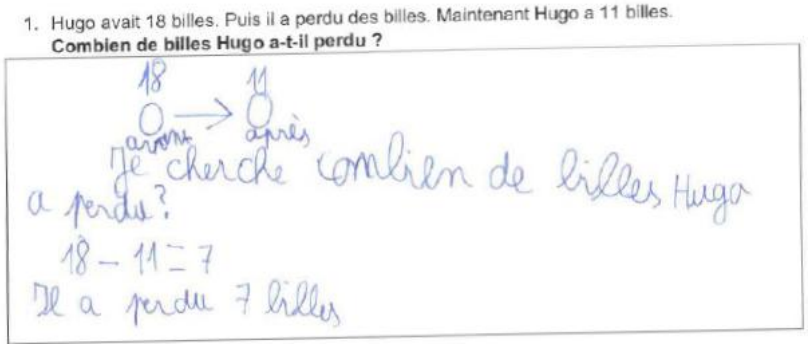


Figure 4 : Illustration d'une stratégie de calcul

En figure 5, l'élève a réalisé un schéma relevant du dénombrement élémentaire mais aussi un calcul en ligne expert. Il s'agit donc d'un mélange de stratégies.

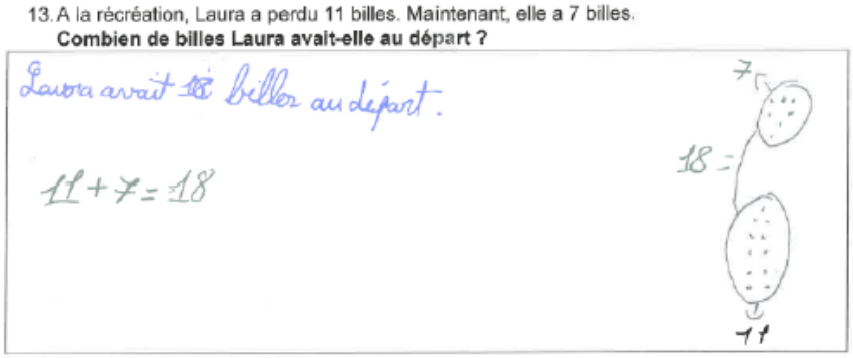


Figure 5 : Illustration d'un mélange de stratégies

Enfin, certaines procédures n'ont pas pu être classées suivant la typologie de Butlen, lorsque nous n'avions pas accès à celles-ci dans l'écrit. Elles ont été codées : « stratégie non identifiable ».

Nos analyses ont été organisées dans un tableur dans lequel nous avons renseigné plusieurs informations pour chaque problème et pour chaque élève, comme dans l'exemple présenté en figure 6.

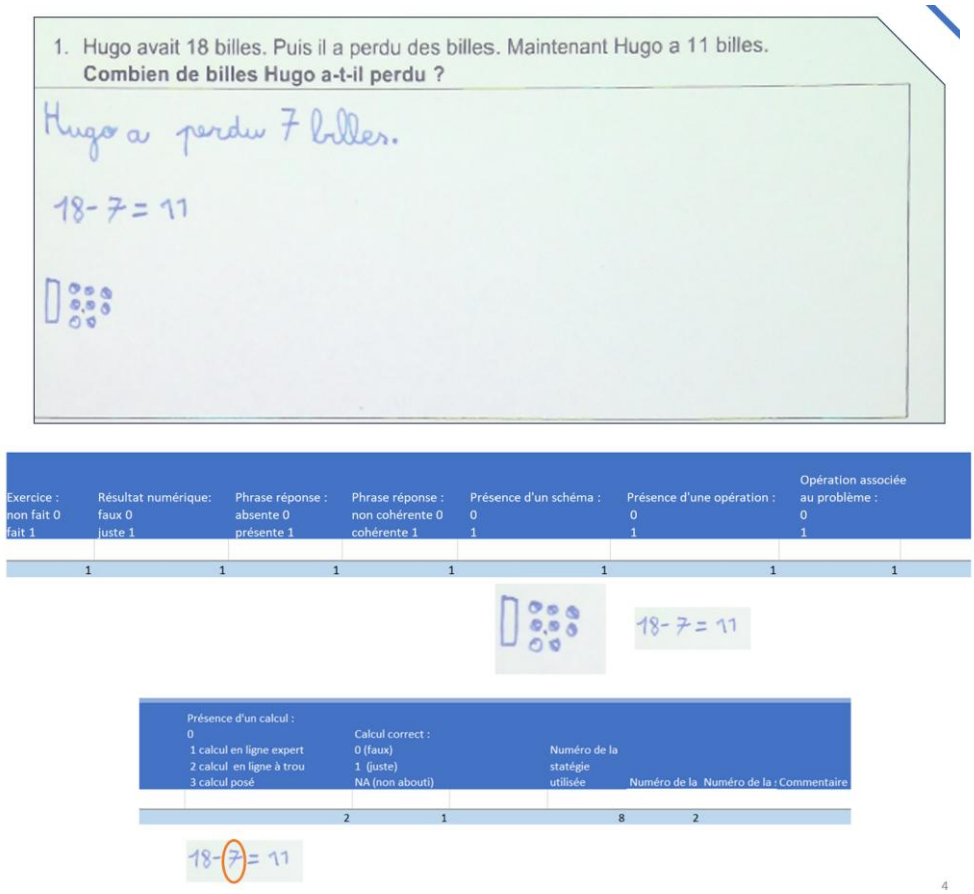


Figure 6 : Exemple d'analyse de la résolution du problème 1 proposée par un élève de l'étude

III - RÉSULTATS

Dans cette partie, nous présentons les différents résultats de notre étude.

1 Résultats sur la réussite

Nous commençons en présentant les résultats des élèves de CP (figure 7).

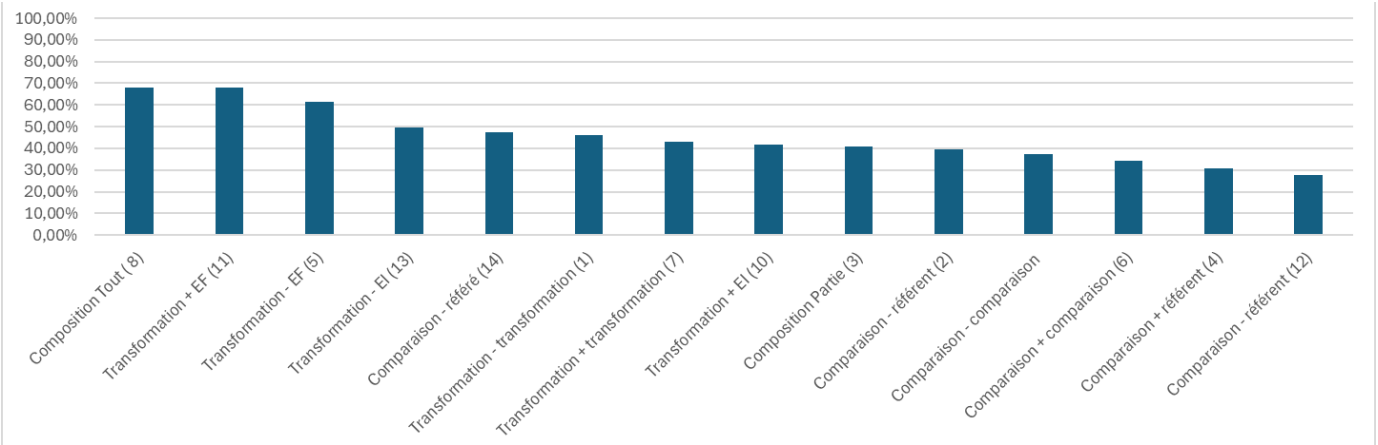


Figure 7 : Pourcentage de réussite des élèves de CP suivant la structure du problème

Comme nous l'avions envisagé, les problèmes relevant de la conception intuitive de l'addition ou de la soustraction sont les trois problèmes les mieux réussis. Cependant, là où dans l'étude de Riley et al. (1984) les élèves obtenaient 100% de réussite en CP, les élèves de notre étude n'obtiennent qu'entre 60% et 70% de réussite. Les élèves de notre étude n'ont en effet pas accès à la manipulation d'objets. Les problèmes de comparaison (excepté pour le problème avec recherche du référé) sont quant à eux les problèmes les moins bien réussis.

Nous présentons maintenant les évolutions de réussite sur chaque niveau entre le CP et le CM2, suivant la structure des problèmes (figures 8, 9 et 10).

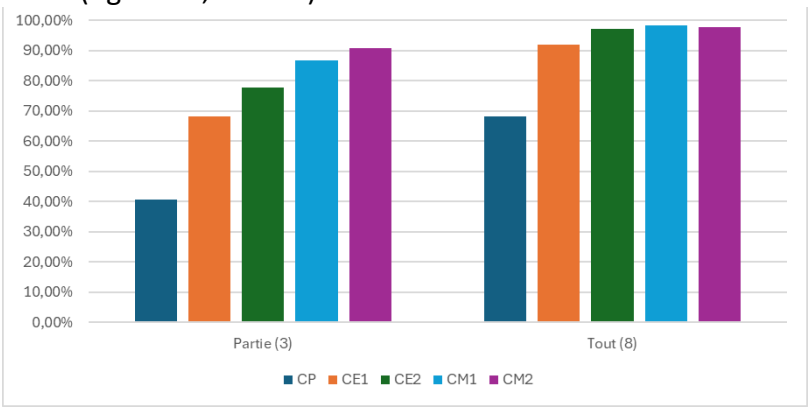


Figure 8 : Évolution des réussites entre le CP et le CM2 pour les problèmes de composition

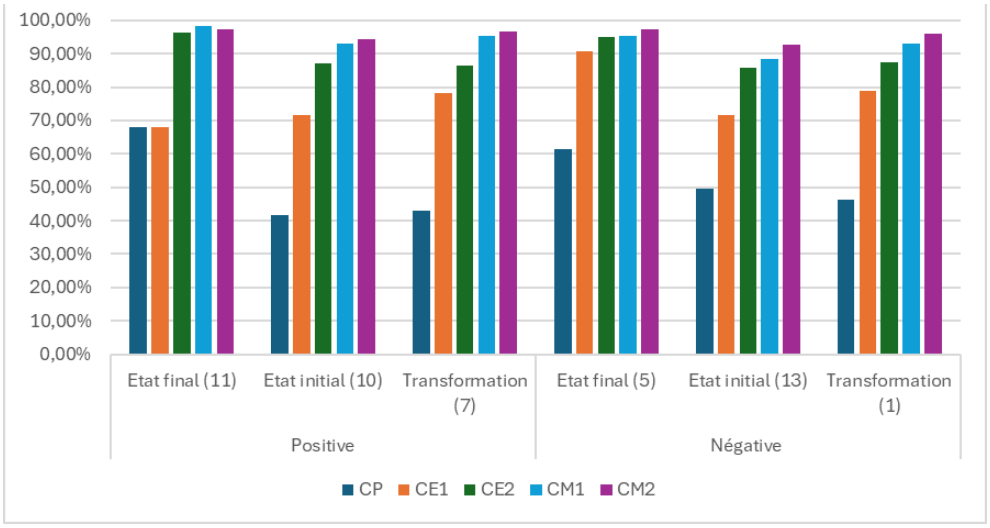


Figure 9 : Évolution des réussites entre le CP et le CM2 pour les problèmes de transformation

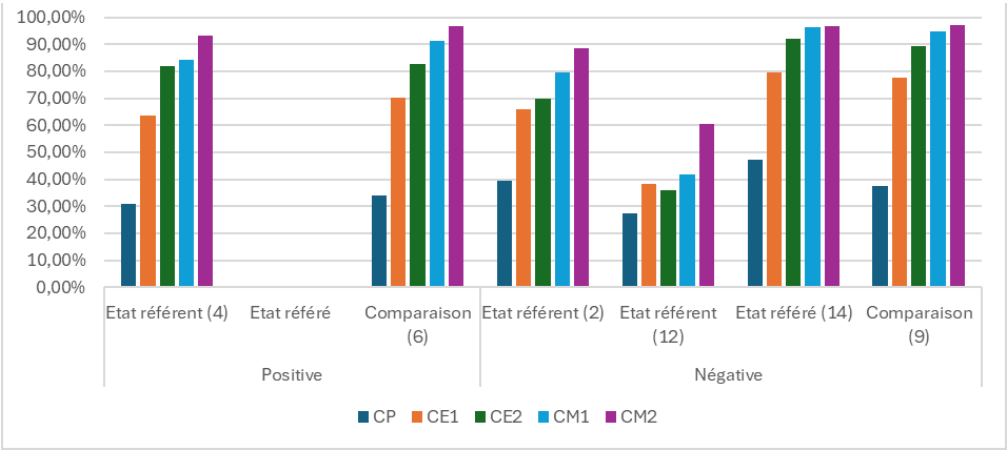


Figure 10 : Évolution des réussites entre le CP et le CM2 pour les problèmes de comparaison

On observe une amélioration progressive dans la réussite pour toutes les structures de problèmes basiques additifs, du CP au CM2. Même les problèmes à énoncés discordants (problèmes 4, 2 et 12) sont de mieux en mieux traités jusqu'au CM2. On passe de 40% de réussite pour le problème de comparaison négative avec recherche de l'état référent (problèmes 2 et 12 du questionnaire) au CP à environ 89% de réussite pour le même problème au CM2. On observe donc que même le type de problèmes le moins bien réussi à l'école primaire (comparaison négative avec recherche de l'état référent) présente une évolution positive. Cela peut être mis en lien avec l'enrichissement de la mémoire des problèmes, selon Julo (2002).

Certaines structures montrent une progression plus rapide que d'autres, comme la transformation de mesure, qu'elle soit positive ou négative, avec recherche de l'état final. Cela peut s'expliquer par le fait que les problèmes mobilisant les concepts intuitifs des opérations sont plus facilement résolus en début de scolarité et donc acquis plus rapidement, car ils s'appuient directement sur les conceptions spontanées de l'enfant.

Nous souhaitons revenir sur les problèmes 2 et 12. En effet, les deux problèmes sont des problèmes de comparaison négative avec recherche du référent, cependant les résultats sont très contrastés (figure 11).

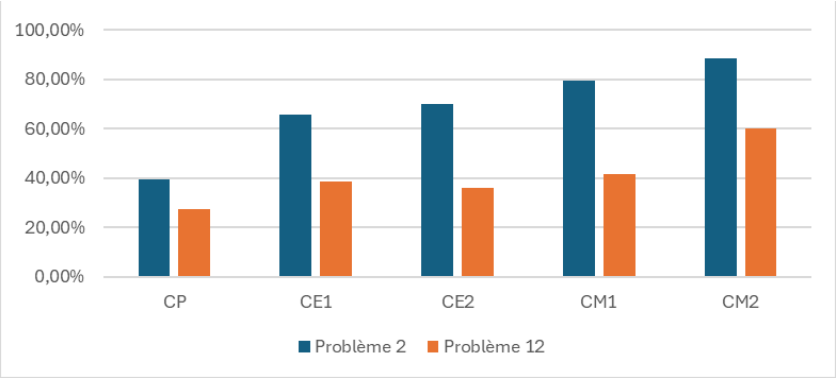


Figure 11 : Comparaison des réussites entre le problème 2 et le problème 12

Il nous semble que les différences observées s'expliquent par le fait que, contrairement à tous les autres problèmes, le problème 12 met en jeu un triplet de nombres différents. Cette erreur dans la conception initiale du questionnaire nous permet de révéler que beaucoup d'élèves avaient repéré le lien entre les différentes données numériques des énoncés et donc que ce choix méthodologique présente une limite de notre étude.

Enfin, au vu des effectifs pour chaque niveau scolaire, on ne remarque aucune différence significative entre filles et garçons (figure 12). On peut remarquer en CP, sur l'échantillon étudié, que les filles réussissent mieux les problèmes à énoncés concordants que les garçons. Ceci pourrait être mis en relation avec l'étude de Duffy, Gunther et Walters (1997) qui montre que les filles réussissent mieux les problèmes dont l'algorithme de résolution leur est familier. Néanmoins, ceci est à nuancer quant à l'effectif étudié qui est très restreint (28 garçons et 36 filles de CP). Au CE2 et au CM2, on observe moins de différence entre les réussites des filles et des garçons. Ceci peut s'expliquer par le fait que les filles comme les garçons enrichissent leur banque de problèmes basiques tout au long de l'école primaire. Il semble, a priori, ne pas avoir de différence de "traitement" entre les filles et les garçons en résolution de problèmes basiques additifs.

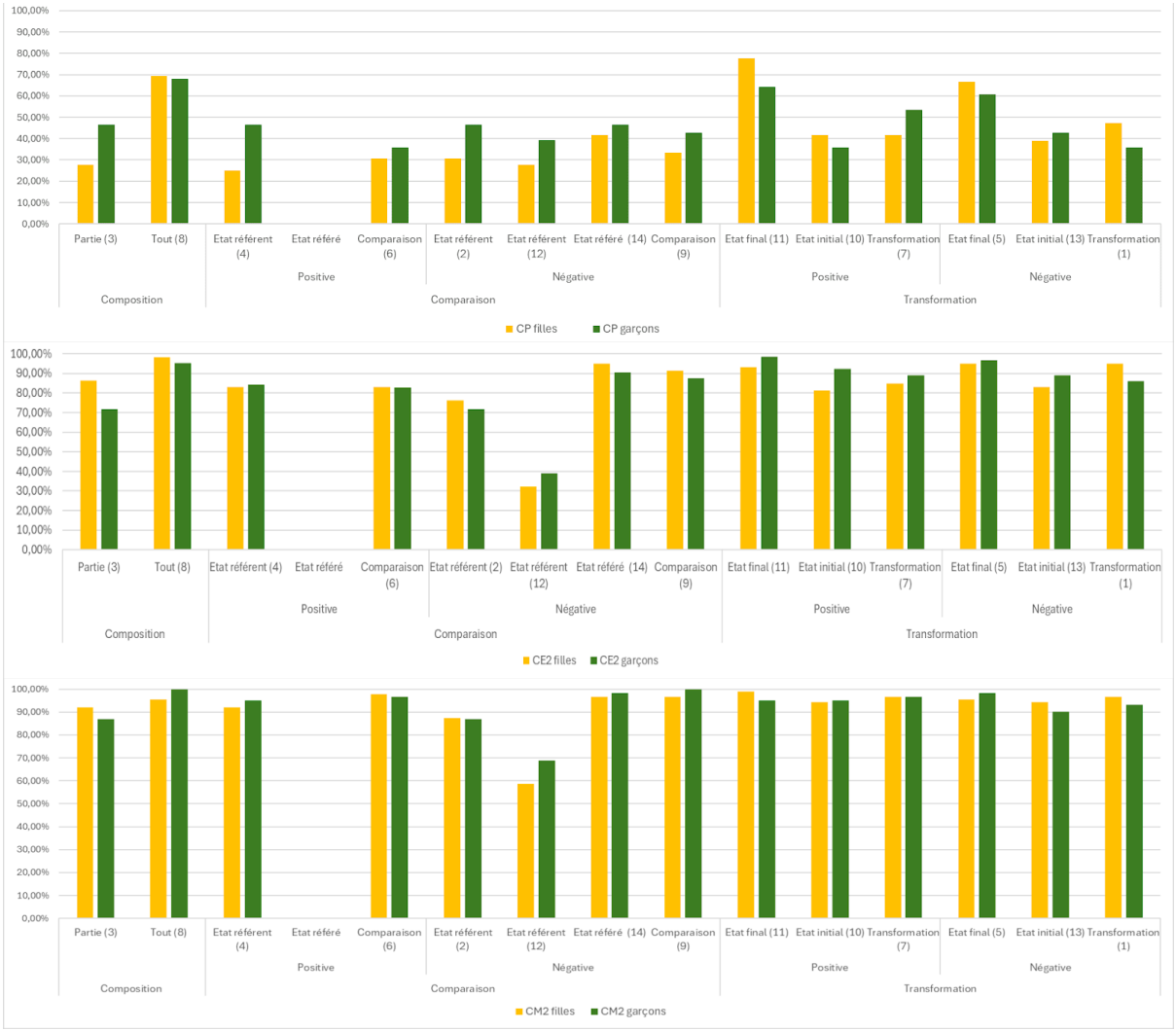


Figure 12 : Comparaison des pourcentages de réussites entre filles et garçons, au CP, CE2 et CM2

2 Résultats sur les procédures

Nous avons analysé plus finement les procédures des élèves de CP et de CM2 pour trois problèmes : un problème de composition avec recherche du tout (problème 8), un problème de transformation négative avec recherche de l'état initial (problème 13) et un problème de comparaison positive avec recherche de l'état référent (problème 4). Les résultats sont présentés en figure 13.

Stratégie 1	L'élève procède par surcomptage oral à l'aide d'objets de manipulation.
Stratégie 2	L'élève représente la collection totale, en raye une partie puis compte un à un les éléments non rayés afin d'énoncer le résultat correct.
Stratégie 3	L'élève représente l'énoncé en deux collections. Pour dessiner la deuxième collection, il utilise le surcomptage. Il dénombre les éléments de la deuxième collection pour aboutir à un résultat.
Stratégie 4	L'élève décompte oralement en utilisant ses doigts.
Stratégie 5	L'élève décompte en écrivant les nombres sur sa feuille.
Stratégie 6	L'élève surcompte en écrivant les nombres sur sa feuille.
Stratégie 7	L'élève utilise une stratégie proche du calcul avec un schéma qui met en jeu les nombres.
Stratégie 8	L'élève passe par une ou plusieurs opérations pour trouver le résultat en utilisant les symboles mathématiques.
Stratégie 9	L'élève utilise le schéma pour illustrer son calcul.
Stratégie 10	Stratégies non identifiées.
Stratégie 11	L'élève représente deux collections par un schéma et relie chaque élément d'une collection à l'autre par correspondance terme à terme. Il compte ensuite les éléments restants non reliés.

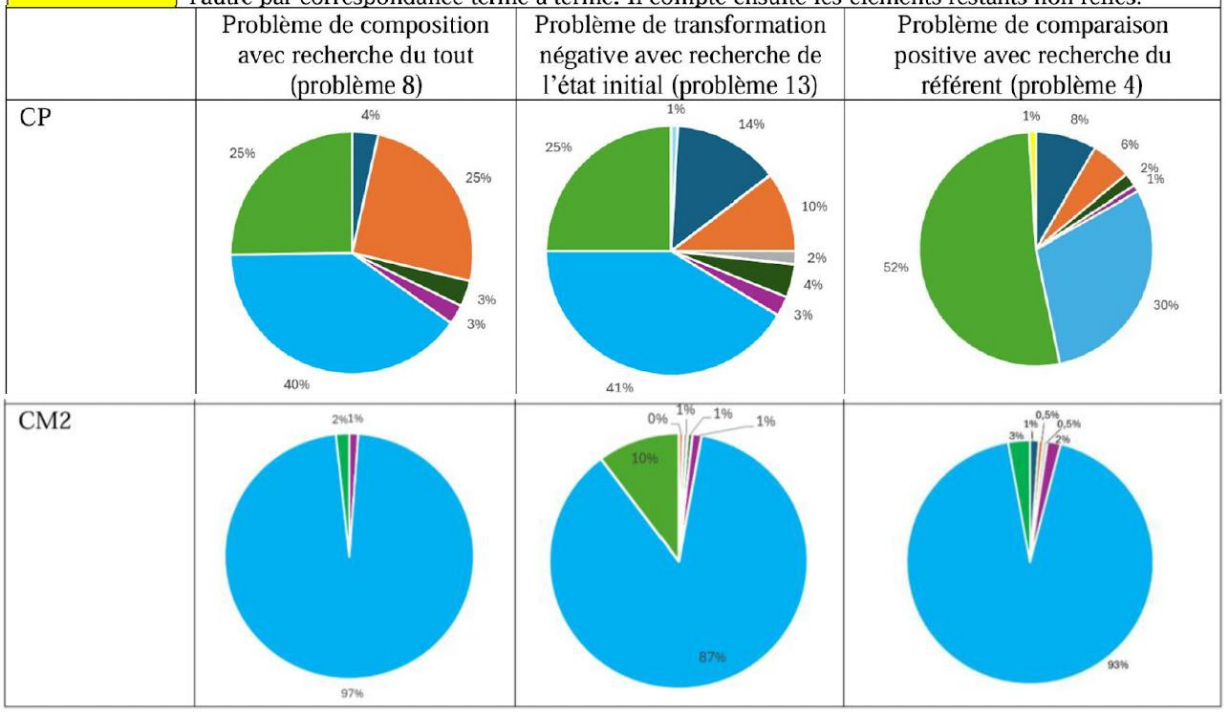


Figure 13 : Stratégies utilisées par les élèves au CP et au CM2

Au CP, entre 30% à 40% des élèves utilisent la stratégie de calcul. Environ un quart des élèves utilisent des stratégies de dénombrement élémentaire ou de dénombrement en s'appuyant sur des représentations symboliques. Un quart des élèves utilisent des stratégies non identifiées pour les problèmes 8 et 13 et 52% des élèves utilisent cette stratégie pour le problème 4. Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'il s'agit du premier niveau de l'école élémentaire et que les élèves passent moins par l'écrit et donc que l'on peut identifier leurs procédures.

Au CM2, au moins 87% des élèves utilisent la stratégie de calcul. Ceci montre que la stratégie de calcul devient la stratégie très majoritaire en fin d'école élémentaire. En regardant plus finement les procédures de calcul utilisées, on observe une forte utilisation du calcul posé dans la résolution de problème en CM2, alors même que les données numériques en jeu ne justifient pas l'emploi de cette procédure. Cela semble mettre en évidence un certain formatage dans la rédaction attendue des élèves par leur enseignant en résolution de problème.

Les différences de procédures entre filles et garçons sont présentées en figure 14.

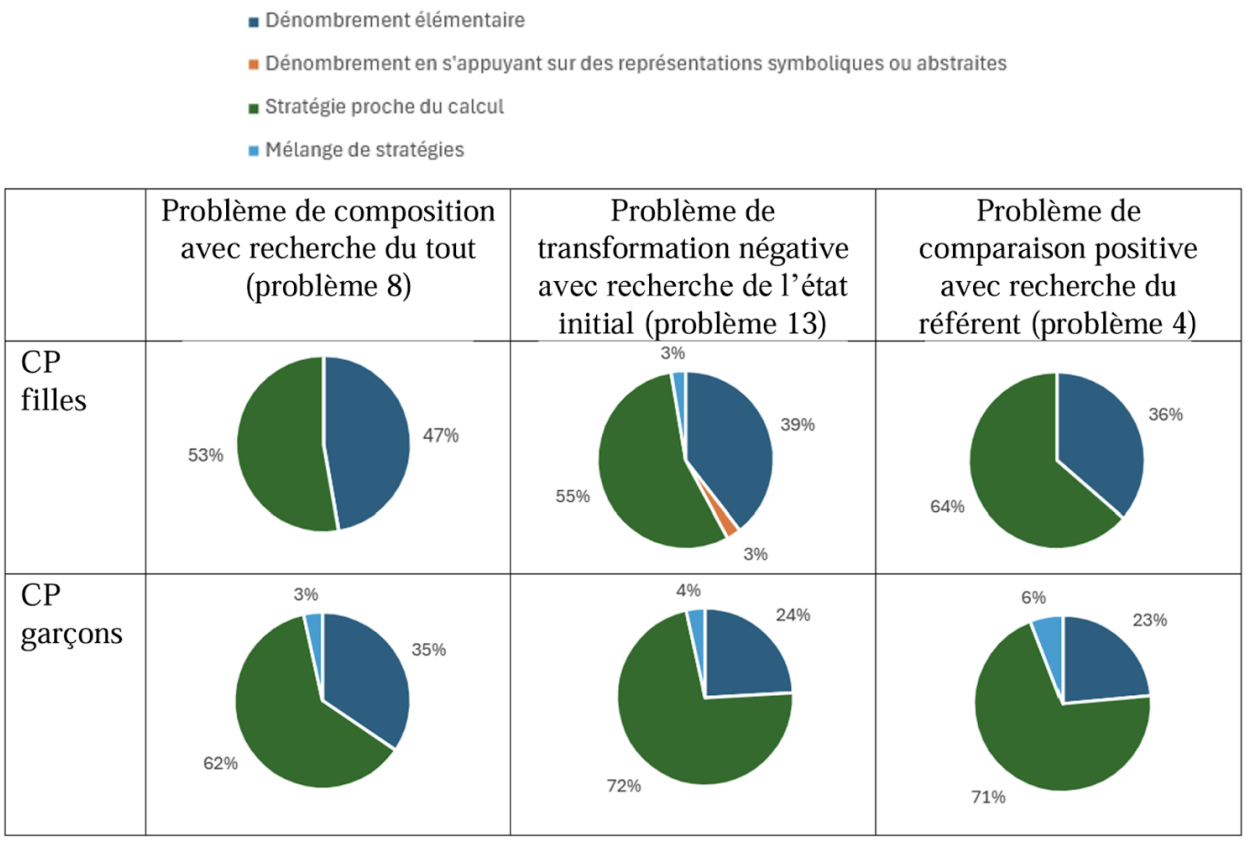


Figure 14. Stratégies utilisées par les filles et les garçons au CP et au CM2

Au CP, dans notre échantillon, nous observons que les garçons utilisent plus les stratégies proches du calcul que les filles pour les trois problèmes. Au CM2, les filles comme les garçons utilisent les stratégies de calcul. Cependant, nous remarquons une légère différence entre les deux sexes puisque les filles utilisent davantage de mélange de stratégies.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette étude nous a permis d'évaluer les réussites et l'évolution des réussites des élèves en résolution de problèmes basiques additifs entre le CP et le CM2. Les résultats ont montré une évolution positive des réussites avec le niveau scolaire, cependant avec des résultats différents suivant la structure du problème, confirmant des résultats de précédentes recherches sur les difficultés vis-à-vis de la structure des problèmes. Cependant même au CM2, nous n'arrivons pas à 100% de réussite aux différents problèmes.

Concernant les différences filles-garçons, nous avons pu montrer que bien qu'au CP nous puissions repérer des différences de réussites, ces différences disparaissent en CM2.

Du point de vue des procédures, nous avons pu repérer une évolution des procédures des élèves avec des stratégies de dénombrement élémentaire au CP qui disparaissent au fur et à mesure vers une grande majorité de stratégies de calcul.

Nous avons pu observer des différences entre filles et garçons dans le type de procédures mobilisées. Cependant nous restons prudentes au vu des effectifs par classe.

Avec la quantité de données récoltées, des analyses complémentaires pourraient être faites notamment pour préciser les procédures employées par les élèves.

Nous espérons que ce travail permettra de nourrir les futures recherches sur la résolution de problèmes à l'école primaire.

V - BIBLIOGRAPHIE

Butlen (2021). *Résolution de problèmes et élèves en difficulté*. [Conférence] Plan mathématiques 1er degré de l'académie de Strasbourg.

Duffy, J., Gunther, G. & Walters, L. (1997). Gender and mathematical problem solving. *Sex Rôles, 37*(7/8), 477-494.

Floc'h, M., & Pfaff, N. (2005). Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2. Le cas des comparaisons de mesure. *Grand N*, *75*, 19-30.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59-78.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69*, 31-52.

Mosconi, N. (2001). Comment les pratiques enseignantes fabriquent-elles de l'inégalité entre les sexes ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, *5*(1), 97-109.

Régner, I., Selimbegovic, L., Pansu, P., Monteil, J-M., & Huguet, P. (2016). Different Sources of Threat on Math Performance for Girls and Boys: The Role of Stereotypic and Idiosyncratic Knowledge. *Frontiers in Psychology*.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). Academic Press.

Rivier, C., & Sander, E. (2021). Trois formes d'analogie guidant la résolution de problèmes. *Au fil des maths*, *542*.

Rosenthal, R., & Jacobson, L. (1968). *Pygmalion in the classroom-Teacher expectation and pupil's intellectual development*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), A*ctes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM.* Irem de Paris – Université Paris Diderot.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, *38*, 21-40.

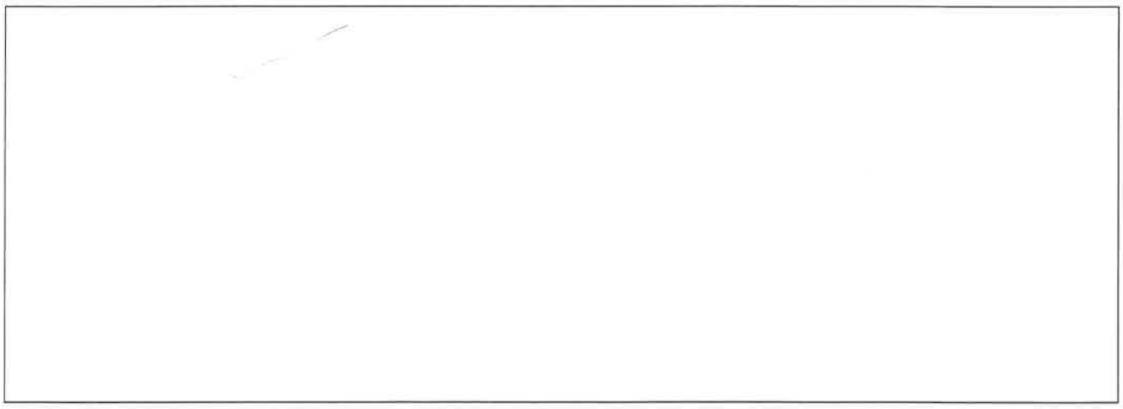
ANNEXE 1 LA BANQUE DE PROBLÈMES DU QUESTIONNAIRE

Problème 1 : Hugo avait 18 billes. Puis il a perdu des billes. Maintenant Hugo a 11 billes.
Combien de billes Hugo a-t-il perdu ?
Problème 2 : Louise a 11 billes. Elle a 7 billes de moins que Sam.
Combien de billes a Sam ?
Problème 3 : Benoit et Léa ont 18 billes ensemble. Léa a 7 billes.
Combien Benoit a-t-il de billes ?
Problème 4 : Léon a 18 billes. Il en a 11 de plus que Carla.
Combien de billes Carla a-t-elle ?
Problème 5 : Marcel avait 18 billes. Puis il a perdu 7 billes.
Combien de billes a maintenant Marcel ?
Problème 6 : Grégory a 11 billes. Cassandra en a 18.
Combien de billes Cassandra a-t-elle de plus que Grégory ?
Problème 7 : Carla est venue à l'école avec 7 billes. À la récréation, elle a gagné des billes. Maintenant, elle a 18 billes.

Combien de billes Clara a-t-elle gagné ?
Problème 8 : Léon a 7 billes. Juliette a 11 billes.
Combien de billes ont Léo et Juliette ensemble ?
Problème 9 : Lucas a 18 billes. Paul en a 7.
Combien de billes Paul a-t-il de moins que Lucas ?
Problème 10 : David avait des billes. Puis il a gagné 11 billes. Maintenant David a 18 billes.
Combien de billes avait David ?
Problème 11 : Nathan avait 7 billes. À la récréation il a gagné 11 billes.
Combien Nathan en a-t-il maintenant ?
Problème 12 : Benjamin a 7 billes. Il en a 18 de moins que Laeticia.
Combien de billes Laeticia a-t-elle ?
Problème 13 : À la récréation, Laura a perdu 11 billes. Maintenant, elle a 7 billes.
Combien de billes Laura avait-elle au départ ?
Problème 14 : Antoine a 18 billes. Marie a 11 billes de moins qu'Antoine.
Combien de billes a Marie ?

ANNEXE 2 ENCADRÉ RÉPONSE DES ÉLÈVES POUR LE PROBLÈME 3

3. Benoit et Léa ont 18 billes ensembles. Léa a 7 billes.
Combien Benoit a-t-il de billes ?



LE LABO MATHS & MATER : UN LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES EN MATERNELLE

Aude GRAU
CPC, IEN APT
Labo Maths & Mater
aude.grau@ac-aix-marseille.fr

Pierre EYSSERIC
PRAG retraité INSPE AMU
IRES de MARSEILLE, COPIRELEM
pierre.eysseric@free.fr

Résumé
Le développement des laboratoires de mathématiques dans le premier et le second degré constitue l'une des 21 mesures phares du rapport Villani-Torossian pour l'enseignement des mathématiques. Conçus comme des espaces collaboratifs, ces laboratoires ont pour vocation d'encourager le travail entre pairs, de favoriser la formation continue des enseignants et de promouvoir l'analyse de pratiques à partir de situations d'enseignement concrètes. Toutefois la majorité des dispositifs existants concernent principalement le second degré. C'est dans ce contexte que le dispositif *Labo Maths & Mater* a vu le jour, avec l'ambition d'adapter les principes fondateurs des laboratoires de mathématiques à la réalité de l'école maternelle. Cette communication présente la genèse, les objectifs, le fonctionnement et les productions de ce laboratoire implanté dans la circonscription d'Apt (Vaucluse). Elle propose également une analyse des effets observés sur les enseignants et les élèves ainsi que des perspectives pour pérenniser cette dynamique collaborative.

I - GENÈSE ET FONDEMENTS DU *LABO MATHS & MATER*

À la rentrée de l'année scolaire 2023/2024, M. Frédéric Dumas, inspecteur de l'éducation nationale (IEN) de la circonscription d'Apt, chargé des missions mathématiques départementale et académique a souhaité qu'un laboratoire de mathématiques soit créé sur la circonscription. Le projet a été confié à Aude Grau, conseillère pédagogique de circonscription (CPC) et référente mathématiques (RMC), pour qu'elle en assure la conception et la mise en œuvre. La lecture du *vademecum Laboratoires de mathématiques* (MENJS, 2021) relatif au second degré a permis de situer les enjeux et les attendus de ce type de dispositif. Mais peu de critères semblaient transposables à la maternelle dans un premier temps. L'un des « grands principes du dispositif des laboratoires de mathématiques » s'est toutefois avéré fondamental : « le laboratoire de mathématiques est un lieu d'échanges et de temps communs pour les enseignants, où se construisent la confiance et l'entraide mutuelle » (op. cit., p. 5). Ainsi le projet a délibérément mis l'accent sur l'humain, la confiance, l'engagement, et la réflexion s'est tournée vers la construction collective de savoirs professionnels. La constitution de l'équipe a ensuite été guidée par la volonté de mobiliser des enseignants présentant une appétence pour les mathématiques et la formation, autour d'une problématique commune : dans la compétence « La construction du nombre pour exprimer des quantités », en quoi l'élaboration de cartes mentales ciblant les difficultés récurrentes des élèves de cycle 1 favorise-t-elle la remédiation et plus largement le travail de planification pour la différenciation ?

Le *Labo Maths & Mater* a été inauguré le 13 novembre 2023, date qui correspond à la première journée de travail. Lors de celle-ci, l'un des enjeux a été de revenir à une négociation de l'objet de travail. Il s'agissait de trouver un équilibre entre les objectifs didactiques, les besoins de chacun des membres de l'équipe ainsi que les intérêts et les motivations de tous les acteurs en favorisant une dimension

collaborative. Le partage de ressources afin de créer une culture commune à tous les membres du laboratoire a également constitué une priorité de cette journée.

Lors d'un temps de travail ultérieur, organisé au mois de janvier, les membres du *Labo Maths & Mater* ont échangé avec leurs partenaires et analysé les ressources déjà produites. À l'issue de ces échanges, la problématique initialement centrée sur la remédiation des difficultés rencontrées par les élèves a évolué vers une réflexion axée sur la conception de situations d'apprentissage accessibles à tous mais favorisant les progrès de chacun. Cette nouvelle orientation a redynamisé les enseignantes du laboratoire, car elle répond pleinement à leurs besoins et à leurs préoccupations pédagogiques.

II - UNE ÉQUIPE PLURIELLE ET ENGAGÉE

Le *Labo Maths & Mater* repose sur une équipe constituée de quatre enseignantes, intervenant dans différentes écoles mais qui ont toutes participé à des constellations du plan mathématiques depuis l'année scolaire 2020-2021 : Claire CUMIN (école maternelle de La Ruche, Apt) ; Maëlle DUPONT (école maternelle de La Colline, Apt) ; Aurélie POYNARD (professeure des écoles maîtresse formatrice (PEMF), école Les micocouliers, Robion) ; Alexa SALVADOR ('école primaire de Maubec). Elles sont accompagnées par Marie-Laure FIORITO, enseignante Référente pour les Usages du Numérique (ERUN) et Aude GRAU, CPC - RMC. Cette hétérogénéité des profils permet d'articuler expérience de terrain, connaissances didactiques et pratiques de formation.

Des partenariats universitaires viennent apporter leur expertise à ce dispositif : Claire GUILLE-BIEL WINDER, maîtresse de conférences en didactique des mathématiques à l'université d'Aix-Marseille, dont les thématiques de recherche portent notamment sur les phénomènes d'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire et la formation des enseignants du premier degré ; Pierre EYSSERIC, professeur agrégé de mathématiques (PRAG), formateur en mathématiques à l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation (INSPE) d'Aix-Marseille, responsable du groupe de conception de la mallette en ligne *La construction du nombre en MS et GS* (COPIRELEM, s.d.) ; Fayçal Benoit CHEIK ALI, PRAG à l'INSPE Aix-Marseille, formateur départemental et académique des RMC. Tous membres du groupe premier degré de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences (IRES) d'Aix-Marseille, ces experts apportent un regard didactique bienveillant et éclairant sur les situations conçues et soutiennent la démarche de travail collaboratif. Leur accompagnement permet d'ancrer les travaux du laboratoire dans une posture scientifique, tout en assurant une cohérence entre les objectifs de terrain et les apports de la recherche en didactique des mathématiques.

III - OBJECTIFS ET FINALITÉS

Les membres du *Labo Maths & Mater* se sont donnés pour premier objectif le développement et l'équipement du laboratoire pour en faire un espace ressource afin d'outiller les enseignants de maternelle (voir partie suivante). Il s'agit de proposer un lieu d'échange et de partage où se construisent, se testent et se partagent des ressources didactiques pensées collectivement. L'un des enjeux centraux consiste à mieux comprendre les conditions d'appropriation des savoirs mathématiques par les jeunes élèves, à travers des situations pédagogiques progressives et explicites. Le travail collectif permet d'interroger les gestes professionnels, de penser les variables didactiques pertinentes et de rendre visibles les obstacles rencontrés par les élèves Les membres du laboratoire ont également pour ambition la diffusion des ressources construites : fiches séquence, jeux, prises de vues et captations de son. Le laboratoire permet en effet de capitaliser sur les expériences individuelles pour constituer un fonds commun de pratiques, nourri par l'observation, l'analyse et la mutualisation. La dynamique du laboratoire s'inscrit ainsi dans une logique de formation entre pairs, fondée sur la co-construction, l'analyse partagée et la réflexion.

Le laboratoire répond également à des objectifs de développement professionnel pour les enseignants du premier degré. Il s'agit de promouvoir une culture commune autour de l'enseignement des mathématiques en maternelle, en valorisant notamment la place du jeu et de la littérature jeunesse dans les apprentissages. En s'emparant des séquences proposées, les enseignants permettront aux élèves d'accéder aux savoirs mathématiques en proposant des situations progressives. La réflexion sur l'organisation matérielle et les variables didactiques, menée au sein du laboratoire, vise à permettre une meilleure mobilisation des élèves et par suite de favoriser leurs apprentissages mathématiques, en prenant en compte les quatre modalités d'apprentissage en maternelle, à savoir : le jeu, la résolution de problèmes, l'entrainement et la mémorisation.

Enfin, le *Labo Maths & Mater* vise l'amélioration des apprentissages des élèves de maternelle dans le domaine des mathématiques, ce qui pourrait avoir comme conséquence l'amélioration des résultats aux évaluations nationales en CP. Il s'agit parallèlement, pour les élèves, de favoriser l'estime de soi et la confiance dans leurs compétences mathématiques en leur proposant des situations ludiques, mobilisatrices et progressives associées à des explicitations et des verbalisations régulières des apprentissages réalisés. Un point de vigilance est par ailleurs porté à la réduction des inégalités sociales et des inégalités filles-garçons dans le domaine des mathématiques.

IV - ORGANISATION ET FONCTIONNEMENT DU LABORATOIRE

1 Une organisation souple et hybride

Le fonctionnement du *Labo Maths & Mater* repose sur une organisation souple et hybride, articulant des temps en présentiel et des temps à distance. Cette structuration vise à répondre aux contraintes de terrain tout en maintenant une dynamique de travail régulière et collaborative.

Les rencontres en présentiel se déroulent, pour partie, en groupe complet – enseignantes, accompagnatrices et partenaires universitaires (figure 1) – lors de journées banalisées avec remplaçants que la Direction des services départementaux de l'éducation nationale de Vaucluse (DSDEN) met à disposition. La planification de ces journées avec remplaçants est fondamentale, car elle permet de solliciter les partenaires.



Figure 1. Dernière journée collaborative de l'année (01/07/2025)

En parallèle, des temps de rencontres entre enseignantes et accompagnatrices ont lieu en petits groupes, notamment lors de la pause méridienne ou le mercredi après-midi. Ces moments sont consacrés à la co-construction de séquences, à l'analyse de séances filmées, ou encore à l'élaboration de supports mutualisables.

Des regroupements en visioconférence permettent également de maintenir le lien entre les membres du laboratoire, de partager les avancées et de planifier les étapes suivantes. Les outils numériques tels que *Nextcloud* ou *FileSender* sont utilisés pour le partage sécurisé de documents et de vidéos.

Pour les deux premières années 2023-2024 et 2024-2025, le calendrier du laboratoire prévoit au moins une journée de travail par période scolaire, complétée par trois semaines durant lesquelles les enseignantes ont été déchargées de leur classe et remplacées par des étudiants de Master 2 Métiers de l'Éducation et de la Formation (MEEF) effectuant un stage en responsabilité.

Cette organisation permet de concilier l'ancrage dans la classe avec le temps long nécessaire à la recherche collaborative.

2 Un fonctionnement entre *Lesson study* et projet *NEFLE*

Dans le cadre du laboratoire, les enseignantes conçoivent des séquences centrées sur des compétences mathématiques précises, en identifiant les variables didactiques susceptibles de favoriser certaines procédures chez les élèves. Une attention particulière est portée à l'identification des obstacles rencontrés par les élèves et à la proposition d'aménagement de la tâche pour remédier à ces difficultés.

Par ailleurs, le *Labo Maths & Mater* s'appuie sur la méthodologie des *Lesson study* (Clivaz, 2015). D'origine japonaise, cette approche consiste à concevoir collectivement une séance d'enseignement, à l'expérimenter en classe, puis à l'analyser de manière critique et constructive avec l'ensemble du groupe. Ainsi lors des expérimentations des séances conçues dans le laboratoire, les membres peuvent observer la séance mise en œuvre par l'une d'entre elles en direct — lorsqu'un dispositif de remplacement est prévu — ou en différé grâce à l'enregistrement vidéo des séances. Cette modalité permet de développer une culture partagée de l'observation et d'ancrer la réflexion sur des pratiques réelles.

Le financement obtenu dans le cadre d'un projet *NEFLE* (Notre École Faisons-La Ensemble) a constitué un levier important, permettant d'équiper le laboratoire de ressources variées. Certaines d'entre elles sont des ouvrages théoriques en didactique des mathématiques à destination des enseignants (Emprin, Emprin-Charotte et Castel, 2019 ; Fénichel et Mazollier, 2015 ; Margolinas et Wozniak, 2012 ; Brissiaud, 1997) : elles visent à renforcer les connaissances didactiques des enseignantes du laboratoire. D'autres sont spécifiquement à destination de la classe : il s'agit d'albums de littérature jeunesse mobilisables en mathématique, de jeux mathématiques à didactiser et de matériel pour en construire de nouveaux. Des ressources matérielles - dispositifs de captation vidéo et de montage – s'avèrent également nécessaires pour le fonctionnement du laboratoire comme pour la réalisation de ses objectifs (le développement et la diffusion de ressources). L'utilisation de la vidéo facilite en effet le retour sur les séances et permet d'illustrer les séquences d'apprentissage.

V - PRODUCTIONS DU *LABO MATHS & MATER*

Les travaux menés au sein du laboratoire ont donné lieu à la conception de séquences, organisées autour de compétences pré-numériques et numériques.

Chaque séquence est pensée avec des objectifs d'apprentissage par étape, des prérequis sont identifiés ; les tâches de l'enseignant ainsi que la mise en œuvre sont détaillées. Une réflexion particulière a porté sur la verbalisation, que ce soit par les enseignants ou par les élèves. L'approche retenue valorise une alternance entre phases de manipulation, moments de structuration avec un retour sur l'action, une validation et un bilan d'étape qui permet une synthèse sur les procédures utilisées et sur ce que les élèves ont appris, autrement dit une exposition des connaissances (Allard, 2019).

Les productions du *Labo Maths & Mater* répondent aux nouveaux programmes d'enseignement pour l'acquisition des premiers outils mathématiques du cycle 1 (MENJS, 2021). Nous les présentons dans ce qui suit, en lien avec les contenus d'apprentissage.

1 La notion de collection

> *La collection ne fait pas l'objet d'un enseignement. La collection est montrée. On la considère comme un objet premier. Dès lors, le système ne dispose d'aucun moyen pour contrôler si la collection est effectivement prise en compte par le sujet. Tout se passe comme si cette conception allait de soi. Par exemple, ce que l'on mesure dans le cas des entiers naturels, ce sont des collections. Mais "la collection" n'est pas un objet matériel.* (Briand, s.d.)

Les membres du laboratoire ont repris le protocole de la *Valise de Toutou* (Briand, Loubet et Salin, 2004) afin de construire une séquence permettant aux élèves de s'approprier la notion de collection. La séquence est présentée en annexe 1.

2 L'énumération et son rôle dans le dénombrement

Selon Margolinas et Wozniak (2012), « énumérer une collection consiste à traiter chaque élément d'une collection une fois et une seule » (op. cit. p. 80). Briand et al. (2000) ont décrit les liens entre l'énumération et le dénombrement. Ils décrivent en effet huit étapes nécessaires pour obtenir le nombre d'éléments d'une collection finie montré :

1. Être capable de distinguer deux éléments différents d'une collection donnée.
2. Choisir un élément de la collection.
3. Énoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent, dans une suite de mots-nombres).
4. Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
5. Concevoir la collection des objets non encore choisis.
6. Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) les étapes 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
7. Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
8. Énoncer le dernier mot nombre.

Le principe d'adéquation unique (chaque élément doit avoir une seule et unique désignation) implique d'une part une stricte correspondance terme à terme entre la désignation et l'objet pointé et d'autre part, le contrôle de ce qui a été compté et de ce qu'il reste à compter. Or l'absence d'énumération se manifeste par une « absence de synchronisation effective, entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection [et] empêche l'inventaire de la collection » (Briand et al., 2000). Si les étapes 3 et 8 concernent la comptine numérique, les étapes 1, 2, 4, 5, 6 et 7 correspondent à des connaissances d'énumération. Les tâches d'énumération décrites par les chercheurs constituent ainsi la technique de réalisation du principe d'adéquation unique et apparaissent comme consubstantielles du dénombrement, des collections par comptage.

Afin d'amener les élèves à réussir l'énumération en vue de dénombrer les objets d'une collection, nous avons élaboré une suite de trois séquences.

2.1 Séquence 1 : le jeu de Copains-Câlins

Dans la séquence 1, les élèves apprennent à énumérer les éléments d'une collection d'objets déplaçables sans les dénombrer. Il s'agit dans ce jeu, de mettre en évidence l'importance de l'organisation spatiale pour énumérer.

La séquence prend appui sur un jeu de cartes intitulé le jeu de Copains-Câlins (figure 2).

La première étape de cette séquence va permettre aux élèves de s'approprier le matériel de jeu – les cartes « copains » – et de rendre le critère de réussite visible. Les cartes « copains » (figure 2a) présentent au recto un copain et au verso soit un doudou ou soit pas de doudou (c'est-à-dire une face vierge).

La deuxième étape vise à mettre en évidence l'importance de l'organisation spatiale pour réaliser une énumération. Lees cartes proposées présentent soit un copain au recto et au verso, soit un copain au recto et un doudou au verso (figure 2b). Elles sont présentées aux élèves en leur montrant le côté recto.

Il s'agit pour eux de retrouver toutes les cartes qui contiennent un doudou. Pour cela, les élèves sont amenés à retourner les cartes, mais s'ils n'organisent pas les espaces avec un endroit pour les cartes déjà traitées, ils peuvent indéfiniment retourner les cartes « recto copain / verso copain »…

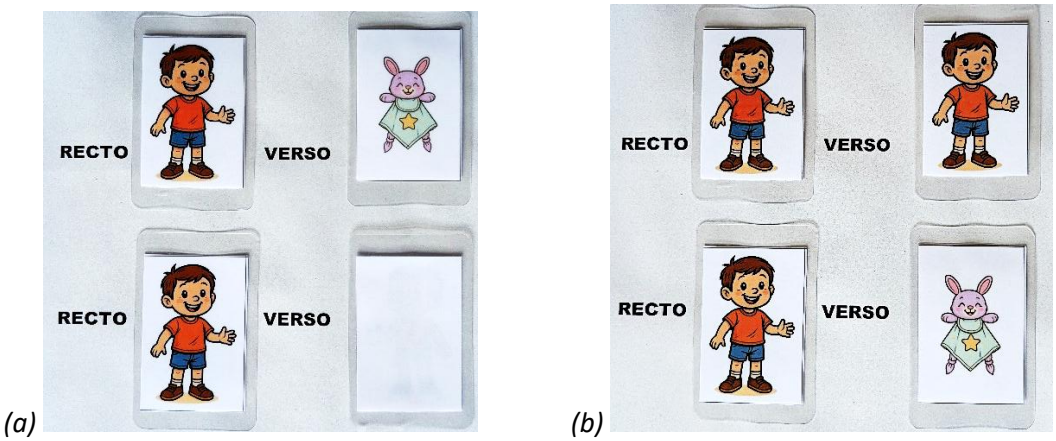


Figure 2. Les cartes à jouer du jeu Copains-Câlins : (a) lors de l'étape 1 ; (b) lors de l'étape 2

Dans la troisième étape, les élèves sont amenés à utiliser trois espaces : un espace pour les éléments à traiter et deux espaces pour les éléments déjà traités, ceux possédant le critère identifié et ceux ne le possédant pas.

2.2 Séquences 2 et 3

Dans la séquence 2, les élèves vont apprendre à énumérer une collection d'objets non déplaçables, mais toujours sans avoir à la dénombrer (Argaud et al., 1998a, 1998b).

Or prendre en compte tous les éléments non déplaçables d'une collection sans répétition et sans oubli s'avère plus complexe : les variables didactiques liées à la disposition de ces éléments (en lignes, en cercle, aléatoire…) permettent de favoriser certaines procédures et sont ici centrales pour réussir l'énumération.

Dans la séquence 3, les élèves utilisent les compétences pré-numériques acquises dans les deux séquences précédentes pour énumérer les objets déplaçables ou non déplaçables et dénombrer les objets d'une collection.

Les apprentissages des élèves s'inscrivent ainsi dans un temps long en respectant les étapes précédemment décrites.

3 Correspondance terme à terme et comparaison

La correspondance terme à terme permet de comparer deux collections du point de vue de leur taille sans avoir à la déterminer. Grâce à elle, il devient aussi possible de vérifier si deux collections ont autant d'éléments l'une que l'autre. Elle peut donc être utilisée comme validation dans des activités de réalisation de collections équipotentes.

Une suite de deux séquences a été réalisée dans le laboratoire. Nous la présentons dans ce qui suit.

3.1 Séquence 1 - Chacun sa place

La séquence 1, *Chacun sa place,* est présentée dans l'annexe 2. L'objectif d'apprentissage de cette séquence est l'acquisition de la procédure de correspondance terme à terme. Il s'agit d'amener les élèves à apparier les objets de deux collections.

Dans une première étape, les élèves sont invités à déposer un objet (assez gros pour occuper toute l'alvéole) dans chaque alvéole d'une boîte d'œufs, aucune alvéole ne devant rester libre. Dans l'étape suivante, chaque élève reçoit une barquette avec plus d'objets (des oursons par exemple) que d'alvéoles. Les oursons sont plus petits que les alvéoles, plusieurs oursons peuvent donc être placés dans une alvéole. Les élèves auront gagné quand chaque alvéole aura un seul objet et qu'aucune alvéole ne restera vide.

Dans une troisième étape, nous jouons sur la variable didactique suivante : les objets figuratifs (ici les oursons) sont remplacés par des objets non figuratifs comme des jetons.

Dans la dernière étape, la situation se complexifie avec l'éloignement de la barquette contenant les objets non figuratifs. La consigne devient :

> *Tu dois déposer un jeton et un seul dans chaque alvéole. Il ne faut pas d'alvéole vide.*
> *La réserve de jetons est sur la table là-bas.*
> *Tu as le droit de faire autant de voyages que tu veux pour aller chercher juste ce qu'il faut de jetons pour remplir la boîte.*
> *Une fois que tu as rempli toutes les alvéoles, tu as perdu s'il te reste des jetons dans la barquette. Tu n'as pas le droit de ramener des jetons à la table.*

3.2 Séquence 2 – Un doudou pour chacun

Dans la séquence 2, *Un doudou pour chacun* (détaillée dans l'annexe 3), les élèves comparent des quantités sans dénombrer. Pour mener à bien cette tâche, ils doivent mettre en œuvre une correspondance terme à terme.

Mettant en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer, ils apprennent également à utiliser et comprendre les locutions « plus de … que de … », « moins de … que de … » et « autant de … que de … ». Ces apprentissages s'inscrivent aussi dans un temps long. Les étapes successives permettent d'introduire progressivement chaque locution, la comprendre et l'utiliser à bon escient. Il y a alors « plus de doudous que de figurines », « moins de doudous que de figurines »…

VI - OBSTACLES ET POINTS D'APPUI

Comme tout projet, le *Labo Maths & Mater* a rencontré des difficultés qu'il a fallu surmonter. Ces obstacles, loin de remettre en question la dynamique engagée, ont permis de renforcer la cohésion du groupe et d'identifier les conditions nécessaires à la pérennité d'un laboratoire mathématique en maternelle.

Parmi les principaux freins identifiés figurent les contraintes temporelles, comme la conciliation entre les exigences du quotidien en classe et le temps de travail réel. Les membres du *Labo Maths & Mater* ont également été confrontées à la double temporalité du travail engagé et du temps long de la recherche. Le vécu de la classe avec les progrès des élèves après la mise en œuvre du premier jet des séquences ne permet pas de tester les ajustements nés de l'analyse de ces mêmes séquences. Cet état de fait nécessite une organisation souple et des ajustements constants qui s'inscrivent dans un temps beaucoup plus long qu'une année scolaire. D'autres contraintes relèvent de l'ordre juridique : il s'agit de problèmes de droit à l'image, notamment dans la captation et la diffusion de vidéos tournées en classe. Des contraintes techniques enfin – aléas liés à l'usage d'outils numériques (visioconférences, plateformes de partage) – ont pu freiner certaines démarches.

Heureusement, plusieurs leviers ont contribué à dépasser ces obstacles : l'implication volontaire des enseignantes, motivées par un fort désir de développement professionnel ; les apports en connaissances et l'accompagnement bienveillant des partenaires universitaires ; la constitution d'un collectif soudé, reposant sur la confiance, l'écoute et la reconnaissance mutuelle ; le sentiment d'efficacité personnelle accru chez les enseignantes, renforcé par l'analyse réflexive en collaboration avec les partenaires et les retours sur les effets en classe ; le soutien accordé par la circonscription d'Apt, avec le fléchage des heures de formation et de manière plus large le soutien institutionnel de la DSDEN du Vaucluse avec les moyens de remplacement.

Enfin, la double temporalité du projet, entre intégration pédagogique immédiate et travail réflexif à long terme, constitue un élément structurant mais exigeant. Celui-ci demande des aménagements réguliers pour maintenir l'engagement.

VII - PERSPECTIVES

À l'issue de deux années de fonctionnement, le *Labo Maths & Mater* entre dans une phase de consolidation et de projection. L'objectif est désormais de structurer les ressources en vue de les diffuser et d'essaimer la dynamique du laboratoire auprès d'autres équipes pédagogiques, tout en poursuivant l'exploration didactique entamée. Nous revenons sur ces deux points dans ce qui suit.

1 Communication et diffusion des ressources

Lors de l'année 2024-2025, les membres du *Labo Maths & Mater* ont communiqué leurs travaux par le biais de deux articles déposés sur le site académique des laboratoires mathématiques, ainsi que sur les sites disciplinaires académiques en mathématiques et en maternelle. Les ressources produites ont également été présentées lors de temps de travail au sein des missions départementales mathématiques et maternelle. Ces échanges visent à favoriser l'appropriation des contenus par d'autres équipes pédagogiques au sein des circonscriptions du département de Vaucluse. le *Labo Maths & Mater* a par ailleurs été présenté lors du séminaire académique des laboratoires mathématiques (04/10/2024). Dans une dynamique de partage et de mutualisation de ressources, ces rencontres inter-labos sont très enrichissantes. Enfin les membres du laboratoire ont tenu un stand à la Journée Académique de la Pédagogie (JAP) afin de présenter les premières séquences produites sur les compétences pré-numériques (26/03/2025).

D'autre part, des projets de collaboration inter-circonscriptions ont vu le jour dans le cadre du réseau Luberon, accompagnés par les IEN de circonscription, les chefs d'établissement, ainsi que l'Inspecteur d'académie – inspecteur pédagogique régional (IA-IPR) de mathématiques, référent du réseau. Des contacts ont été noués avec d'autres laboratoires de mathématiques du second degré, ainsi que des clubs de mathématiques. L'idée est de croiser les démarches, mutualiser les outils et enrichir les pratiques par l'échange de points de vue et de ressources. Les premières thématiques communes de travail ont été dégagées, telles que la place du jeu, l'usage des albums, ou encore la formation des élèves et des collégiens à la résolution de problèmes.

D'autres présentations sont projetées ultérieurement à cette communication. En 2025-2026, il est prévu une participation aux journées nationales de l'APMEP, ainsi qu'une intervention dans le cadre des mercredis de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). Les membres du laboratoire souhaitent également partager leurs travaux en proposant un stand au congrès de l'Association Générale des Enseignants des Écoles et des classes Maternelles publiques (AGEEM) 2026, dont la thématique sera les mathématiques. Ces diverses participations à des manifestations pédagogiques permettront de croiser les regards, de confronter les démarches à d'autres pratiques et de bénéficier de retours enrichissants pour ajuster et approfondir les orientations du laboratoire.

Afin de diffuser les ressources produites plus largement, la création de modules de formation à distance sont également envisagés, *via* la création de parcours *Magistère 2*. Ils permettront de proposer des temps de formation asynchrones, fondés sur les ressources élaborées par le *Labo Maths & Mater*, et de sensibiliser un plus large public aux enjeux des compétences pré-numériques au service de la construction du nombre en maternelle. Le premier parcours *Magistère* devrait porter sur l'énumération pour réussir le dénombrement des objets d'une collection.

2 Prolongements didactiques

En parallèle de la communication et de la diffusion des ressources, l'enjeu pour les années à venir est de pérenniser cette dynamique de réflexion et de productions de ressources dans le temps long, en renforçant les liens entre terrain, formation et recherche. Les membres du *Labo Maths & Mater* souhaitent poursuivre leurs travaux didactiques en suivant deux pistes.

En maternelle, il s'agit d'approfondir le travail sur la construction du nombre par le biais des rituels mathématiques ainsi qu'avec une focale sur la résolution de problèmes. Ces deux nouvelles entrées permettront d'élargir les situations abordées, de diversifier les supports et de renforcer les compétences mobilisées par les élèves.

Par le jeu des mutations, deux enseignantes du laboratoire auront en charge des élèves de cycle 2, cycle des apprentissages fondamentaux qui regroupent les classes de Cours Préparatoire (6-7 ans), Cours Élémentaire niveau 1 (7-8 ans), Cours Élémentaire niveau 2 (8-9 ans). Pour répondre aux préconisations du nouveau programme de mathématiques du cycle 2 (MENJS, 2021), il est prévu de travailler sur l'introduction des fractions en CE1. En CP, la réflexion portera sur des situations de partage équitable ou non équitable. La production de séances en ce sens devrait faciliter l'introduction des fractions au CE1. Avec les élèves de CE1, il s'agira de travailler sur des séances pour les amener à réaliser des partages en parts égales et repérer qu'une partie correspond à une fraction. Ces séances seront axées sur le jeu et la manipulation.

Pour ce travail, les membres du laboratoire bénéficieront encore d'un accompagnement scientifique de l'IRES de Marseille.

VIII - CONCLUSION

Au terme de deux années d'existence, les effets du *Labo Maths & Mater* sont tangibles à plusieurs niveaux. Pour les enseignantes engagées, le laboratoire a constitué un levier d'épanouissement professionnel, en permettant un temps de réflexion collectif, soutenu et outillé, sur leurs pratiques d'enseignement des mathématiques en maternelle. La dynamique collaborative a favorisé la prise de recul sur les gestes professionnels, l'appropriation des apports didactiques issus de la recherche, ainsi que le développement d'un sentiment d'efficacité accru dans l'accompagnement des élèves. Le travail de groupe, dans un climat de confiance et de bienveillance, a permis de dépasser les cloisonnements habituels entre enseignants et de construire une véritable communauté d'apprentissage.

Du point de vue des élèves, les effets observés en classe sont également significatifs : plus grande mobilisation, meilleure compréhension des tâches, amélioration des résultats et développement de la confiance en soi face aux apprentissages mathématiques. Les séquences conçues ont montré leur efficacité pour structurer la pensée des élèves, favoriser la verbalisation et permettre des différenciations ajustées.

On retrouve dans le *Labo Maths & Mater* les trois caractéristiques repérées par Berrouiller, Eysseric et Filippi (2021) concernant les dispositifs de formation de type « chantiers mathématiques » : la formation par l'accompagnement partant des préoccupations concrètes de chacune, prenant en compte l'histoire professionnelle et culturelle du milieu d'exercice, la place donnée au collectif et au travail d'équipe avec des confrontations de pratiques, et enfin la co-analyse du travail dans une zone proximale de développement professionnel. En conclusion, le *Labo Maths & Mater* apparaît comme une modalité féconde de formation continue entre pairs, ancrée dans les réalités de la maternelle et ouverte sur la recherche, grâce aux partenaires. Il constitue une réponse concrète aux défis posés par l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

L'enjeu désormais est de faire vivre cette dynamique dans la durée, de consolider le modèle, et d'essaimer les pratiques et ressources produites, pour qu'un nombre croissant d'enseignants et d'élèves puissent en bénéficier.

IX - BIBLIOGRAPHIE

Allard, C. (2019). Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions. Dans Pilet, J. et Vendeira., C. (dir.) *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 192-208). Paris : IREM de Paris.

Argaud, H.-C., Maillard, M., Castry, O., Valesa, M.-H., Porte, E., Charras, M. et Castry, A. (1998a). Placer des jetons. *Grand N, 63*, 9-23.

Argaud, H.-C., Castry, O. , Castry, A., Maillard, M. et Valesa, M.-H (1998b). Où placer le jeton ?. *Grand N, 64*, 9-25.

Berrouiller, C., Eysseric, P. et Filippi, P.-A. (2021). Visite de chantiers. *Cahiers pédagogiques, 8*(573), 51-52.

Briand, J.(s.d.). *Mathématiques en maternelle*. Consulté le 18/07/2025), url : http://mathsenmaternelle.free.fr/

Briand, J., Loubet, M., et Salin, M.-H. (2004). La valise de Toutou. Dans *Apprentissages mathématiques en maternelle : situations et analyses* [CD-ROM].Paris : Hatier.

Briand, J., Lacave Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedère, D., & Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, 66*, 7-22.

Brissiaud, R. (1997). *Premier pas vers les maths : Les chemins de la réussite à l'école maternelle*. (Réédition, 2022). Paris : Retz.

Clivaz, S. (2015). Les *lesson study* : des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 19*, 99-105.

COPIRELEM (s.d.). *La mallette maternelle – La construction du nombre en MS et GS*. Consulté le 12/09/2025, url : https://www.arpeme.fr/wordpress/mallette-maternelle/

Emprin, F., Emprin-Charotte, F., Frédéric Castel, F. (2019). *Enseigner les mathématiques en maternelle : construire les premiers outils pour structurer sa pensée.* Paris : Réseau Canopé.

Fénichel, M. et Mazollier, M.-S. (2015). *Le nombre en maternelle*. Paris : Réseau Canopé.

Margolinas, C., et Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle : Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

MENJS (2021).*Vademecum « Laboratoires de mathématiques en collège »*. Paris : Éduscol.

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale.

ANNEXE 1 - LA VALISE DE TOUTOU POUR CONSTRUIRE LA NOTION DE COLLECTION – PROTOCOLE DE BRIAND ET AL. (2004)

Objectifs

Objectifs du professeur : faire mémoriser collectivement une collection d'objets hétéroclites, réutilisable ultérieurement ; s'approprier une règle de jeu : savoir nommer les objets, parler à son tour et nommer un objet et un seul.

Objectifs pour les élèves : mémoriser le plus grand nombre d'objets possible pour pouvoir répondre au problème posé et tenir compte des objets déjà sortis.

Présentation

Durée : jeu collectif, quotidien, 15 minutes pendant une vingtaine de séances

L'objectif est de constituer peu à peu un trésor, celui de la valise de Toutou.

Le professeur met trois objets dans une valise, devant les élèves. Le lendemain, il interroge successivement plusieurs élèves, qui proposent chacun le nom d'un objet, afin de vider la valise. La classe gagne alors un nouvel objet. La collection augmente jusqu'à vingt objets environ.

Outre son intérêt didactique, cette situation favorise la structuration du groupe-classe.

Matériel

La marionnette et la valise.

Des objets hétéroclites : figurines, véhicules, billes, bracelet, animaux en bois, etc.

Déroulement

Les élèves sont rassemblés sur les bancs. Comme tous les matins, le professeur va chercher la marionnette Toutou. Le premier jour du jeu, Toutou arrive en portant une valise dans laquelle il y a 3 objets. Les objets circulent parmi les enfants qui les touchent et les nomment chacun à leur tour. Puis le professeur les range dans la valise. Toutou annonce que demain, il reviendra avec la valise et que si les enfants se souviennent de tout ce qu'il y a dedans, il donnera un autre objet. La valise est fermée et rangée dans le placard avec Toutou.

Le lendemain, les élèves attendent la venue de Toutou et de sa valise. À l'aide d'une comptine, le professeur interroge les enfants. Celui qui est désigné par le sort, doit nommer un des objets cachés dans la valise. Le professeur le sort et le pose sur le tapis, à la vue de tous. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'au moment où tous les élèves sont d'accord pour dire qu'il n'y a plus rien dans la valise. C'est alors que le professeur l'ouvre et la retourne. S'il tombe quelque chose de la valise, c'est perdu, s'il ne tombe rien, c'est gagné et Toutou donne un nouvel objet qui est touché, nommé, etc.

Cette situation permet la constitution d'une collection de 20 objets. Elle nécessite une vingtaine de séances qui se déroulent sur deux mois.

Remarque : lorsqu'il arrive avec la valise fermée, le professeur doit être très attentif à ce que les objets ne soient pas nommés avant que le jeu ne commence.

ANNEXE 2 - FICHE SÉQUENCE CORRESPONDANCE TERME A TERME : *CHACUN SA PLACE*



« CHACUN SA PLACE »

Apparier les objets de 2 collections

Compétences ciblées

- **Evaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques (correspondance terme à terme).**
- **Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Associer un objet et un seul à chaque alvéole.**

Objectifs

- Commencer à construire la notion de quantité sans faire intervenir la suite numérique orale, sans compter les objets un par un (procédure du subitizing).
- Acquérir la procédure de correspondance terme à terme.

Prérequis

- Avoir acquis la notion de collection
- Connaître le vocabulaire : alvéole, jeton






ETAPE 1

Objectif : Acquérir la procédure de correspondance terme à terme (le nombre d'objets à placer est égal au nombre d'alvéoles)

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
La boîte témoin est posée au centre de la table durant toute l'activité. **Consigne :** *« Tu dois déposer un marron et un seul dans chaque alvéole, comme dans cette boîte. Il ne faut pas d'alvéole vide. »* **Mise en commun** dans l'atelier : ⇨ **Retour sur son action :** *« Qu'est-ce que tu devais faire ? », Est-ce que tu as réussi l'activité ? Comment sais-tu que tu as la bonne réponse ? » ...* ⇨ **Validation** en demandant au groupe si l'élève a réussi. ⇨ **Bilan de séance :** retour sur la ou les procédure(s) et ce que l'on a appris (exposition des connaissances).	*Activité dirigée* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** ✶ Une boite d'œufs. ✶ Une barquette avec autant de marrons (ou d'objets suffisamment gros et identiques pour occuper tout l'espace de l'alvéole) que d'alvéoles. ✶ Une boîte témoin remplie pour valider son travail. **Critère de réussite :** ✶ **Aucune alvéole ne reste libre.**
Obstacles / erreurs possibles : ✶ Les élèves laissent des alvéoles vides sans mettre tous les marrons de la barquette	**Remédiations :** ✶ Varier le nombre d'alvéoles de la boîte en fonction des compétences de l'élève. ✶ Reformuler la consigne, afin que tous les termes mathématiques soient compris par l'élève (ex : associer « chaque » à « toutes » et insister sur les deux parties de la consigne).

ETAPE 2

Objectif : Acquérir la procédure de correspondance terme à terme (le nombre d'objets donnés à placer est supérieur au nombre d'alvéoles)

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
La boîte témoin est posée au centre de la table durant toute l'activité. **Consigne :** *« Tu dois déposer un ourson et un seul dans chaque alvéole. Il ne faut pas d'alvéole vide, il ne peut pas y avoir deux oursons dans une alvéole »* **Mise en commun** dans l'atelier : comme dans l'étape 1. ⇨ **Retour sur son action** ⇨ **Validation** ⇨ **Bilan de séance**	*Activité dirigée* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel :** * Une boite d'œufs par élève. * Une barquette par élève avec plus d'oursons que d'alvéoles. Les oursons sont plus petits que les alvéoles, plusieurs oursons peuvent donc être placés dans une alvéole. * Une boîte témoin remplie pour valider son travail. **Critères de réussite :** * **Il n'y a qu'un seul objet dans chaque alvéole.** * **Il n'y a pas d'alvéole vide.**
Obstacles / erreurs possibles : * Les élèves mettent plusieurs oursons dans une même alvéole. * Certains élèves sont perturbés par les oursons de différentes couleurs.	**Remédiations :** * Varier le nombre d'alvéoles de la boîte en fonction des compétences de l'élève. * Ne proposer qu'une seule couleur d'oursons. * Reformuler la consigne, afin que tous les termes mathématiques soient compris « il ne doit pas y avoir deux oursons dans une alvéole ». Mettre en scène la consigne pour en favoriser la compréhension.

ETAPE 3

Objectif : Acquérir la procédure de correspondance terme à terme (le nombre d'objets non figuratifs à placer est supérieur au nombre d'alvéoles)

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
La boîte témoin est posée au centre de la table durant toute l'activité. **Consigne :** *« Tu dois déposer un jeton et un seul dans chaque alvéole. Il ne faut pas d'alvéole vide. »* **Mise en commun** dans l'atelier : comme dans l'étape 1. ⇨ **Retour sur son action** ⇨ **Validation** ⇨ **Bilan de séance**	*Activité dirigée* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel :** * Une boite d'œufs par élève. * Une barquette par élève avec plus de jetons que d'alvéoles. * Une boîte témoin remplie pour valider son travail. **Critères de réussite :** * **Il n'y a qu'un seul objet dans chaque alvéole.** * **Il n'y a pas d'alvéole vide.**
Obstacles / erreurs possibles : * Les élèves mettent plusieurs jetons dans une même alvéole. * Les élèves laissent des alvéoles vides. * L'élève essaie de placer tous les jetons, ne s'arrête pas quand la boîte d'œuf est remplie.	**Remédiations :** * Varier sur le nombre d'alvéoles de la boîte donnée à l'élève en difficulté. * Revenir aux étapes 1 et 2.

ETAPE 4

Objectif : Acquérir la procédure de correspondance terme à terme

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
La boîte témoin est posée au centre de la table durant toute l'activité. **Consigne :** *« Tu dois déposer un jeton et un seul dans chaque alvéole. Il ne faut pas d'alvéole vide. La réserve de jetons est sur la table là-bas. Tu as le droit de faire autant de voyages que tu veux pour aller chercher « **juste ce qu'il faut** » de jetons pour remplir la boîte. Une fois que tu as rempli toutes les alvéoles, tu as perdu s'il te reste des jetons dans la barquette. Tu n'as pas le droit de ramener des jetons à la table. »* **Mise en commun** dans l'atelier : comme dans l'étape 1. ⇨ **Retour sur son action** ⇨ **Validation** ⇨ **Bilan de séance**	*Activité dirigée* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel :** * Une boite d'œufs. * Sur une table éloignée, une barquette contient une réserve de jetons ou d'objets. **Critères de réussites :** * ***Tu n'as plus de jetons dans ta barquette.*** * ***Il n'y a qu'un seul jeton dans chaque alvéole.*** * ***Il n'y a pas d'alvéole vide.***
Obstacles / erreurs possibles : * L'élève prend trop de jetons et il lui en reste dans sa barquette. * Procédure réussie mais lente : l'élève va chercher 1 jeton à la fois.	**Remédiations :** * Varier sur le nombre d'alvéoles de la boîte donnée à l'élève en fonction des compétences de l'élève. * Adapter le nombre de jetons présents dans la barquette de départ. * Faire travailler l'élève en difficulté à côté d'un élève en réussite. * Faire verbaliser l'élève en réussite sur le travail de l'élève en difficulté.

Prolongements :

* Changer de support avec la même fiche de séance et les mêmes remédiations : jeu des voitures et des parkings : terme à terme avec une abstraction plus grande.
* Boîtes à encoches : énumération sans dénombrement avec collection non déplaçable.

ANNEXE 3 - FICHE SÉQUENCE COMPARER DES QUANTITES SANS DENOMBRER - *UN DOUDOU POUR CHACUN*

Compétence ciblée

* **Comparer par correspondance terme à terme les cardinaux de deux collections.**

Objectifs

* Utiliser et comprendre les locutions « plus que », « moins que » et « autant que ».
* Mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer.

Prérequis

* Avoir acquis la procédure de correspondance terme à terme.
* Connaître le concept de collection.






ETAPE 1

Objectifs : Mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer.
Introduire la locution « plus que », la comprendre et l'utiliser à bon escient.

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Dans cette étape, il y a plus de doudous que de figurines. **Consigne :** *« Tu as une barquette avec des enfants et une barquette avec des doudous. Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant en ait un. Est-ce qu'il y en a trop ? »* **Mise en commun** dans l'atelier **:** ⇨ **Retour sur son action :** *« Qu'est-ce que tu devais faire ? », « Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous ? Est-ce qu'il y en a trop ? Comment sais-tu que tu as la bonne réponse ? » …* ⇨ **Validation** en demandant à un élève de distribuer les doudous aux figurines en verbalisant (on fait vivre en acte la procédure de correspondance terme à terme). ⇨ **Bilan de séance :** retour sur la ou les procédure(s) et ce que l'on a appris (exposition des connaissances). Verbalisation : mettre en lien *« il y a trop de doudous » => « il y a plus de doudous que d'enfants ».* **Trace écrite :** Deux photos * Une photo avec les deux collections de départ. * Une photo avec les deux collections appariées.	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations du quotidien de la classe (ex : le rituel des absents, en motricité, en atelier, …).* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** * Une dizaine de figurines de même couleur. * Des oursons de même couleur (ou autres objets figuratifs pour compréhension de la situation de comparaison). Il faut qu'il y ait 1, 2 ou 3 oursons de plus que de figurines. * Deux barquettes pour séparer les collections de figurines et de doudous.  
Obstacles / erreurs possibles : * L'élève ne voit pas quelle collection est la plus nombreuse. * L'élève comprend quelle collection est la plus nombreuse, mais il est incapable d'utiliser la locution complète (il verbalise *« il y a plus de doudous »*, mais ne termine pas la phrase avec *« **que d'enfants** »*).	**Remédiations :** * Augmenter l'écart entre les 2 collections. Plus la différence est grande, plus l'élève prend conscience de la notion. * La verbalisation est prise en charge par l'enseignant après le retour sur action de l'élève : *« Est-ce que chaque enfant a un doudou ? Est-ce que chaque doudou a un enfant ? Où est-ce qu'il y a plus ? »* * Retravailler lors d'activités physiques, les jeux d'équipes demandant une comparaison pour savoir qui a gagné (lapin/chasseur ; les déménageurs).

ETAPE 2

Objectifs : Mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer. Introduire la locution « moins que », la comprendre et l'utiliser à bon escient.

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Dans cette étape, il y a moins de doudous que de figurines. **Consigne :** *« Tu as une barquette avec des enfants et une barquette avec des doudous. Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant ait un doudou. Est-ce qu'il y en a assez ? »* **Mise en commun** dans l'atelier **:** ⇨ **Retour sur son action :** *« Qu'est-ce que tu devais faire ? Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous ? Est-ce qu'il y en a assez pour que chaque enfant ait un doudou ? Comment sais-tu que tu as la bonne réponse ? »* … ⇨ **Validation** *cf étape 1* ⇨ **Bilan de séance :** retour sur la ou les procédure(s) et ce que l'on a appris (exposition des connaissances). Verbalisation : mettre en lien *« il n'y a pas assez de doudous » => « il y a moins de doudous que d'enfants »*. **Trace écrite :** Deux photos * Une photo avec les deux collections de départ. * Une photo avec les deux collections appariées.	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations du quotidien de la classe (ex : le rituel des absents, en motricité, en atelier, …).* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** * Une dizaine de figurines de même couleur. * Des oursons de même couleur (ou autres objets figuratifs pour compréhension de la situation de comparaison). Il faut qu'il y ait 1, 2 ou 3 oursons de moins que de figurines. * Deux barquettes pour séparer les collections de figurines et de doudous. 
Obstacles / erreurs possibles : * L'élève ne voit pas quelle collection est la plus petite. * L'élève comprend quelle collection est la plus petite, mais il est incapable d'utiliser la locution complète (il verbalise *« il y a moins de doudous »*, mais ne termine pas la phrase avec *« **que d'enfants** »*).	**Remédiations :** * Augmenter l'écart entre les 2 collections. Plus la différence est grande, plus l'élève prend conscience de la notion. * La verbalisation est prise en charge par l'enseignant après le retour sur action de l'élève : *« Est-ce que chaque enfant a un doudou ? Est-ce que chaque doudou a un enfant ? Où est-ce qu'il y a moins ? »* * Retravailler lors d'activités physiques, les jeux d'équipes demandant une comparaison pour savoir qui a gagné (lapin/chasseur ; les déménageurs).

ETAPE 3

Objectifs : mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer. Comprendre et utiliser les locutions « plus que » et « moins que ».

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Dans cette étape, il y a moins ou plus de doudous que de figurines. **Consigne :** *« Tu as une barquette avec des enfants et une barquette avec des doudous. Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant ait un doudou. Est-ce qu'il y en a assez ? »* **Mise en commun** dans l'atelier **:** ⇨ **Retour sur son action :** ○ Reprendre les mêmes questions que dans les étapes 1 et 2, puis… ○ *« Est-ce qu'il y a plus d'enfants que de doudous ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a plus de doudous que d'enfants ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a moins d'enfants que de doudous ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a moins de doudous que d'enfants ? »* ⇨ **Validation** *cf étape 1* ⇨ **Bilan de séance** (verbalisation) : ○ *« Il y a moins de doudous que d'enfants. Il y a plus d'enfants que de doudous. »* ○ *« Il y a plus de doudous que d'enfants. Il y a moins d'enfants que de doudous. »*	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations du quotidien de la classe (ex : le rituel des absents, en motricité, en atelier, …).* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** * Une dizaine de figurines de même couleur. * Des oursons de même couleur (ou autres objets figuratifs pour compréhension de la situation de comparaison). Il faut qu'il y ait 1, 2 ou 3 oursons de moins ou de plus que de figurines. * Deux barquettes pour séparer les collections de figurines et de doudous. 
Obstacles / erreurs possibles : * L'élève ne comprend pas le lien entre *« plus de doudous que d'enfants »* et *« moins d'enfants que de doudous »*. * L'élève comprend le lien entre « plus de doudous que d'enfants » et « moins d'enfants que de doudous », mais est incapable d'associer ces deux locutions pour décrire la même situation.	**Remédiations :** * Revenir aux étapes 1 et 2. * La verbalisation est prise en charge par l'enseignant après le retour sur action de l'élève.

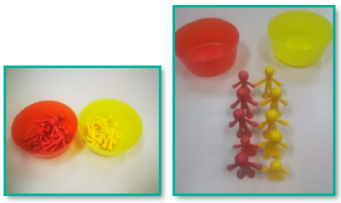
ETAPE 4

Objectifs : mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer.
Introduire la locution « autant que » et la comprendre.

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Dans cette étape, il y a autant d'oursons que de figurines. **Consigne :** *« Tu as une barquette avec des enfants et une barquette avec des doudous. Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant ait un. Est-ce qu'il y en a assez ? Est-ce qu'il y en a trop ? »* **Mise en commun** dans l'atelier **:** ⇨ **Retour sur son action :** Reprendre les mêmes questions que dans les étapes 1 et 2, puis… ○ *« Est-ce qu'il y a plus d'enfants que de doudous ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a plus de doudous que d'enfants ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a moins d'enfants que de doudous ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a moins de doudous que d'enfants ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut ? »* ⇨ **Validation** *cf étape 1* ⇨ **Bilan de séance** (verbalisation) : ○ *« Il y a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant en ait un. Il y a autant de doudous que d'enfants. »* ○ *« Autant que c'est « pas plus que, pas moins que », ou c'est « pareil-pareil ».* **Trace écrite :** Deux photos * Une photo avec les deux collections de départ. * Une photo avec les deux collections appariées.	*Activité dirigée.* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** * Une dizaine de figurines de même couleur. * Des oursons de même couleur. Il faut qu'il y ait autant d'oursons que de figurines. * Deux barquettes pour séparer les collections de figurines et de doudous.  
Obstacles / erreurs possibles : * L'élève comprend que les deux collections sont aussi équipotentes, mais il est incapable d'utiliser la locution « autant que » (il verbalise *« il y a pareil »*).	**Remédiations :** * La verbalisation est prise en charge par l'enseignant après le retour sur action de l'élève : *« Quand il y a pareil, on dit « Il y a autant de doudous que d'enfants ».*

ETAPE 5

Objectifs : mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer.
Comprendre et utiliser les locutions « plus que », « moins que » et « autant que ».

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Dans cette étape, il y a moins ou plus ou autant de figurines rouges que de figurines jaunes. **Consigne :** *« Tu as une barquette avec des enfants rouges et une barquette avec des enfants jaunes.* *La maîtresse veut que les enfants rouges et les enfants jaunes se mettent en rang ensemble. Un enfant rouge doit toujours donner la main à un enfant jaune et un enfant jaune doit toujours donner la main à un enfant rouge.* *Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut de enfants rouges pour que chaque enfant jaune puisse donner la main ? Est-ce qu'il y en a assez ? »* **Mise en commun** dans l'atelier **:** ⇨ **Retour sur son action :** ○ Reprendre les mêmes questions que dans les étapes 4, puis… ○ *« Est-ce qu'il y a juste ce qu'il faut d'enfants rouges pour que chaque enfant jaune puisse donner la main ? »* ○ *« Est-ce qu'il y a autant d'enfants jaunes que d'enfants rouges ? »* ⇨ **Validation** en demandant à un élève d'apparier les figurines en verbalisant (on fait vivre en acte la procédure de correspondance terme à terme). ⇨ **Bilan de séance** (verbalisation) : ○ *« Il y a moins d'enfants rouges que d'enfants jaunes. Il y a plus d'enfants jaunes que d'enfants rouges. »* ○ *« Il y a moins de d'enfants jaunes que d'enfants rouges. Il y a plus d'enfants rouges que d'enfants jaunes. »* ○ *« Chaque enfant rouge peut donner la main à un enfant jaune. Chaque enfant jaune peut donner la main à un enfant rouge. »* ○ *« Il y a juste ce qu'il faut d'enfants rouges. Il y a juste ce qu'il faut d'enfants jaunes. Il y a autant d'enfants rouges que d'enfants jaunes. »*	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations du quotidien de la classe (ex : le rituel des absents, en motricité, en atelier, …).* *Groupe de 4 à 6 élèves.* **Matériel pour chaque élève :** * Deux collections d'une dizaine de figurines de deux couleurs différentes. * Deux barquettes pour séparer les deux collections de figurines par couleur. 
Remarques : cette étape n'est possible que lorsque les compétences travaillées lors des étapes précédentes sont maitrisées.	

ETAPES 6 à 10

Objectifs : mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer.
Reprendre les étapes précédentes en utilisant des objets non figuratifs.

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Etape 6 : Comprendre et utiliser la locution « plus que ». ***Etape 7 :*** Comprendre et utiliser la locution « moins que ». ***Etape 8 :*** Comprendre et utiliser les locutions « plus que » et « moins que ». ***Etape 9 :*** Comprendre et utiliser la locution « autant que ». ***Etape 10 :*** Comprendre et utiliser les locutions « plus que », « moins que » et « autant que ».  	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations du quotidien de la classe (ex : le rituel des absents, en motricité, en atelier, …).* *Groupe de 4 à 6 élèves.* **Matériel pour chaque élève :** * Deux collections d'une dizaine de jetons de deux couleurs différentes. * Deux barquettes pour séparer les deux collections de jetons par couleur.

ETAPE 11 : Résolution d'un problème

Objectif : mettre en relation des objets d'une collection avec les objets d'une autre collection pour les comparer

TÂCHE DE L'ENSEIGNANT	MISE EN ŒUVRE
Les deux barquettes d'oursons et la barquette avec les figurines sont présentées aux élèves. **Enoncé du problème :** *« Les enfants ont perdu leur panier de doudous. L'ATSEM en a retrouvé 2, mais elle ne sait pas quel panier est celui des enfants. Quel est le panier qui a juste ce qu'il faut de doudous pour que chaque enfant ait un doudou ? »* **Mise en commun :** ⇨ **Retour sur son action** : Si les termes « plus que » et « moins que » et « autant que » ne sont pas prononcés par les élèves, ils seront réemployés par l'enseignant. ⇨ **Validation :** la validation se fait par mise en correspondance terme à terme des doudous et des enfants. ⇨ **Bilan de séance** : (verbalisation) : ○ *« Dans cette barquette, il y a des enfants qui n'ont pas de doudou. Il y a moins de doudous que d'enfants. Il y a plus d'enfants que de doudous : Ce n'est pas le bon panier. »* ○ *« Dans cette barquette, il y a des doudous en trop. Il y a plus de doudous que d'enfants. Il y a moins d'enfants que de doudous : Ce n'est pas le bon panier. »* ○ *« Dans cette barquette, il y a un doudou pour chaque enfant. Il y a autant de doudous que d'enfants : C'est le bon panier. »* **Trace écrite :** Trois photos * Une avec la barquette des enfants et les deux barquettes de doudous (situation de départ). * Une avec les enfants appariés avec les doudous de la mauvaise barquette. * Une avec les enfants appariés avec les doudous de la bonne barquette.	*Activité dirigée à mettre en place très régulièrement dans de nombreuses situations.* *Groupe de 4 à 6 élèves* **Matériel pour chaque élève :** * Une barquette avec une dizaine de figurines de même couleur (couleur différente des doudous). * Deux barquettes d'oursons (dans chaque barquette, tous les oursons ont la même couleur). * Une barquette contient le même nombre d'oursons que de figurines * L'autre barquette en contient plus ou moins (écart de 1, 2 ou 3). **Variantes** : * Augmenter le nombre de paniers d'oursons jusqu'à 4 paniers pour un groupe d'enfant. * Possibilité de donner deux barquettes avec la bonne quantité d'oursons parmi 3 ou 4 barquettes. * Proposer un seul panier pour plusieurs groupes de figurines, selon la même méthodologie.

Obstacles / erreurs possibles / remédiations :

Les obstacles rencontrés et les erreurs des élèves dans la résolution de ces problèmes peuvent être des indicateurs de la nécessité de reprendre une ou plusieurs des étapes précédentes Mais les difficultés peuvent aussi provenir d'obstacles langagiers entrainant une mauvaise appréhension de l'énoncé ; on veillera donc à faire reformuler plusieurs fois les énoncés des problèmes proposés.

Remarque :

Ces situations d'appariement permettront plus tard une meilleure compréhension de la consigne dans des situations problèmes où le nombre sera utilisé comme mémoire de quantité. Cf situation du bus.

RUPTURES ET CONTINUITÉS DANS L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS À LA TRANSITION ÉCOLE – COLLÈGE EN FRANCE : LE CAS DE L'ADDITION DE FRACTIONS

Stéphanie WACHTEL
Enseignante INSPE et Doctorante
LIG, Université Grenoble Alpes
Stephanie.wachtel@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé
À l'aube de l'entrée en vigueur des nouveaux programmes, le travail présenté étudie les ruptures et continuités dans l'enseignement des fractions à la transition école – collège en France en se focalisant sur l'addition de fractions. L'élaboration d'un modèle praxéologique de référence utilisé pour analyser les documents officiels et une sélection de manuels permet d'accéder au modèle praxéologique dominant dans les deux institutions (école primaire et collège) (Chaachoua et Bessot, 2019; Chaachoua et al., 2025; Chevallard, 1999, 2005). Les résultats obtenus mettent en lumière des phénomènes qui questionnent la raison d'être des fractions (et plus particulièrement de l'addition de fractions) en amont de la classe de 4ème. L'analyse (en suivant la même méthodologie) des nouveaux programmes de cycle 2 et des projets pour le cycle 3 permet d'identifier des évolutions, tant au niveau des types de tâches préconisés qu'au niveau des aspects objet et outil censés être mobilisés par les élèves.

I - INTRODUCTION

Le travail présenté lors de cette communication[1] porte sur l'analyse des exercices impliquant une addition de fractions dans une sélection de trente-cinq manuels scolaires (sept de chaque niveau allant du CM1 à la 4ème) et nous commençons par exposer ci-dessous les principales motivations de ce choix.

L'introduction et l'appropriation de la notion de fractions se fait selon la dialectique outil-objet au sens de Douady (1987), en s'appuyant à la fois sur la résolution de problèmes (qui permet de donner du sens au concept) et sur les opérations (qui permettent de considérer les fractions en tant qu'objet d'étude, leur conférant progressivement le statut de nombre). Dans une logique de progression, l'addition est la première opération abordée, en CM1, et c'est d'ailleurs la seule qui l'est (avec la multiplication par un entier) dans les programmes français en vigueur au moment de notre étude. Les techniques algébriques sur les fractions ne sont étudiées qu'en classe de 4ème distinguant ainsi la France de nombreux autres pays. La figure 1 montre le seul item mobilisant une addition de fractions que nous ayons trouvé dans les évaluations nationales françaises récentes du CM1 à la 4ème.

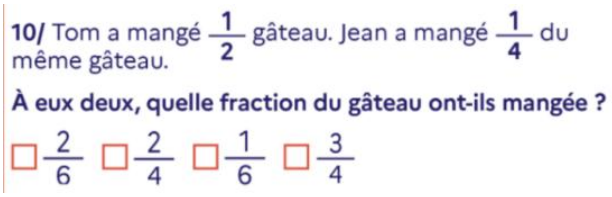


Figure 1. Extrait des évaluations de début de quatrième de 2023 et 2024 – MENJ

Sur 800 000 élèves évalués, moins d'un sur deux y a répondu correctement (45,7 % en 2023 et 45,5% en 2024 (Andreu et al., 2024, 2023)) ce qui génère des interrogations sur l'enseignement des fractions.

[1] Ce travail a été partiellement soutenu par le programme « CAPES-COFECUB » (numéro de projet : Sh1052/25/Campus France : 52783QK), financé par le ministère français de l'Europe et des Affaires étrangères, le ministère français de l'Enseignement supérieur et CAPES

Cherchant à contribuer aux travaux visant à identifier ce qui se joue, en France, à la transition école-collège sur le thème des fractions (Chambris, 2017; Chambris, Tempier, et Allard, 2017; Coulange et Train, 2019), nous nous proposons donc d'en étudier l'addition, du CM1 où les fractions sont introduites, jusqu'en 4ème, classe dans laquelle les techniques opératoires algébriques sont présentées. Nous utiliserons la même méthodologie pour analyser les nouveaux programmes afin de repérer les évolutions préconisées. Dans une première partie, nous présenterons quelques éléments de « relief » sur l'addition de fractions, ensuite nous expliciterons notre méthodologie et nous terminerons avec la présentation des résultats de nos analyses, avant de conclure.

II - CONDITIONS ÉCOLOGIQUES ET QUESTION DE RECHERCHE

1 La résolution de problèmes dans les instructions officielles

Certains éléments de la dialectique de Douady semblent avoir été adoptés par les programmes puisque ceux en vigueur reprennent la phrase suivante, déjà présente dans ceux de 2002 : « La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. » (MENJS, 2020). Ainsi, dans le thème « Nombres et calcul », l'un des attendus de fin de cycle 3 relevé dans les programmes publiés en 2015, 2018 et 2020 est « Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul. ». En étudiant le contenu de ces paragraphes, on constate cependant que les fractions en sont absentes à l'exception d'une mention dans la sous-partie « proportionnalité » où ce sont, non pas des fractions simples, mais des fractions décimales qui sont évoquées. Cet intitulé est également présent dans les attendus de fin d'année de chacun des niveaux CM1, CM2 et 6ème de 2019, mais l'analyse du contenu des paragraphes révèle que les énoncés des problèmes donnés en exemples de réussite mettent uniquement en jeu des nombres entiers ou décimaux, aucune fraction. Enfin, dans les repères annuels de progression pour le cycle 3 de 2019, l'intitulé « résolution de problèmes » impliquant des fractions n'apparaît pas explicitement mais une situation semble la sous-entendre : « Ils [Les élèves] calculent le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés (avec des entiers et fractions puis avec des décimaux à deux décimales). »

2 Quelques particularités des programmes français

Quelques spécificités nous paraissent à même d'influencer la raison d'être attribuée à l'addition de fractions au cycle 3 : tout d'abord, l'enseignement des fractions débute en CM1, ce qui est plus tardif que dans de nombreux autres curricula (Martinez-Ibanez, 2018). Ensuite, la soustraction de fractions n'est pas envisagée concomitamment à l'addition mais, dès la période 2 du CM1, l'addition de fractions décimales est spécifiquement mentionnée. Cette dernière semble avoir pour raison d'être l'introduction de l'écriture décimale des nombres décimaux puisque le programme du cycle 3 précise « L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. » (MEN, 2018, p. 29). Dans cet objectif, l'utilisation de la soustraction n'a effectivement pas d'utilité et cela pourrait expliquer l'absence de cette opération dans le curriculum du cycle 3. Enfin, depuis plus de deux décennies, les instructions officielles répètent régulièrement que « Les fractions sont essentiellement introduites, au cycle 3, pour donner du sens aux nombres décimaux. » (MEN, 2002, p 83). Tout ceci nous amène à nous demander si l'addition de fractions est présente pour travailler les fractions en tant que telles (aspect objet des fractions précédemment évoqué) ou bien uniquement pour préparer à l'écriture décimale des nombres décimaux.

3 L'addition de fractions

Les fractions sont des nouveaux nombres pour les élèves et, comme le rappellent les programmes dès 2016, « le calcul contribue à la connaissance des nombres ». Cependant, les évaluations nationales

testent les opérations sur les nombres décimaux en écriture à virgule dès la classe de 6ème, alors que celles sur les fractions ne le sont pas avant la classe de 4ème. Dans d'autres pays, des études ont été menées auprès d'élèves plus jeunes mais les techniques de calcul avec les fractions leur avaient été enseignées en amont (Braithwaite, Tian, et Siegler, 2018; Lortie-Forgues, Tian, et Siegler, 2015; Siegler et Pyke, 2013). La situation en France se distingue donc de celles de nombreux autres pays en ce sens que, du point de vue écologique, les élèves sont susceptibles d'être confrontés depuis la classe de CM1 jusqu'à celle de 5ème (c'est-à-dire pendant 4 ans) à des tâches ou des problèmes impliquant une addition de fractions sans avoir appris de technique de calcul. Ainsi, les élèves pourraient, dans ce laps de temps, rencontrer des situations favorisant l'émergence de techniques « locales » permettant d'additionner des fractions sans que celles-ci soient « formalisées et institutionnalisées sous forme de la règle générale d'addition de deux fractions. » (Anselmo et Zucchetta, 2018, p. 29), mais qui pourraient ensuite servir de points d'appui pour introduire les techniques algébriques en 4ème.

4 Conclusion sur les conditions écologiques et question de recherche

Les conditions écologiques semblent à première vue réunies pour que des additions de fractions et des problèmes dont la modélisation y conduit soient proposés à des élèves au cycle 3. Le manque de cohérence sur le type de fractions mobilisées dans ces problèmes et l'absence d'exemples d'énoncés rendent cependant cette possibilité sujette à interprétation et l'analyse des manuels nous permettra d'évaluer comment les équipes rédactrices s'en sont emparées ou non. En outre, l'apprentissage et l'éventuelle mobilisation de l'addition de fractions en amont de l'enseignement des techniques algébriques en classe de 4ème sont très peu documentés.

Les difficultés persistantes repérées dans l'apprentissage des fractions et, plus particulièrement, dans celui de l'addition de fractions, nous incitent à enquêter sur les conditions dans lesquelles elles se manifestent en France. Les questions que nous nous posons portent donc sur l'enseignement de cette notion, dans chacune des deux institutions concernées (école primaire et collège). Quelle est sa raison d'être ? Comment se fait la transition école – collège ?

III - MÉTHODOLOGIE

Notre travail porte sur des questionnements curriculaires que nous situons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) où toute activité humaine est modélisée à travers la notion de praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999). Une praxéologie se compose d'un quadruplet [T / τ / θ / Θ] : un type de tâches T pouvant être accompli par une technique τ, justifiée par une technologie θ, elle-même légitimée par une théorie Θ. Une praxéologie est ainsi constituée de deux blocs indissociables : le bloc du « savoir-faire » ou praxis avec [T / τ], et le bloc du « savoir » avec [θ / Θ].

Plusieurs études (comme (Bosch et Gascón, 2006)) montrent que, dans toute institution, il existe un modèle implicite du savoir mathématique à enseigner. En d'autres termes, toute transposition didactique (Chevallard, 1985) d'un savoir dans un système d'enseignement établit implicitement un modèle dominant. Pour le décrire, le comprendre et le questionner, le chercheur élabore un modèle praxéologique de référence (MPR).

Notre méthodologie s'inspire des travaux de Chaachoua, Bessot, et Kaspary (2021), mais nous ne donnons ici que quelques éléments concernant l'étape d'élaboration du MPR sur lequel nous nous appuierons pour analyser les manuels afin d'accéder au modèle dominant (Chaachoua et al., 2025). Un premier MPR est élaboré à partir de l'analyse *a priori*, d'un point de vue épistémologique, des conditions d'existence des praxéologies associées aux types de tâches liés à notre objet d'étude : l'addition de fractions. Des allers-retours entre cette analyse *a priori* et l'analyse des manuels (qui donne accès aux praxéologies enseignées) nous permettent ensuite de l'enrichir.

Les trois types de tâches que nous identifions sont :

- T1_Nb : « additionner au moins deux nombres dont au moins l'un est une fraction »
- T2 : « vérifier l'équivalence entre une fraction et la somme d'au moins deux nombres dont au moins l'un est une fraction »
- T3 : « résoudre un problème dont la modélisation aboutit à une tâche du type de tâches T1_Nb ou T2 ».

1 Présentation du MPR pour T1_Nb

En nous appuyant sur le cadre T4TEL (Chaachoua et Bessot, 2019), nous cherchons à associer un générateur de types de tâches au type de tâches T1_Nb au moyen d'un système de variables. Les trois premières variables que nous identifions sont :

- V1 : nombre de termes de la somme (dont les valeurs sont « 2 » ou « supérieur à 2 »)
- V2 : présence d'entier (« oui » ou « non »)
- V3 : valeur de l'entier si V2 = oui (« 1 » ou « supérieur à 1 »)

Les différentes valeurs prises par V1 et V2 génèrent les trois sous-types de tâches de T1_Nb suivants :

- T_e : « additionner un entier et une fraction »
- T_{2f} : « additionner deux fractions »
- $T_{+x\ termes}$: « additionner au moins 3 termes dont au moins l'un est une fraction » (nous considérons ce type de tâches comme une succession de types de tâches à deux termes et nous incluons donc les tâches de ce type de tâches dans les types de tâches T_e ou T_{2f}).

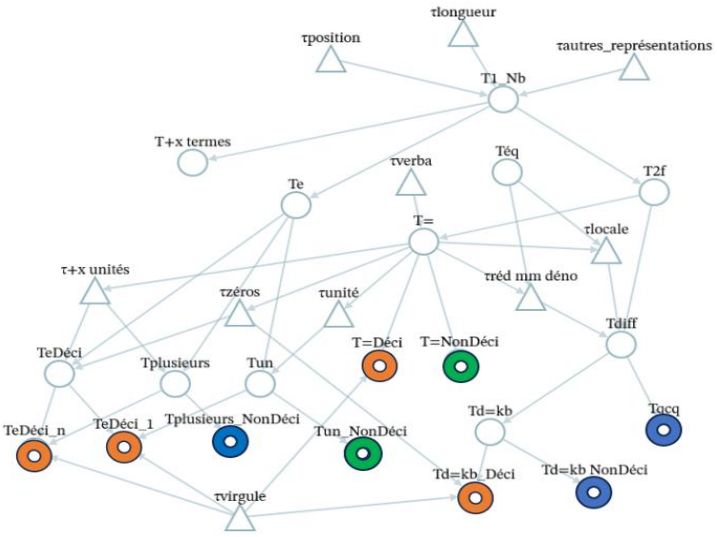


Figure 2. Représentation du modèle praxéologique de référence (MPR) pour T1_Nb avec l'application SYAPA[2]. Le code des couleurs sera précisé plus loin.

La figure 2 illustre la structuration de notre MPR. Les types et sous-types de tâches, notés T sont représentés par des cercles, les techniques, notées τ, par des triangles. Les flèches relient soit un type de tâches à ses sous-types de tâches, soit une technique au(x) type(s) de tâches qu'elle permet d'accomplir. Pour V3 = « 1 » par exemple, le type de tâches correspondant, noté « T_{un} », peut être accompli par la technique, notée « $\tau_{unité}$ », basée sur la connaissance de l'égalité $1 = \frac{b}{b}$ alors que si V3 = « supérieur à 1 », le type de tâches correspondant, noté « $T_{plusieurs}$ » nécessite la mobilisation d'une autre technique comme, par exemple, celle notée « $\tau_{+x\ unités}$ » basée sur la connaissance soit de l'égalité $n = \frac{n \times b}{b}$, soit de celle

[2] SYAPA est une application développée au sein du laboratoire informatique de Grenoble (LIG) qui permet notamment de produire et représenter une structure praxéologique

$1 = \frac{b}{b}$ et de la décomposition de l'entier en une somme ($n = 1 + \cdots + 1$) ou en un produit ($n = n \times 1$). Quel que soit le cas, on en arrive alors à devoir additionner deux fractions de dénominateurs égaux, type de tâches noté $T_=$ qui est donc ingrédient de toutes les techniques réalisant T_e.

La technique permettant d'additionner deux fractions de même dénominateur, notée « τ_{verba} », est basée sur la verbalisation (par exemple, pour $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, dire « deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes »). Et lorsque les dénominateurs sont différents (type de tâches noté « T_{diff} »), les techniques mobilisées reposent sur les deux mêmes étapes que celles réalisant T_e : se ramener à des fractions de même dénominateur et les additionner, c'est-à-dire à nouveau réaliser une tâche du type de tâches $T_=$. Ainsi $T_=$ est également ingrédient de toutes les techniques permettant d'effectuer T_{diff} et nous serons donc particulièrement attentive à la présence de ce type de tâches, mais aussi à sa précocité (ou non) dans la progression choisie dans chaque manuel. Cependant, se ramener à des fractions de même dénominateur, implique $T_{éq}$ (remplacer une fraction par une fraction qui lui est équivalente), mais les techniques pour déterminer le(s) nouveau(x) dénominateur(s) dépendent des dénominateurs impliqués, en particulier s'ils sont liés (c'est-à-dire multiples l'un de l'autre) ou non. Nous définissons alors la variable « dénominateurs », nommée V4, qui peut prendre les valeurs :

- « égaux », le type de tâches correspondant est $T_=$
- « liés » si l'un est un multiple de l'autre, le type de tâches correspondant est noté $T_{d=kb}$
- « quelconques » s'ils ne sont pas liés, le type de tâches correspondant est noté T_{qcq}
- « N/A » pour non-adapté dans le cas de la somme d'un entier et d'une fraction et qu'il n'y a, par voie de conséquence, qu'un seul dénominateur en jeu (il s'agit de T_e).

Et nous identifions trois techniques pouvant être mobilisées pour déterminer le(s) nouveau(x) dénominateur(s) qui dépendent des dénominateurs en jeu :

- $\tau_{réd_mm_déno}$: réduire au même dénominateur en utilisant le PPCM (plus petit commun multiple) ou toute autre technique adaptée, de nature arithmétique ou algébrique.
- τ_{locale} : réduire au même dénominateur en déterminant le dénominateur commun grâce à une connaissance « locale » (mémorisation, résultat de table, discours du type « si je divise l'unité en 2 fois plus de parts mais que j'en prends 2 fois plus, c'est la même chose », etc.)
- $\tau_{zéros}$: réduire au même dénominateur en ajoutant le nombre de zéros nécessaire au numérateur et dénominateur (technique valable uniquement pour des fractions décimales)

Puisque « Les fractions sont essentiellement introduites, au cycle 3, pour donner du sens aux nombres décimaux. » (MEN, 2002, p. 83), il nous semble important que notre MPR permette de rendre compte de l'impact d'une telle préconisation sur le modèle praxéologique dominant à la transition école – collège. Nous décidons donc d'introduire V5, la variable « nature des fractions », dont les valeurs sont « décimales » si elles le sont toutes, « non décimales » sinon et de subdiviser tous les types de tâches dernièrement définis en deux sous-types de tâches suivant la valeur de V5. Nous distinguons ces sous-types en ajoutant « _Déci » ou « _NonDéci » à la fin de leur nom. Ainsi, par exemple, $T_{d=kb_Déci}$ est le type de tâches « additionner deux fractions décimales de dénominateurs différents » dont un exemple est « Recopie et complète : $\frac{9}{10} + \frac{4}{100} = \cdots$ » (Delaville et al., 2016, p. 43).

Le tableau 1 ci-dessous organise tous les sous-types de tâches générés par les valeurs prises par les variables V2 à V5 :

V2 : présence d'entier	V3 : valeur de l'entier	V4 : dénominateurs	V5 : nature des fractions	
Oui T_e	N = 1 T_{un}	N/A	Décimales	$T_{eDéci_1}$
			Non décimales	$T_{un_NonDéci}$
	N ≥ 2 $T_{plusieurs}$	N/A	Décimales	$T_{eDéci_n}$
			Non décimales	$T_{plusieurs_NonDéci}$
Non T_{2f}		Egaux $T_=$	Décimales	$T_{=Déci}$
			Non décimales	$T_{=NonDéci}$
		Liés $T_{d=kb}$	Décimales	$T_{d=kb_Déci}$
			Non décimales	$T_{d=kb_NonDéci}$
		Quelconques T_{qcq}		

Tableau 1. Sous-types de tâches en fonction des valeurs des variables V2 à V5 (code couleur précisé ci-après).

2 Le MPR « colorié » pour T1_Nb : repérer ce que visent les types de tâches

Comme évoqué précédemment, nous cherchons à repérer, dans notre MPR, les types de tâches visant la construction des nombres décimaux pour les distinguer de ceux mobilisant d'autres connaissances.

Ainsi, nous considérons que les types de tâches n'impliquant que des fractions décimales ou pouvant être accomplis par la technique $\tau_{zéros}$ (dont la technologie est basée sur le principe décimal de notre système de numération) sont au service de l'introduction des décimaux et de l'écriture décimale. Ces types de tâches sont repérés par la couleur orange dans notre MPR (voir figure 2 et tableau 1).

Comme déjà établi, $T_=$ est un type de tâches ingrédient de toutes les techniques permettant de réaliser les autres types de tâches. Savoir effectuer ce type de tâches semble donc être un prérequis à l'acquisition des autres compétences sur l'addition de fractions (décimales ou non). Par ailleurs, l'égalité $1 = \frac{b}{b}$, constitutive de la définition de fraction au cycle 3, est une connaissance de base sur laquelle repose toutes les techniques permettant de réaliser T_e, que les fractions en jeu soient décimales ou non. Pour repérer les types de tâches que nous considérons comme « de base », nous choisissons la couleur verte.

Enfin, les types de tâches restants (en bleu) mobilisent d'autres connaissances sur les fractions que celles visant l'écriture décimale et sont considérés comme travaillant les fractions « pour elles-mêmes » (aspect objet). Les types de tâches classés dans cette catégorie sont : $T_{plusieurs_NonDéci}$ (additionner un entier supérieur à 1 et une fraction non décimale) et additionner des fractions non toutes décimales de dénominateurs différents, c'est-à-dire, soit liés mais non décimaux ($T_{d=kb_NonDéci}$), soit quelconques (T_{qcq}).

IV - RÉSULTATS

1 Première « photo » : nombre total moyen de tâches des types T1, T2 et T3

Nous commençons par dénombrer, dans chacun des 35 manuels (liste en annexe 1), toutes les tâches de type T1, T2 ou T3. Nous calculons ensuite le nombre total moyen de tâches par niveau, en additionnant le nombre total de tâches de chacun des 7 manuels d'un niveau et en divisant cette somme par 7. L'évolution de ce nombre total moyen de tâches sur les 5 niveaux étudiés est représentée, en bleu, sur la figure 3 ci-après : on y constate une chute globale sévère du nombre total de tâches du CM1 jusqu'en 5ème, puis une augmentation brutale en classe de 4ème. Aux niveaux 6ème et 5ème, les trois types de tâches ont en réalité quasiment disparu (voir paragraphe 1.2).

1.1 Contrastes dans le nombre total de tâches en CM1 et CM2

Ce dénombrement met cependant en évidence de grandes disparités en CM1 et CM2 (voir tableau 2) :

Collection	Niveau CM1	Niveau CM2	Total (CM1 et CM2)	Groupe
Acces	60	28	93	A
Cap Maths	53	23	76	A
Graine de Maths	16	17	33	B
Maths explicites	12	12	24	B
Méthode de Singapour	33	47	80	A
Outils pour les Maths	22	10	32	B
Totem	4	4	8	B

Tableau 2. Nombre total de tâches par collection en CM1 et CM2.

Deux cas particuliers se détachent :

- la collection Totem ne propose qu'un total de 4 tâches à chaque niveau alors que les six autres en proposent une dizaine au minimum.
- la Méthode de Singapour dans laquelle le nombre total de tâches passe de 33 en CM1 à 47 en CM2 alors qu'il baisse globalement dans l'ensemble des autres collections entre ces niveaux de classe.

Compte-tenu de ces grandes disparités, nous distinguons deux groupes pour les niveaux CM1 et CM2 :

- le groupe A (en orange sur la figure 3) formé des trois collections Acces, Cap Maths et la Méthode de Singapour. Le nombre total de tâches sur les deux années est supérieur à 75 dans ce groupe.
- le groupe B (en gris) des quatre autres : Graine de Maths, Maths explicites, Outils pour les Maths et Totem. Le nombre total de tâches sur les deux années est inférieur à 35.

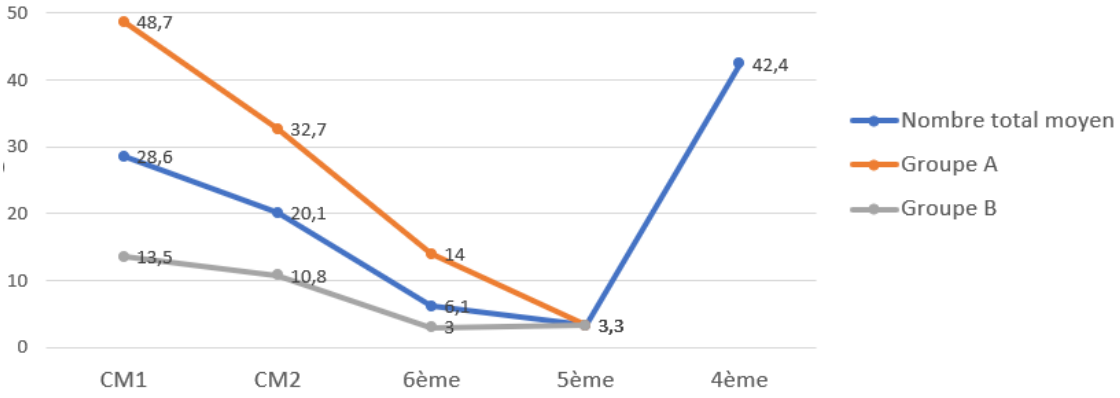


Figure 3. Évolution du nombre total moyen de tâches par niveau de classe

Le nombre total moyen de tâches, pour le groupe A, est alors de 48,7 en CM1 et de 32,7 en CM2 alors qu'il est de 13,5 en CM1 et 10,8 en CM2 pour le groupe B, soit plus de trois fois moins que dans le groupe A pour chaque niveau.

1.2 Nombre total de tâches par collection en 6ème, 5ème et 4ème

Pour le second degré, une tendance générale plus claire se dessine, comme le montre la figure 4 ci-dessous, qui représente le nombre total de tâches par collection et par niveau.

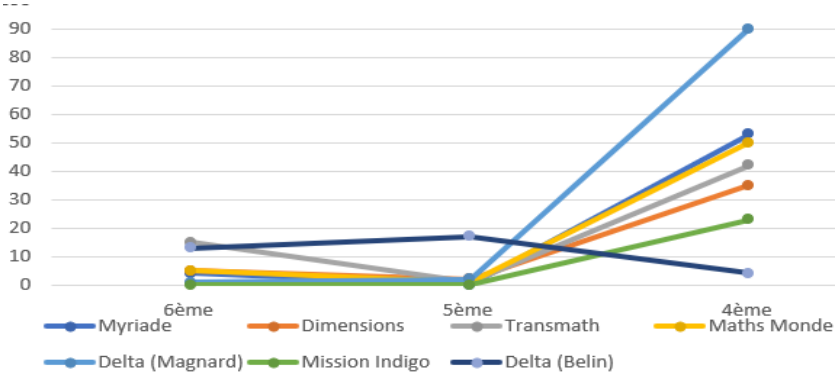


Figure 4. Nombre total de tâches par collection en 6ème, 5ème et 4ème.

Avec une légère augmentation du nombre de tâches en 5ème et une quasi-disparition en 4ème, la collection Delta (Belin) fait figure d'exception. Pour l'ensemble des six autres collections, concernant les types de tâches impliquant une addition de fractions, on relève :

- une présence faible de tâches (5 au maximum) en 6ème (sauf dans Transmath où l'on en trouve 15), majoritairement destinées à « occuper les bons élèves » puisqu'elles impliquent souvent des fractions de dénominateurs différents et/ou des additions d'au moins trois termes, avec en plus parfois, recherche du complément à l'unité (par exemple, le problème de l'œil d'Horus)
- aucune (ou presque) tâche en 5ème
- un nombre important, voire très important de tâches en 4ème (entre 23 et 90).

1.3 Conclusion sur la présence de l'addition de fractions dans les manuels

Globalement, le nombre de tâches diminue entre le CM1 et la 6ème. Contrairement à la forte hétérogénéité constatée en CM1 et CM2, une tendance globale se dégage dans le secondaire[3] : absence d'addition de fractions en 6ème et 5ème mais présence généralement forte en 4ème.

Le vide didactique observé en 6ème – 5ème est susceptible d'expliquer les faibles performances des élèves, en 4ème notamment. Pour vérifier cela, nous procédons à une analyse fine des tâches proposées en nous intéressant d'abord aux types de tâches présents dans les manuels de CM1- CM2, puis nous examinons ceux de 4ème. Pour cette étude, nous considérons qu'un manuel doit contenir au minimum 10 tâches et nous retenons donc pour la suite de nos analyses :

- en CM1 et CM2, six des sept collections sélectionnées au départ (toutes sauf Totem) ;
- en 6ème et 5ème, aucun manuel ;
- en 4ème, six des sept collections sélectionnées au départ (toutes sauf Delta, Belin).

2 Principaux résultats de l'analyse des manuels de CM1 et CM2

2.1 Le type de tâches T3 « Résoudre un problème dont la modélisation amène à T1 ou T2 »

Selon l'approche fondée sur la dialectique outil-objet (Douady, 1987), il est essentiel de s'appuyer à la fois sur la résolution de problèmes et sur les opérations. Nous émettons donc l'hypothèse que le type de tâches T3 devrait être bien représenté dans les manuels. Notre étude révèle que ce n'est le cas ni en CM1, ni en CM2, sauf dans la Méthode de Singapour comme le montre le tableau 3 ci-dessous :

[3] À une « exception » près en 6ème, le manuel Transmath, qui n'est pas assez représentatif et nous l'éliminerons donc de la suite de notre analyse.

Groupe A		
Collection	**CM1**	**CM2**
Acces	5	0
Cap Maths	3	0
Méthode de Singapour	1	15

Groupe B		
Collection	**CM1**	**CM2**
Graine de Maths	3	3
Maths Explicites	0	0
Outils pour les Maths	4	2

Tableau 3. Nombre de tâches du type de tâches T3 par manuel

Deux collections du groupe A proposent des problèmes uniquement en CM1 : ils se situent dans différents contextes de grandeurs et les dénominateurs des fractions impliquées sont presque toujours égaux. La méthode de Singapour s'en distingue donc par la forte présence du type de tâches T3 au CM2, mais aussi par le choix des dénominateurs qui y sont toujours différents. Concernant le groupe B, cinq des six problèmes trouvés dans la collection Graine de Maths se modélisent par des additions de quatre à six fractions et tous ceux relevés dans Outils pour les Maths de CM2 sont estampillés de deux ou trois étoiles, ou qualifiés de « défi maths ».

Il semblerait donc que, dans le groupe B, la résolution de problèmes (lorsqu'elle est présente) soit considérée comme une activité « pour aller plus loin » et/ou, peut-être, pour occuper les meilleurs élèves, alors que dans le groupe A, elle soit plutôt mobilisée comme moyen de donner du sens à la notion de fractions.

Nous poursuivons notre étude en examinant les fractions en jeu au moyen de la variable V4 (dénominateurs) dans le prochain paragraphe. Le type de tâches « additionner deux fractions de même dénominateur », noté $T_{=}$, étant un ingrédient des techniques permettant d'effectuer tous les autres types de tâches, nous faisons l'hypothèse qu'il est assez présent au début du cycle 3 (en particulier en CM1), puis progressivement moins pour laisser la place à d'autres types de tâches.

2.2 Nature des dénominateurs

Nous distinguons trois sous-types de tâches suivant la valeur de la variable V4 « dénominateurs » : égaux (sous-type de tâches noté $T_{=}$), différents (T_{diff}) ou encore « N/A » pour « non applicable » (somme d'un entier et d'une fraction, noté T_e).

La figure 5 ci-dessous illustre les résultats obtenus, les trois collections du groupe A sont rassemblées sur la gauche de chaque graphique, celles du groupe B, sur la droite :

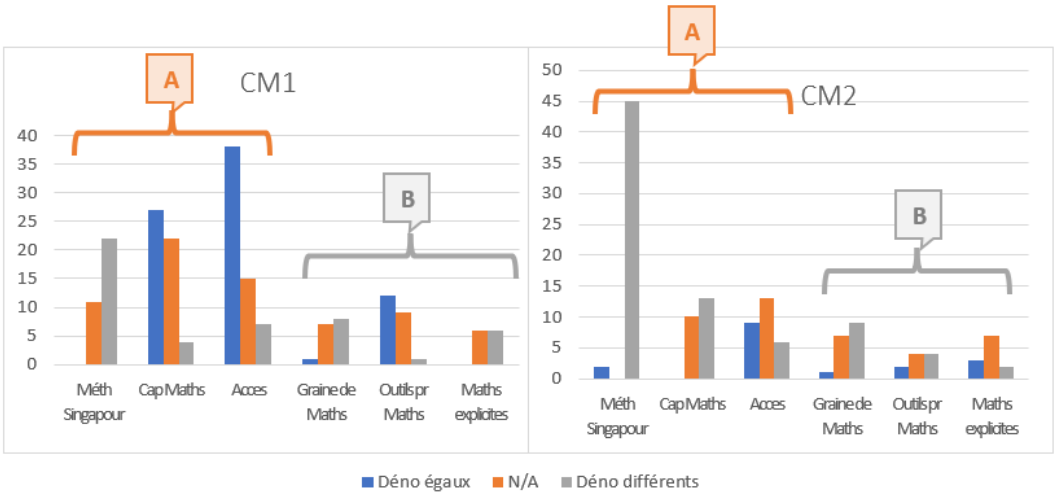


Figure 5. Nombre de tâches en fonction de la nature des dénominateurs

La Méthode de Singapour diffère nettement de toutes les autres collections au regard de la variable V4 : on n'y trouve quasiment aucune tâche du type de tâches $T_{=}$, des tâches du type de tâches T_e en CM1

uniquement et un nombre de tâches du type de tâches T_{diff} au moins trois fois supérieur à celui rencontré dans tous les autres manuels du même niveau.

Dans le groupe B, les choix des auteurs des différents manuels sont très contrastés en ce qui concerne le type de tâches $T_{=}$ et seule la répartition observée dans Outils pour les Maths semble compatible avec le scénario que nous anticipions. Les types de tâches T_e et T_{diff} étant présents dans les manuels de ce groupe (en nombre limité certes, mais souvent plus important que pour $T_{=}$), les élèves sont donc amenés à calculer des sommes d'entier(s)) et de fraction(s) ou de fractions de dénominateurs différents dont les techniques mobilisent l'addition de fractions de même dénominateur sans toujours avoir travaillé cette dernière en amont.

A contrario, on observe une présence importante du type de tâches $T_{=}$ dans les collections Cap Maths et Acces en CM1, présence qui, en CM2, s'estompe dans Acces et disparaît même complètement dans Cap Maths. Ces évolutions paraissent conformes à notre hypothèse : $T_{=}$ disparaîtrait progressivement pour laisser la place aux types de tâches T_e et T_{diff}. L'étude des rangs d'apparition des tâches révèle cependant que ce n'est le cas dans aucun de ces deux manuels de CM1 : on y observe une alternance (souvent par « paquets ») de tâches des types de tâches $T_{=}$ et T_e (qui, à eux deux, forment la grande majorité des types de tâches représentés dans ces manuels). Au niveau CM2 en revanche, c'est parmi les 11 premières tâches proposées dans le manuel Acces que se situent les 9 tâches impliquant des fractions de dénominateurs égaux.

Pour poursuivre notre analyse, revenons sur les types de tâches T_e et T_{diff} en nous appuyant sur notre MPR : lorsque les fractions en jeu sont décimales, ces deux types de tâches peuvent être effectués par « $\tau_{zéros}$ » une technique spécifique basée sur notre système de numération. Ainsi, suivant la nature des fractions en jeu, ces deux types de tâches ne nécessitent pas la mobilisation des mêmes connaissances et ne permettent donc probablement pas l'acquisition des mêmes praxéologies par les élèves. La variable V5 « nature de la (ou des) fraction(s) » peut nous permettre, selon qu'elle prenne la valeur « décimale(s) » ou « non décimale(s) », de distinguer les tâches visant un travail sur les fractions en tant que telles (aspect objet) de celles visant l'introduction des nombres décimaux et de leur écriture décimale (aspect outil).

2.3 *L'enjeu des fractions décimales*

La progression proposée par les programmes (fractions, puis fractions décimales et enfin écriture décimale) conduit à l'hypothèse que les manuels introduisent les fractions décimales en nombre significatif, mais seulement après un travail préalable sur les fractions non décimales. Cette hypothèse est examinée grâce à V5 (nature de la (ou des) fraction(s)) et la figure 6 ci-dessous représente le nombre de tâches impliquant des fractions décimales (en orange) parmi le nombre total de tâches (en bleu) :

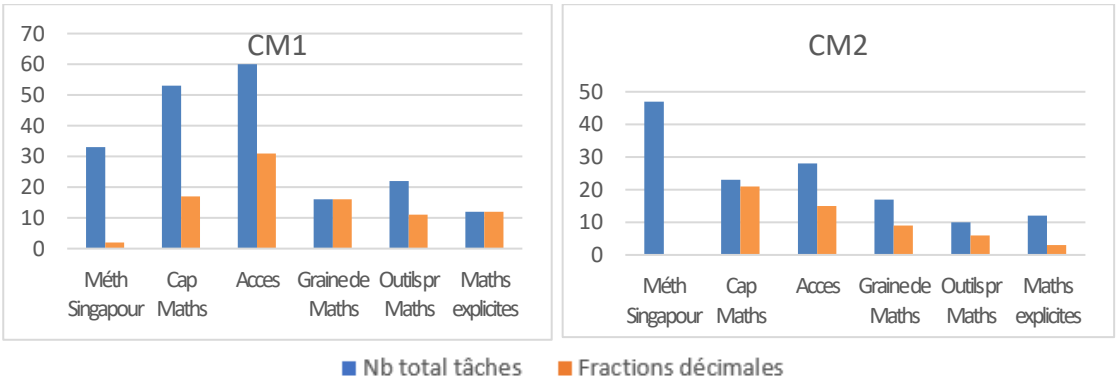


Fig. 6 : Nombre de tâches en fonction de la nature des fractions (décimales ou non)

On constate que les tâches impliquant les fractions décimales sont globalement majoritaires sauf dans la Méthode de Singapour qui se distingue une nouvelle fois : pour ses concepteurs, les fractions décimales

ne constituent clairement pas un enjeu d'apprentissage (seulement 2 tâches en impliquent sur un total de 33 en CM1 et aucune en CM2).

L'analyse des rangs d'apparition des tâches complète nos résultats et révèle deux groupes de manuels (hors Méthode de Singapour) :

- Groupe A' (Cap Maths et Acces) : propose de nombreuses tâches en CM1 et introduit les fractions décimales après un travail conséquent sur les fractions non décimales.
- Groupe B : propose moins de tâches globalement et travaille surtout sur des fractions décimales dès le CM1.

Afin d'analyser l'addition de fractions de dénominateurs différents, nous croisons les variables V4 et V5.

2.4 Retour sur l'addition de fractions de dénominateurs différents

La figure 7 ci-dessous représente le nombre total de tâches (en bleu), parmi lesquelles le nombre de tâches impliquant des fractions de dénominateurs différents (en gris) et parmi ces dernières, le nombre mettant en jeu des fractions décimales (en jaune).

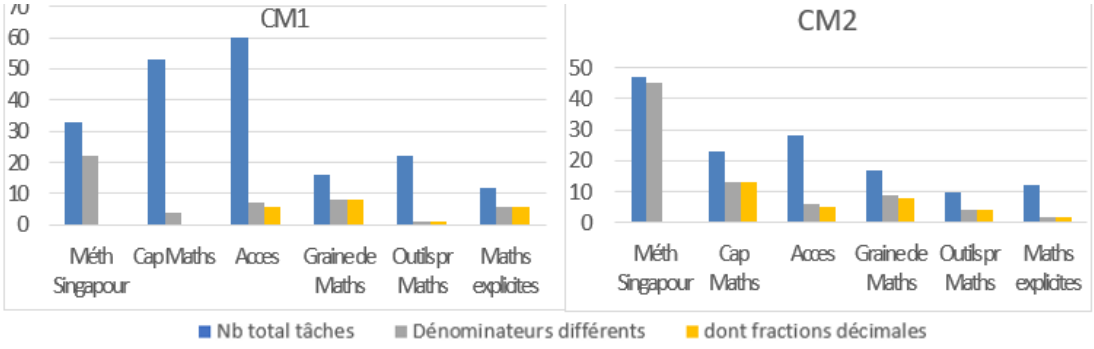


Figure 7. Présence des fractions décimales parmi les tâches impliquant des fractions de dénominateurs différents

La Méthode de Singapour dénote à nouveau très nettement : contrairement aux autres collections, elle propose de nombreuses tâches du type de tâches T_{diff} et aucune d'entre elles n'implique que des fractions décimales. Cette collection mise à part, la figure 8 révèle une certaine homogénéité : lorsque des fractions de dénominateurs différents sont impliquées, elles sont quasiment exclusivement décimales.

Le tableau 4 ci-dessous récapitule alors le nombre de tâches impliquant une addition de fractions non toutes décimales de dénominateurs différents ($T_{d=kb_NonDéci}$ ou T_{qcq}) :

Groupe A		
Collection	CM1	CM2
Acces	1	1
Cap Maths	4	0
Méthode de Singapour	22	45

Groupe B		
Collection	CM1	CM2
Graine de Maths	0	1
Maths Explicites	0	0
Outils pour les Maths	0	0

Tableau 4. Nombre d'additions de fractions non toutes décimales de dénominateurs différents par manuel

On constate donc que, en dehors de la Méthode de Singapour, ce type de tâches est inexistant dans les manuels de CM1 et CM2.

2.5 Raison d'être de l'addition de fractions

Les dynamiques praxéologiques observées concernant les fractions décimales montrent que l'enjeu qu'elles représentent est abordé de façon contrastée dans les groupes A' et B. Pour caractériser les raisons d'être attribuées par ces deux groupes à l'addition de fractions, nous nous appuyons sur la figure 8 ci-dessous, sur laquelle les trois catégories de types de tâches identifiées sont :

- en vert, celles qui mobilisent des compétences à acquérir en amont, dénommées « de base »
- en orange, celles qui préparent à l'écriture décimale

- en bleu, celles qui font travailler les fractions pour elles-mêmes (aspect objet)

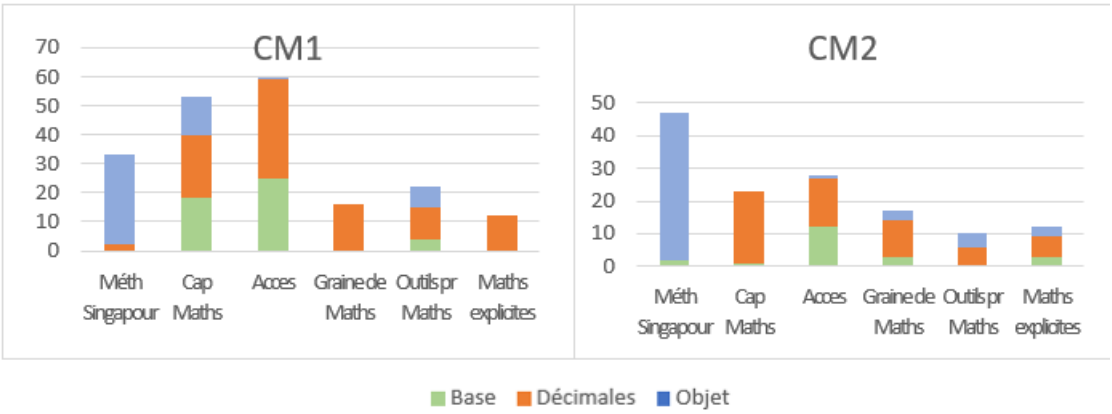


Figure 8. Répartition des tâches suivant les compétences mises en jeu

On constate que les tâches préparant à l'écriture décimale des nombres décimaux (en orange) sont prédominantes dans tous les manuels hormis ceux de la Méthode de Singapour et, dans une moindre mesure, Cap Maths et Outils pour les Maths du niveau CM1.

3 Résultats au niveau 4ème

Le nombre total de tâches dans les 6 manuels de 4ème retenus pour l'analyse fine varie de 23 à 90 mais une certaine homogénéité se dégage dans les choix des valeurs des principales variables :

- les problèmes sont régulièrement présents (une douzaine en moyenne)
- les additions de fractions de même dénominateur, globalement situées en début de progression, représentent environ 20% des tâches proposées
- les fractions décimales ont disparu
- les additions de fractions de dénominateurs différents sont fréquentes (presque trois quarts des tâches en moyenne).

Le modèle praxéologique dominant en 4ème se distingue donc nettement de celui mis en évidence au début du cycle 3 et on peut en conclure qu'à ce niveau de la scolarité, l'addition de fractions est un enjeu d'apprentissage en soi, indépendant des nombres décimaux et de l'écriture décimale.

4 Modèle praxéologique dominant actuel et évolution des instructions officielles

4.1 Synthèse des résultats sur les manuels

Le vide didactique de deux ans observé sur les niveaux 6ème et 5ème est susceptible d'expliquer les faibles performances des élèves en début de 4ème notamment. En effet, ces derniers pourraient avoir eu le temps d'oublier les connaissances et compétences acquises à l'école primaire. Notre analyse des manuels nous permet cependant de nuancer la place accordée à l'addition de fractions en CM1 et CM2.

Que l'on s'intéresse au nombre de tâches proposées ou aux types de tâches auxquels elles appartiennent, on observe une très forte hétérogénéité du traitement de l'addition de fractions dans les manuels de CM1 et CM2. En mettant la Méthode de Singapour à part, deux groupes semblent se dessiner : d'un côté, le groupe A' (Cap Maths et Acces) qui propose un nombre de tâches important en CM1 parmi lesquelles une majorité d'additions de fractions de même dénominateur et qui n'introduit les fractions décimales qu'après un nombre significatif de tâches impliquant des fractions non décimales et de l'autre, le groupe B pour lequel le nombre total de tâches proposé est globalement réduit, l'addition de fractions de même dénominateur n'est parfois pas travaillée du tout en amont des autres types de tâches et les fractions impliquées sont essentiellement décimales dès le CM1. La résolution de problèmes occupe une place très marginale dans les deux groupes mais semble y être considérée de manière nettement différente : comme un moyen de donner du sens à la fraction dans le groupe A', qui n'en propose qu'en CM1, mais

plutôt comme une activité d'approfondissement, pour « aller plus loin » et occuper les meilleurs élèves dans le groupe B. Enfin, au moins la moitié des tâches proposées dans les manuels des deux groupes prépare à l'écriture décimale des nombres décimaux. Si l'on rassemble les tâches « de base » (catégorie verte) et celles visant l'introduction de l'écriture décimale des nombres décimaux (catégorie orange), la proportion atteint même plus de 80% en moyenne. Ainsi, travailler l'aspect objet des fractions n'est clairement une priorité dans aucune des collections étudiées : Cap Maths CM1 est le seul manuel proposant quelques tâches dans cet objectif, mais seulement tout au début de sa progression.

Nous concluons que l'addition de fractions est un objet instable au cycle 3 et inexistant au début du cycle 4. Le choix des types de tâches proposés a pour conséquence que la technique $\tau_{\text{zéros}}$ (basée sur le principe décimal de notre système de numération) est peu concurrencée, confirmant que la principale raison d'être de cet objet est l'introduction de l'écriture décimale des nombres décimaux après laquelle les fractions disparaissent d'ailleurs assez rapidement. Enfin, l'addition de fractions non décimales, même simples, de dénominateurs différents est un type de tâches globalement absent de tous les niveaux allant du CM1 à la 5ème incluse, évitant ainsi l'émergence de la technique τ_{locale} (dans laquelle le dénominateur commun est déterminé grâce à une connaissance « locale » : mémorisation, résultat de table de multiplication, etc.).

Illustrant une autre progression possible, la Méthode de Singapour se distingue en proposant de travailler les fractions en tant qu'objet : on y trouve un nombre total de tâches significatif et qui augmente encore en CM2 (niveau auquel 2/3 des tâches sont des problèmes), mais surtout, un quasi-monopole des tâches impliquant des additions de fractions non décimales de dénominateurs différents (liés ou non).

4.2 Evolution des instructions officielles et impact potentiel

Attendus de fin d'année de 2019

Les attendus de fin d'année parus en 2019 montrent une première volonté de changement : ils détaillent, pour la première fois, par le biais de deux listes intitulées « ce que sait faire l'élève » et « exemples de réussite », les compétences et connaissances que les élèves doivent avoir acquises pour chaque niveau et chaque thème. En ce qui concerne l'addition de fractions, les tâches données en exemple appartiennent toutes au sous-type de tâches $T_{=\text{Déci}}$ pour le niveau CM1, T2 pour le CM2 (avec la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1), $T_{=}$ pour la 6ème et $T_{d=kb_NonDéci}$ pour la 5ème. Ainsi, ces exemples font tous partie de la catégorie orange pour le CM1 et CM2, des catégories orange et verte pour la 6ème et bleue pour la 5ème. Au cycle 3, la raison d'être des fractions comme introduction des nombres décimaux et de leur écriture décimale semble donc être confortée par ces instructions officielles complémentaires.

Suite à la parution de ces attendus de fin d'année, certaines des collections étudiées ont édité une nouvelle version de leurs manuels. L'analyse menée suivant la même méthodologie révèle une évolution d'ampleur limitée en CM1 et CM2 : une tendance globale à l'augmentation du nombre total de tâches, de la proportion de tâches de la catégorie orange et à une diminution de la proportion de tâches de la catégorie bleue. Ces évolutions semblent donc renforcer, à ces niveaux scolaires, la raison d'être des fractions en tant qu'introduction des nombres décimaux et de leur écriture décimale. De nets changements apparaissent en revanche en 6ème et 5ème : un seul manuel de 6ème contenait plus de 5 tâches en 2016 alors que les 3 collections nouvellement éditées proposent entre 17 et 44 tâches (se répartissant en quasi-totalité entre les catégories verte et orange). Les auteurs semblent donc chercher à maintenir une présence significative des tâches en lien avec l'écriture décimale des nombres décimaux, mais aussi à réactiver des savoir-faire de base (additions de fractions non décimales de dénominateurs égaux) qui, somme toute, sont peu ou pas travaillés en CM1 et CM2. Enfin, au niveau 5ème, les deux nouvelles éditions parues après 2019 proposent plus d'une cinquantaine de tâches dont une nette majorité appartient à la

catégorie bleue. Il semblerait donc qu'à ce niveau de classe, les auteurs des nouvelles versions de ces deux collections considèrent finalement l'addition de fractions comme objet d'étude.

Nouveaux programmes (2025)

Dans les programmes de cycle 2 (dont l'entrée en vigueur est prévue pour septembre 2025), des éléments indiquent une volonté d'évolution d'un autre ordre. L'enseignement de la notion de fraction commencera dès le CE1, ce qui constitue une avancée de deux ans par rapport aux programmes actuels et la raison d'être comme introduction des nombres décimaux y est maintenue, toujours à l'horizon du cycle 3. On constate que l'addition et la soustraction de fractions apparaissent de façon concomitante dès le CE1. En analysant les objectifs d'apprentissage et les exemples de réussite, on note la présence des types de tâches suivants :

- $T_{=}$ depuis le CE1 et de manière continue jusqu'en 6ème. De plus, il apparaît également dans le paragraphe « calcul mental » en CM2 et « automatismes » en 6ème.
- Même chose pour $T_{d=kb}$ que pour $T_{=}$ mais à partir du CE2.
- T3 mais, du CE1 au CM1, les exemples donnés impliquent uniquement des fractions décimales. En CM2 et 6ème , on en trouve impliquant des fractions non décimales de dénominateurs liés.

V - CONCLUSION

L'analyse menée en appui sur notre MPR a permis d'accéder au modèle dominant dans les deux institutions concernées en France. Trois éléments ont ainsi été mis en évidence : tout d'abord, l'addition de fractions est un objet d'enseignement instable au niveau d'une étape de la transposition didactique au cycle 3 et inexistant au début du cycle 4. Ensuite, la raison d'être principale de cet objet au cycle 3 est l'introduction des nombres décimaux et de leur écriture décimale. Enfin, rencontrer la nécessité de transformer une fraction en une fraction équivalente pour pouvoir l'additionner à une autre fraction est une tâche que les élèves peuvent n'avoir quasiment jamais rencontrée avant la classe de 4ème (sauf dans le cas de fractions décimales). Les conditions ne sont donc pas réunies pour que la technique τ_{locale} puisse émerger et elle ne pourra pas servir de point d'appui lorsque les techniques algébriques seront introduites, en classe de 4ème.

Les attendus de fin d'année parus en 2019 préconisaient des évolutions, mais de portée finalement assez limitée et renforçant plutôt la raison d'être identifiée ci-dessus. Les nouveaux programmes suggèrent la mise en place d'une dynamique plus large, voire d'un réel changement de paradigme et font espérer une meilleure prise en charge des ruptures que nous avons identifiées, mais soulèvent la question de leur mise en œuvre. Nous attendons la parution des nouveaux manuels : les analyser selon la même méthodologie aidera à cerner la manière dont les auteurs auront interprété ces prescriptions mais ne nous renseignera pas sur la compréhension qu'en auront les enseignants. Ces derniers étant les acteurs de l'étape suivante de la transposition didactique, le savoir enseigné dépend de leur adhésion aux programmes (Martinez et Roditi, 2017). Un changement d'importance nécessitant un certain temps d'appropriation, voire de la formation, des questions de calendrier et de formation (initiale ou continue) émergent donc naturellement et des études complémentaires auprès des enseignants, voire dans les classes, seront nécessaires.

BIBLIOGRAPHIE

Andreu, S., Biarrotte-Sorin, A., Bret, A., Cannes, F.-X., Durand de Monestrol, H., Garnero, M., … Rue, G. (2024). *Évaluations de début de quatrième 2024—Premiers résultats*. Ministère de l'Education nationale, de la jeunesse et des sports. Paris. Consulté à l'adresse https://www.education.gouv.fr/evaluations-de-debut-de-quatrieme-2024-premiers-resultats-415585

Andreu, S., Bret, A., de Monestrol, H. D., Heidmann, L., Lacroix, A., M'Bafoumou, A., … Wuillamier, P. (2023). *Évaluations de début de quatrième 2023*. Ministère de l'Education nationale, de la jeunesse et des sports. Paris. Consulté à l'adresse https://www.education.gouv.fr/evaluations-de-debut-de-quatrieme-2023-premiers-resultats-379872

Anselmo, B., et Zucchetta, H. (2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : Fractions et décimaux mathématiques, cycle 3, programmes 2016*. Futuroscope Lyon: Canopé éditions IREM de Lyon.

Bosch, M., et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., et Gascón, J. (2006). *Twenty-five years of the didactic transposition. ICMI Bulletin, 58, 51–65*.

Braithwaite, D. W., Tian, J., et Siegler, R. S. (2018). Do children understand fraction addition? *Developmental Science*, *21*(4), e12601. https://doi.org/10.1111/desc.12601

Chaachoua, H., et Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *21*(4). Consulté à l'adresse https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42583

Chaachoua, H., Bessot, A., Barquero, B., Pilet, J., Mizoguchi, T., Kaspary, D., et Nguyen, A. (2025). A Comparative Study of the Teaching of Quadratic Equations in Five Curricula : Brazil, France, Japan, Spain and Vietnam. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *44(1)*. https://doi.org/10.46298/rdm.13753

Chaachoua, H., Bessot, A., et Kaspary, D. (2021). Un cheminement possible pour accéder au modèle praxéologique dominant d'une institution d'enseignement. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, *11*(1), 251-279.

Chambris, C. (2017). Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3. *Colloque Mathématiques en cycle 3.*

Chambris, C., Tempier, F., et Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM*, (108), 63-91.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2005). La didactique dans la cité avec les autres sciences. *Symposium de Didactique Comparée*. Consulté à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_didactique_dans_la_cite.pdf

Coulange, L., et Train, G. (2019). Enseigner les nombres décimaux et les fractions—Transitions (ou ruptures ?) primaire—Secondaire. *Actes du colloque EMF 2018*, 1490-1500. Gennevilliers: 978-2-86612-391-8.

Delaville, X., Frion, H., Le Dantec, O., Peindaries, P., Plantiveau, A., et Walkowiak, A. (2016). *Graine de maths : CM1, cycle 3, année 1 programme 2016*. Paris: Nathan.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., et Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221.

Martinez, S., et Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. *Éducation & formations*, (94), 23. https://doi.org/10.48464/hal-01612589

Martinez-Ibanez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : Une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS* (Thèse de doctorat). Université Sorbonne Paris Cité.

MEN. (2002). Bulletin officiel de l'éducation nationale hors série n°1 du 14 février 2002. Consulté 4 août 2025, à l'adresse https://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm

MEN. (2018). Bulletin officiel n°30 du 26 juillet 2018. Consulté 4 août 2025, à l'adresse https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=38047

MENJS. (2020). Programmes d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). Consulté 4 août 2025, à l'adresse https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm

Siegler, R. S., et Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994-2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

ANNEXE - LISTE DES 35 MANUELS ÉTUDIÉS

1 Les manuels de CM1 et CM2

Collection	Acces	Cap Maths	Graine de Maths	Maths Explicites	Méthode de Singapour	Outils pour les Maths	Totem
Editeur	Acces	Hatier	Nathan	Hachette	Librairie des écoles	Magnard	Retz
Année d'édition	CM1 : 2021 CM2 : 2022	CM1 : 2020 CM2 : 2021	CM1 : 2016 CM2 : 2017	CM1 : 2020 CM2 : 2016	CM1 : 2018 CM2 : 2019	CM1 : 2020 CM2 : 2020	CM1 : 2019 CM2 : 2020

Tableau 5. Manuels étudiés pour l'école élémentaire (niveaux CM1 et CM2)

2 Les manuels de 6ème, 5ème et 4ème

Collection	Delta	Delta Maths	Dimensions	Maths Monde	Mission Indigo	Myriade	Transmath
Editeur	Belin	Magnard	Hatier	Didier	Hachette	Bordas	Nathan
Année d'édition	2016 : 6ème et Cycle 4	2016 : 6ème, 5ème et 4ème	2016 : 6ème et Cycle 4	2017 : 6ème et Cycle 4	2017 : 6ème 2016 : 5ème et 4ème	2016 : 6ème et Cycle 4	2016 : 6ème et Cycle 4

Tableau 6. Manuels étudiés pour le collège (niveaux 6ème, 5ème et 4ème)

MÉMORISER DES FAITS NUMÉRIQUES : D'UN DISPOSITIF DE FORMATION D'UNE ÉQUIPE D'ÉCOLE AUX ACQUIS DES ÉLÈVES

Karine VIEQUE
Docteure en didactique des mathématiques - LDAR
Conseillère Pédagogique Départementale,
Mission Mathématiques du Pas-de-Calais, DSDEN 62
karine.vieque@ac-lille.fr

Résumé
Ce texte présente une recherche-action (Morrissette, 2013) initiée à la rentrée 2024. Cette recherche-action vise à étudier comment développer chez les élèves les compétences mathématiques suivantes : la construction et l'automatisation de procédures de calculs permettant de restituer rapidement le résultat d'une multiplication de deux nombres inférieurs ou égaux à 10, en lien avec la mémorisation de ces faits numériques. Dans ce cadre, nous cherchons comment amener les élèves à développer les schèmes (Vergnaud, 1990) nécessaires à la pratique du calcul mental multiplicatif. Pour cela, notre méthodologie a reposé sur l'expérimentation en classes ordinaires de plusieurs séquences que nous avons conçues. Ces séquences sont composées de situations d'action (Brousseau, 1998) et prennent appui sur l'usage de configurations rectangulaires comme support pour aborder le concept de multiplication (Vergnaud, 1981 ; Fénichel & Pfaff, 2005). Ici, nous présentons le dispositif de formation mené au sein d'une équipe d'école composée de sept enseignants du CP au CM2, suivi des appuis théoriques sur lesquels reposent les situations conçues et expérimentées. Celles-ci sont alors présentées et analysées. À partir d'extraits de productions d'élèves, nous montrons l'effet de la première mise en œuvre de ce dispositif sur les acquis des élèves. Nous soulevons également les éléments que nous avons identifiés pour agir efficacement sur les apprentissages des élèves.

I - CONTEXTE

1 Le contexte, du côté de la formatrice

Dans notre travail sur la question de la mémorisation des faits numériques ainsi que sur celle de la formation des enseignants, nous adoptons deux postures différentes.

Notre première posture est celle de didacticienne. Dans notre travail de thèse (Vieque, 2022), nous avons étudié les schèmes des élèves engagés dans des processus de validation en géométrie à l'école élémentaire. La raison pour laquelle nous avons intégré l'étude des schèmes dans notre questionnement sur les processus de validation est la suivante : pour nous, l'étude des composantes d'un schème permet d'identifier comment envisager la production d'actions et de déclarations validées par leur efficacité à atteindre le but poursuivi. Notre méthodologie a reposé sur l'expérimentation en classes ordinaires d'une séquence composée d'une dialectique de situations d'action, de formulation, de validation (Brousseau, 1998) et de décision (Balacheff, 1987). Notre but était d'amener les élèves à s'interroger et à discuter sur la validité de leurs actions instrumentées dans le contexte de la restauration de figures (Godin et Perrin-Glorian, 2014). Nous avons alors montré que la dialectique de situations conçue était adaptée pour travailler la question de la validation à l'école élémentaire.

D'où la question suivante à explorer : quelles autres dialectiques de situations peut-on élaborer dans d'autres domaines mathématiques que la géométrie pour engager les élèves dans des processus d'argumentation et de validation à l'école élémentaire ?

Notre seconde posture est celle de formatrice. Nous occupons le poste de conseillère pédagogique départementale au sein de l'équipe de la Mission Mathématiques du Pas-de-Calais. Si nous avons en charge la formation des formateurs référents mathématiques du Pas-de-Calais, une autre de nos missions concerne l'analyse des résultats des élèves en mathématiques aux évaluations nationales. Le rôle de l'équipe de la Mission Mathématiques est de cibler une compétence sur laquelle agir en appui sur les faibles scores de réussite obtenus par les élèves. Notre mission de formatrice est alors de chercher comment agir auprès de la formation des formateurs et la formation des enseignants pour observer les élèves développer cette compétence et progresser vers la réussite.

Au regard de notre double posture, notre stratégie a alors été de nous saisir d'une problématique soulevée au niveau institutionnel pour proposer la mise en œuvre d'une recherche action qui soit en lien avec nos perspectives de recherche. Dans ce qui suit, nous présentons le contexte, du côté institutionnel avant d'exposer notre questionnement.

2 Le contexte, du côté institutionnel

Pour la première fois lors de la rentrée 2023, des évaluations nationales, appelées évaluations repères, ont été introduites au niveau CM1. Parmi les compétences testées, l'exercice 6 (Annexe 1) se concentre sur la mémorisation des résultats des multiplications. Les élèves doivent, en une minute, restituer autant de résultats que possible des tables de multiplication présentées. Dans ce contexte, les tables de multiplication se réfèrent à des calculs du type A × B = C, où A et B sont deux nombres entiers compris entre 1 et 10.

L'analyse des résultats des élèves de CM1 aux évaluations nationales de septembre 2023 a révélé des performances faibles en matière de mémorisation des faits numériques (Figure 1). En effet, 38,8 % des élèves sont classés dans le groupe des élèves « à besoin » et 29,2% dans celui des élèves « fragiles ».

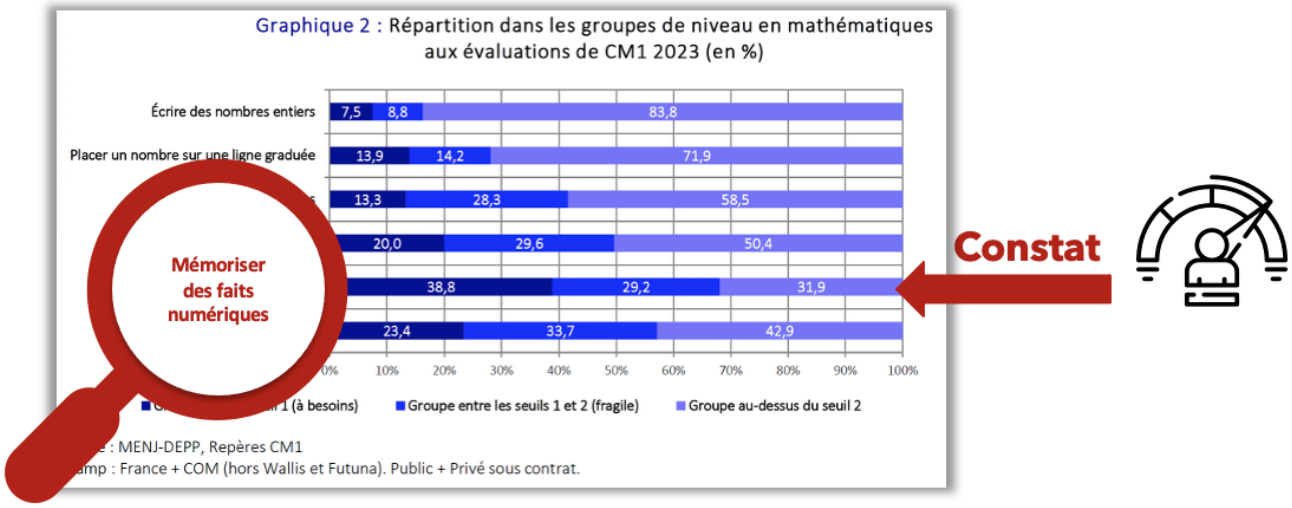


Figure 1 : répartition dans les groupes de niveau en mathématiques aux évaluations de CM1 2023

C'est la raison pour laquelle l'équipe de la Mission Mathématiques a ciblé cette compétence et a cherché à développer une stratégie pour améliorer les résultats des élèves. Une école spécifique a été ciblée : l'école Jules Michelet de Béthune (Pas-de-Calais). Celle-ci est composée de sept enseignants du CP au CM2 (élèves de 6 à 10 ans). Cette école a été ciblée en appui sur sa « fiche portrait école » (Figure 2). Celle-ci montrait une chute des résultats des élèves dans le domaine du calcul mental depuis plusieurs années.

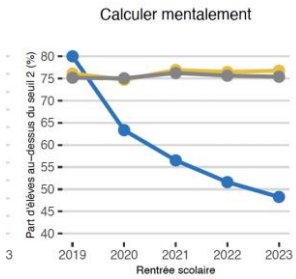


Figure 2 : « fiche portrait école » dans le domaine du calcul mental.

Par ailleurs, cette équipe d'école avait la volonté d'harmoniser ses pratiques d'enseignement. Ce contexte était propice à la proposition d'un dispositif de formation commun à tous les enseignants.

C'est ainsi qu'en mai 2024, l'équipe de la Mission Mathématiques du Pas-de-Calais a décidé de déployer un dispositif de formation au sein de cette école sur la question de l'enseignement des faits numériques. Et c'est dans ce dispositif que de notre côté, dans notre posture de didacticienne, nous avons intégré une recherche-action.

II - DISPOSITIF DE FORMATION ELABORE

Le dispositif de formation que nous avons élaboré (Figure 3) se structure en trois composantes : des animations pédagogiques (15 heures), des constellations[1] (12 heures) et du compagnonnage (chaque enseignant a bénéficié d'un accompagnement individuel au sein de sa classe sous forme d'un compagnonnage de la formatrice).

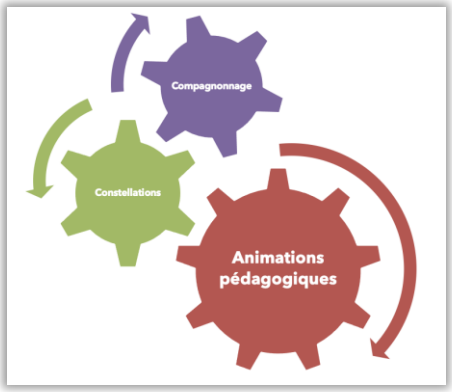


Figure 3 : Composantes du dispositif de formation élaboré

1 Observations préalables

Afin de définir les objectifs de formation, nous avons participé à un conseil des maîtres avec l'équipe enseignante en fin d'année 2023-2024, début juin. Cela nous a permis d'identifier les représentations de cette équipe concernant l'exercice « mémoriser des faits numériques » des évaluations nationales (Figure 1). Cela nous a également permis d'identifier les représentations des enseignants quant à l'enseignement et l'apprentissage des tables de multiplication. Nous sommes ensuite allée observer une séance de calcul mental dans chacune des classes. Cela nous a permis d'identifier, d'une part les pratiques ordinaires des enseignants dans le domaine du calcul mental, d'autres part les leçons et affichages conçus et mis à disposition des élèves.

[1] Regroupement de 6 à 9 enseignants pour travailler collectivement sur une problématique commune (mathématiques ou français)

2 Contenus abordés dans les animations pédagogiques

La première animation pédagogique a porté sur l'analyse et la compréhension de l'exercice 6, extrait des évaluations nationales, permettant de mesurer la mémorisation des faits numériques.

La deuxième animation a porté sur les enjeux liés à la mémorisation des faits numériques et ceux liés à la compréhension de la signification du signe « = » dans le développement des compétences en calcul mental. Nous nous sommes appuyée sur les travaux de Butlen et Pézard (1990) ainsi que sur ceux de Rinaldi. (2022).

La troisième animation a porté sur l'enseignement de la multiplication. Nous avons pris appui sur des apports d'Artigue et Viennot (1978), Vergnaud (1990).

La quatrième animation a porté sur la mise en œuvre d'un enseignement explicite reposant sur le triptyque « manipuler, représenter, abstraire » avec étude du rôle de la verbalisation à chaque étape du processus.

La cinquième animation a porté sur une compétence plus générale : apprendre à apprendre, que nous avons abordé dans le contexte de la mémorisation des faits numériques.

3 Contenus abordés en constellations d'enseignants

Nous avons conçu et proposé une ressource pour l'enseignement des faits numériques multiplicatifs. Celle-ci est composée de situations d'apprentissages de procédures, de leçons-procédures, de situations de mémorisation, de leçon-mémorisation, de jeux de mémorisation autocorrectifs, de tests de fluence. Les temps de constellation d'enseignants ont consisté en l'appropriation et l'expérimentation collective des différentes séances proposées, leur expérimentation collective, leur analyse et leur réajustement.

Après avoir décrit le contexte et le dispositif de formation, nous poursuivons avec le fondement théorique sur lequel reposent les situations que nous avons conçues et proposées aux enseignants.

III - FONDEMENT THEORIQUE SUR LEQUEL REPOSENT LES SITUATIONS CONCUES ET EXPERIMENTEES

1 Étude des travaux de Butlen et Pézard sur le calcul mental multiplicatif

Butlen et Pézard (1990) mettent en exergue que les décompositions multiplicatives restent peu disponibles chez les élèves de l'école élémentaire : pour calculer le produit de deux nombres inférieurs à 100, les élèves du cycle 3 (élèves de 9-11 ans) mobilisent majoritairement des procédures reposant sur la décomposition additive des nombres, proche de la technique opératoire. Ces chercheurs soulignent alors l'importance d'initier, dès le début de l'école élémentaire, l'apprentissage de procédures reposant sur les décompositions multiplicatives. L'enjeu est d'enrichir les conceptions des élèves sur les nombres et les propriétés des opérations, en appui sur la mobilisation des décompositions multiplicatives des nombres. En d'autres termes, il s'agit pour l'élève de savoir, entre autres, que $6 \times 4 = 24$ et que $24 = 4 \times 6$.

La question que nous soulevons est la suivante : serait-il pertinent d'enseigner des procédures dans le contexte de l'apprentissage des tables de multiplication ? En effet, nous pensons préférable que l'élève dispose, dans un premier temps, de procédures pour retrouver des résultats des tables de multiplication oubliés plutôt que ne rien pouvoir proposer comme réponse.

Nous formulons alors les hypothèses de travail suivantes :

Hypothèse n°1 : si la séance d'introduction d'une table de multiplication conduit à l'apprentissage de procédures et connaissances permettant de retrouver rapidement le résultat cherché, alors :

- les élèves pourront utiliser ces procédures pour retrouver des résultats des tables,
- les élèves pourront mémoriser ces résultats à force de les rechercher via ces procédures.

Hypothèse n°2 : si des procédures de calcul mental, visant à restituer rapidement les résultats des tables de multiplication (du type : $4 \times 7 = \ldots$? $5 \times 3 = \ldots$? $10 = 2 \times \ldots$?) sont enseignées aux élèves, alors ces derniers pourront, dans la suite de leur parcours, mobiliser ces mêmes procédures pour multiplier un nombre supérieur à 10 par 4 ; 8 ; 5 ; 10 ; …

Ainsi, nous choisissons de nous positionner dans un champ numérique situé en amont de ceux des travaux de Butlen et Pézard sur le calcul mental multiplicatif. Nous nous intéressons aux multiplications du type $A \times B = C$ et $C = A \times B$, avec A et B appartenant au domaine que nous définissons D0. Dans ce domaine D0, A et B sont des nombres entiers inférieurs ou égaux à 10 (ces multiplications correspondent aux tables de multiplications).

Dans ce qui suit, nous poursuivons sur le rôle de la preuve et de la validation dans la compréhension des mathématiques.

2 Étude du rôle de la validation et de la preuve dans la compréhension des mathématiques

La question que nous soulevons porte sur la manière d'enseigner des procédures de calcul dans le contexte de l'apprentissage des tables de multiplication. En effet, suffit-il de verbaliser la procédure : « multiplier un nombre par 4 revient à le multiplier par 2 et encore par 2 » pour convaincre l'élève ? pour développer ses compétences en calcul mental ? pour favoriser la compréhension des propriétés de la multiplication et la compréhension de la signification du signe « = » ? ou peut-on envisager construire la validité de l'équivalence d'écritures multiplicatives comme $4 \times B = (2 \times 2) \times B = 2 \times (2 \times B)$?

Duval (1992) souligne qu'il n'est pas possible de convaincre sans donner à comprendre. Pour favoriser la compréhension des mathématiques, il est important de mobiliser les preuves dans leur fonction de vérifier, d'expliquer, de communiquer (Hanna, 2000), d'autant plus que les preuves sont porteuses de connaissances mathématiques (Hanna et Barbeau, 2008). Pour appréhender la question de la preuve à l'école élémentaire, nous prenons en considération le fait que les « preuves du praticien sont pragmatiques. Elles s'ancrent dans les faits, dans l'action. Elles se fondent sur des théorèmes en acte qui n'ont pas été prouvés mais éprouvés dans la pratique. La communication de ces preuves se fait par ostension » (Balacheff, 1987, p. 13). Le fait que les preuves se fondent sur des théorèmes en acte entre en résonnance avec la notion de schème développée par Vergnaud (1990). En effet, un schème se découpe en plusieurs composantes et l'une d'elle porte sur les théorèmes en acte et concepts en acte. Ainsi, pour nous, l'étude des composantes d'un schème permet d'identifier comment envisager la production d'actions et de déclarations validées par leur efficacité à atteindre le but poursuivi.

En tant que chercheure en didactique des mathématiques, nos questions de recherche, en arrière-plan du dispositif de formation que nous avons conçu et mené dans notre contexte professionnel de formatrice, sont les suivantes :

- Comment initier chez les élèves de l'école élémentaire le développement des schèmes (Vergnaud, *ib.*) nécessaires à la pratique du calcul mental multiplicatif ?
- Comment élaborer une dialectique de situations d'action, de formulation, de validation (Brousseau, 1998) et de décision pour amener les élèves de l'école élémentaire à s'interroger et à discuter sur la validité des décompositions multiplicatives utilisées pour restituer rapidement le produit de deux nombres ?

Nous considérons comme nécessaire l'étude du champ conceptuel des structures multiplicatives (Vergnaud, 1990) avant d'élaborer des situations à usage didactique (Brousseau, *ib.*). À partir de cette étude, nous nous proposons de contribuer aux travaux menés par Butlen et Pézard (1990) en combinant l'étude des processus de validation (Brousseau, *ib.*) et des schèmes (Vergnaud, *ib.*). Pour cela, nous reprenons la méthodologie mise en œuvre dans Vieque (2022).

3 Étude du champ conceptuel des structures multiplicatives

Nous cherchons à initier l'apprentissage de procédures reposant sur la compréhension des nombres et les propriétés des opérations, ainsi que sur la mobilisation des décompositions multiplicatives des nombres. Vergnaud (1990) souligne que « les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maitrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner » (p. 150). C'est ce choix de situations qui permettra d'initier ou non l'apprentissage de procédures reposant sur les propriétés de la multiplication et la mobilisation des décompositions multiplicatives des nombres. Aussi, Vergnaud indique que « toute situation peut être ramenée à une combinaison de relations de bases avec des données connues et inconnues, lesquelles correspondent à autant de questions possibles » (p. 151). Son analyse des structures multiplicatives montre que les relations de base ne sont pas ternaires, comme le sont les relations de bases des structures additives, mais quaternaires. En effet, les problèmes les plus simples de multiplication et de division impliquent la proportion simple de deux variables l'une par rapport à l'autre :

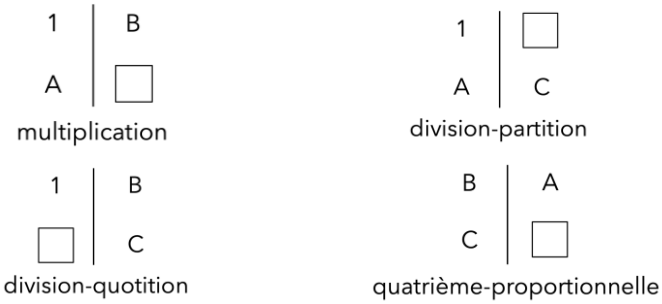


Figure 4 : Classes des problèmes élémentaires des structures multiplicatives

Nous retenons de cette classification l'importance d'initier l'étude des structures multiplicatives au début de l'école élémentaire par les classes de problèmes élémentaires de « multiplication », de « division-partition » et de « division-quotition ». En effet, toute situation de multiplication est également une situation de division et il est important de mettre « l'accent sur la réciprocité des opérations et d'introduire tôt un langage qui donne aux élèves un moyen de le faire » (Artigue & Viennot, 1978, p.44). Pour nous, ces trois classes de problèmes vont nous permettre d'agir sur l'enrichissement des conceptions des élèves sur les nombres, d'initier la construction de procédures reposant sur la mobilisation des décompositions multiplicatives des nombres.

4 Étude des différents types de situations permettant d'introduire la multiplication

Dans ce qui suit, au regard des propriétés de la multiplication à construire, nous nous intéressons aux différents types de situations permettant d'introduire le concept de multiplication. Artigue et Viennot (1978) rappellent que la multiplication permet de mathématiser soit une situation où la multiplication apparait comme l'écriture réduite d'additions répétées, soit une situation de « mesure-produit ». Elles soulèvent alors l'importance du choix du cadre sémantique dans lequel est présenté le symbole « × ». En effet, la signification sémantique attachée au symbole « × » lors de son introduction va dépendre du type de situation proposé aux élèves. Elles argumentent en faveur d'une situation de « mesure-produit » pour définir la multiplication. Une des raisons est la suivante : dans ce type de situation, les nombres A et B jouent le même rôle puisque A×B sera le nombre de cases d'une grille rectangulaire de A lignes et B colonnes. Une autre raison est que l'usage de configurations rectangulaires favorise la compréhension des propriétés de la multiplication comme la commutativité et la double distributivité.

Dans notre travail, situé au début de l'école élémentaire, les trois classes de problèmes élémentaires que nous avons retenues à savoir « multiplication », « division-partition » et « division-quotition » permettent de mathématiser le premier type de situations : il s'agit de situations de proportionnalité simple entre des

nombres entiers où la multiplication apparait comme l'écriture réduite d'additions répétées. Nous notons néanmoins que l'usage des configurations rectangulaires peut également être mobilisé dans ce type de situations. De fait, au regard des conceptions des élèves à construire, nous faisons le choix d'utiliser des configurations rectangulaires dans l'élaboration de situations à usage didactique (Brousseau, 1998) visant à introduire la multiplication et la division. Ce support matériel nous permettra de faire trouver et reconnaitre par les élèves des écritures multiplicatives équivalentes, ainsi que de favoriser l'apprentissage des propriétés de la multiplication.

Plus précisément, l'usage des configurations rectangulaires comme support matériel nous permettra :

- de disposer d'un matériel de manipulation pour construire et expliciter des procédures permettant de restituer rapidement le produit de deux nombres ;
- De disposer d'un support de validation pragmatique pour prouver l'égalité de deux écritures multiplicatives ;
- De discuter sur les conditions et les raisons de la validité de l'équivalence entre deux écritures multiplicatives.

5 Dialectique de situations d'action, de formulation, de validation et de décision : ancrage théorique et méthodologie

Nous faisons cohabiter les mêmes cadres théoriques (Brousseau, 1998 ; Vergnaud, 1990 ; Balacheff, 1987) que dans Vieque (2022). Cela nous permet d'appréhender le développement conjoint de la conceptualisation des structures multiplicatives et l'usage de procédures de calcul dans le contexte du calcul mental multiplicatif, avec l'objectif complémentaire d'engager les élèves dans un processus de validation des écritures multiplicatives proposées pour restituer efficacement le résultat de la multiplication de deux nombres. Pour cela, nous utilisons des configurations rectangulaires comme support pour la validation de l'équivalence d'écritures multiplicatives.

Pour donner du sens au savoir à enseigner, nous allons jouer sur le choix des valeurs des variables didactiques (Brousseau, *ib.*). C'est ce choix qui va amener les schèmes des élèves (Vergnaud, 1990) à s'adapter, à faire évoluer leurs représentations sur le sens d'un concept donné et à conduire les élèves à adopter des comportements différents. Nous allons étudier le contenu des composantes d'un schème, et notamment les composantes relatives aux invariants opératoires et aux règles d'action. En effet, la « composante 2 : prises d'informations, règles d'action, contrôles » est en étroite relation avec la « composante 3 : invariants opératoires ». Nous gardons donc l'idée d'analyser un schème en termes de « règles conditionnelles » comme le souligne Vergnaud (2001/2).

Pour élaborer une dialectique de situations dans le but d'intégrer la validation des savoirs et savoir-faire visés, nous soulignons le strict emboitement existant entre les différents échanges produits dans les situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau, *ib.*). Ainsi, les formes de connaissances développées dans l'action vont fonder le contenu des échanges développés dans des situations de formulation. De la même manière, le contenu des formulations d'action va fonder le contenu des énoncés de validité des actions. Nous pointons la possibilité de faire reposer la validation des actions sur les conditions de réussite ou d'échec d'une action pour agir sur la formation des schèmes et des conceptualisations nécessaires à la réussite. En effet, Vergnaud (*ib.*) souligne l'importance de revenir sur les conditions de réussite ou de l'échec pour favoriser l'explicitation des connaissances.

Enfin, nous prenons appui sur la possibilité de mettre en œuvre des situations de décision pour engager les élèves dans un processus d'argumentation et de validation à l'école élémentaire (Balacheff, *ib.*). Ce type de situation demande la mobilisation de moyens de décision et de moyens de validation. Pour nous, ces moyens sont constitués des connaissances et compétences préalablement construites dans un processus d'apprentissage. L'enjeu est donc de construire un lien entre connaitre et prouver, entre une

suite de situations d'action, de formulation, de validation avec une situation de décision. Cela fonde notre méthodologie.

Dans ce qui suit, nous exposons uniquement les deux situations d'action que nous avons conçues.

IV - SITUATIONS D'ACTION CONÇUES

Nous rappelons que nous nous intéressons aux multiplications du type A × B = C et C = A × B, avec A et B appartenant au domaine que nous définissons D0. Dans ce domaine D0, A et B sont des nombres entiers inférieurs ou égaux à 10 (ces multiplications correspondent aux tables de multiplications).

Nous rappelons également notre première hypothèse de travail :

Si la séance d'introduction d'une table de multiplication conduit à l'apprentissage de procédures et connaissances permettant de retrouver rapidement le résultat cherché, alors :

- les élèves pourront utiliser ces procédures pour retrouver des résultats des tables ;
- les élèves pourront mémoriser ces résultats à force de les rechercher via ces procédures.

1 Situation d'action n°1 : A × B = … ? Multiplication de deux nombres A et B

1.1 Descriptif de la situation d'action n°1

En appui sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), nous définissons un jeu que nous avons nommé « jeu du robot compositeur » de la manière suivante :

Problème : Le robot compositeur compose un rectangle en multipliant la quantité de cases d'une bande (B) par un nombre multiplicateur donné (A).



Figure 5 : Jeu du robot compositeur

Il s'agit de trouver une méthode pour calculer facilement le nombre total de cases (C) dans le rectangle, en utilisant deux résultats déjà connus et mémorisés.

Milieu matériel : rectangles (recto : écriture multiplicative / verso : nombre de cases correspondant au résultat de la multiplication) ; ardoise.

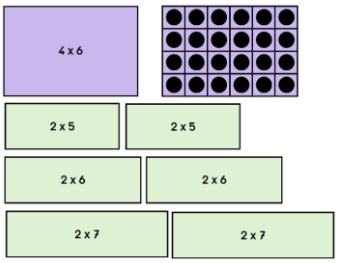


Figure 6 : exemple du matériel proposé dans la séance d'apprentissage de la table de multiplication d'un nombre par le nombre multiplicateur 4

Variables didactiques : A : 2 ; 4 ; 8 ; 3 ; 6 ; 7

B : entier inférieur ou égal à 10 (domaine D0)

Règles du jeu :

- Les rectangles s'assemblent du côté des écritures multiplicatives.
- L'assemblage doit se composer de deux rectangles uniquement.

- Les résultats des écritures multiplicatives choisies sont connus.

Critères de réussite (et de validation pragmatique) : l'assemblage des deux rectangles doit se superposer parfaitement sur le rectangle initial.

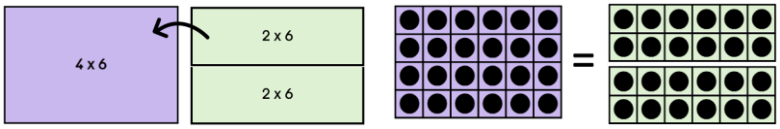


Figure 7 : Moyen de validation pragmatique

1.2 Conseils donnés aux enseignants quant à la mise en œuvre de la situation

Concernant la mise en œuvre, nous avons proposé aux enseignants de questionner les élèves pour les amener à expliciter les conditions et les raisons de réussite d'une procédure. Nous contextualisons ci-dessous les questions dans le cas où le nombre multiplicateur est 4 (exemple donné dans la Figure 6).

Question 1 : comment faire pour calculer facilement 4×6 ? Quelle méthode a-t-on trouvée ?

Réponse possible, dans l'exemple donné (Figures 5 à 7) : pour multiplier un nombre par 4, on peut multiplier ce nombre par 2, et multiplier encore le résultat par 2.

En d'autres termes : $\boxed{4 \times 6} = 2 \times \boxed{2 \times 6}$, on calcule le double du double de ce nombre.

Question 2 : pourquoi cette méthode permet de réussir ?

Réponse possible : parce qu'on a remplacé 4 par sa décomposition 2×2.

Ainsi, $4 \times 6 = \boxed{2 \times 2} \times 6 = 2 \times \boxed{2 \times 6}$

Question 3 : à quelle condition peut-on utiliser la méthode : « je multiplie le nombre par 2, puis je multiplie le résultat encore par 2 » ?

Réponse apportée : à condition que le but soit de multiplier un nombre par 4.

En arrière-plan de la mise en œuvre de cette situation d'action, nous cherchons à favoriser l'émergence du schème d'action « multiplier un nombre par un nombre multiplicateur A donné ». La règle d'action à expliciter, dans l'exemple des Figures 5 à 7 est la suivante :

« Si je dois multiplier un nombre par 4, alors je peux remplacer 4 par sa décomposition 2×2 pour calculer facilement le résultat de la multiplication d'un nombre par 4. Ainsi : pour multiplier un nombre par 4, je peux multiplier ce nombre par 2, et multiplier le résultat encore par 2 »

2 Situation d'action n°2 : C = A × … ? Décomposition multiplicative d'un nombre C multiple d'un nombre multiplicateur A donné (division-partition)

2.1 Descriptif de la situation d'action n°2

Toujours en appui sur la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous définissons un jeu que nous avons nommé « jeu du robot partageur » de la manière suivante :

Problème : Le robot-partageur fait le contraire du robot compositeur. Il plie un rectangle de manière à le partager en plusieurs bandes identiques dans le but de retrouver le nombre de cases de la bande qui a été multipliée.

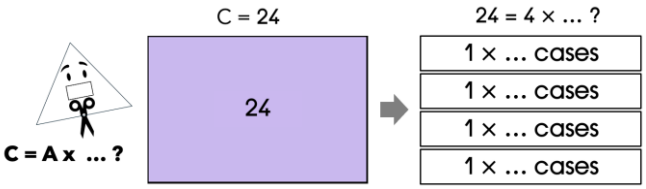


Figure 8 : Jeu du robot partageur

Il s'agit de trouver une méthode de calcul pour partager (diviser) équitablement un nombre donné C en un nombre de parts égal au nombre multiplicateur A.

Milieu matériel : nombres rectangles sur format papier



Figure 9 : nombre rectangle C sur format papier

Variables didactiques :

- **Valeurs de A :** 2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 5
- **Valeurs de B :** nombre entier inférieur à 10

Règles du jeu :

- Le nombre-rectangle se plie du côté du nombre multiplicateur A.
- Le nombre de bandes doit être égal au nombre multiplicateur A.
- Les bandes doivent se superposer parfaitement lors du pliage.

Critères de réussite (de validation) : une fois le nombre de cases d'une bande trouvé, prendre le rectangle A × B correspondant, celui-ci doit se superposer parfaitement sur le nombre-rectangle C donné.

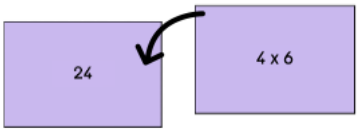


Figure 10 : Moyen de validation pragmatique

2.2 Conseils donnés aux enseignants quant à la mise en œuvre de la situation

Concernant la mise en œuvre, nous avons à nouveau proposé aux enseignants de questionner les élèves pour les amener à expliciter les conditions et les raisons de réussite d'une procédure, ainsi que le lien existant entre la procédure « multiplier un nombre par le nombre multiplicateur 4 » et la procédure « partager équitablement un nombre en 4 parties égales ». Nous contextualisons ci-dessous les questions dans le cas où il s'agit de partager un nombre C en 4 parties égales (exemple donné dans la Figure 8).

Question 1 : comment faire pour partager facilement un nombre en 4 parties égales ? Quelle méthode a-t-on trouvée ?

Réponse possible, dans l'exemple donné (Figure 8) : pour partager le nombre 24 en 4 parts égales, on partage le nombre 24 en 2 et chaque part obtenue encore une fois en 2. Dans d'autres termes : on calcule la moitié du nombre 24, puis on calcule encore la moitié du résultat obtenu.

Question 2 : pourquoi cette méthode permet de réussir ?

Réponse possible : parce que 4 est égal à 2 × 2.

Question 3 : à quelle condition peut-on utiliser la méthode : « je calcule la moitié du nombre, puis encore la moitié du résultat obtenu ?

Réponse apportée : à condition que le but soit de partager un nombre en quatre parties identiques.

Les deux situations d'action que nous venons de décrire ont été mises en œuvre pour chacune des variables didactiques indiquées. Dans ce qui suit, nous présentons des extraits de l'expérimentation et les résultats obtenus.

V - EXTRAITS DE L'EXPÉRIMENTATION ET RÉSULTATS

1 Extraits de l'expérimentation de la situation d'action n°1 : A × B = … ? (multiplication)

Nous présentons ci-dessous des extraits de productions d'élèves, lors de la mise en œuvre des séances d'entrainement aux calculs de multiplications du type : A × B = … ? Les exemples présentés correspondent à l'apprentissage d'une procédure pour multiplier facilement un nombre par 4 : 4 × B = … ? (Figure 11), ainsi que pour multiplier facilement un nombre par 3 : 3 × B = … ? (Figure 12).

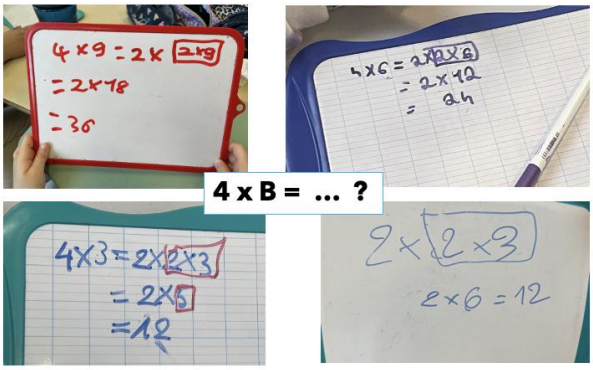


Figure 11 : Multiplier un nombre par 4 – Séances d'entrainement - Productions d'élèves de CE1.

Concernant la mémorisation des faits numériques, nous pouvons observer que la mise en œuvre de la procédure de calcul « multiplier un nombre par 4 » permet aux élèves de mobiliser et donc de réactiver la mémorisation des résultats de la table de multiplication d'un nombre par 2, ainsi que les doubles des nombres inférieurs ou égaux à 20. Concernant le traitement des différentes multiplications, nous pouvons observer la présence de la représentation des rectangles dans l'écriture multiplicative. Cette représentation permet de créer un lien avec la manipulation des rectangles réalisée dans la séance d'apprentissage. Cette représentation contribue au processus d'abstraction de la méthode de calcul apprise avec les élèves de CE1-CE2 (élèves de 7-8 ans). Elle sera remplacée par des parenthèses au niveau du cycle 3 (élèves de 9-10 ans). Par ailleurs, la représentation des rectangles, comme des parenthèses, permet d'indiquer aux élèves la priorité des calculs à effectuer.

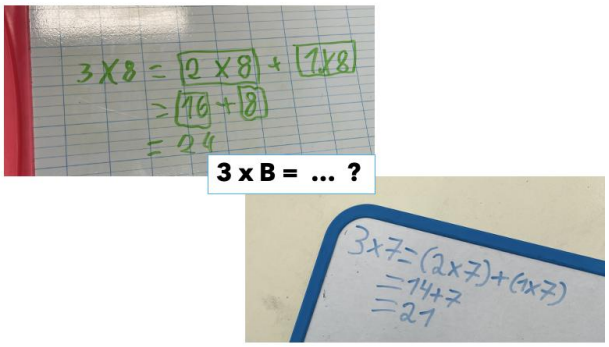


Figure 12 : Multiplier un nombre par 3 - Séances d'entrainement - Productions d'élèves de CE1.

Concernant la mémorisation des faits numériques, nous pouvons observer que la première étape de la mise en œuvre de la procédure de calcul « multiplier un nombre par 3 » permet aux élèves de mobiliser et donc de réactiver la mémorisation des résultats de la table de multiplication d'un nombre par 2, ainsi que la multiplication d'un nombre par 1. Concernant l'automatisation des procédures de calcul, nous pouvons observer que la deuxième étape de la mise en œuvre de la procédure permet de réactiver la procédure du passage par la dizaine supérieure. Cette procédure a été apprise en CP (élèves de 6 ans) et revue début du CE1 (élèves de 7 ans). Il s'agit par exemple de calculer 14 + 7 en décomposant le nombre 7 de manière à compléter le nombre 20 à la dizaine supérieure : 14 + 7 = 14 + 6 + 1 = 20 + 1 = 21. Cette

procédure mobilise ainsi des compétences et connaissances dans le champ additif et dans le champ multiplicatif.

2 Situation d'action n°2 : C = A × … ? (décomposition multiplicative)

Nous présentons ci-dessous un extrait des productions d'un élève relatif à la séquence d'apprentissage : apprendre à partager un nombre en quatre parts égales (Figure 13 : C = 4 × … ?).

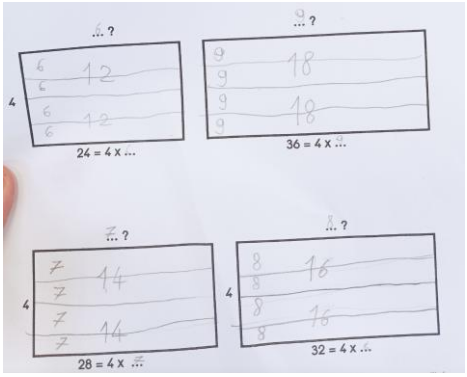


Figure 13 : Partager un nombre en quatre parts égales - Séances d'entrainement - Productions d'élève de CE1.

Concernant la mémorisation des faits numériques, nous pouvons observer que la mise en œuvre de la procédure de calcul « partager un nombre en 4 parts égales » permet aux élèves de mobiliser et donc de réactiver la mémorisation des moitiés des nombres inférieurs ou égaux à 40. Elle permet également aux élèves de réactiver la procédure du calcul de la moitié d'un nombre lorsque les moitiés des nombres en jeu n'étaient pas mémorisés. Pour le nombre 36, l'élève peut par exemple produire une décomposition additive de 36 : 36 = 30 + 6. Il peut alors calculer la moitié des nombres 30 et 6 avant d'ajouter les résultats obtenus : 15 + 3 = 18, la moitié de 36 est donc 18.

3 Retour sur l'hypothèse de travail n°1 : résultats obtenus

Nous rappelons notre première hypothèse de travail : si la séance d'introduction d'une table de multiplication conduit à l'apprentissage de procédures et connaissances permettant de retrouver rapidement le résultat cherché, alors les élèves pourront utiliser ces procédures pour retrouver des résultats des tables et ils pourront mémoriser ces résultats à force de les rechercher via ces procédures.

Pour chacune des deux situations d'action conçues, les séquences d'enseignement étaient composées d'une séance d'apprentissage, de plusieurs séances d'entrainement visant l'automatisation de la procédure (et la mémorisation des résultats, à force de les rechercher), de séances spécifiques dédiées à la mémorisation des résultats pour agir sur la mémorisation des résultats non encore mémorisés, et de tests. En mars 2025, puis en mai 2025, nous avons à nouveau proposé aux élèves de CM1 de l'école l'exercice 6 (Annexe 1) des évaluations nationales CM1, afin de mesurer leurs progrès. La Figure 14 illustre l'évolution des scores des élèves. Le pourcentage d'élèves à besoin est passé de 43,48% en septembre 2024 à 16% en mars 2025, puis à 4,35% en mai 2025. Le pourcentage d'élèves en réussite (groupe satisfaisants) est quant à lui passé de 30,43% en septembre 2024 à 68% en mars 2025, puis à 78,26% en mai 2025. Ces résultats illustrent une évolution positive significative.

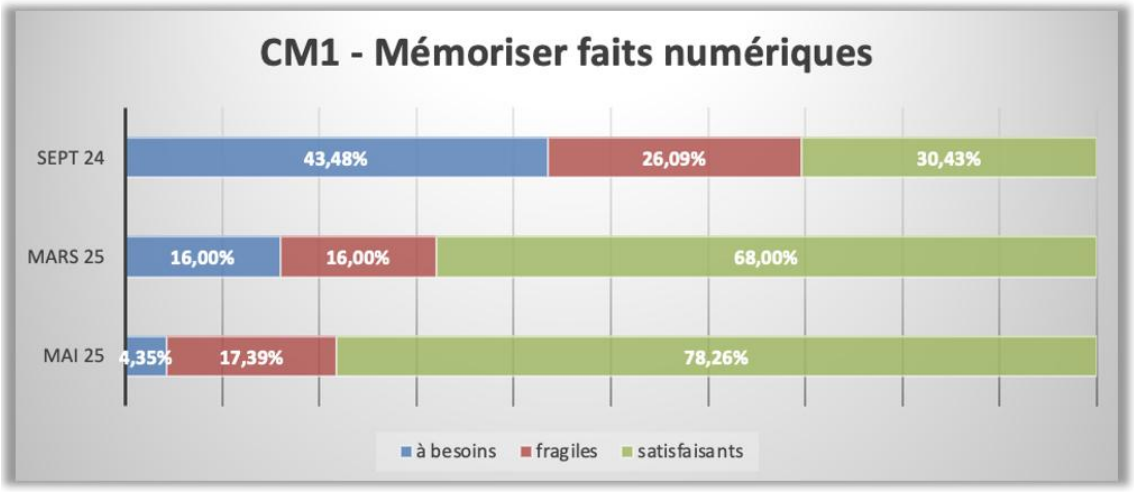


Figure 14 : évolution des scores de réussite des élèves de CM1 de l'école Michelet – Année 2024-2025

4 Retour sur l'hypothèse de travail n°2 : résultats obtenus

Nous rappelons notre deuxième hypothèse de travail : si des procédures de calcul mental, visant à restituer rapidement les résultats des tables de multiplication du type : 4 × 7 = … ? 5 × 3 = … ? 10 = 2 × … ? sont enseignées aux élèves, alors les élèves pourront, dans la suite de leur parcours, mobiliser ces mêmes procédures pour multiplier un nombre supérieur à 10 par 4 ; 8 ; 5 ; 10 ; …

Dans ce qui suit, nous présentons comme exemple les procédures d'un élève de CE2 de l'école Michelet de Béthune (Pas-de-Calais). Ces exemples sont extrait de la séquence : multiplier un nombre par 8. La Figure 14 illustre les procédures de l'élève mises en œuvre lors des séances d'entrainement. La Figure 16 illustre quant à elle les procédures de l'élève mises en œuvre lors des séances de transfert, c'est-à-dire des séances dans lesquelles nous avons proposé des multiplications A × B avec A et B nombres entiers appartenant au domaine D1 défini par Butlen et Pézard (1990), c'est-à-dire lorsque le nombre B est compris entre 11 et 99.

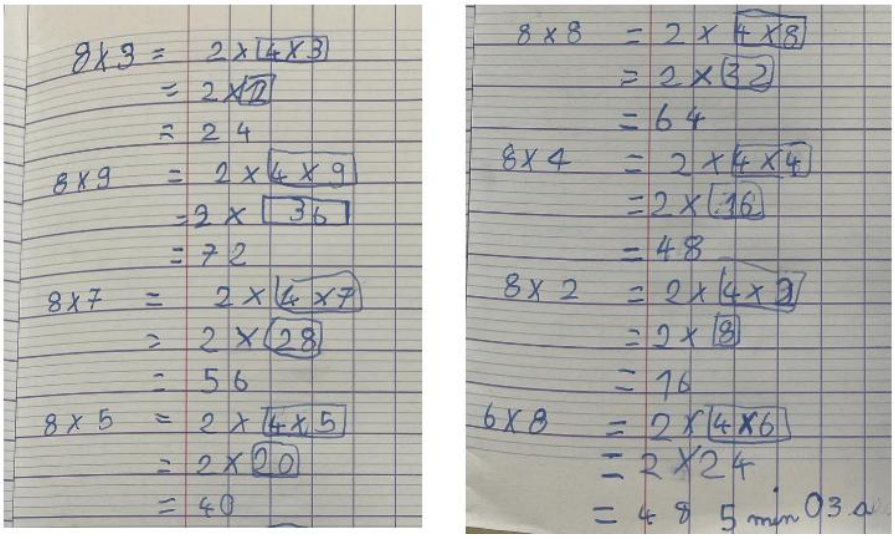


Figure 15 : Multiplier un nombre par 8 : 8 × B = … ? 1 ≤ B ≤ 10 – Séance d'entrainement – Classe de CE2

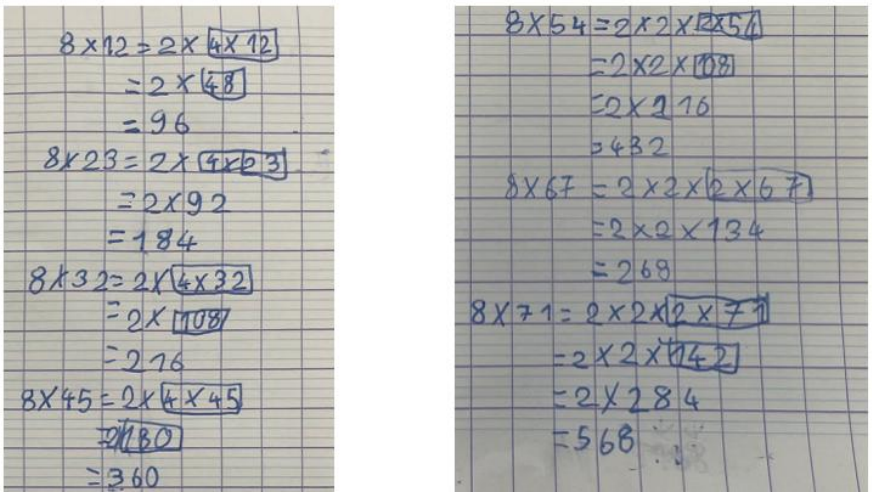


Figure 16 : Multiplier un nombre par 8 : 8 × B = … ? 11 ≤ B ≤ 99 – Séance de transfert – Classe de CE2

En termes de résultats, nous pouvons observer que lors de la séance de transfert (Figure 16), l'élève mobilise différentes décompositions multiplicatives du nombre 8 dans ses procédures. Lorsque le nombre B est inférieur ou égal à 50, l'élève mobilise le fait que 8 = 2 × 4 (calculs de la colonne de droite – Figure 16). Lorsque B est supérieur à 50, l'élève mobilise le fait que 8 = 2 × 2 × 2 (calculs de la colonne de gauche – Figure 16). Ainsi, nous pouvons observer le transfert des procédures apprises dans ce domaine numérique élargi.

VI - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'expérimentation des séquences proposées nous a permis d'observer une évolution positive des acquis des élèves. L'approche proposée pour enseigner les faits numériques multiplicatifs vise à enrichir les conceptions des élèves sur les nombres, à mettre en relation des faits numériques mémorisés et des procédures élémentaires pour construire des procédures de calcul efficaces. De cette manière, l'approche permet de réactiver et d'automatiser les différentes procédures de calcul apprises et les faits numériques mémorisés. Du côté de la formation des enseignants, nous avons pu observer une évolution des représentations des enseignants concernant l'apprentissage des tables de multiplication.

En termes de perspectives, nous envisageons de suivre la cohorte d'élèves de CE1 de l'école. En tenant compte que les schèmes se développent sur le long terme, cela nous permettra d'étudier le développement de leurs schèmes multiplicatifs. Du côté de la formation des enseignants et des référents mathématiques de circonscription, nous allons étudier la transposition du dispositif de formation à l'échelle du département du Pas-de-Calais. Nous envisageons pour cela la création d'un magistère dans lequel seront intégrés les différents modules de formation conçus. Nous allons également examiner les limites identifiées concernant la ressource proposée et expérimentée par les enseignants de l'école Michelet de Béthune. En effet, il est essentiel d'identifier les ajouts nécessaires à la ressource afin que des enseignants, n'ayant pas participé au dispositif de formation, puissent en saisir les enjeux.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M., & Viennot, J. (1978). Quelques réflexions à propos de la multiplication. *Grand N, 15*, 43-68.

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2),147-176.

Brousseau, G., (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Butlen, D. & Pézard, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N, 47*, 35-59.

Fénichel, M. et Pfaff, N. (2005). Donner du sens aux mathématiques. Tome 2. Nombres, opérations, grandeurs.

Godin, M., & Perrin-Glorian, M.J. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments à leur caractérisation par énoncés. *Math-Ecole 222*, 26-36.

Morrisette, J. (2013). *Recherche-action et recherche-collaborative : quel rapport aux savoirs et à la production de savoirs ? Nouvelles pratiques sociales*, *25*(2), 35-49. https://doi.org/10.7202/1020820ar

Rinaldi, A.M. (2022). *Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire*. Repères IREM, (126), 23-42.

Vergnaud, G. (1981), La typologie des problèmes.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (2001/2). Piaget visité par la didactique. *Intellica*, *Revue de l'Association pour la recherche Cognitive*, *33* (2), p.107-123.

Vieque, K. (2022). *La restauration de figures : une ingénierie didactique au début de l'école élémentaire. Étude des schèmes et des processus de validation*. [Thèse de doctorat, Université de Paris].

VIII - ANNEXE : ÉVALUATIONS REPÈRES CM1 – 2023

Extrait du livret élève – Exercice 6 : mémoriser des faits numériques

Exercice 6

Complète le plus grand nombre de calculs sans les poser en 1 minute.

1 × 6 = ...	8 × 3 = ...
3 × 3 = ...	4 × 7 = ...
4 × 4 = ...	6 × .....= 42
5 × .....= 20	8 × 5 = ...
3 × 5 = ...	4 × 8 = ...
3 × 4 = ...	3 × 9 = ...
9 × 2 = ...	..... × 7 = 49
3 × .....= 18	4 × 6 = ...
6 × 5 = ...	8 × 6 = ...
5 × 10 = ...	10 × 9 = ...
3 × 8 = ...	4 × 9 = ...
7 × ..... = 21	..... × 9 = 72
9 × 5 = ...	

Extrait du guide pour le professeur – Exercice 6 : mémoriser les faits numériques

Exercice 6

Compétence :	Mémoriser des faits numériques.

Activité :	Résoudre le plus grand nombre de calculs en 1 minute.

Consignes de passation :	**page 15**	**1 minute**

« Vous allez faire une épreuve de rapidité de calcul.
Vous avez une minute pour trouver le plus de résultats.
Si vous ne savez pas répondre à un calcul, ne restez pas bloqués, passez au calcul suivant.

Vous êtes prêts ? Allez-y.
[Lancer le chronomètre.]

Stop. »
[Arrêter le chronomètre au bout de 1 minute.]

« Bravo, vous avez terminé. »

[Ramasser les cahiers.]

ANALYSE DE SÉANCES CONÇUES DANS LE CADRE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION PORTANT SUR L'USAGE DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Françoise CHENEVOTOT
INSPÉ Lille HdF
Laboratoire de Didactique André Revuz
francoise.chenevotot@univ-lille.fr

Antonietta DEMURO
INSPÉ Lille HdF
Laboratoire de Mathématiques de Lens
antonietta.demuro@univ-lille.fr

Christine MANGIANTE-ORSOLA
INSPÉ Lille HdF
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@univ-lille.fr

Résumé
Depuis quelques années, le recours à une approche historique dans l'enseignement des mathématiques suscite l'intérêt des chercheur.e.s, des formateur.rice.s et des enseignant.e.s (De Vittori, 2022 ; Clark et al., 2019). Nous nous inscrivons dans cette perspective en proposant d'articuler l'enseignement des mathématiques et l'histoire des mathématiques à travers des scénarios pédagogiques conçus comme des voyages dans le passé. Ces parcours visent à enrichir à la fois les connaissances mathématiques stabilisées des élèves et leur culture scientifique. Nous en proposons une modélisation en cinq étapes, qui prend en compte les trois fonctions principales de l'histoire des mathématiques selon Barbin et Tzanakis (2014) : (1) la fonction vicariante, (2) la fonction dépaysante, (3) la fonction culturelle.
Dans ce texte, nous étudions dans quelle mesure ce modèle est susceptible de permettre aux étudiant.e.s d'exploiter pleinement les opportunités d'apprentissage, tant mathématiques qu'historiques, que nous avons identifiées, en qualité de chercheures, à propos de la numération chinoise à bâtons (suànchóu).
Nous présentons tout d'abord le contexte de la recherche (des ateliers d'analyse de pratiques professionnelles) ainsi que la problématique. Nous examinons ensuite la numération à bâtons et les opportunités d'apprentissage qu'elle offre. Puis, nous caractérisons les choix des formatrices au regard des tâches travaillées, en les analysant à la fois du point de vue des mathématiques et du point de vue historique. Nous étudions ensuite les tâches proposées par les étudiant.e.s au regard des opportunités d'apprentissage dégagées et présentons quelques éléments d'une analyse de l'activité effective des élèves. Enfin, nous exposons les principaux résultats de notre étude.
* Projet soutenu par l'INSPÉ des Hauts de France – Université de Lille.

I - INTRODUCTION

Le travail présenté dans cette communication s'inscrit dans le cadre d'un projet, soutenu par l'INSPÉ des Hauts-de-France, portant sur l'usage de l'histoire des mathématiques en classe. Depuis quelques années, l'usage d'une approche historique dans l'enseignement des mathématiques questionne les chercheur.e.s, les formateur.rice.s et les enseignant.e.s. La demande est institutionnelle. En effet, les auteur.rice.s des programmes de 2015 affirment que « la mise en perspective historique de certaines connaissances

(numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves » (MEN, 2015, p. 72).

Formatrices de Professeurs des Écoles (PE), soucieuses de tenir compte de cette demande, nous avons d'ores et déjà intégré des éléments de formation à l'usage de l'histoire des mathématiques en classes primaires dans nos séances de formation à l'INSPÉ (cours magistraux et TD). Néanmoins, nous aimerions aller au-delà de ces propositions en questionnant plus avant l'impact de ces éléments de formation sur les pratiques de nos étudiant.e.s. Nous avons choisi d'aborder cette question en lien étroit avec les préoccupations des enseignant.e.s et des formateur.rice.s, en nous centrant sur la conception de séances intégrant une perspective historique. Dans cette optique, nous avons élaboré un modèle de conception destiné à servir de guide pour la préparation de séances. Ce modèle a été proposé dans le cadre d'un dispositif de formation initiale, qui prévoit la conception de séances visant à aider les étudiant.e.s à exploiter pleinement l'appui sur des aspects historiques, afin de favoriser les possibilités d'apprentissage tant du point de vue mathématique que du point de vue de la culture scientifique. Notre intention est de mettre à l'épreuve ce modèle, envisagé à la fois comme un guide pour la conception et comme un objet théorique que nous cherchons à interroger, à faire évoluer, voire à enrichir. La méthodologie adoptée consiste ainsi à recueillir des données tout au long de ce dispositif de formation, lequel s'articule en plusieurs étapes : une séance de formation et de préparation, la mise en œuvre de séances en classe, puis un temps d'analyse à chaud.

Dans un premier temps, nous présenterons le contexte de la recherche ainsi que notre problématique. Nous préciserons ensuite le cadre dans lequel s'inscrit notre projet, en indiquant comment nous le limitons à un dispositif de formation spécifique. La partie suivante sera consacrée à la numération chinoise à bâtons, support central de ce dispositif. Nous développerons ensuite des analyses successives correspondant aux trois étapes de notre méthodologie. Enfin, nous exposerons les principaux résultats de la recherche avant de conclure.

II - CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET PROBLÉMATIQUE

1 Usage de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques

De nombreuses études ont examiné les apports de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de cette discipline. Ces recherches abondantes, menées aux niveaux national et international, mettent en lumière l'impact significatif que cette approche peut avoir à plusieurs niveaux, allant de l'enrichissement culturel humaniste à une compréhension approfondie de certains résultats mathématiques. À cet égard, une communauté internationale de chercheur.e.s s'intéressant à l'interaction entre histoire et enseignement des mathématiques s'est formée autour de *l'International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), notamment via le sous-groupe History and Pedagogy of Mathematics (HPM) fondé en 1976. Les rencontres organisées par le HPM ont donné lieu à diverses publications collectives, telles que *History in Mathematics Education : The ICMI Study* (Fauvel et van Maanen, 2000) et *Mathematics, Education and History : Towards a Harmonious Partnership* (Clark et al., 2018).

Ces ouvrages témoignent de la richesse des réflexions de cette communauté, prolongées par d'autres contributions, comme l'article intitulé History of Mathematics in Mathematics Education – An Overview — (Clark et al., 2019). Les auteur.rice.s de cette publication proposent une synthèse des développements récents et des questions clés relatives à l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Cet article s'accompagne d'une bibliographie assez importante sur le sujet. Parmi les principales thématiques explorées figurent les cadres théoriques pour l'intégration de l'histoire, les approches interdisciplinaires, les outils pédagogiques, les recherches empiriques sur l'implémentation en classe, l'analyse des réactions des élèves à l'introduction de l'histoire des mathématiques, ainsi que son impact sur la formation des enseignant.e.s. Quatre questions centrales sont formulées (Clark et al., 2019, p. 4) :

1. Quelle histoire est adaptée, pertinente et utile à l'enseignement des mathématiques ?
2. Quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans cet enseignement et avec quels objectifs ?
3. De quelles manières l'histoire peut-elle être intégrée dans les pratiques éducatives et selon quelles approches ?
4. Comment évaluer l'impact de ces pratiques et dans quelle mesure contribuent-elles à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques ?

Selon la littérature citée dans cet article, un consensus général semble émerger autour de l'idée que l'histoire des mathématiques peut remplir trois fonctions complémentaires (Barbin, 1997, 2006 ; Barbin et Tzanakis, 2014) :

- la fonction vicariante : l'histoire permet de présenter les mathématiques différemment de leur traitement conventionnel ; elle révèle les mathématiques comme une activité intellectuelle vivante et met en évidence l'évolution historique des concepts fondamentaux, souvent perçus comme immuables et détachés de leur contexte ;
- la fonction dépaysante : elle consiste à replacer un concept mathématique dans son contexte historique, créant ainsi un « étonnement épistémologique » ; cette démarche amène enseignant.e.s et élèves à reconsidérer leurs conceptions actuelles des mathématiques, enrichissant ainsi leur apprentissage ;
- la fonction culturelle : elle souligne les liens entre les mathématiques et leur contexte scientifique, technologique et sociétal, invitant à dépasser la simple résolution de problèmes pour explorer leurs dimensions historiques, culturelles, sociales et éthiques.

Plusieurs travaux illustrent les apports de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, tant sur les plans épistémologique, culturel, que didactique (Barbin et al., 2020). Guillemette (2015) analyse le concept de dépaysement épistémologique dans le contexte de la formation au secondaire, en examinant la manière dont celui-ci est « vécu » par les acteurs lors d'activités de lecture de textes anciens. Sur un autre plan, Jankvist (2009) distingue l'usage de l'histoire comme outil ou comme objectif, et propose une typologie d'approches pédagogiques. Des études articulant histoire des mathématiques et didactique des mathématiques, comme celles de de Varent (2018) et de Poisard (2005) offrent des exemples concrets d'intégration des mathématiques du passé en classe, issus respectivement des textes anciens (cunéiformes, chinois, sanskrit) et des instruments de calcul (boulier chinois, bâtons à multiplier de Néper et Genaille-Lucas et règle à calcul). Lemes (2019) s'intéresse à l'influence d'un cours d'histoire des mathématiques sur les conceptions des étudiant.e.s en formation initiale en France et en Uruguay, en s'appuyant sur des analyses qualitatives d'entretiens et sur deux manières différentes de considérer l'histoire des mathématiques : en tant que discipline et en tant que ressource pédagogique. L'intérêt croissant pour l'histoire des mathématiques a conduit à des réflexions méthodologiques sur les liens entre recherche en histoire et en didactique (Chorlay et de Hosson, 2016). De Hosson (2011) a proposé le cadre didactique de la « reconstruction didactique », qu'elle a notamment mobilisé dans le cas de la mesure du périmètre terrestre selon la méthode d'Ératosthène. Ce cadre a pour objectif de repenser une situation historique afin de la rendre exploitable en contexte d'enseignement, tout en permettant la construction d'un savoir précis et en préservant la dimension historique de la source ancienne, de manière à éviter tout anachronisme (Décamp et de Hosson, 2011). Enfin, de Vittori (2022) explore des approches quantitatives via l'usage de statistiques dans des études didactiques impliquant, par exemple, les numérations babylonienne et chinoise.

2 Contraste entre enseignement en primaire et en secondaire

Dans ce contexte, la création de séquences d'enseignement des mathématiques incluant une perspective historique trouve donc un terrain favorable et nombreuses sont les activités destinées à l'enseignement secondaire (manuels, ressources issues des IREM/S, etc.). Toutefois, en ce qui concerne l'enseignement primaire, ce terrain semble moins exploré et mériterait amplement d'être développé.

Depuis quelques années, plusieurs travaux et colloques ont contribué à changer cette situation et à donner de plus en plus d'importance à ce nouvel axe de recherche. À titre d'exemple, nous pouvons mentionner le projet *Passerelles* lancé par la commission inter-IREM *Épistémologie et histoire des mathématiques* (Moyon et Tournès, 2018), ainsi que d'autres travaux publiés dans la revue *Grand N* portant sur le rôle de l'imaginaire dans le cas spécifique de la numération babylonienne (de Vittori et Visentin, 2021), sur des tâches algorithmiques à travers la multiplication *per gelosia* (Chorlay et al., 2017), sur une analyse épistémologique et didactique des notions de mesure d'aire dans les manuels de CM2 (de Varent, 2024) ou encore sur les techniques de calcul d'Al-Khwarizmi (Chorlay, 2019).

Cet intérêt croissant pour l'école primaire est aussi lié au besoin de répondre à une demande institutionnelle. Les nouveaux programmes scolaires du cycle 3, qui sont entrés en vigueur à la rentrée 2025, intègrent plusieurs grands principes organisateurs, parmi lesquels figurent des éléments liés à l'approche historique. En effet, certains domaines des programmes comprennent une rubrique « Culture générale », qui propose des mises en perspective historiques ou culturelles visant à enrichir les enseignements. Bien que ces rubriques ne soient présentes que dans le programme de sixième, leur mention dans les indications générales en introduction témoigne d'une volonté plus large d'inscrire l'enseignement dans cette perspective. Le texte souligne d'ailleurs l'intérêt d'une telle démarche : « Ces éléments permettent aux enseignant.e.s de donner du sens aux apprentissages, d'éveiller la curiosité des élèves et d'inscrire les notions mathématiques dans une dimension historique et culturelle. » (MEN, 2025).

3 Présentation de notre problématique

Nous estimons nécessaire de questionner plus avant la conception de séances pour l'école primaire intégrant une perspective historique. Comment penser l'articulation entre enseignement des mathématiques et histoire des mathématiques dans le contexte de l'école primaire ?

Tout d'abord, nous adhérons à l'idée que l'histoire des mathématiques peut remplir trois fonctions complémentaires (Clark et al., 2019) : offrir aux élèves une vision vivante et contextualisée des savoirs mathématiques (fonction vicariante) ; susciter un « étonnement épistémologique » les amenant à reconsidérer leurs conceptions actuelles des mathématiques (fonction dépaysante) ; enrichir leurs apprentissages en révélant les liens entre les mathématiques et leur tissu scientifique, social et culturel (fonction culturelle). Nous suggérons d'intégrer ces trois fonctions dans un cadre spécifique, recourant à l'histoire des mathématiques et fondé sur une approche comparative entre passé et présent, dans le but d'approfondir la compréhension et de consolider les savoirs actuels (Demuro et Mangiante-Orsola, 2023).

Dans cette perspective, nous proposons un modèle pour concevoir des scénarios pédagogiques envisagés comme des voyages dans le passé, visant à enrichir à la fois les connaissances mathématiques stabilisées des élèves et leur culture scientifique (Figure 1). Nous formulons l'hypothèse que ce voyage peut être modélisé sous la forme d'un parcours en cinq étapes, permettant de mobiliser simultanément les trois fonctions de l'histoire des mathématiques. Étape 0[1] : réaliser une tâche mathématique contemporaine en lien avec les programmes. Étape 1 : réaliser une tâche mathématique ancienne avec mise en contexte historique en soulignant les enjeux mathématiques mais aussi culturels qui l'accompagnent. Étape 2 : comparer présent et passé pour mieux appréhender les mathématiques en tant que construction humaine en constante évolution, l'objectif étant d'apprendre par le biais de cette confrontation. Étape 3 : analyser la tâche mathématique contemporaine avec un regard renouvelé, enrichi par la compréhension du passé. Étape 4 : identifier les connaissances acquises (institutionnalisation) sur les mathématiques actuelles. Ce processus fonctionne de manière circulaire : après l'exploration du passé, le retour à la tâche mathématique (étape 5) s'avère nécessaire. Ce retour est essentiel, car un voyage dans le passé n'est

[1] Cette étape 0 peut avoir été menée en amont de la séquence d'apprentissage intégrant une perspective historique.

véritablement formateur que s'il permet de mieux comprendre les mathématiques actuelles. Il s'accompagne en outre d'un enrichissement à la fois culturel et mathématique, ce qui explique que l'étape 5 ne soit pas identique à l'étape 0.

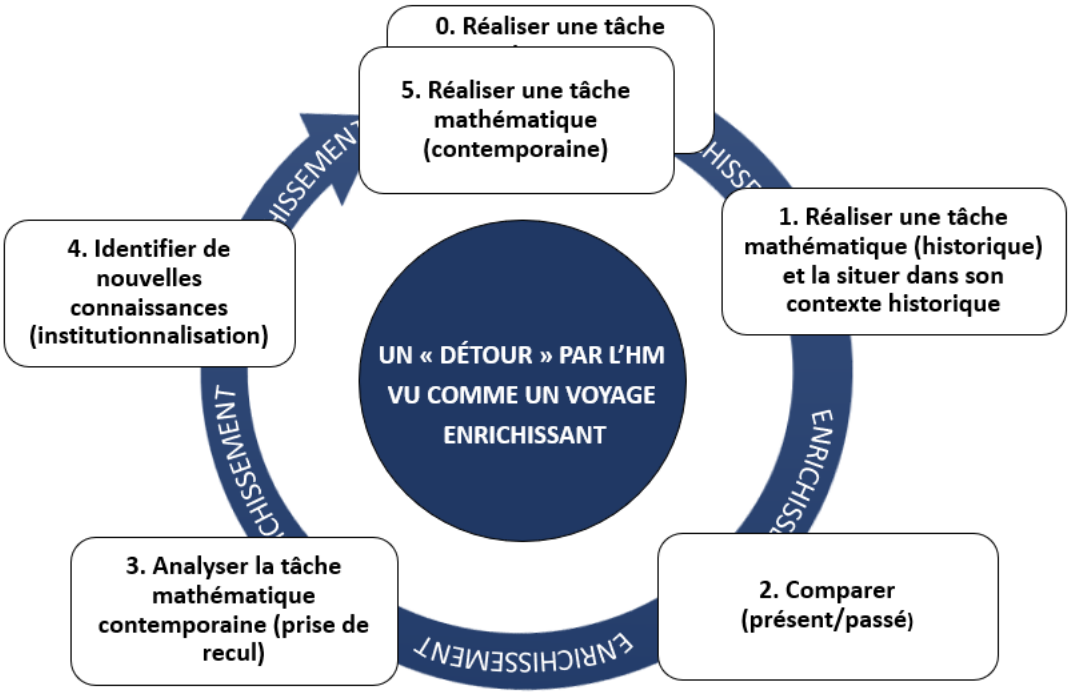


Figure 1. Modèle pour concevoir des scénarios pédagogiques pour enseigner les mathématiques en s'appuyant sur l'histoire des mathématiques.

Cela nous amène à considérer des « opportunités d'apprentissage », que nous définissons comme des apprentissages potentiels, spécifiques aux contenus mathématiques et historiques retenus, que les élèves peuvent développer tant sur le plan mathématique — en lien avec les mathématiques contemporaines — que sur le plan historique et culturel — en lien avec le développement de la culture scientifique des élèves.

Notre intention est de mettre à l'épreuve ce modèle, envisagé à la fois comme un outil de conception et comme un objet théorique que nous cherchons à questionner, à faire évoluer, voire à enrichir. C'est dans cette perspective que s'inscrit la problématique de notre recherche, formulée de la manière suivante : dans quelle mesure notre modèle de conception de séances intégrant l'histoire des mathématiques permet-il aux étudiant.e.s de tirer parti des opportunités d'apprentissage, à travers les propositions de séances élaborées et les tâches effectivement proposées en classe ?

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons conçu un scénario de formation permettant de mettre le modèle à l'épreuve.

4 Présentation du scénario de formation

Intégrés au master MEEF premier degré de l'INSPÉ des Hauts-de-France, les Ateliers de Développement des Réflexivités et des Pratiques Professionnelles (ADRPP) constituent un dispositif de formation conçu pour renforcer le lien entre les connaissances théoriques et leur mise en œuvre en classe. Ils s'appuient sur une collaboration étroite entre formateur.rice.s de l'INSPÉ, Enseignant.e.s Maître.esse.s Formateur.rice.s (EMF) et enseignant.e.s prêts à ouvrir leurs classes pour la préparation, la mise en œuvre et l'analyse des séances. En tant que formatrices à l'INSPÉ des Hauts-de-France, nous avons organisé, au cours de l'année 2023-2024, un ADRPP intégrant une perspective historique. Cet atelier avait pour objectif d'amener les stagiaires à mieux saisir comment une approche historique peut enrichir l'enseignement des

mathématiques, en apportant à la fois une compréhension plus fine des concepts et une ouverture culturelle.

Le scénario de formation s'est déroulé en plusieurs temps en mai et juin 2024, mobilisant trois formatrices de l'INSPÉ, des étudiant.e.s de M1 et des élèves de CM1. Il a débuté par une double séance à l'INSPÉ : d'abord la présentation du cadre général de l'ADRPP par les formatrices, suivie d'apports sur l'enseignement des mathématiques en appui sur une source historique (temps 1), puis l'accompagnement des étudiant.e.s dans la conception de deux séances intégrant une perspective historique (temps 2). Les étudiant.e.s ont ensuite poursuivi leur préparation en autonomie, finalisant et transmettant leurs fiches de séance (temps 3). Puis, les séances ont été mises en œuvre en classe par les étudiant.e.s (temps 4), observées par leurs pairs et les formatrices. Cela nous a permis de réunir des enregistrements audio/vidéo et des productions d'élèves. Un entretien à chaud a également été réalisé immédiatement après chaque séance (temps 5), afin de recueillir les premiers ressentis des étudiant.e.s. Une description chronologique du scénario, ainsi qu'une présentation des données collectées, figurent en Annexe 1.

III - MÉTHODOLOGIE GÉNÉRALE DE LA RECHERCHE

Notre démarche vise à tester un modèle (Figure 1), pensé comme un outil pour élaborer des séances d'enseignement articulant histoire et didactique des mathématiques. Conçu pour être générique, il se veut valable quel que soit le contexte ou le contenu d'enseignement. Plus précisément, l'objectif principal de notre travail est de comprendre dans quelle mesure notre modèle de conception de séances aide des étudiant.e.s en formation initiale à structurer leurs propositions de séances et les tâches effectivement proposées aux élèves en classe. Il convient de préciser que, créé par les formatrices en amont de la conception du dispositif, le modèle n'a pas été présenté aux étudiant.e.s.

Nous procédons pour cela à trois analyses distinctes (Figure 2). La première analyse concerne la contextualisation du modèle à la numération chinoise à bâtons et les choix effectués par les formatrices. Plus précisément, nous examinons dans quelle mesure les formatrices ont pris en compte les opportunités d'apprentissage spécifiques à la numération chinoise à bâtons lors des choix de conception de la séance de formation en début d'ADRPP. La deuxième analyse porte sur l'analyse *a priori* de tâches préparées par les étudiant.e.s pour les élèves. Comment ces tâches mobilisent-elles les fonctions vicariante, dépaysante et culturelle de l'histoire des mathématiques ? En quoi les choix des étudiant.e.s permettent-il d'exploiter les opportunités d'apprentissages dégagées ? Enfin, la troisième analyse consiste en l'analyse *a posteriori* de l'activité effective des élèves lors de la mise en œuvre en classe pour mieux cerner l'impact des choix des étudiant.e.s. Quels éléments témoignent d'une appropriation des apprentissages visés ? Les opportunités d'apprentissage ont-elles été exploitées ?

La méthodologie adoptée repose sur le recueil de données tout au long du dispositif de formation et prend en compte les choix des différents acteurs impliqués : formatrices, étudiant.e.s et élèves. Toutefois, si des données sont prélevées à l'ensemble des étapes du scénario, c'est avant tout ce modèle de conception des séances que nous cherchons à interroger. Dans le cadre de cet article, nous nous centrons plus spécifiquement sur ce qui s'est passé en classe, c'est-à-dire sur les tâches proposées aux élèves. Celles-ci sont éclairées à la fois par l'analyse des choix des formatrices, par une analyse *a priori* des tâches conçues par les étudiant.e.s et par une analyse *a posteriori* suite à leur mise en œuvre. Néanmoins, ce sont bien les propositions élaborées par les étudiant.e.s qui se trouvent au cœur de notre travail et de notre démarche méthodologique.

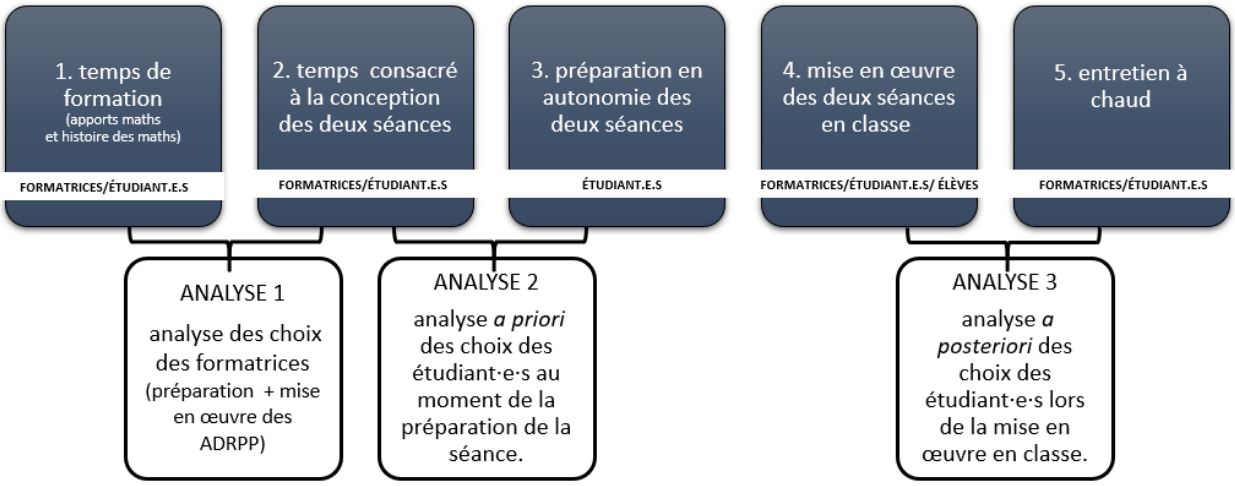


Figure 2. Méthodologie structurée en fonction des différents temps du dispositif de formation

Afin de réaliser les analyses *a priori* et *a posteriori*, nous sommes amenées à identifier les apprentissages susceptibles d'être visés par la mise en regard des mathématiques anciennes et des mathématiques actuelles. C'est dans cette perspective que nous précisons, dans la partie qui suit, les opportunités d'apprentissage spécifiques au système de numération choisi (numération chinoise à bâtons), tant sur le plan mathématique que sur le plan historique et culturel, pour le contenu mathématique ciblé (notre système de numération écrit chiffré).

IV - LA NUMERATION À BÂTONS (SUÀNCHÓU) : QUELLES OPPORTUNITÉS D'APPRENTISSAGE ?

Nous avons choisi de centrer l'ADRPP sur les apprentissages liés à la numération écrite chiffrée et au calcul car il s'agit de notions fondamentales à l'école élémentaire. Les techniques de calcul posé reposent en grande partie sur une solide compréhension des propriétés de la numération écrite ; il nous semblait donc pertinent d'interroger la manière dont les élèves mobilisent ces connaissances lors de l'apprentissage du calcul posé. Nous avons retenu la numération à bâtons (*suànchóu*) comme support historique pour concevoir des séances sur la numération écrite chiffrée et le calcul additif en raison de sa similitude avec notre propre système de numération. En effet, il s'agit d'un système positionnel en base dix, ce qui offre aux élèves la possibilité de faire des analogies tout en explorant un système différent (écritures distinctes, règles spécifiques...).

1 Présentation de la numération à bâtons (suànchóu)

Contrairement à notre système de numération, la numération chinoise à bâtons (*suànchóu*) comprend des chiffres issus de la disposition de bâtonnets et combine avec régularité des barres horizontales et verticales suivant un principe idéographique. L'Annexe 2 fournit une présentation détaillée du contexte historique de cette numération. Bien que reposant sur la base dix, cette numération accorde une importance particulière aux groupements par cinq, représentés par un trait orienté de manière différente. Ce choix se retrouve d'ailleurs dans le mode de fonctionnement des bouliers chinois. Plus précisément, cette numération chinoise s'appuie sur deux séries de chiffres allant de 1 à 9, représentés à l'aide de bâtons. Dans la première série, qui représente les chiffres des unités et des centaines (Figure 3), les cinq premiers symboles sont figurés par autant de traits verticaux juxtaposés, et les symboles pour désigner 6, 7, 8, 9 sont représentés par une barre horizontale placée en haut (ayant 5 pour valeur symbolique), superposée en son milieu à une, deux, trois ou quatre barres verticales.



Figure 3. Première série de chiffres (unités, centaines...) en numération à bâtons (suànchóu)

Dans la deuxième série, qui représente les chiffres des dizaines et des milliers (Figure 4), on observe le même principe mais les cinq premiers symboles sont figurés par des traits horizontaux.



Figure 4. Deuxième série de chiffres (dizaines, milliers...) en numération à bâtons (suànchóu)

La distinction entre la première et la deuxième série de chiffres permet d'éviter certaines confusions, notamment entre l'écriture du nombre 3 et celle du nombre 21. L'alternance entre les deux séries de chiffres se généralise aux unités de rangs impair et pair pour écrire des nombres d'un ordre plus grand que celui des milliers.

2 Opportunités d'apprentissage

L'étude de la numération à bâtons (*suànchóu*) permet d'envisager que le travail avec cette numération pourrait offrir des Opportunités d'Apprentissage, tant sur le plan Mathématique [OAM] que sur le plan Historique et culturel [OAH].

Voici les OAM que nous avons identifiées en lien avec la numération écrite chiffrée et le calcul additif. Les deux premières concernent l'aspect positionnel et l'aspect décimal du système de numération écrite chiffrée, et s'appuient sur les travaux de Tempier (2013) qui mettent en évidence la nécessité de distinguer ces deux aspects pour mieux prendre en charge les enjeux de l'enseignement de la numération :

- [OAM1] — Mieux appréhender l'aspect positionnel de notre propre système de numération écrite chiffrée, en comparant deux systèmes partageant cette caractéristique, mais la mettant en œuvre de manière différente.
- [OAM2] — Comprendre plus finement l'aspect décimal de notre numération écrite chiffrée, en observant comment la base dix structure également un autre système de numération.
- [OAM3] — Prendre conscience du rôle du zéro, absent dans certaines écritures anciennes (dont la numération à bâtons (*suànchóu*), et ainsi mesurer son importance dans l'efficacité de notre système.
- [OAM4] — Explorer la logique des groupements, notamment par 5.
- [OAM5] — Approfondir la compréhension des élèves de la technique de l'addition posée, en la confrontant à un autre algorithme calculatoire, et en analysant la manière dont les regroupements étaient gérés dans la numération chinoise.

De la même manière, l'analyse de la numération à bâtons (*suànchóu*) permet de dégager des OAH relatives à des questions portant sur les systèmes de numération et leur évolution au fil des siècles :

- [OAH1] — Enrichir la culture scientifique des élèves, en situant ce système de numération par rapport à des repères historiques à propos de la civilisation (par exemple, ici, les acteurs, l'usage d'un échiquier, de bâtonnets, besoins mathématiques, types de problèmes à résoudre, modes de vie…).
- [OAH2] — Enrichir la culture scientifique des élèves, en situant ce système de numération par rapport à des repères géographiques (par exemple, découvrir un système qui a existé dans une région éloignée du monde, des connaissances qui ont pu « voyager », diffuser, se partager… ainsi favoriser un point de vue non eurocentré…).

- [OAH3] — Enrichir la culture scientifique des élèves, en situant ce système de numération par rapport à une évolution historique (les mathématiques comme construction humaine évolutive, ancrée dans des contextes historiques, sociaux et culturels spécifiques…).

V - PREMIÈRE ANALYSE : CONTEXTUALISATION DU MODÈLE ET CHOIX DE FORMATION

Cette première analyse est structurée de la manière suivante. Nous proposons, tout d'abord, une contextualisation de notre modèle pour l'enseignement avec le système de numération retenu, à savoir la numération chinoise à bâtons. Cette contextualisation permet ensuite de mettre en évidence les besoins de formation qu'elle révèle. Puis, nous analysons les choix opérés par les formatrices, de manière à mieux cerner les besoins de formation potentiellement pris en charge à travers ces choix.

1 Contextualisation du modèle pour l'enseignement avec la numération chinoise à bâtons

Dans ce qui suit, nous reprenons chacune des étapes du modèle que nous contextualisons à l'enseignement de la numération chinoise à bâtons (Figure 1).

L'étape 0 du modèle correspond à un travail (antérieur) portant sur la tâche mathématique contemporaine. Les élèves sont confrontés à une tâche d'écriture de nombres ou de calcul mobilisant notre système de numération écrit chiffré décimal et de position.

L'étape 1 est consacrée à la mise en contexte historique et culturel. L'enseignant.e introduit la numération chinoise à bâtons en amenant les élèves à en saisir les principes de fonctionnement. Il en précise le contexte historique et géographique, puis propose des tâches mathématiques mobilisant ce système de numération ancien.

L'étape 2 correspond à une mise en comparaison entre passé et présent. Les élèves sont amenés à confronter la numération chinoise à la numération occidentale actuelle, à en identifier les similitudes et les différences, et à réfléchir aux implications de ces caractéristiques sur les techniques de calcul.

L'étape 3 marque un retour vers le présent, porté par un regard renouvelé. Les élèves sont conduits à réinvestir les connaissances construites lors des étapes précédentes afin d'analyser plus finement leur propre système de numération, conformément à la liste des OAM précédemment identifiées. Cette prise de recul contribue également à l'enrichissement de leur culture scientifique, en lien avec les OAH visées.

L'étape 4 est consacrée à l'institutionnalisation des savoirs. Les connaissances construites sont stabilisées et viennent enrichir les apprentissages mathématiques précédemment construits par les élèves à propos de notre système de numération écrit chiffré.

L'étape 5 opère un retour vers la tâche mathématique contemporaine. Les élèves sont de nouveau confrontés à une tâche d'écriture de nombres ou de calcul mobilisant notre système de numération écrit chiffré décimal de position. Comme le souligne le schéma présenté figure 1, l'étape 5 ne correspond pas strictement à l'étape 0 : le détour par l'histoire des mathématiques est susceptible d'avoir enrichi les apprentissages et modifié le regard porté par les élèves sur le système de numération écrit chiffré usuel.

La contextualisation de notre modèle à la numération chinoise met en évidence plusieurs besoins de formation pour nos étudiant.e.s. Un premier besoin concerne la connaissance approfondie du système de numération ancien proposé, tant du point de vue de ses dimensions mathématiques que de ses dimensions culturelles et historiques. Cette connaissance implique également de revisiter certains aspects de notre propre système de numération écrite chiffrée, parfois insuffisamment maîtrisés ou explicités. Un deuxième besoin porte sur la capacité à articuler mathématiques et histoire des mathématiques au sein du modèle proposé, de manière que les aspects historiques ne soient pas réduits à un simple décor. Il s'agit donc d'accompagner les étudiant.e.s dans l'identification de l'apport que produit un détour par le

système de la numération chinoise à bâtons pour la compréhension de notre propre système de numération écrit chiffré. Enfin un troisième besoin concerne la préparation de la mise en œuvre concrète en classe, et plus précisément le choix de tâches adaptées aux élèves. Cela suppose d'aider les enseignant.e.s en formation à opérer ces choix et à résoudre des questions pratiques liées à l'organisation de la séance.

2 Prise en charge de ces besoins dans le cadre de la formation

À présent, en nous appuyant sur le déroulement de la séquence de formation, nous examinons les choix opérés par les formatrices afin d'étudier dans quelle mesure les besoins précédemment identifiés ont été effectivement pris en charge ou pas.

Dans l'objectif d'amener les étudiant.e.s à prendre conscience des potentialités d'apprentissage offertes par le système de numération retenu, la séquence a débuté par une activité de comparaison de trois systèmes de numération — romain, chinois à bâtons (*suànchóu*) et COPIX (Zucchetta et Eysseric, 2019). Cette comparaison s'est appuyée sur un tableau croisant des aspects mathématiques (base, caractère positionnel, usage du zéro, etc.) et culturels (origine géographique, ancienneté, usages). Elle a été suivie d'un questionnement invitant les étudiant.e.s à identifier la numération la plus pertinente pour atteindre deux objectifs pédagogiques : enrichir la culture scientifique des élèves et favoriser une prise de recul sur certaines connaissances mathématiques du programme de CM1. Après avoir identifié la numération chinoise à bâtons comme la plus pertinente au regard des objectifs visés, les formatrices ont proposé des activités permettant aux étudiant.e.s d'en approfondir le fonctionnement et de le comparer au système de numération écrit chiffré actuel. Il s'agissait plus précisément de les aider à cerner les opportunités d'apprentissage mathématiques liées à l'usage de la numération chinoise en classe, en revisitant certaines caractéristiques fondamentales de la numération écrite, telles que les aspects positionnel et décimal, ainsi que la présence et le rôle du zéro. Les formatrices cherchaient aussi à approfondir la compréhension, par les étudiant.e.s de la technique de l'addition posée telle qu'elle est enseignée aux élèves. Ce travail de comparaison a également permis de mettre en évidence des opportunités d'apprentissage relevant de la culture scientifique, en favorisant une prise de recul sur le système décimal usuel, souvent perçu comme allant de soi, et en soulignant son caractère construit (les mathématiques vues comme un construction humaine évolutive), géographiquement et culturellement situé (usage d'un échiquier, de bâtonnets, en lien avec des besoins mathématiques et des modes de vie spécifiques).

L'accompagnement proposé par les formatrices, sous la forme d'ateliers de conception, a enfin permis aux étudiant.e.s de transposer ces réflexions dans l'élaboration de séances destinées aux élèves, en intégrant les différentes étapes du modèle et en interrogeant l'exploitation didactique de tâches mathématiques historiquement situées. Cette démarche s'inscrit pleinement dans la logique de l'ADRPP, en articulant apports théoriques, pratiques de classe et réflexion sur les finalités culturelles et scientifiques de l'enseignement des mathématiques.

Nous constatons que les besoins de formation précédemment identifiés ont effectivement été pris en charge. Néanmoins, l'une des opportunités d'apprentissage que nous avons repérées en tant que chercheures n'a pas été exploitée au cours de cette formation : il s'agit de l'intérêt des groupements par cinq dans la numération chinoise, qui constituent pourtant un appui pertinent pour faciliter les calculs [OAM4].

VI - DEUXIÈME ANALYSE : ANALYSE *A PRIORI* DE TÂCHES PRÉPARÉES PAR LES ÉTUDIANT.E.S POUR LES ÉLÈVES

Parmi les tâches proposées aux élèves de CM1, nous en avons retenu trois qui nous semblent emblématiques des choix effectués par les étudiant.e.s au regard des opportunités d'apprentissage. La première consiste en une activité collective de découverte et d'argumentation autour d'une source

historique (document). La deuxième tâche est individuelle et porte sur la numération écrite chiffrée : écrire les nombres 3, 30, 5, 50, 82, 749, 202 et 10 852 en numération chinoise. Enfin, la troisième tâche, également individuelle, concerne le calcul additif : il s'agit de poser puis d'effectuer les opérations $22 + 33$, $61 + 15$, $43 + 16$, $58 + 6$, $27 + 15$ et $65 + 26$ en numération chinoise.

1 Analyse *a priori* de la tâche 1 (annexe 3)

La fiche de préparation prévoit une séance qui débute par l'observation collective d'une source historique primaire issue de la Chine ancienne, permettant la découverte de nouveaux symboles et systèmes d'écriture (phase 1). Cette entrée offre un dépaysement à la fois spatial (voyage dans une région éloignée du monde, OAH2) et temporel (immersion dans le passé, OAH1). Son objectif est avant tout culturel et a-mathématique : il s'agit de susciter la curiosité des élèves et de lancer un débat autour d'une écriture ancienne, des savants chinois et de leurs pratiques mathématiques.

La phase 2 introduit des éléments sur le plan mathématique qui fusionnent avec des éléments culturels. Les élèves découvrent et discutent collectivement autour d'une image illustrant les neuf chiffres de la première série de la numération chinoise (Figure 3). Ils sont alors invités à repérer ces chiffres dans la source primaire explorée en phase 1. Cette phase peut poursuivre un double objectif : d'une part, identifier ces chiffres dans la source primaire pour comprendre qu'il s'agit de chiffres anciens (OAH1) ; d'autre part, en comparer la signification avec celle des neuf chiffres de notre système de numération décimal (OAM1). Un focus particulier est proposé sur l'écriture du chiffre 9 en numération chinoise, qui permet de mettre en évidence la logique sous-jacente des groupements par 5 propre à ce système (OAM4).

Dans le prolongement de la phase 1, la phase 3 opère un retour vers une dimension plus culturelle. Elle propose une contextualisation historique et géographique de la civilisation chinoise à travers deux supports : une frise chronologique et une carte du monde pour localiser la Chine et sa capitale. L'analyse de la frise permet notamment de comparer les grandes périodes de l'histoire chinoise avec celles de l'Occident, de la Rome antique au Moyen Âge, offrant un éclairage historique précieux (OAH1). Quant à la carte, elle permet de montrer que les mathématiques ont été produites, diffusées et transmises dans différentes régions du monde, tant en Orient qu'en Occident, hier comme aujourd'hui (OAH2).

Enfin, la phase 4 renoue avec les apprentissages mathématiques en se basant à nouveau sur la source primaire analysée dans la phase 1 (OAH1). L'écriture du nombre 18 permet d'introduire la deuxième série de chiffres utilisés dans la numération chinoise pour désigner les dizaines (Figure 4). L'alternance entre les deux séries est essentielle pour permettre d'éviter, comme les savants chinois dans le passé, toute confusion entre le « 1 » des unités et le « 1 » des dizaines (OAH3). Cela aurait pu conduire vers une discussion autour de l'absence du zéro dans la numération chinoise et le rôle du zéro dans notre numération écrite chiffrée mais cet aspect ne semble pas être exploité dans cette phase. Le nombre 18 offre non seulement l'occasion de découvrir les règles d'écriture d'un nombre à deux chiffres dans le système de numération chinois, mais aussi de mettre en lumière son aspect positionnel, en le comparant à notre propre numération décimale (OAM1). Par ailleurs, le chiffre 8 composant le nombre 18 permet de revenir sur la logique sous-jacente des groupements par 5, cette fois dans l'écriture d'un nombre entier, en écho à l'étude du chiffre 9 menée en phase 2 (OAM4). La comparaison entre 9 et 18 peut constituer une opportunité pour réinvestir des connaissances autour de la distinction entre chiffre et nombre, aspect qui semble malheureusement absent dans cette fiche.

2 Analyse *a priori* de la tâche 2 (annexe 4)

La tâche proposée aux élèves consiste à produire une écriture chiffrée dans un système de numération différent du nôtre.

Sur le plan mathématique**,** cette tâche offre un terrain favorable pour un travail conséquent sur l'aspect positionnel (OAM1) : rapprocher l'écriture de 3 et de 30 ou de 5 et de 50 pourrait permettre de mettre

en évidence certaines caractéristiques du système de numération chinois en lien avec l'aspect positionnel (jeu sur l'orientation des bâtonnets, absence de zéro). Toutefois, les exercices proposés ne permettent pas d'aborder l'aspect décimal (OAM2). Les exercices prévus étant assez nombreux et répétitifs, nous estimons qu'il aurait été possible d'enrichir l'activité par d'autres tâches comme « ajouter 1 », « ajouter 10 » ou « donner le nombre qui suit », afin de favoriser un travail plus explicite sur la structure décimale. Le rôle du zéro (OAM3) est pris en compte à travers des exemples variés, même si lever les ambiguïtés liées à son absence est laissé à la charge de l'enseignant.e lors de la mise en œuvre. En revanche, la logique des groupements par 5 (OAM4) n'a pas été explorée mais aurait pu l'être en introduisant le nombre 6 avec pour objectif de susciter une réflexion sur l'absence d'un symbole pour représenter 5 et le risque de confusion avec 1. Cependant, cette opportunité n'ayant été perçue par les formatrices qu'après les ADRPP, la question n'a pas été abordée lors de la séance de formation.

Sur le plan historique**,** cette tâche a permis de concevoir que les mathématiques sont une construction humaine (OAH3). Toutefois, l'utilité des bâtonnets pour compter et calculer (OAH3) n'a pas été abordée. Cela aurait pu permettre une décentration car, de la même manière que nous pouvons compter sur nos doigts, la numération chinoise ancienne utilisait les bâtonnets comme outil de comptage.

3 Analyse *a priori* de la tâche 3 (annexe 5)

Cette tâche consiste à effectuer une addition posée, sans que l'on sache si l'opération doit être effectuée selon la numération chinoise ou selon la numération classique (en traduisant ensuite le résultat). C'est pourquoi deux procédures peuvent être utilisées :

- traduire les nombres en numération chinoise, puis réaliser l'addition posée directement dans cette numération ; par exemple, pour calculer $3 + 4$, on traduit d'abord les chiffres en 𝍠 et 𝍡, puis on forme un paquet de 5 (représenté par un bâtonnet horizontal) avec en plus au-dessus deux bâtonnets verticaux, ce qui nécessite une décomposition additive ;
- effectuer l'addition posée classique, puis traduire le résultat en numération chinoise ; par exemple, pour $3 + 4$, on obtient 7, que l'on représente ensuite avec le symbole chinois correspondant 𝍢.

Sur le plan mathématique**,** l'aspect positionnel (OAM1) et l'aspect décimal (OAM2) sont tous les deux mis en œuvre dans cette tâche, au travers d'exercices variés qui présentent une certaine régularité. Les additions concernent majoritairement des nombres à deux chiffres (sauf $58 + 6$), avec retenue ($58 + 6$; $27 + 15$; $65 + 26$) ou sans retenue ($22 + 23$; $61 + 15$; $43 + 16$). Le rôle du zéro (OAM3) n'est pas en jeu car aucune opération ne présente de zéro intercalé. La compréhension de l'algorithme de l'addition est travaillée (OAM5) dans notre numération ou dans la numération chinoise. Bien que les groupements par 5 (OAM4) jouent un rôle spécifique dans la numération chinoise, ils ne sont pas exploités ici. L'objectif reste de travailler directement avec les chiffres de notre numération et d'effectuer les additions sans utiliser ces groupements spécifiques.

Sur le plan historique**,** la numération chinoise permet d'effectuer des calculs à l'aide de bâtonnets (OAH1). Cette pratique illustre que les mathématiques, loin d'être figées, sont une construction humaine (OAH3) en constante évolution. La transformation matérielle des outils à travers l'histoire est tangible, des bâtonnets aux bouliers, du papier à la calculatrice (OAH3). Parallèlement, le symbolisme des opérations, comme l'addition, a également évolué au fil du temps, ce qui peut susciter un questionnement.

4 Conclusion sur les analyses *a priori* des trois tâches

Les analyses mettent en évidence que les trois tâches précédentes combinent, à différents degrés, des opportunités d'apprentissage mathématiques (OAM) et des opportunités d'apprentissage en lien avec la culture scientifique des élèves (OAH). Ainsi, tout au long des tâches proposées, les connaissances mathématiques (OAM) se trouvent étroitement articulées à des connaissances historiques et

culturelles (OAH). Par exemple, l'écriture des nombres dans la numération chinoise (tâche 2) amène les élèves à mobiliser des notions mathématiques essentielles telles que l'ordre des rangs, la décomposition en unités, dizaines et centaines (OAM1), ou encore la régularité de l'écriture chiffrée (OAM3). Les calculs additifs de la tâche 3 offrent en plus l'opportunité de travailler sur l'aspect décimal (OAM2) et sur l'algorithme de l'addition posée (OAM5). La tâche 1 fait toutefois exception car elle alterne des moments centrés principalement sur des aspects culturels avec d'autres intégrant des apprentissages mathématiques.

En parallèle, la découverte de la numération à bâtons, avec ses spécificités — comme l'absence initiale du zéro —, ouvre des perspectives culturelles sur l'évolution des systèmes de numération (OAH1). Les questions suscitées par certaines écritures et les ambiguïtés liées à l'absence de zéro offrent l'occasion de mettre en évidence le caractère construit et perfectible de toute numération.

Cependant, au-delà de ces trois tâches, nous avons observé certaines limites. En effet, aucune mention n'est faite de la notion de quantité, ce qui restreint la compréhension des élèves quant à la valeur réelle des nombres. De plus, il n'y a pas de comparaison de nombres, ce qui aurait pu favoriser une meilleure appropriation de leurs relations et de leur ordre.

L'analyse des tâches montre finalement que l'articulation entre mathématiques et culture scientifique s'inscrit au-delà de la structure d'une séance : elle se manifeste également à un niveau bien plus fin, à l'intérieur même d'un exercice, à travers les nombreuses questions que peuvent susciter les tâches d'écriture d'un nombre dans un autre système de numération que le nôtre. Chaque nombre à écrire devient ainsi l'occasion d'un questionnement croisé, à la fois mathématique (autour de la position, de la valeur de chaque chiffre, de l'absence de zéro) et culturel (autour de l'évolution des systèmes, voire des solutions historiques apportées à certaines limites). Ces observations confirment la validité de notre modèle tout en révélant que l'articulation entre savoirs mathématiques et culture scientifique peut se jouer à un niveau micro, dans le détail même des interactions pédagogiques.

VII - TROISIÈME ANALYSE : ANALYSE *A POSTERIORI* DE L'ACTIVITÉ EFFECTIVE DES ÉLÈVES LORS DE LA MISE EN ŒUVRE EN CLASSE

Au-delà de la présentation des tâches proposées aux élèves, nous nous intéressons à l'activité réelle des élèves lors des séances mises en place en CM1. Il s'agit d'examiner dans quelle mesure les opportunités d'apprentissage offertes par les activités choisies par les étudiant.e.s ont été exploitées de manière efficace.

1 Observation et analyse relatives à la tâche 1

1.1 Mise en œuvre en classe

La séance débute par l'observation collective de la source primaire projetée au tableau blanc interactif (TBI). Un questionnement guidé est proposé afin de permettre aux élèves de découvrir cette source et son contenu. Les élèves sont invités à réagir à la question : « Que voyez-vous ? » et formulent d'abord l'hypothèse d'une écriture chinoise, puis évoquent l'idée qu'il s'agit de nombres chinois. Si cette première phase éveille la curiosité des élèves, elle n'est toutefois pas exploitée par l'étudiant.e pour introduire la dimension du « voyage » vers une région éloignée du monde, ni pour lancer un débat sur les aspects culturels et historiques de la source, des savants chinois et de leurs pratiques mathématiques.

L'esprit de découverte reste néanmoins valorisé, notamment dans la phase 2, lorsque les élèves sont invités à deviner la signification du chiffre chinois 9. Cette activité permet d'introduire progressivement les règles de la numération à bâtons, en commençant par la présentation de la première série de chiffres et leur correspondance avec notre numération orale. Grâce à cette mise en relation, un élève parvient à identifier correctement le chiffre « 9 » de la source comme correspondant au « neuf » de notre système. Cependant, ni la logique des groupements par cinq propre à cette numération, ni la signification

mathématique et historique des autres chiffres de la première série ne sont approfondies. Quelques éléments culturels émergent néanmoins lorsqu'il est révélé que la source primaire est en réalité une table de multiplication par 9.

Lors de la phase 3, les élèves répondent correctement aux questions collectives portant sur les repères géographiques : localisation de la Chine, identification du continent asiatique, et connaissance de la capitale actuelle de la Chine. En explorant la frise chronologique, ils et elles découvrent des repères historiques clés et établissent un parallèle entre l'histoire de la Chine et celle de l'Europe médiévale. Si la numération à bâtons est replacée chronologiquement dans la frise de la Chine ancienne, la notion de « voyage » reste abordée principalement sous un angle historique et géographique, sans mettre en lumière le fait que les mathématiques sont une production universelle et humaine, ayant circulé entre différentes régions du monde, en Orient comme en Occident, hier comme aujourd'hui.

Enfin, la phase 4, consacrée à l'explicitation des règles de la numération à bâtons., débute par la projection au TBI d'une image présentant la traduction des résultats de la table de multiplication par 9 en chiffres de notre numération décimale de position. À côté de la première série de chiffres chinois correspondant aux unités et aux centaines, la deuxième série, utilisée pour les dizaines et les milliers, est introduite. Toutefois, l'importance historique de cette alternance — permettant d'éviter les confusions entre, par exemple, le « 1 » des unités et celui des dizaines — n'est pas explicitée par l'étudiant.e. À l'aide d'un tableau structuré en colonnes (unités, dizaines, centaines), les élèves sont néanmoins invités à traduire le nombre 18 en chiffres chinois. Le premier élève n'écrit pas correctement le chiffre 8, en oubliant le trait horizontal représentant le groupement de cinq. Le second élève fournit la bonne réponse. Cet exemple donne lieu à une explication des règles, en insistant sur la position des traits verticaux et horizontaux selon la valeur positionnelle des chiffres. En revanche, la logique des groupements par cinq, pourtant illustrée par l'erreur du premier élève, n'est pas mise en évidence.

Par conséquent, la tâche 1 a fourni aux élèves l'occasion de découvrir et de débattre autour d'une source historique authentique, en formulant des hypothèses sur une écriture ancienne. Grâce à un questionnement collectif et à divers supports projetés au TBI, ils et elles ont voyagé à travers le temps et l'espace jusqu'à la Chine ancienne, prenant conscience qu'il existait, dans ce pays, une autre manière d'écrire les nombres (OHA1, OHA2, OHA3). Cependant, ces opportunités d'apprentissage historiques n'ont pas été pleinement exploitées. L'alternance des deux séries de chiffres (OHA3), l'histoire des chiffres chinois représentés par des bâtonnets (OHA1), ainsi que des éléments plus généraux sur les acteurs, les pratiques mathématiques de l'époque (OHA1) ou les modalités de circulation des systèmes de numération anciens (OHA2) bien que présents, auraient mérité d'être davantage développés. Même si les élèves ont compris les règles de base de la numération à bâtons (OAM1), la logique sous-jacente des groupements par cinq semble avoir posé difficulté (OAM4). C'est un point qui gagnerait à être davantage mis en évidence lors de la présentation de ce système.

1.2 Retours réflexifs des étudiant.e.s

Les retours réflexifs des étudiant.e.s ayant mené ou observé cette séance confirment ce constat. Plusieurs soulignent que la première phase, centrée sur la découverte de la source primaire, a été « trop rapide » ou que la séance n'a pas suffisamment insisté sur « l'aspect historique de l'écriture chinoise » (OHA1, OHA2, OHA3). Un.e étudiant.e ayant animé la séance évoque par ailleurs une difficulté rencontrée dans la distinction entre chiffres et nombres au moment d'expliquer les règles de cette numération : « Mon ressenti sur mon passage est plutôt bon, malgré quelques bafouillages sur les notions de chiffre et de nombre. Peut-être étais-je perturbé par cette numération inconnue ? » (OAM1). Un.e autre étudiant.e insiste sur le manque d'explication autour de la logique des groupements : « Il aurait fallu, selon moi, donner plus d'explications et de vérifications concernant la numération chinoise ; plus précisément : pourquoi passe-t-on du cinq (IIIII) au six (T) ? » (OAM4). Le rôle du zéro aurait également pu être abordé, notamment dans la présentation historique de la numération à bâtons et dans l'analyse de la signification

des chiffres. Une remarque d'étudiant.e illustre bien cette piste d'approfondissement : « Il aurait été intéressant de faire un lien avec la séance qu'ils avaient déjà réalisée auparavant, car les élèves se demandaient pourquoi les symboles étaient différents de ce qu'ils avaient vu » (OAM1).

2 Observation et analyse relatives à la tâche 2 (annexe 6)

2.1 Mise en œuvre en classe

Les élèves ont réalisé la tâche durant 20 minutes. Tous les élèves réussissent pour les nombres 3, 30, 5, 50 et 82. Pour le nombre 749, un seul élève échoue. Concernant le nombre 202, tous les élèves réussissent, bien qu'un élève ait dû effectuer deux essais avant de parvenir à la réponse correcte. En revanche, pour le nombre 10 852, un premier élève réussit dès le premier essai, un second au deuxième essai, tandis que tous les autres échouent malgré plusieurs tentatives. Il convient également de signaler qu'une réponse incorrecte a été validée par l'étudiant.e correcteur.rice pour ce nombre.

Des élèves sont ensuite intervenus au tableau pour la correction avec un tableau de numération en appui. Pour le nombre 202, la correction a suscité quelques discussions car c'est le nombre 22 qui est initialement écrit par l'élève au tableau. L'étudiant.e prenant en charge la séance précise : « Le zéro n'existe pas, alors on laisse un espace ». L'étudiant.e commet ensuite une erreur dans l'alternance des séries pour le nombre 10 852 malgré l'usage du tableau de numération comme le montre la figure 5 (les deux premières lignes correspondent aux nombres écrits au tableau pendant la correction tandis que la troisième ligne est notre interprétation quant à la série utilisée) où le symbole chinois pour le chiffre des milliers est erroné (cases grisées).

On peut donc conclure que la gestion du zéro (OAM3) est effective pour des nombres ayant peu de chiffres, tels que 202, où l'alternance des séries doit être appliquée une seule fois. En revanche, pour des nombres plus élevés, comme 10 852, cette règle est plus difficile à appliquer car l'alternance des séries doit être effectuée plusieurs fois selon un principe de récurrence. Le fait que le document utilisé lors de la formation n'évoque que les unités et les centaines pour la première série et les dizaines et les milliers pour la deuxième série ne semble pas avoir permis aux étudiant.e.s de comprendre que le processus d'alternance entre rang impair et rang pair se généralise.

Nombre en numération décimale positionnelle	1	0	8	5	2
Nombre en numération chinoise					
Série utilisée	2 horizontale au lieu de verticale	2 horizontale	1 verticale	2 horizontale	1 verticale

Figure 5. Traitement du nombre 10 852 (les cases grisées repèrent l'erreur relevée)

La phase collective qui a suivi a consisté en une synthèse de 5 minutes sur la comparaison des deux numérations (OAH3). Celle-ci a pointé les barres verticales et horizontales des symboles chinois, plus précisément, les barres verticales pour unités et centaines et les barres horizontales pour dizaines et milliers. Le rôle du cinq, « une barre au-dessus vaut 5 », a également été abordé (OAM4). L'accent a été mis sur les différences entre les symboles chinois et nos chiffres (OAH3). Enfin, le zéro a été évoqué (OAM3) mais les constats faits par les élèves à propos de la numération chinoise n'ont pas été confrontés à leur connaissance de notre système de numération écrit chiffré.

2.2 Retours réflexifs des étudiant.e.s

Les retours réflexifs des étudiant.e.s ayant mené ou observé cette séance confirment ces constats. Un.e étudiant.e signale durant la séance « quelques difficultés notamment sur le 0 qui n'est pas

représenté » (OAM3). De plus, ils ont perçu le potentiel des bâtonnets pour calculer. Par ailleurs, un.e étudiant.e remarque qu'il aurait fallu : « préciser la fonction des bâtons *: 𝍠 = 5 + 2 = 7* » afin d'exploiter la signification des chiffres de la numération chinoise et percevoir que le signe « sept » résulte d'une recomposition des signes « cinq » et « deux ».

Après la mise en œuvre de la séance, la discussion entre les étudiant.e.s et les formatrices a porté sur des explications sur 202 et 22 puis sur 303 et 30 003 (OAM3). Les nombres supérieurs à 10 000 ont aussi été évoqués, ainsi que l'erreur commise durant la séance. Enfin, le fait qu'une seule série n'aurait pas permis d'éviter les confusions entre 3 et 21 a été pointé.

3 Analyse et observation relatives à la tâche 3

3.1 Mise en œuvre en classe

Durant 30 minutes, les élèves choisissent et réalisent quatre calculs additifs posés parmi les six proposés. La difficulté (additions à retenue) est repérée par une étoile. La correction débute par les additions sans retenue affichées au tableau avec des nombres en numération chinoise (les bâtonnets de la numération chinoise ne sont pas utilisés pour calculer). Elle se poursuit par les additions avec retenue où l'étudiant.e laisse les élèves écrire les nombres en numération chinoise et indique qu'il n'y a « pas de signe pour les opérations ». Lors du calcul avec retenue de $58 + 6$ (Figure 6a), l'étudiant.e indique « qu'une unité ne peut pas avoir de dizaine » pour expliquer la gestion de la retenue pour le rang des unités (OAM2). Cependant, la numération dans laquelle la retenue est écrite n'est pas claire : s'agit-il de la numération décimale positionnelle (comme pourrait le laisser penser l'indication « calcul de 14 » ou de la numération ancienne chinoise ? L'élève invité au tableau pour la correction de $65 + 26$ utilise ses doigts pour dénombrer toutes les unités visibles grâce aux bâtonnets de la numération chinoise (Figure 6b). Enfin, une institutionnalisation est réalisée oralement à la fin de la séance mais, là encore, la mise en parallèle avec notre propre système de numération n'a pas été menée de manière explicite. Sans que cela ne remette en cause la qualité de l'investissement des étudiant.e.s, la dernière étape du voyage modélisé (étape 5) n'a pas vraiment été exploitée, probablement en raison du temps limité imparti à la préparation de la séance.

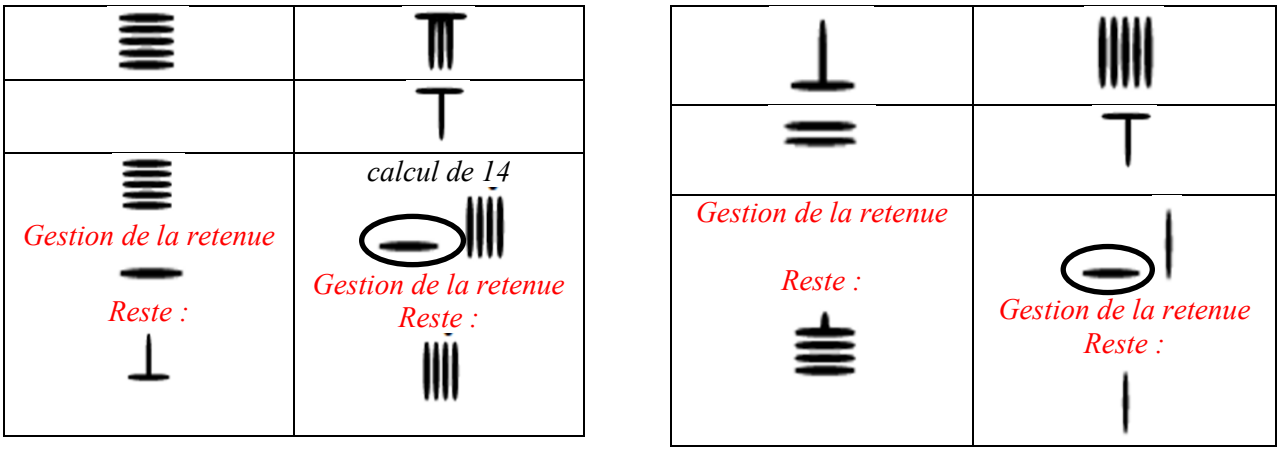


Figure 6. Calculs de (a) $58 + 6$ *et (b)* $65 + 26$[2]

3.2 Retours réflexifs des étudiant.e.s

Dans leurs retours réflexifs, les étudiant.e.s ayant mené ou observé cette séance regrettent les conditions matérielles dans lesquelles elle s'est déroulée. Ils auraient en effet aimé disposer de plus de temps (cette deuxième séance s'est tenue l'après-midi, juste après la première séance qui a eu lieu le matin, le lendemain de la préparation à l'INSPÉ avec les formatrices) pour assimiler la numération chinoise puis

[2] Les éléments en rouge sont ajoutés par nous.

concevoir les séances destinées aux élèves : « un temps de découverte et de préparation de séance très court ». Ils auraient aussi souhaité avoir des informations sur le matériel disponible en classe : « méconnaissance du matériel à disposition ».

Les potentialités des bâtonnets pour calculer ont été perçues *a posteriori,* même si cette rencontre n'a pas été pleinement exploitée collectivement pendant la séance (OAH1 et OAH3)). Un.e étudiant.e observateur.rice relève que « les bâtons aident à calculer » (OAH1 et OAH3). Une différence dans la manière d'effectuer les calculs posés est notée : la barre n'existe pas pour les calculs dans la numération chinoise (OAH3). Enfin, les étudiant.e.s mentionnent l'importance de réaliser des liens entre notre système de numération et la numération chinoise lors de l'institutionnalisation (OAH3) : « Le bilan a été fait à l'oral et consistait à relever les différences entre notre numération et la numération chinoise et l'aide que peut apporter la numération chinoise » ou encore « L' étudiant.e [qui a mené la séance] a insisté sur les différences entre la numération chinoise et française ».

4 Conclusion

Bien que les activités aient été globalement bien choisies et adaptées aux objectifs pédagogiques, nous avons constaté que les étudiant.e.s ont rencontré des difficultés pour saisir pleinement les opportunités d'apprentissage offertes et pour mener à bien la fin de ce détour par l'histoire des mathématiques. Ces difficultés ne sont pas nécessairement liées à la pertinence des tâches, mais plutôt à la manière dont elles ont été abordées et vécues par les élèves.

VIII - CONCLUSION

Avant de conclure, nous revenons sur les principaux résultats de notre étude.

1 Résultats relatifs à la première analyse

Cette première analyse met en lumière la pertinence de notre modèle, dans la mesure où il a pu être contextualisé dans le cadre de notre dispositif de formation et pour la numération chinoise. Dans un premier temps, la découverte de tâches anciennes — en l'occurrence, l'écriture et le calcul avec la numération chinoise — invite les étudiant.e.s et les élèves à explorer un système numérique différent, inscrit dans un environnement historique et culturel riche. Cette mise en contexte leur permet d'en dégager les principales caractéristiques (principe de position, base 10, etc.) et d'établir des comparaisons avec le système actuel, en identifiant à la fois similitudes et différences. Le va-et-vient entre passé et présent permet ainsi de porter un regard renouvelé sur notre système de numération écrite chiffrée contemporain, éclairé par l'analyse de la numération ancienne. Enfin, cette démarche aboutit à une phase d'institutionnalisation des savoirs, favorisant leur stabilisation et leur intégration dans les apprentissages en lien avec les programmes.

Néanmoins, nous avons constaté que les étudiant.e.s n'ont pas toujours réussi à accompagner de manière suffisamment explicite le retour vers les mathématiques contemporaines. Pour filer la métaphore du voyage, si l'exploration du territoire ancien a bien été menée, la dernière étape — celle du retour vers les mathématiques contemporaines — n'a pas toujours été pleinement accomplie. Autrement dit, l'étape 0 enrichie, que nous avons identifiée comme l'étape 5, n'a pas été investie lors de la mise en œuvre, laissant inachevée l'exploitation de ce détour par l'histoire des mathématiques.

2 Résultats relatifs à la deuxième analyse

L'analyse *a priori* des trois tâches proposées aux élèves révèlent qu'elles combinent, à des degrés divers, des opportunités d'apprentissage en mathématiques (OAM) et en histoire (OAH). La tâche 2 illustre particulièrement bien cette articulation : elle mobilise des notions liées à la numération — comme l'ordre des rangs, la décomposition en unités, dizaines et centaines, ou encore la régularité des écritures — tout en introduisant une dimension historique, à travers la découverte de la numération chinoise à bâtons et

l'évolution des systèmes numériques au fil du temps, notamment en lien avec la présence ou l'absence du zéro. Ainsi l'histoire des mathématiques ne se limite pas ici à un simple décor : elle devient un véritable levier d'apprentissage, enrichissant la compréhension des concepts mathématiques tout en participant au développement de la culture scientifique des élèves. Si le scénario, en cinq étapes, associé à notre modèle est globalement validé, cette seconde analyse montre également que l'articulation entre les dimensions mathématique et culturelle se joue à un niveau micro. Chaque tâche, prise individuellement, est en effet susceptible de contribuer à la construction de savoirs grâce à des allers-retours entre mathématiques et histoire des mathématiques.

3 Résultats relatifs à la troisième analyse

L'analyse *a posteriori* confirme la pertinence d'un modèle d'enseignement articulant opportunités d'apprentissage en histoire (OAH) et en mathématiques (OAM). Plusieurs points positifs sont à souligner : la motivation des élèves quant à l'ouverture culturelle et historique proposée autour de la Chine ancienne et son système de numération, ainsi que leurs performances mathématiques globalement satisfaisantes.

Cependant, certaines limites freinant l'exploitation des opportunités offertes ont été relevées. La dimension historique reste peu approfondie, souvent reléguée au second plan, et la logique des groupements spécifiques au système de numération chinois (groupements par cinq) est peu prise en compte. De manière générale, nous notons un manque de comparaison explicite entre la numération chinoise et notre propre système (étape 2 du modèle). Les retours réflexifs des étudiant.e.s confirment ces constats. Ils expriment une réelle motivation et une volonté de bien faire mais ils relèvent aussi un manque de temps pour approfondir la compréhension à la fois des aspects historiques et surtout pour dépasser certaines incompréhensions d'ordre mathématique. Ainsi cette troisième analyse montre que le modèle mis en place est susceptible d'être profitable aux élèves, mais tout se passe comme s'il existait une certaine tension entre, d'une part, le plaisir de découvrir un nouveau système de numération et, d'autre part, la nécessité d'un retour vers notre système de numération pour espérer développer les connaissances mathématiques visées (étape 5 de notre modèle).

4 Conclusion

Cette recherche a pour objectif de tester un modèle articulant histoire et didactique des mathématiques. Pensé comme un outil générique pour la conception de séances, ce modèle intègre les trois fonctions de l'histoire des mathématiques : vicariante, dépaysante et culturelle. Pour répondre à cette problématique, nous avons mené trois analyses. La première a permis de mettre en lumière des opportunités d'apprentissage en synergie (OAH et OAM), dans le cadre spécifique de la numération chinoise à bâtons, révélant une dynamique où l'histoire des mathématiques et les mathématiques s'éclairent mutuellement. La seconde analyse a souligné l'importance d'un changement d'échelle dans l'usage du modèle : ce dernier se concrétise principalement à un niveau micro, celui de la tâche, plutôt qu'au niveau du déroulement d'une séance. Chaque tâche devient alors un espace propice à une articulation fine entre dimensions historiques, culturelles et mathématiques. Enfin, la troisième analyse a fait émerger une tension importante entre deux logiques à concilier : d'une part, le plaisir de la découverte suscité par la dimension historique, d'autre part, les exigences d'un apprentissage structuré des mathématiques basé sur une mise en parallèle entre passé et présent. La nécessité de questionner plus avant cette tension ouvre des perspectives pour un enrichissement de notre modèle, notamment dans la perspective de mieux équilibrer ces deux logiques au sein de situations d'enseignement.

IX - BIBLIOGRAPHIE

Anicotte, R. (2019). *Le livre sur les calculs effectués avec des bâtonnets : Un manuscrit du -II^e siècle excavé à Zhangjiashan*. Paris : Presses de l'Inalco.

Anicotte, R. (2015). Chinese Names for Integers. Dans Xu Dan [徐丹] & Fu Jingqi [傅京起] (éds.), *Space and Quantification in Languages of China* (117-138). Cham : Springer.

Barbin, É. (2006). Apport de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. *Tréma, 26(1), 20-28*.

Barbin, É. (1997). Histoire des Mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin de l'Association Mathématiques du Québec, 37(1)*, 20-25.

Barbin, É., Guillemette, D. et Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. Dans S. Lerman (éd.), *Encyclopedia of mathematics education* (333-342). Cham : Springer.

Barbin, É. et Tzanakis, C. (2014). History of mathematics and education. Dans S.Lerman (éd.), *Encyclopedia of mathematics education (255-260)*. Cham : Springer.

Chemla, K. et Shuchun, G. (2005). *Les neuf chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

Chorlay,R. (2019). Justifying a calculation technique in years 3 and 6. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2109-2116). Utrecht : Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Chorlay, R., Mailloux, F. et Masselin B. (2017). Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie. *Grand N, 100*, 33-57.

Chorlay, R. et de Hosson, C. (2016). History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research. Dans B. R. Hodgson, A. Kuzniak, J.-B. Lagrange (éds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* : A Hommage to Michèle Artigue (155-189). Cham : Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., et Tzanakis, C. (2019*). History of mathematics in mathematics education – An overview. Mathematica Didactica, 41(1)*, 1-26.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. et Tzanakis, C. (éds). (2018). *Mathematics, Education and History : Towards a Harmonious Partnership*. Springer. ICME-13 Monographs.

de Hosson, C. (2011). *L'histoire des sciences : un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Paris : Université Paris-Diderot - Paris VII.

Décamp, N. et de Hosson, C. (2011). Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène. *Bulletin de l'Union des Physiciens, 937*, 1065-1082.

Demuro, A. et Mangiante-Orsola, C. (2023). Comment penser l'articulation entre enseignement des mathématiques et histoire des mathématiques à l'école primaire ? Le cas de la technique de la soustraction de al-Amili. *Colloque Didhim2 : Rencontres Didactique et Histoire des mathématiques*, Lens, 8-9 mars 2023.

de Varent, C. (2024). La mesure entre géométrie et formules : l'aire du rectangle en CM2- analyse de manuels scolaires. *Grand N, 112*, 25-63.

de Varent, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure - Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. Thèse de doctorat. Paris : Université Sorbonne Paris Cité.

de Vittori, T. (2022). *Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation (EDUHM)*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Lens : Université d'Artois.

de Vittori, T. et Visentin, M.-P. (2021). Supports historiques et enseignement des mathématiques : sur le rôle de l'imagination. *Grand N, 108*, 85-110.

Fauvel, J. et van Maanen, J. (éds). (2000). *History in mathematics education : The ICMI study.* New ICMI Study, vol.6. Dordrecht : Kluwer.

Guillemette, D. (2015). *L'histoire des mathématiques et la formation des enseignants du secondaire : sur l'expérience du dépaysement épistémologique des étudiants*. Thèse de doctorat. Montréal : UQAM.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71(3)*, 235-261.

Lemes, A. J. (2019). *L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : éléments pour la construction d'une compétence historique*. Thèse de doctorat. Lille : Université de Lille.

Martzloff, J. -C. (1997). *A history of Chinese mathematics*. New York : Springer.

MEN (2015). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). Bulletin officiel spécial n°11 du 26/11/15. Consulté le 19/01/2026. Url : https://www.education.gouv.fr/bo/15/Special11/MENE1526483A.htm?cid_bo=94708

MEN (2025). Programme de mathématiques pour le cycle 3. Bulletin officiel n°16 du 17/04/25. Consulté le 19/01/2026. Url : https://eduscol.education.fr/87/j-enseigne-au-cycle-3

Moyon, M. et Tournès, D. (éds). (2018). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en Cycle 3.* Paris : ARPEME.

Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques : le cas des instruments à calculer.* Thèse de doctorat. Marseille : Université de Provence.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse de doctorat. Paris : Université Paris-Diderot - Paris VII.

Yabuuchi, K. (2000). *Une histoire des mathématiques chinoises* (trad. Kaoru Baba et trad. Jami Catherine). Paris : Belin ; Pour la Science.

Zucchetta, H. et Eysseric, P. (2019). La numération COPIX : un scénario de formation initiale et continue, *Colloque du cinquantenaire des IREM « Enseigner les mathématiques et les sciences : chercher, former, diffuser »*, Besançon, 9-11 mai 2019.

ANNEXE 1 : DESCRIPTIF DU DISPOSITIF DE FORMATION

Temps - Date	Acteurs	Description	Données
1 - Jeudi 30 mai 2024	Formatrices INSPÉ et étudiant.e.s M1	Séance de préparation à l'INSPÉ : Présentation par les formatrices du dispositif d'ADRPP visant la conception de deux séances intégrant une perspective historique	Document ressource pour les M1
2 - Jeudi 30 mai 2024	Formatrices INSPÉ et étudiant.e.s M1	Séance de préparation à l'INSPÉ : Préparation des deux séances par les étudiant.e.s accompagnés par les formatrices	Document ressource pour faire la fiche de préparation pour les élèves Document aide à la rédaction d'une fiche de préparation
3 - Jeudi 30 mai 2024	Étudiant.e.s M1	Préparation en autonomie et envoi des fiches de préparation	Fiche de préparation des M1 Bilan de la séance Enregistrement de la séance
4 - Vendredi 31 mai 2024	Formatrices, étudiant.e.s M1 et élèves de CM1	Mise en œuvre des séances en classe par des étudiant.e.s M1 et observation par d'autres étudiant.e.s M1 et par les formatrices	Document aide à l'observation d'une séance Enregistrement audio de la séance Enregistrement vidéo de la séance

Temps - Date	Acteurs	Description	Données
			Productions des élèves
5 - Vendredi 31 mai 2024	Formatrices INSPÉ et étudiant.e.s M1	Entretiens à chaud	Ressenti des M1 rédigé lors de l'entretien post séance Enregistrement des entretiens post séance

ANNEXE 2 : LA NUMERATION À BÂTONS (*SUÀNCHÓU*)

Entre 722 et 221 av. J.-C., la Chine traverse les périodes dites des « Printemps et Automnes » puis des « Royaumes combattants ». Ces époques sont marquées par une organisation féodale, où chaque territoire est gouverné par un seigneur local, mais également par une intense activité intellectuelle, illustrée notamment par le développement des « Cent écoles de philosophie ». Parallèlement, l'essor du commerce, de l'artisanat et de l'agriculture contribue à faire émerger des besoins pratiques en matière de calcul et de gestion, stimulant ainsi le développement des mathématiques (Yabuuchi, 2000). En 221 av. J.-C., l'unification de la Chine par le premier empereur de la dynastie des Qin marque l'instauration d'un pouvoir bureaucratique centralisé. Cette orientation est maintenue par la dynastie des Han (206 av. J.-C. – 220 apr. J.-C.), dont les fonctionnaires, formés aux préceptes confucéens, jouent un rôle essentiel dans l'administration mais également dans le développement des sciences et des techniques. Leur intérêt pour les mathématiques se manifeste aussi à travers la compilation d'ouvrages qui révèlent deux dimensions fondamentales de la discipline à cette époque : d'une part, leur usage au service des fonctions administratives ; d'autre part, leur élaboration en tant que « art mathématique », mobilisant des techniques de calcul et des méthodes visant à résoudre des problèmes concrets (Yabuuchi, 2000, p. 28). Parmi ces ouvrages, *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, rédigé au I^{er} siècle de notre ère, constitue une synthèse majeure du savoir mathématique chinois de l'époque. Les commentaires apportés par le mathématicien Liu Hui vers 263 offrent de précieuses informations sur les pratiques mathématiques alors en usage, profondément enracinées dans les réalités sociales et économiques mais dont l'abstraction n'est pas absente (Chemla et Shuchun, 2005). Il convient de préciser que la majorité des mathématiciens chinois — dont le statut social demeure sujet à débat (Martzloff, 1997, p. 75) — peuvent être considérés comme des auteurs d'ouvrages mathématiques sans être pour autant des professionnels au sens moderne du terme. Il s'agissait le plus souvent d'amateurs éclairés ou de polymathes exerçant parallèlement d'autres fonctions (enseignants, traducteurs, ambassadeurs, romanciers, etc.), sans se consacrer exclusivement aux mathématiques. Cette polyvalence caractérisait d'ailleurs non seulement les spécialistes de la Chine ancienne, mais également ceux de l'Europe jusqu'au XV^{e} siècle, époque à laquelle les mathématiciens professionnels demeuraient encore rares.

Ce paysage mathématique chinois, mieux documenté à partir de la dynastie Han, révèle l'existence d'un système de numération fondé sur l'usage de bâtonnets de calcul, appelés *suànchóu*. Cette numération était employée par les mathématiciens et astronomes chinois pour effectuer divers calculs dans des contextes aussi variés que l'astronomie, l'administration, les finances ou encore le commerce. Plus précisément, il s'agit d'une numération décimale *« idéalement »* de position, fondée sur l'agencement de bâtonnets pour représenter des nombres. Selon le *Livre des Han*, les *suànchóu*, de forme cylindrique ou carrée, mesuraient environ 14 cm de long et étaient généralement fabriqués en bambou, mais pouvaient également être en bois, en métal ou en jade (Yabuuchi, 2000, p. 23).

Comme l'indique le *Livre sur les calculs réalisés avec des bâtonnets* (Suàn shù shū), ce système de numération servait d'outil de calcul pour résoudre les problèmes mathématiques abordés dans cet ouvrage : calculs de fractions, de proportions, conversions d'unités, détermination de surfaces et de volumes, ainsi que divers problèmes concrets liés à la fiscalité, aux échanges ou aux rémunérations.

Cependant, cette numération et ses procédés de calcul ne sont généralement pas explicités dans ce traité (Anicotte, 2019). Dans celui-ci comme dans d'autres ouvrages de la dynastie des Han, les nombres entiers et les fractions sont écrits avec les mots de la langue courante, sans recours à des notations symboliques et en utilisant 13 morphèmes : yī {1}, èr {2}, sān {3}, sì {4}, wǔ {5}, liù {6}, qī {7}, bā {8}, jiǔ {9}, shí {10}, bǎi {100}, qiān {1 000}, wàn {10 000} (Anicotte, 2015). C'est uniquement lorsqu'un calcul devait être réalisé que les nombres étaient convertis en représentation à l'aide des bâtonnets. Dans le Suàn shù shū, cette transition est introduite par le terme zhì (« poser [sur la surface de calcul] »), marquant le passage à une phase opératoire. Toutefois, les opérations en elles-mêmes ne sont pas détaillées, ce qui suggère qu'elles étaient considérées comme allant de soi pour le lecteur du traité. Il est vraisemblable que l'apprentissage du maniement des bâtonnets se transmettait de manière orale, de maître à élève (Anicotte, 2019, p. 69). Les bâtonnets *suànchóu* étaient utilisés pour réaliser les quatre opérations arithmétiques de base, ainsi que l'extraction des racines carrées et cubiques. Les nombres étaient alors matériellement représentés à l'aide de ces bâtonnets posés sur une surface à calcul. Les calculs s'effectuaient par manipulation directe des *suànchóu.* Ainsi, les opérations s'y déroulaient visuellement et manuellement. Par exemple, pour les additions, il suffisait de représenter sur la surface à calcul les nombres à additionner puis de réunir, colonne par colonne, les bâtonnets correspondants. Quant aux soustractions, le principe était le même : représentation des nombres sur la surface à calcul pour ensuite ôter, colonne par colonne, les bâtonnets correspondants.

Certains historiens des mathématiques s'interrogent sur le caractère entièrement positionnel de la numération à bâtons *suànchóu,* ainsi que sur l'existence d'une surface de calcul dotée de colonnes bien définies, indiquant la valeur positionnelle de chaque chiffre représenté par les *suànchóu*. Concernant les pratiques mathématiques antérieures au VIII^{e} siècle après J.-C., cette question demeure aussi difficile à prouver qu'à réfuter (Martzloff, 1997, p. 204). Cette incertitude soulève également la question de l'existence d'un zéro intermédiaire représenté sur la surface de calcul par un « vide » laissé pour indiquer l'absence d'une puissance de dix dans la représentation matérielle du nombre à l'aide des bâtonnets. Ainsi, dans des ouvrages du V^{e} siècle après J.-C., comme le *Licheng suanjing*, le nombre 405 est noté à l'aide de chiffres en bâtons sous la forme : IIII [espace] IIIII. Le contexte permet d'interpréter cette écriture comme 405, mais faut-il pour autant interpréter le « vide » entre les « 4 » et les « 5 » comme un zéro intermédiaire ou plutôt comme une simple séparation entre le « chiffre 5 » des centaines et le « chiffre 4 » des unités ? Selon Martzloff (1997, p. 205), cette numération serait avant tout « dispositionnelle » : c'est la disposition des traits — en fonction de leur alignement selon des puissances paires ou impaires de la base 10 — qui fournit aussi l'information sur la valeur de chaque chiffre. Il est néanmoins établi que certains textes de l'époque Song-Yuan (960–1368) font apparaître un signe distinctif — un petit cercle — utilisé pour marquer l'absence d'unités à un certain ordre. Ces textes reproduisent graphiquement la disposition matérielle des bâtonnets servant à représenter les nombres (Yabuuchi, 2000, p. 71). Les traités de cette époque contiennent aussi des illustrations de la surface à calculer et des représentations écrites des nombres à l'aide de la numération à bâtonnets comme par exemple le *Livre mathématique en neuf chapitres* (Shushu jiu zhang, 1247) de Qin Jiushao [3] (Figure 7).

À partir des dynasties Jin et Yuan, bien que le boulier se diffuse, les mathématiciens continuent à utiliser les notations issues du système des bâtonnets *suànchóu*, qui inspirent également certaines formes de numération vernaculaire, comme le *shuma*, utilisé couramment par le peuple (Yabuuchi, 2000, p. 24).

Afin de faciliter l'analyse des opportunités d'apprentissage offertes par ce système de numération, nous faisons le choix de laisser de côté les questions historiques encore débattues et posons l'hypothèse qu'un

3 André Bréard, Le calcul à baguettes en Chine ancienne [archive], université de Lille-1.

tableau de calcul a bien existé matériellement, et que cette numération est positionnelle — les Chinois y laissant, si nécessaire, un espace vide pour indiquer une valeur manquante et éviter toute ambiguïté.

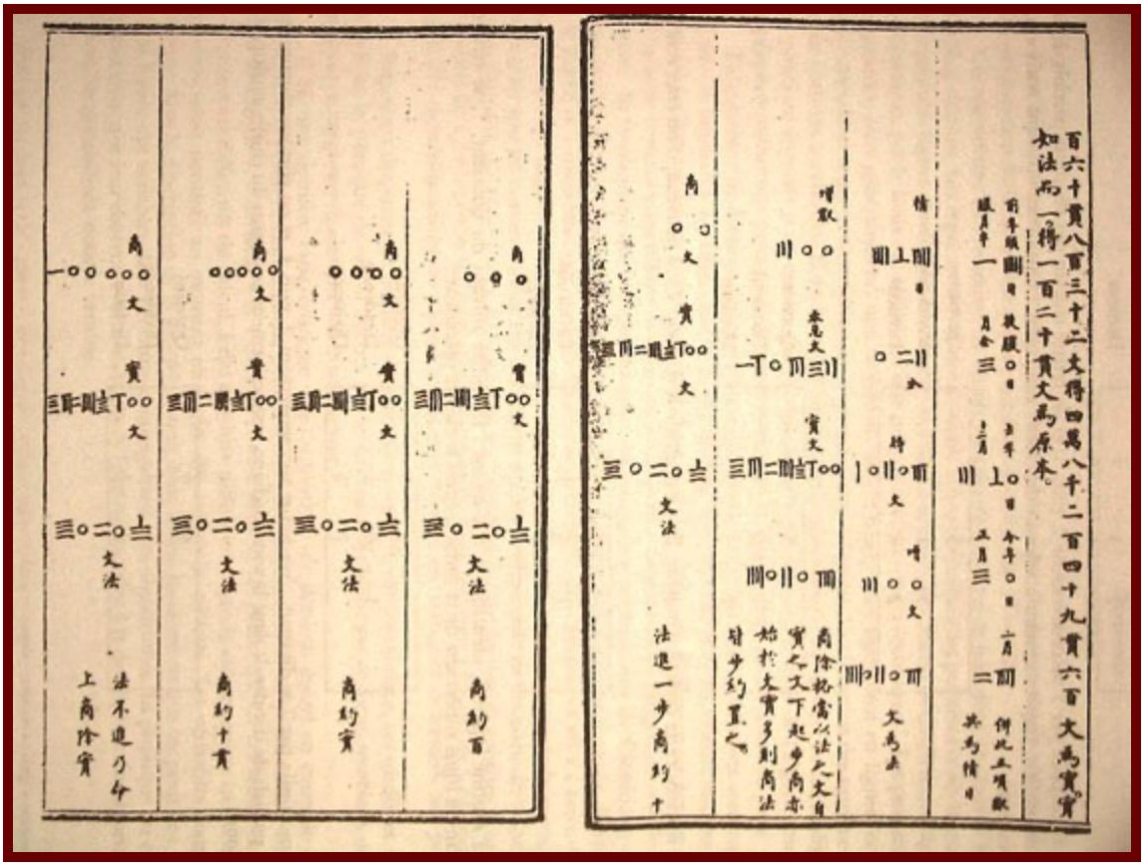
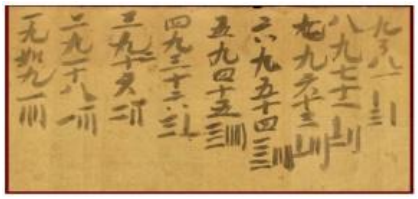


Figure 7. Qin Jiushao, Livre mathématique en neuf chapitres (Shushu jiu zhang, 1247) illustration d'une surface à calculer.

ANNEXE 3 : ANALYSE *a priori* DE LA TÂCHE 1 (DÉCOUVERTE D'UN DOCUMENT HISTORIQUE)

Débat	**Analyse de la tâche (procédure + connaissances en jeu)**	**Opportunités d'apprentissage**	
		OAM	**OAH**
Phase 1	Découvrir une source historique : lecture d'image  Argumenter autour d'une source historique : débat autour du document Qu'est-ce que vous voyez ? Qu'est-ce que vous en pensez ? Qu'est-ce que c'est ? Analyser une source primaire.		OAH1 *Numération ancienne. OAH2 *Numération lointaine.
Phase 2	Découvrir de nouveaux symboles et une autre façon d'écrire 9.	OAM1 *Comparer deux systèmes de numération.	OAH1 *Numération ancienne.

Débat	Analyse de la tâche (procédure + connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
	 Discuter autour de cette image : Qu'est-ce que vous reconnaissez ? Est ce qu'il y a des symboles que vous retrouvez dans la photo de la phase 1 ? Transformer les nombres chinois dans notre numération actuelle et découvrir 9. Discuter sur la première série de chiffres de la numération chinoise : Analyser une source secondaire.	OAM4 *Utiliser les groupements par 5 pour percevoir que 9 c'est $5+4$.	
Phase 3	Diaporama : frise chronologique, carte du monde, Chine. Explications collectives : « Comme vous l'avez dit, il s'agit d'une écriture chinoise ; on peut le reconnaître grâce aux symboles qui sont utilisés. Est-ce que vous savez où se trouve la Chine ? Montrer la carte du monde : La Chine se trouve à l'est de la France ; on voit que c'est un très grand pays comparé à la France. La Chine est en Asie de l'Est, près de l'océan pacifique. La capitale de la Chine est Pékin (cf. carte). Le document que vous avez vu provient d'un extrait de manuscrit qui représente la table de multiplication par 9. Tous ces symboles sont des chiffres. Il y a très longtemps en Chine, les gens utilisaient un système pour écrire des nombres, c'est la numération chinoise, qui est l'une des plus anciennes au monde (cf. frise chronologique). La numération chinoise a été utilisée il y a très longtemps, dès le II^{e} siècle avant J.-C., quand les Romains construisaient des routes en Europe. Elle a continué à être utilisée jusqu'au 13^{e} et 14^{e} siècle, pendant ce qu'on appelle l'époque médiévale en Europe. La numération chinoise a donc existé pendant une longue période et a aidé les Chinois à faire des progrès au niveau des mathématiques et des sciences.		OAH1 *Numération ancienne. OAH2 *Numération lointaine.

Débat	Analyse de la tâche (procédure + connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
Phase 4	Découvrir comment écrire 18 à partir du document : 	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. *Comparer deux systèmes de numération. *Écrire un nombre à 2 chiffres. OAM4 *Pour les unités, utiliser les groupements par 5 pour percevoir que 8 c'est $5+3$.	OAH1 *Numération ancienne. OAH3 *Envisager les mathématiques comme une construction humaine (alternance des séries de chiffres).

ANNEXE 4 : ANALYSE *a priori* DE LA TÂCHE 2 (ÉCRITURE DE NOMBRES EN NUMÉRATION CHINOISE)

Nombre à écrire	Analyse de la tâche (procédure et connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
3	Unités (traits verticaux. Savoir écrire 3 unités avec des bâtonnets.	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. *Généraliser à l'écriture des nombres à 2 chiffres. *Comparer deux systèmes de numération. OAM3 *Comprendre que le « zéro » permet de marquer l'absence de groupement d'un certain rang. *Généraliser à l'écriture de nombres à 2 chiffres comprenant un « zéro ». *Se rendre compte du nombre de signes nécessaires pour écrire 30, pour écrire 50. *Ne pas confondre 3 avec 30 et 300. *Ne pas confondre 5 avec 50 et 500.	OAH3 *Envisager les mathématiques comme une construction humaine (« zéro »). *Comprendre la spécificité des mathématiques de l'époque.
30	Dizaines (traits horizontaux). Savoir écrire 3 dizaines avec des bâtonnets. Ordre des rangs.		
5	Idem à l'écriture des nombres 3 et 30.		
50			
82	Unités et dizaines. Ordre des rangs et orientation différente des symboles. Nombre plus grand (difficulté à se représenter la quantité).	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel.	

Nombre à écrire	Analyse de la tâche (procédure et connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
749	Unités, dizaines et centaines. Nombre à 3 chiffres Ordre des rangs. Orientations différentes des symboles (idée de récurrence).	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel.	OAH3 *Envisager les mathématiques comme une construction humaine (alternance des séries de chiffres).
202	Unités, dizaines et centaines. Nombre à 3 chiffres. Ordre des rangs. Réutilisation du même symbole.	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. OAM3 *Comprendre que le « zéro » permet de marquer l'absence de groupement d'un certain rang. *Ne pas confondre 202 avec 4 (II II et IIII). *Ne pas confondre 202 avec 20002 ou 2000002.	OAH3 *Envisager les mathématiques comme une construction humaine (« zéro », alternance des séries de chiffres).
10 852	Unités, dizaines, centaines et dizaines de mille. Nombre à 5 chiffres. Ordre des rangs. Orientations différentes des symboles avec un principe de récurrence.	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. OAM3 *Comprendre que le « zéro » permet de marquer l'absence de groupement d'un certain rang. *Comprendre que si deux symboles chinois de la même série se suivent alors cela témoigne de l'absence d'un groupement.	OAH3 *Évolution des mathématiques.

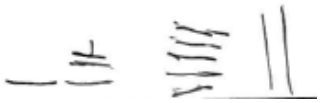
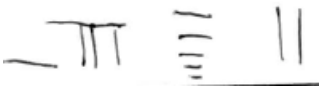
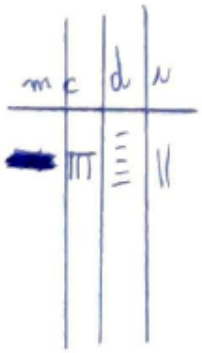
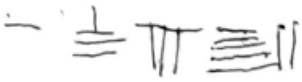
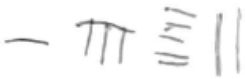
ANNEXE 5 : ANALYSE *a priori* DE LA TÂCHE 3 (CALCULS POSÉS)

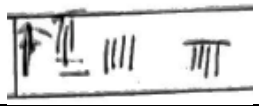
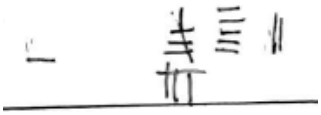
Calcul à effectuer	Analyse de la tâche (procédure + connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
$22 + 33$	Addition de 2 nombres à 2 chiffres. Nombres de même format. Pas de retenue.	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. *Traiter les unités rang par rang. OAM5 *Commencer par les unités de plus faible rang (à droite). *Se rendre compte de la nécessité de connaitre les tables d'addition. *Appréhender que notre système de numération est sans ambiguïté, mais	OAH1 *Percevoir le potentiel des bâtonnets pour effectuer du calcul. OAH3 *Recourir à un symbole pour caractériser
$61 + 15$	Idem		
$43 + 16$	Idem		

Calcul à effectuer	Analyse de la tâche (procédure + connaissances en jeu)	Opportunités d'apprentissage	
		OAM	OAH
		que la présence de chiffres n'est pas une aide au calcul.	l'addition (symbolisme). *Calculer avec des bâtonnets (évolution matérielle des outils : bâtonnets, bouliers, papier, calculatrice).
$58 + 6$	Addition de 2 nombres à 2 chiffres. Nombres de formats différents. Présence d'une retenue.	OAM1 *Appréhender l'aspect positionnel. *Traiter les unités rang par rang. OAM2 *Gérer la retenue. OAM4 *Pour les unités, envisager de décomposer 8 en $5 + 3$ et 6 en $5 + 1$ (regrouper 5 et 5 pour obtenir une dizaine et il resterait 4). *Percevoir que les bâtonnets et les regroupements par 5 constituent une aide au calcul. OAM5 *Commencer par les unités de plus faible rang (à droite). *Se rendre compte de la nécessité de connaitre les tables d'addition.	Idem
$27 + 15$	Addition de 2 nombres à 2 chiffres. Nombres de même format. Présence d'une retenue.	OAM1 * Appréhender l'aspect positionnel. *Traiter les unités rang par rang. OAM2 *Gérer la retenue. OAM4 *Pour les unités, envisager de décomposer 7 en $5 + 2$ (regrouper 5 et 5 pour obtenir une dizaine et il resterait 2). *Percevoir que les bâtonnets et les regroupements par 5 constituent une aide au calcul. OAM5 *Commencer par les unités de plus faible rang (à droite). *Se rendre compte de la nécessité de connaitre les tables d'addition.	Idem
$65 + 26$	Idem	Idem	Idem

ANNEXE 6 : ANALYSE *a posteriori* DE LA TÂCHE 2

Analyse de productions de sept élèves pour la première séance : repérage des erreurs

	749	202	10 852
Élève 1			Essai 1 : confusion avec 108 052  Essai 2 : confusion avec 1 852 
Élève 2		Essai 1 : confusion possible entre 202 et 4  Essai 2 : correct 	Correction après confusion avec 1852 
Élève 3 **Utilise un tableau de numération CDU**			Incomplet : traduction limitée à 852 
Élève 4			Essai 1 : confusion avec 108 852  Essai 2 : confusion avec 1 852 
Élève 5			Essai 1 : confusion avec 108 502 Essai 2 : confusion avec 1 852 
Élève 6			Confusion avec 180 902  La réponse a été validée par l'étudiant.e correcteur.rice !

	749	202	10 852
Élève 7	Confusion avec 70 409 même si cela demeure peu clair 		Confusion avec 1 852 

RAPPORT PERSONNEL AU SAVOIR MATHÉMATIQUE DES PROFESSEURS DES ÉCOLES : SOUVENIRS ET RÉCITS PROFESSIONNELS

Teresa ASSUDE
Professeure des universités, Aix-Marseille Université
ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Résumé
Dans le cadre de la formation professionnelle spécialisée des professeurs des écoles en vue de l'obtention du CAPPEI (Certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive), nous avons mis en place un dispositif de formation à la suite de deux constats : la difficulté de certains professeurs des écoles relativement aux mathématiques ; la difficulté d'enseignement de cette discipline auprès d'élèves en difficulté. Ce dispositif de formation vise à faire travailler les stagiaires sur leur rapport personnel au savoir mathématique et sur les situations d'enseignement-apprentissage. À partir de souvenirs mathématiques des enseignants, le premier volet de ce dispositif permet d'expliciter différentes dimensions constitutives du rapport personnel au savoir mathématique (Chevallard, 2003). Dans cette communication, nous présentons les différentes étapes et les fondements théoriques de ce dispositif (Assude et Paquelier, 2005 ; Ricoeur, 1983), puis nous montrons différentes dimensions du rapport personnel au savoir mathématique à partir d'exemples issus de formations mises en place depuis une quinzaine d'années.

I - INTRODUCTION

Deux mouvements de fond questionnent les fondements de la société, de la culture et de l'éducation depuis quelques années : la présence du numérique et l'aspiration à l'inclusivité (Assude, 2019). Nous allons nous intéresser aux effets de ce dernier mouvement dans la formation des professeurs des écoles. L'inclusivité ou dynamique inclusive est cette « dimension sociale et culturelle qui permet à chaque personne d'être membre de droits et de devoirs dans la société à laquelle elle appartient avec la possibilité de prendre en toute légitimité une place digne et citoyenne » (Assude, 2019, p. 12). Ce mouvement international a été initié par l'UNESCO avec la déclaration de Salamanque (1994, 2014) qui prônait l'éducation pour tous, et a été relayé par les politiques éducatives dans différents pays, tels que la France. L'horizon à atteindre et l'ambition inclusive de la société pour l'école (et pas seulement) sont bien présents dans les dernières lois relatives à l'école en France (Lois 2005, 2013, 2019) :

> *L'éducation inclusive ambitionne une société soucieuse du respect de ses membres et de la dignité humaine qui fait maîtriser par tous les élèves les compétences et la culture nécessaires pour être acteurs de leur devenir, transformer leurs relations avec autrui et participer activement à la constitution même de cette société.* (Ebersold, Plaisance et Zander, 2016, p. 13)

Or la mise en œuvre de l'école inclusive est complexe, des résistances ou des difficultés sont apparues, même si les acteurs sont en accord avec les principes de cette école. Des enseignants parlent de leurs difficultés à gérer des classes, parfois nombreuses, accueillant des élèves en situation de handicap, sans avoir les moyens et les aides humaines pour cela. Ils parlent aussi des insuffisances de la formation professionnelle. La formation professionnelle des enseignants est une question socialement vive, comme nous pouvons le remarquer par les différentes réformes qui se sont succédé les deux dernières décennies. Dans la formation des professeurs des écoles, et en particulier celle des professeurs des écoles préparant

le CAPPEI[1] (Certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques d'éducation inclusive) se pose régulièrement la question de la place et du rôle des savoirs. En tant que didacticienne des mathématiques, nous nous intéressons particulièrement à la question de la formation mathématique et didactique dans la préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles, tenant compte des cadrages nationaux de la formation des enseignants spécialisés. Un certain nombre de travaux se sont intéressés à la conception de dispositifs de formation destinés aux professeurs des écoles (Houdement, 2013 ; Guille-Biel Winder, 2025), ou aux étudiants de licence se destinant au professorat des écoles (Emprin, 2024). Nous allons nous intéresser à cette conception à partir d'un point particulier qui est celui du rapport personnel au savoir mathématique.

Dans cet article, nous présentons tout d'abord quelques principes génériques pour concevoir une formation en didactique des mathématiques destinée aux professeurs des écoles spécialisés. Puis nous décrivons la première phase du dispositif de formation relatif au rapport personnel au savoir mathématique en lien avec les souvenirs et les récits, et enfin nous explicitons les fondements théoriques associés à ce dispositif.

II - PRINCIPES GÉNÉRIQUES POUR LA CONCEPTION D'UN DISPOSITIF DE FORMATION

Notre positionnement pour aborder la question de l'éducation inclusive du point de vue de la didactique des mathématiques (Assude, 2023 ; Assude et al., 2014) n'est pas celui d'une approche déficitaire du handicap partant des troubles des élèves, mais celui d'une approche systémique (Giroux, 2014) où le système didactique est formé par trois instances (place de l'élève, place du savoir et place de l'aide à l'étude) en étroite connexion entre elles. Ce système didactique est aussi pris dans son écologie : environnement institutionnel, familial, éducationnel, social et culturel. Ainsi, les difficultés des élèves ne sont pas seulement celles de l'élève mais sont aussi celles de l'enseignant ou celles du système didactique dans son ensemble. Plutôt que de mettre la focale sur les troubles, nous préférons nous questionner sur les savoirs proposés à tous les élèves. Nous abordons la multiplicité et la complexité des facteurs intervenant dans les systèmes didactiques et leur écologie à partir des savoirs, des situations et des institutions, en prenant en compte les systèmes didactiques dits principaux (Chevallard, 2010) – par exemple la classe de référence – qui déterminent les enjeux de savoir, et les systèmes dits auxiliaires qui aident à l'étude, ceux-ci pouvant être institutionnels (tels que les ULIS-Unités localisées pour l'inclusion scolaire), ou informels (la famille qui peut aider l'élève dans les devoirs à la maison).

Le dispositif de formation en lien avec l'éducation inclusive (Assude, 2023) que nous avons conçu se fonde aussi sur d'autres principes : le principe d'enseignabilité qui postule que tous les élèves peuvent acquérir des savoirs, même si ce n'est pas forcément de la même manière et/ou au même rythme ; le principe de la différence qui indique que l'on doit raisonner en termes de différence et non en termes de déficience ou de manque et de s'appuyer sur le potentiel de chaque élève (en situation de handicap ou non) ; le principe situationnel qui postule que les élèves apprennent en situation et par les situations avec ou contre autrui ; le principe épistémique qui indique l'importance d'apprendre des savoirs pour développer sa puissance d'agir et sa compréhension du monde. Ces principes sont présentés en début de notre dispositif de formation.

En France, la formation des enseignants spécialisés qui interviennent auprès des élèves en situation de handicap ou en grande difficulté scolaire est menée auprès d'enseignants déjà en exercice depuis quelques années. Les professeurs des écoles qui y participent ont déjà eu, en principe, une formation mathématique et didactique pendant leur formation initiale au professorat. Malgré cette formation, un certain nombre

[1] Le CAPPEI a remplacé le CAPA-SH (Certificat d'Aptitude Professionnelle pour les Aides spécialisées, les enseignements adaptés et la Scolarisation des élèves en situation de Handicap).

de ces professeurs des écoles se sentent mal à l'aise avec les mathématiques et leur enseignement. C'est pour cela que nous avons décidé de commencer la formation en travaillant sur leur rapport personnel aux mathématiques et à leur enseignement. Nous prenons la notion de « rapport personnel à l'objet *mathématiques* » au sens de Chevallard (2003) : il s'agit de tout ce que la personne connaît ou fait à propos de cet objet. Selon ce chercheur, le rapport personnel dépend des rapports institutionnels à cet objet existant dans les institutions fréquentées par la personne. Dans notre cas, l'institution de formation professionnelle spécialisée est l'une de ces institutions qui exercent une influence sur le rapport personnel des enseignants, c'est pour cela que nous avons décidé de consacrer la première phase de notre dispositif de formation à cette question du rapport personnel.

Ce choix a été fait aussi par d'autres chercheurs et/ou formateurs dans d'autres contextes, par exemple celui d'une licence en sciences de l'éducation et de la formation avec des étudiants se destinant au professorat des écoles (Emprin, 2024). Ce chercheur indique trois hypothèses fondant ses choix de conception de la formation :

> *la nécessité de penser les contenus mathématiques en relation avec le métier que les étudiants visent, la volonté de travailler en même temps le rapport à la discipline et l'idée que les étudiants pourront plus facilement reproduire des pratiques qu'ils ont vécues.* (*op.cit*., p. 74-75)

Le rapport aux mathématiques est l'un des éléments reconnus comme étant essentiels à travailler ou retravailler en formation. Nous allons décrire cette première phase.

III - DESCRIPTION DE LA PREMIÈRE PHASE DU DISPOSITIF DE FORMATION

Pour aborder la question du rapport personnel aux mathématiques et à leur enseignement dans la première phase de notre dispositif, nous avons mis en place trois types de situations : les souvenirs mathématiques, les situations mathématiques et les récits professionnels. Cette première phase du dispositif de formation peut être schématisée par la figure 1.

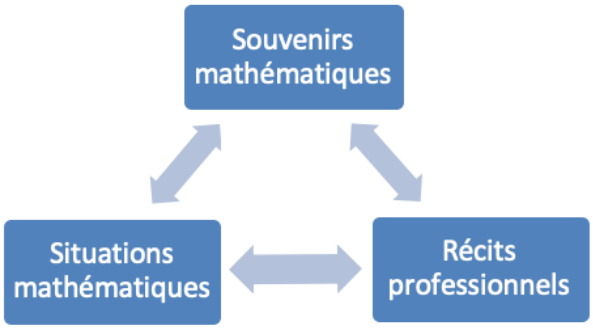


Figure 1. Première phase du dispositif de formation

Situation « souvenirs mathématiques »

La situation « souvenirs mathématiques » est constituée par quatre étapes :

- dans la première étape, individuelle, les professeurs des écoles en formation doivent répondre à la consigne suivante : « Racontez un souvenir mathématique dans votre vie d'élève ou d'étudiant (mais pas d'enseignant) » ;

- dans la deuxième, en groupe de trois, ils doivent lire et analyser leurs souvenirs en fonction de trois questions : sur quoi portent les souvenirs ? Qui est présent ? Le souvenir raconte-t-il un événement et lequel ?

- dans la troisième étape, collective, les différents groupes présentent les conclusions de leur travail, le but étant de dégager différentes dimensions d'un rapport personnel idoine aux mathématiques ;

- dans la quatrième étape, le collectif doit compléter le travail précédent en s'appuyant sur la lecture d'un témoignage de Laurent Schwartz (1994) paru dans la revue *Pour la Science*.

Situation « Situations mathématiques »

La situation « situations mathématiques » consiste à faire vivre aux professeurs des écoles des situations mathématiques qui permettent le débat et la discussion de la preuve. La stratégie de formation est celle de l'homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996). Nous avons utilisé des situations mathématiques publiées, en particulier dans les documents de la Copirelem. Par exemple, la situation du cheval et du paysan (Petitfour et al., 2022) :

> *« Un paysan se rend au marché. Il achète un cheval à 5000 euros. Puis il le revend 6000 euros. Se ravisant, il le rachète 7000 euros. Puis il le revend à nouveau 8000 euros. A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ? Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ? »*

D'autres exemples de situations mathématiques sont les vrais-faux, où il s'agit de dire si les énoncés sont vrais ou faux et de le justifier. Par exemple : « un nombre décimal est un nombre à virgule » ; « un nombre est toujours inférieur à son carré » ; « un carré n'est pas un rectangle » ; « 0,999999… est égal à 1 ». Dans ce texte, nous ne développons pas l'analyse de ce type de situations mais précisons qu'elles sont proches de celles mises en œuvre par Emprin (2024), ou figurant dans les documents de la COPIRELEM destinés à la formation des professeurs des écoles.

Situation « récits professionnels »

Le troisième type de situation est celui des « récits professionnels » relatifs à l'enseignement des mathématiques où le professeur des écoles en formation doit répondre à la consigne suivante : « racontez un événement que vous avez vécu en tant qu'enseignant dans votre classe ou groupe d'élèves à propos des mathématiques ». Puis, collectivement, on lit chacun de ces récits et on les commente. Voilà un exemple de ces récits professionnels écrit par une enseignante intervenant dans les réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (RASED) :

> *Cycle 3 : résolution de problèmes*
>
> *Groupe de 4 élèves de CM2 ayant un an de plus que les autres et étant « orientables » vers une classe « ordinaire ».*
>
> *Des problèmes de compréhension se posent pour deux d'entre eux et notamment une qui dit ne pas comprendre et hésite à donner une réponse. Souvent elle choisit une opération au hasard.*
>
> *J'essaye de travailler sur le sens de l'énoncé et de mettre en évidence la ou les questions posées.*
>
> *Comment permettre à cette enfant de ne pas rester bloquée devant un problème ? Très souvent elle ne se permet pas (ou ne peut pas) trouver la solution alors que les autres s'autorisent à se tromper. Pour des problèmes simples elle peut réussir mais dès qu'il y a un peu de complexité c'est l'échec.*

Dans ce texte, nous avons fait le choix d'analyser la situation « souvenirs mathématiques » pour identifier le type de souvenirs en lien avec les différentes dimensions constitutives du rapport personnel aux mathématiques. Puis nous explicitons les fondements théoriques de cette demande de souvenirs.

IV - SOUVENIRS ET RAPPORT PERSONNEL AUX MATHÉMATIQUES

Ce dispositif de formation, en particulier cette première phase, a été mis en œuvre auprès de professeurs des écoles qui ont suivi la formation professionnelle spécialisée pour préparer le CAPA-SH (devenu entretemps le CAPPEI). Il s'agissait de former essentiellement ce qu'on appelait les maîtres E et D qui intervenaient respectivement dans les RASED, et auprès des élèves ayant des troubles des fonctions cognitives. Cette demande de souvenirs s'est déroulée pendant une quinzaine d'années, avec une moyenne de 20 souvenirs par an, ce qui donne environ 400 souvenirs. De même, nous avons pu recueillir

environ 400 récits professionnels, mais nous n'allons pas les analyser ici. Nous commençons par présenter quelques exemples de souvenirs, avant de les analyser.

1 Exemples de souvenirs

Nous présentons ici l'exemple de huit souvenirs tels qu'ils ont été écrits par les professeurs des écoles qui nous paraissent significatifs pour des raisons que nous expliciterons ensuite.

Souvenir 1

L'impression d'avoir appris quelque chose de très important de l'ordre de la révélation après un cours en 4e sur les propriétés vérifiées lorsque trois points sont alignés ou pas (AB + BC=AC ⇔ A, B, C alignés). Et l'incompréhension de ma mère (qui n'aimait pas les maths) devant mon enthousiasme, elle m'a dit « oui et alors ? »

Souvenir 2

Mon père m'explique un exercice. Je ne comprends rien, je n'écoute pas, je vois juste qu'il s'énerve et devient tout rouge. Je dis que j'ai compris pour qu'il se calme. Je n'ai rien compris.

Souvenir 3

La sensation d'avoir toujours « vu » en géométrie. Lorsqu'une figure géométrique était proposée avec une démonstration à faire, la solution et le « dessin » me sautaient aux yeux. D'où un certain plaisir à travailler cette matière.

Souvenir 4

J'aimais bien tracer des graphiques. Je me sentais perdue en géométrie au collège. J'ai compris la plupart des notions mathématiques à l'âge adulte.

Souvenir 5

Au collège, en 4e probablement, mon professeur de mathématiques nous donnait des devoirs à la maison « de recherche », avec des problèmes pour se creuser la tête. Le plus mémorable parlait d'un bedeau, je ne me souviens plus du reste, un problème que l'on pouvait sans doute mettre en équation mais nous ne connaissions pas les équations. On cherchait, on tournait en rond, mes parents s'y sont mis, cherchaient, cherchaient, on se disait « c'est impossible ». Je ne crois pas qu'on ait trouvé mais la solution nous a beaucoup plu.

Souvenir 6

Ce qui m'a le plus marqué en mathématiques en tant qu'élève c'est la difficulté que j'ai eu à comprendre ce que « démontrer » voulait dire. Il était sûr pour moi qu'un contrôle basé sur la démonstration serait un contrôle raté même en connaissant très bien mes propriétés. Je ne comprenais pas pourquoi on me demandait de démontrer une propriété « qui se voyait sur le dessin ». Je ne voyais pas comment organiser ma rédaction. Ce n'est qu'en terminale que j'ai vraiment compris. J'ai eu le déclic. Je pense que le professeur y était pour quelque chose…

Souvenir 7

Premier devoir de mathématiques au collège. Ayant des difficultés en mathématiques, je suis stressé. Tellement stressé que je copie sur mon camarade. Problème : j'ai aussi copié son nom et prénom. J'ai eu beaucoup de problèmes en maths et c'est aujourd'hui la matière que je préfère enseigner.

Souvenir 8

J'ai une incapacité à mener à bien une démonstration en géométrie malgré une bonne connaissance des théorèmes par exemple. Je perds le fil du raisonnement qui enclenche une situation de stress qui entrave le raisonnement. Idem pour les problèmes de logique. Cette difficulté d'élève, je la retrouve en tant qu'enseignant dans ma pratique de classe. Elle se traduit par des évitements dans certains domaines que j'ai du mal à aborder en classe.

2 Analyse des souvenirs

2.1 Premier niveau d'analyse

Notre premier niveau d'analyse des 400 souvenirs est fondé sur les trois questions que les stagiaires devaient aborder en petit groupe pour ne pas rester sur la description du vécu : sur quoi portent les souvenirs ? Qui est présent ? En quoi le souvenir raconte-t-il un événement ?

Les souvenirs portent sur des contenus très divers qui vont de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire et universitaire, et aussi des contenus de la formation professionnelle des professeurs des écoles. Les notions indiquées sont des notions précises comme les fractions, la division, les fonctions, les nombres décimaux, les limites, ou des domaines mathématiques comme le calcul, l'algèbre ou la géométrie. La diversité des contenus fait toutefois apparaître une dimension institutionnelle très prégnante liée aux évaluations, contrôles ou examens, ou au passage à l'oral, et on relève essentiellement la difficulté pour certains d'aller au tableau résoudre un exercice.

La personne la plus présente dans les souvenirs est le professeur, dans des positions contradictoires : celles d'une personne exceptionnelle *versus* méprisante qui a fait aimer ou détester les mathématiques ; celles d'une personne rassurante *versus* humiliante qui a permis à l'élève de comprendre et de rentrer dans le monde mathématique ou l'en a empêché. Puis, dans une moindre mesure, d'autres personnes sont présentes dans les souvenirs : l'un des parents, l'un des frères ou sœurs, un copain ou une copine, ou alors la personne seule.

Plusieurs critères sont invoqués pour considérer que le souvenir raconté fait évènement. Indiquons-en quelques-uns. L'évènement peut être positif ou très positif lorsque le souvenir parle : de révélation de la nature des mathématiques ou de la solution d'un problème ; du plaisir à faire des mathématiques, comme un jeu ou un raisonnement logique ; du plaisir à réfléchir avant d'agir ; du goût pour la recherche et le sentiment de réussite. L'évènement peut être négatif ou très négatif lorsque le souvenir parle : de l'humiliation, du mépris, des violences et des injustices ; du sentiment d'échec et de la peur de se tromper ; des incompréhensions et difficultés, ainsi que des stratégies d'évitement pour contourner ces difficultés.

2.2 Deuxième niveau d'analyse

Le deuxième niveau d'analyse met en relation les souvenirs et les réponses aux trois questions lors de la deuxième étape avec les dimensions constitutives du rapport personnel au savoir mathématique. Nous avons dégagé cinq de ces dimensions. La dimension est *épistémologique* lorsque les souvenirs insistent sur la nature des mathématiques et des objets mathématiques (réel / abstrait) ou la nature des raisonnements mathématiques (raisonnement déductif, démonstration, symbolismes). Les mathématiques sont des modèles du monde par le biais de symboles, et la notion de problème apparaît comme étant le noyau de l'activité mathématique, rejoignant ainsi la dimension *institutionnelle* de l'institution scolaire où la résolution de problèmes et la modélisation sont des compétences déclarées comme étant à faire acquérir aux élèves. La dimension *sociale* apparaît aussi dans les souvenirs à travers la question de l'utilité des mathématiques et du travail individuel ou collectif avec le rôle d'autrui, que ce soit le professeur, des parents ou un(e) copain(copine). La dimension *cognitive* est présente à travers la question de la compréhension / incompréhension des mathématiques, du sens et des techniques, de la manipulation et de la modélisation ainsi que du rapport à la démonstration ou à la visualisation (dans ce cas, la plupart des exemples concernent les figures en géométrie). Cependant c'est la dimension *affective* du rapport personnel aux mathématiques qui prédomine dans les souvenirs, à travers des paroles telles que le plaisir, le goût, l'humiliation, le mépris, le sentiment d'échec ou de réussite, et la révélation ou l'inaccessibilité en termes de sens (incompréhension). L'affectivité est partout dans les souvenirs, et fait partie intrinsèque du rapport personnel aux mathématiques. Cette dimension « socio-affective » a été aussi travaillée dans le cas de la formation conçue et animée par Emprin (2024). En revanche, cet auteur n'aborde pas la question du rapport aux mathématiques à partir des souvenirs mais par le moyen d'un

test qu'il nomme « Maths et affects ». Ce test a été conçu en adaptant le test QASAM (Questionnaire des Attitudes Socio-Affectives en Maths) (Genoud et Guillod, 2014) en prenant en compte quatre registres (cognitif, affectif, comportemental et genré) et huit dimensions (perception de l'utilité ; sentiment de compétence, contrôlabilité ; affects positifs et négatifs et régulation affective ; estimation de l'investissement ; genre). Nous retrouvons certaines de nos dimensions dans celles prises en compte par Emprin (2024).

Dans la dernière étape de cette situation « souvenirs mathématiques », les stagiaires étaient confrontés à ce que disait Laurent Schwartz (1994), mathématicien ayant reçu la médaille Fields, à propos de son rapport personnel aux mathématiques. Dans cet entretien, on retrouve ces mêmes dimensions mais aussi d'autres éléments qui nous semblent importants à souligner. Il questionne certaines idées préconçues relatives aux mathématiques, comme le fait qu'un mathématicien est rapide. Il affirme : « j'ai l'esprit lent. Il n'y a pas de rapport direct entre la découverte en mathématiques et la rapidité » ; « un chercheur doit savoir sécher une heure, un jour ou toute la vie. Il sèche beaucoup plus qu'il ne trouve. Il se pose une série de questions, tâtonne, avance pas à pas ». La question de la temporalité, de l'effort et de la confiance en soi est aussi mise en évidence par Schwartz : « Nombre de mathématiciens ne réussissent pas parce qu'ils répugnent à cet effort prolongé, et apparemment vain, parce qu'ils n'ont pas foi en eux » ; « J'ai trouvé les distributions après une dizaine d'années d'interrogations multiples (…) Pour l'essentiel, j'ai trouvé en une nuit les théorèmes sur les distributions. Cette nuit a été un émerveillement, l'une des plus belles de ma vie. » La dimension cognitive et sociale est aussi présente lorsqu'il dit : « j'ai aimé comprendre et faire comprendre, et je crois que cela se sent » ; « pour bien enseigner, il faut voir les visages » ; « lorsque j'ai trouvé ce que je cherche, je me raconte la démarche ». Avec ce témoignage de mathématicien, nous pourrons ajouter une sixième dimension aux cinq dimensions énoncées ci-dessus : celle de la temporalité. D'une manière synthétique, nous avons le schéma suivant pour les six dimensions constitutives du rapport personnel aux mathématiques :

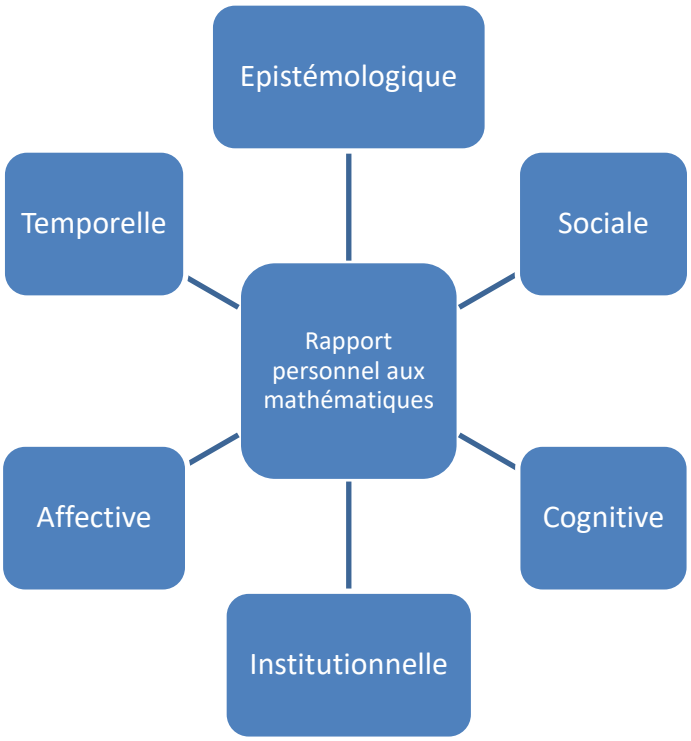


Figure 2. Six dimensions constitutives du rapport personnel aux mathématiques

Le texte de Schwartz conforte certaines des dimensions d'un rapport personnel idoine aux mathématiques mais questionne des idées préconçues et apporte des éléments qui peuvent aider à repenser non seulement le rapport personnel aux mathématiques mais aussi le rapport personnel à l'enseignement des

mathématiques. En particulier, nous pensons à l'importance du regard qu'on porte sur les élèves, sur leurs potentialités à faire des mathématiques (ce qui est essentiel pour tous les élèves, en particulier ceux qui sont vite jugés comme étant incapables ou en difficulté), et aussi à l'importance de la narration de la démarche de recherche. La cinquième partie aborde cette question du rôle des récits, de la narration et des souvenirs dans les apprentissages.

V - FONDEMENTS THÉORIQUES DE LA DEMANDE DES SOUVENIRS

La demande de souvenirs et de récits aux élèves est en relation avec le problème des différentes temporalités existant dans les systèmes didactiques. Le temps didactique (Chevallard et Mercier, 1989), le temps du découpage du savoir, est un temps linéaire qui conditionne fortement l'enseignement et l'avancement du savoir. Les temps personnels des élèves ne sont pas « isomorphes » à ces temps didactiques, et le rythme de l'avancement du savoir (Assude, 2005) ne tient pas forcément compte des différents rythmes des élèves. La demande de souvenirs est un moyen de s'intéresser à l'expression de l'expérience temporelle des élèves dans leur singularité, et pas seulement dans leur conformité au temps didactique. Ce qui nous intéresse n'est pas forcément le souvenir en lui-même mais l'acte de se souvenir. Notre postulat est que l'acte d'apprendre comprend des actes de « souvenance » qui restent dans la sphère privée, et ce qui nous intéresse est de rendre publics certains de ces actes, rendre légitime l'expression publique de ces actes.

En nous inspirant des travaux de Ricoeur (1983), nous avons dégagé trois fonctions didactiques de l'acte de souvenir (Assude et Paquelier, 2005) : l'expression d'un temps personnel, la reconfiguration de l'expérience vécue et le temps raconté comme temps partagé. L'expression d'un temps personnel, par la narration, tient compte du triple présent de saint Augustin, relu par Ricoeur (1983) : « le présent du passé, c'est la mémoire, le présent du présent, c'est l'intuition directe, le présent du futur, c'est l'attente »[2]. Ce triple présent (mémoire, attention, attente) est le fondement de la demande de souvenirs en lien avec les apprentissages : identifier ce qui fait événement dans un présent antérieur, y porter attention est à la fois mémoire (l'action a déjà eu lieu), actualisation (on y prête attention) et attente (l'apprentissage étant un devenir).

Ricoeur (2000) indique que « se souvenir, c'est avoir un souvenir ou se mettre en quête d'un souvenir » (p. 4). Or notre demande de souvenirs permet au sujet de se mettre en quête d'un souvenir, et de la raconter. Ce ne sont pas forcément les souvenirs « bruts » tels que les faits sont advenus. La reconfiguration de l'expérience vécue vient du fait que le temps du souvenir n'est pas le temps de l'action immédiate même si le sujet se souvenant est aussi un sujet agissant. En effet, il s'agit de permettre au sujet de revenir sur l'action, de se rappeler des événements, des faits, pour leur attribuer une signification qui n'est pas de l'ordre du factuel mais de l'ordre de la référence : l'objet d'apprentissage peut devenir ainsi un objet de référence sur lequel on pourrait agir dans le futur. Schwartz parle de « raconter la démarche » comme un acte essentiel pour lui mais aussi pour les autres. Le temps de la découverte ou des apprentissages est un temps partagé car l'histoire individuelle s'inscrit aussi dans une histoire collective (d'une classe ou d'une communauté de chercheurs). Raconter les événements mathématiques qu'on a vécus en première personne permet au sujet de créer une distance avec l'action passée tout en y portant attention pour ensuite pouvoir convoquer ces savoirs dans des actions futures, dans le cadre de groupes ou de communautés.

Ces éléments constituent les fondements de notre demande de souvenirs en lien avec le travail sur le rapport personnel aux mathématiques des professeurs des écoles en formation.

[2] St Augustin, *Les Confessions.* XI, XIV, p. 269.

VI - CONCLUSION

Le fait de demander des souvenirs aux élèves, aux enseignants en formation initiale/continue est fondé sur l'importance des récits dans les apprentissages. Selon Wikipédia, Michel Serres, inspiré par Aristote prend comme devise : « savoir c'est se souvenir. Et se souvenir c'est savoir raconter. Raconter c'est savoir ». Le lien entre souvenir, savoir et narration est un élément clé du dispositif de formation que nous avons mis en place depuis plus de vingt ans. Dans ce contexte de formation, le lien entre ces trois éléments est matérialisé dans le travail sur le rapport personnel aux mathématiques. La narration des souvenirs permet de porter une attention à ce que fut la relation aux mathématiques à travers des situations vécues mais aussi à ce qui est et sera, en particulier dans le transfert à l'activité d'enseignement auprès des publics qui sont en difficulté dans cette discipline. Les six dimensions dégagées à partir d'un travail d'analyse des souvenirs et de la lecture d'un texte d'un mathématicien auraient pu être données dès le départ par la formatrice. Or dégager ces dimensions à partir du travail sur les souvenirs est une manière pour les enseignants de prendre conscience, non seulement de ce qu'ils ont vécu, mais aussi de ce que d'autres ont vécu pour dégager des convergences ou des divergences. Par exemple, la dimension affective est l'une des dimensions qui restent implicites, et circonscrites au vécu personnel. Rendre les affects (négatifs ou positifs) publics est une manière de les dédramatiser surtout dans le cas où ils sont négatifs, et de pouvoir aborder cette discipline et son enseignement autrement. Comme il est dit dans le souvenir 8 : « Cette difficulté d'élève, je la retrouve en tant qu'enseignant dans ma pratique de classe. Elle se traduit par des évitements dans certains domaines que j'ai du mal à aborder en classe. » En effet, le travail proposé dans cette première phase en association avec les situations mathématiques et les récits professionnels peut être une manière de dépasser ce type de blocages qui ont des répercussions dans le choix des situations d'enseignement comme et permettre un changement de regard sur les élèves qui peuvent rencontrer des difficultés en mathématiques.

VII - RÉFÉRENCES

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: integration of CABRI in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 183-203.

Assude, T. (2019). Éducation inclusive et éducation numérique : quelles convergences ? Une étude de cas avec les tablettes numériques. *Nouvelle Revue Éducation et Société Inclusives*, *87*, 11-29.

Assude, T. (2023). *La question du handicap abordée du point de vue de la didactique des mathématiques.* Cours à l'école d'été de didactique des mathématiques, octobre 2023.

Assude, T. et Paquelier, Y. (2005). Souvenirs et approche temporelle des apprentissages mathématiques. *Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, *5*(2), 223-239.

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Verillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(1), 33-57.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury, M. Caillot (éds.). *Rapport au savoir et didactiques* (81 – 104). Paris : Fabert.

Chevallard Y. (2010). *Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique.* Communication présentée aux journées du Lisec Gérardmer. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Commentaires_depuis_la_TAD_YC_.pdf

Ebersold, S., Plaisance, É. et Zander, C. (2016). *École inclusive pour les élèves en situation de handicap : accessibilité, réussite scolaire et parcours individuels*. Rapport scientifique. Conférence de comparaisons internationales. Paris : Cnesco.

Emprin, F. (2024). Connaissances mathématiques pour enseigner au premier degré - analyse d'une proposition en première année de licence pluridisciplinaire. *Grand N*, 114, 73-114

Genoud, P. A. et Guillod, M. (2014). Développement et validation d'un questionnaire évaluant les attitudes socio-affectives en maths. *Recherches en éducation, 20*, 140-156.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, L. DeBlois, H. Squalli et L. Theis (éds.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (11 – 44). Québec : Presses Universitaires du Québec.

Guille-Biel Winder, C. (2025). *Point de vue systémique sur l'enseignement et la formation des professeurs des écoles en mathématiques : modélisations, analyses, développement de ressources.* *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches*. Marseille : Aix-Marseille Université.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Paris : Université Paris 7.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289-322.

LOI n°2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées. https://www.legifrance.gouv.fr/eli/loi/2005/2/11/SANX0300217L/jo/texte

LOI n° 2013-595 du 8 juillet 2013 d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République. https://www.legifrance.gouv.fr/eli/loi/2013/7/8/MENX1241105L/jo/texte

LOI n° 2019-791 du 26 juillet 2019 pour une école de la confiance. https://www.legifrance.gouv.fr/eli/loi/2019/7/26/MENX1828765L/jo/texte

Petitfour, É., Tempier, F., Thomas, C., Guille-Biel Winder, C. et Metin, F. (2022). « La vache et le paysan » : une situation de formation sur la résolution de problème. *Actes du 48e colloque COPIRELEM, INSPE Toulouse* (217 – 233).

Ricoeur, P. (1983). *Temps et récit*, trois tomes. Paris : Seuil points.

Ricoeur, P. (2000). La mémoire, l'histoire, l'oubli. Paris : Éditions du Seuil

Schwartz, L. (1994). Le point de vue de Laurent Schwartz. *Pour la Science*, dossier °2 « Les mathématiciens », 15-18.

Unesco (1994). *Déclaration de Salamanque*. Paris : Unesco.

Unesco (2014). *L'éducation inclusive: une formation à inventer*. Paris: Unesco.

LES JEUX EN MATHÉMATIQUES : ENTRE PLAUSIBILITÉ ET NÉCESSITÉ

Richard CABASSUT
Maître de Conférences retraité, Université de Strasbourg
IREM de Strasbourg
richard.cabassut@gmail.com

Résumé
La référence importante aux jeux de hasard dans les projets de programmes du cycle 3 (CSP 2024) nous amène à étudier l'articulation entre raisonnement de nécessité utilisé dans les jeux de stratégies et raisonnement de plausibilité utilisé dans les jeux de hasard. Différents types de jeux, de pratiques de classe ou de formation les impliquant seront illustrés comme ressources potentielles pour l'enseignement et la formation.

On convient de rappeler pour chaque jeu la règle adoptée en annexe, notamment pour les jeux connaissant de nombreuses variantes de règle. Il faut distinguer l'action de jouer, le processus (play) et le produit constitué par le matériel utilisé et les règles à appliquer (game) (Haye, 2019, p. 40-41). Retenons la définition de Huizinga (1977, p. 57) : « *une action ou une activité volontaire, accomplie dans certaines limites fixées de temps et de lieu, suivant une règle librement consentie mais complètement impérieuse, pourvue d'une fin en soi, accompagnée d'un sentiment de tension et de joie, et d'une conscience d'"être autrement" que "la vie courante"* ». Résoudre un exercice de mathématique, par exemple *effectuer une opération posée en colonnes*, n'est pas un jeu. Mais on peut jouer avec des opérations posées en colonnes comme *Qui peut le plus ?* (IREM de Besançon, 2007, annexe 1).

I - LES JEUX : ENTRE HASARD ET STRATÉGIE

Un événement (par exemple gagner au jeu) est lié au hasard si on ne peut le prévoir de manière certaine avant sa réalisation. Un jeu est vivant si on ne sait pas à l'avance qui va gagner. Par exemple *le jeu des petits chevaux* (annexe 2) avec un seul cheval par joueur est entièrement lié au hasard du résultat du jet de dé. De même *le jeu de la bataille* (annexe 3) est le fruit du hasard de la distribution des cartes à chaque joueur. On observera que la partie peut s'arrêter sans gagnant (partie nulle) ou ne jamais s'arrêter (annexe 4, Delahaye et al., 1995).

Un jeu est mort s'il existe une stratégie gagnante à coup sûr connue des joueurs : le jeu est déterminé, sans hasard, et l'un des joueurs gagne à coup sûr. Haye rappelle l'importance de « la recherche de la stratégie optimale, qui permet de gagner dans toutes les situations » (Haye, 2019, p. 33) et qu'ainsi « des jeux, qui sont vivants grâce à la difficulté de maitrise des stratégies, peuvent devenir des jeux morts » (Ibidem, p. 73) lorsqu'il existe une stratégie optimale et qu'elle a été découverte par les joueurs.

Dans la course à 4 (figure 1), inspirée de la course à 20 de (Brousseau, 1998) il y a 2 joueurs J1 et J2. J1 ajoute 1 ou 2 à 0. J2 ajoute 1 ou 2 à la somme précédente. Ainsi de suite, et gagne le premier qui obtient la somme 4. Dans l'arbre ci-dessous, sur la flèche on indique le nombre choisi par le joueur et en bout de flèche la somme qu'il obtient. En suivant les flèches vertes, on observe que J1 a une stratégie gagnante à coup sûr quel que soit le jeu de J2.

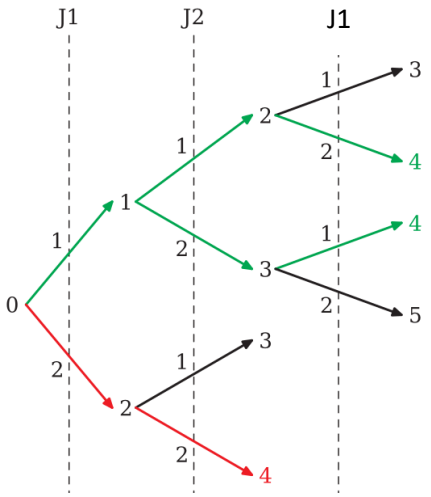


Figure 1



Figure 2

De manière plus générale, une stratégie est une manière de jouer qui augmente les chances de gagner, comme par exemple dans *Mon premier verger* (figure 2). On lance un dé de 4 faces de couleurs V, B, R, J, une face avec un corbeau et une avec un panier : avec une couleur on cueille un fruit de la couleur à déposer dans le panier ; avec le panier on choisit chacun son tour le fruit à cueillir ; avec le corbeau celui-ci avance d'une case sur le chemin vers le verger. On gagne la partie si on cueille tous les fruits avant que le corbeau rentre dans le verger. Ce jeu se joue dès la maternelle un groupe contre le corbeau : c'est tout le groupe qui gagne ou perd.

Lorsque le dé affiche panier on a intérêt à choisir un fruit dans un arbre le plus garni en fruits. En effet si on prend un fruit dans un arbre le moins garni on prend le risque de dégarnir plus rapidement cet arbre et de perdre une possibilité de cueillir un fruit lorsque le dé affiche une couleur d'arbre qui n'a plus de fruit. Comme le corbeau a 1/6 de chance d'avancer à chaque jet de dé, on augmente ses chances de gagner si on a des coups où on ne cueille aucun fruit. Bien entendu cette stratégie est difficile à comprendre en maternelle. Ce jeu illustre un jeu combinant le hasard (le résultat affiché par le dé), une stratégie (choisir un arbre le plus garni lorsque le panier est affiché par dé) et un exemple de jeu accessible dès la maternelle.

Pour Brousseau (2002, p. 24) « Une tactique se manifeste par une certaine distribution de probabilité sur les choix ouverts dans certaines conditions. Une stratégie détermine tous les choix dans toutes les conditions ». Pour certains jeux on pourra donc distinguer la tactique qui a une portée locale[1] sur le court terme[2] (par exemple au jeu de Go (Fenech et al., 2024), capturer une pierre dans les trois prochains coups) d'une stratégie sur le long terme qui vise à gagner la partie (par exemple au jeu de Go occuper des territoires en coins qui sont plus faciles à défendre) pouvant conduire à des comportements paradoxaux (au jeu de Go savoir perdre des pierres sur le court terme pour en gagner sur le long terme). Dans la suite de l'article nous ne ferons pas la distinction entre stratégie et tactique qui ne nous semble pas nécessaire au niveau de l'école primaire.

1 Dans l'espace du jeu, par exemple sur une zone déterminée du Goban pour le jeu de Go.

2 Par exemple sur quelques prochains tours de jeu de Go.

Pour les jeux qui sont un mélange de hasard et de stratégie (par exemple *Mon premier verger*) on utilise les probabilités à deux niveaux : pour la partie hasard en invoquant un modèle du hasard (jet de dé, distribution ou tirage au hasard d'une carte), et pour la partie stratégie en jouant un coup qui augmente la probabilité de gagner (par exemple, choisir un fruit dans un arbre ayant le plus de fruits dans *Mon premier verger*).

La règle adoptée peut influencer la part du hasard dans le jeu : *Les petits chevaux* avec un cheval par joueur est un jeu purement de hasard, alors qu'avec deux chevaux se pose le problème stratégique de quel cheval jouer en fonction des dispositions des autres chevaux sur le plateau.

II - RAISONNER : ENTRE NÉCESSITÉ ET PLAUSIBILITÉ

L'introduction des probabilités dans les programmes de 2025 permet de justifier mathématiquement la distinction entre argument de plausibilité (ou de probabilité) et argument de nécessité (Toulmin, 1958, Cabassut, 2005). De données (D) considérées comme vraies, d'après une règle d'inférence (I) supposée vraie, on déduit une conclusion (C), soit nécessairement vraie (argument de nécessité), soit plausiblement (ou probablement) vraie (argument de plausibilité). Nous suggérons d'utiliser le terme « probabilité » lorsque ces raisonnements s'effectuent dans le monde mathématique et le terme « plausibilité » dans le monde extra-mathématique.

En mathématiques, le raisonnement déductif est un exemple d'argument de nécessité. D est appelé hypothèse, I est souvent constitué de règles de logique ou de théorèmes et on obtient le raisonnement déductif : A est vrai (D), (si A alors B) est vrai (I), donc B est nécessairement vrai (C).

Supposons qu'en probabilité, sous la condition A, la probabilité de l'événement B soit p.

Alors on pourra produire le raisonnement de probabilité suivant : A est vrai (D), (si A alors « B a la probabilité p ») est vrai (I), donc B est probablement vrai avec la probabilité p.

Dans une formulation approchée les programmes de 2025 suggèrent de remplacer dans la formulation précédente « de probabilité p » par « peu probable » si $p < 0{,}5$ et par « probable » si $p > 0{,}5$. On observera que si $p = 1$, le raisonnement de probabilité devient un raisonnement de nécessité dans le cas d'univers fini. Par contre dans un univers infini un événement de probabilité 1 peut ne pas se produire. Par exemple si je tire au hasard un nombre entre 0 et 1, la probabilité de tirer un nombre entre 0 et 1 sauf 0,5 est 1 mais cet événement peut ne pas se produire si je tire « 0,5 ». Au passage « 0,5 » peut être tiré même si sa probabilité d'être tiré est 0.

Le domaine des probabilités permet donc de fonder les raisonnements de plausibilité avec des inférences mathématiques. Ce raisonnement de plausibilité est très utilisé en dehors des mathématiques, notamment dans la vie quotidienne, par exemple dans le raisonnement abductif, qui est le pendant du raisonnement déductif pour le raisonnement de nécessité.

Raisonnement abductif : B est vrai (D) ; (si A alors B) est vrai (I) ; donc A est plausiblement vrai (C). Ce raisonnement est souvent utilisé dans les sciences expérimentales où on justifie la cause par l'observation de ses effets. En mathématiques, le raisonnement heuristique (Polya, 2014), que la compétence « chercher » a remis en valeur, est un raisonnement de plausibilité. On peut considérer le raisonnement inductif qui, à partir d'un certain nombre de cas particuliers vérifiés, induit une règle générale, comme un cas de raisonnement abductif : des cas particuliers sont vérifiés (D), la règle d'inférence (I) « si la règle

générale est vraie alors des cas particuliers de la règle générale sont vrais » est vraie, donc la règle générale est plausiblement vraie (C).

Il est à noter que les probabilités sont obtenues par un raisonnement de nécessité mais qu'elles vont justifier des raisonnements de plausibilité. Il sera donc essentiel de bien distinguer ces deux types de raisonnements pour éviter aux élèves (et parfois aux formés) une confusion problématique.

Plus le jeu est complexe, plus la justification de la plausibilité est mathématiquement complexe : on l'a vu précédemment avec *Mon premier verger* et encore plus avec le *jeu de Go.*

III - LES JEUX EN CLASSE

1 Types d'activités utilisant le jeu

Il y a plusieurs manières d'utiliser un jeu en classe. Eysseric et al (2012, p. 332) précisent :

« Dans tous les cas, l'efficacité du jeu pour les apprentissages va résider dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu ``pur'' qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les ``exercices de jeu'' qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés. Ces exercices de jeu vont se matérialiser dans la classe par des écrits collectifs et/ou individuels que nous qualifierons de ``mémoire de jeu''».

On peut donc jouer une partie complète, éventuellement répartie sur plusieurs séances suivant les contraintes de temps. À cette occasion on pourra développer des stratégies plus globales pour gagner la partie, comme au *jeu de Go* pour développer des territoires dans les coins du plateau.

On peut jouer lors d'exercices de jeu : on suppose le jeu interrompu dans un état donné et étudier comment jouer le ou les coups suivants, par exemple au *jeu de Go* pour travailler le raisonnement déductif pour déterminer comment capturer une pierre en deux coups maximum (Fenech et al., 2024). Dans cette situation la capacité à utiliser des représentations (annexe 5) des états du jeu est importante pour étudier et discuter de stratégies possibles, et pour assurer la mémoire de jeu qu'Eysseric et al. (2012, p. 332) définissent ainsi :

« Une mémoire de jeu sera une trace écrite qui rendra compte :

- soit de tous les instants du jeu ;

- soit de certains moments décisifs : lorsqu'un choix doit être fait par le joueur, pour décider du gagnant en fin de partie ».

On peut également utiliser des *exercices hors jeu* (annexe 6), en utilisant uniquement la familiarité avec le matériel du jeu ou l'analogie avec ses règles. Par exemple au *jeu de Go* l'utilisation du matériel pour travailler les tables de multiplication et les nombres rectangles (Ibidem).

Dans les règles ou le matériel du jeu on peut avoir plusieurs niveaux progressifs de complexité. Par exemple, avec l*a règle des petits* avec un petit plateau Goban pour le *jeu de Go* en maternelle (Ibidem) et *la règle des grands* avec un Goban agrandi pour le *jeu de Go* en cycle 3 (Fenech et al., 2020a, 2020b). On retrouve cette progressivité pour *le Bridge* avec le *petit Bridge* (Gouy, 2020).

2 Le savoir ludique et le savoir mathématique

L'utilisation des jeux dans l'enseignement des mathématiques est un exemple de double transposition du savoir ludique et du savoir mathématique (Fenech et al., 2020a, 2020b).

Le savoir ludique correspondant à la connaissance des règles du jeu, du matériel utilisé, des compétences de jeu (respecter les règles, contrôler l'application des règles, collaborer, …) et de différentes stratégies. Le savoir mathématique peut être visé par l'enseignant qui utilise le jeu en classe ou mis en œuvre par l'élève (qui compare la probabilité d'atteindre un état du jeu suivant le coup joué). Pour décrire cette combinaison de deux savoirs (ici ludique et mathématique) visés par un enseignement, un des intervenants de cette communication a développé le cadre théorique de la double transposition (Cabassut, 2009a et 2009b).

De ses propres observations, il repère en général quelques étapes dans la progression des activités : des activités visant un savoir ludique minimum qui permettra de jouer (découverte et appropriation du matériel et des premières règles), des activités visant des savoirs mathématiques précis (comparer des nombres de pierres en fin de partie au *jeu de Go*, distinguer impossible, possible, certain, probable à la bataille), notamment à partir de jeux arrêtés, puis des activités intégrant la visée des deux savoirs (développer des stratégies basées sur une estimation des probabilités pour *Mon premier verger*), notamment lors de la pratique de parties complètes.

Pour l'auteur, les jeux permettent de travailler différentes compétences :

- mathématiques : en probabilité (*Mon premier verger*), sur les nombres (*la bataille* : comparaison des nombres), en raisonnement (argumentation sur la stratégie ou sur le hasard),

- ludiques (connaître et appliquer des règles, contrôler l'application des règles, collaborer …).

3 Les compétitions mathématiques

Les compétitions mathématiques sont un type de jeu pour lequel il s'agit de résoudre (individuellement, en groupe ou en classe entière suivant les compétitions) un ou plusieurs problèmes de mathématiques dans des conditions données, et les gagnants sont désignés à partir des solutions proposées, évaluées par un jury. Plusieurs exemples de compétitions pour l'école primaire existent – Kangourou sans frontières version Benjamin ou Cadet, Mathématiques sans frontières junior, le rallye transalpin, etc. La recherche suivante basée sur les données du Rallye transalpin permet de relier apprentissage de la proportionnalité et des probabilités.

4 Exemple de savoirs mathématiques sur les probabilités et la proportionnalité

À propos du *problème des bonbons* (annexe 7), Jacquet et Henry (2014, p. 9) interrogent l'estimation et la comparaison de probabilités : « Pourquoi la comparaison de rapports plutôt que de différences serait-elle un meilleur modèle pour estimer « les chances » de réussite ? En quoi l'apprentissage de la proportionnalité conditionne-t-il ce choix de modèle ? » et répondent :

« Nous avons pu constater que ce passage des procédures additives aux procédures multiplicatives se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité (Les confitures) sur des nombres entiers du même ordre de grandeur, cela dans tous les pays participant au rallye[3]. »

[3]Les productions d'élèves sont issues des données du rallye transalpin auquel participent plusieurs pays.

Ce problème permet donc de viser des connaissances sur le hasard et sur la proportionnalité.

5 Le rôle du jeu pour enseigner les savoirs des probabilités

Pour enseigner les probabilités on peut distinguer trois approches (Cabassut, 2025) que l'on pourra décliner dans l'utilisation des jeux. Dans l'approche subjective le jeu sert à révéler les représentations subjectives du hasard chez l'élève. Il s'agit essentiellement, à l'occasion des moments de jeu, d'interroger l'élève sur ses analyses du jeu et les justifications de ses analyses qui peuvent être mises en débat.

Dans l'approche par les modèles le jeu va permettre d'expliciter les modèles qui justifient les stratégies du joueur.

Dans l'approche par les fréquences, les stratégies de jeux seront justifiées par la pratique répétée de moments de jeu, sous certaines conditions.

IV - FORMATION SUR LES JEUX

Nous allons indiquer quelques activités de formation sur les jeux issues de dispositifs variés.

1 Exemples d'activités de formation

L'analyse des jeux peut constituer une activité de formation. Eysseric et al. (2012, pp. 324-331) proposent une grille d'analyse : règle et déroulement usuels, architecture (mise en relation, comparaison, parcours, alignement, etc.), variables, organisation (collectif, petit groupe, à deux, individuel, etc.), statut du meneur de jeu (maître, élève, pas de meneur), aléatoire ou non, validation (maître, joueurs, autre élève), domaines mathématiques impliqués.

La conception de fiche de mise en œuvre en classe (Ibidem, pp. 331-334) est une autre activité. Fenech et al. (2024) proposent pour le jeu de Go des formations sur différents types de situations (partie complète, exercices de jeu, exercices hors-jeu, etc.).

L'étude de mises en œuvre peut présenter différentes modalités : observation en classe (en présentiel ou en enregistrement vidéo) et discussion du compte rendu, jeux de rôles, suivis d'une analyse didactique, où des formés jouent le rôle d'élèves et d'autres celui de l'enseignant. Pour une analyse didactique détaillée nous renvoyons à (Fenech et al., 2024) qui décrit la modalité « jeux de rôle » au sein d'un groupe de l'IREM de Strasbourg. Une autre analyse didactique de situations d'homologie-transposition est décrite dans (Eysseric et al., 2012, p. 334-335). Fenech et al. (2024) décrivent une modalité où les formés pratiquent les différentes activités (partie complète ou exercices de jeux) puis les analysent d'un point de vue didactique en dégageant les savoirs didactiques mis en évidence, avec une monstration dans l'intervention d'un formateur en classe.

Martin et al. (2019) propose de nombreuses ressources qui peuvent être analysées en formation sur l'enseignement des probabilités à l'école primaire : l'analyse des tâches dans les ressources disponibles (Ibidem, p. 71), l'utilisation des jeux à règles (Ibidem, p. 101), l'étude de l'influence d'un porte-bonheur au cours du jeu (Ibidem, p. 127), l'étude des jeux équitables (Ibidem, p. 219) qui sera détaillée plus loin.

2 Exemples de dispositifs de formation au jeu

Illustrons différentes stratégies de formation, culturelles, de monstration, homologiques ou de transposition, inspirées de (Guille-Biel Winder et al., 2019) avec le *jeu de Go* :

- les stratégies culturelles : les spécialistes du savoir du *jeu de Go*, du savoir mathématique ou du savoir de didactique des mathématiques, interviennent à l'occasion lors des réunions du groupe IREM *jeu de Go* pour exposer de manière dialoguée des connaissances sur les différents savoirs en jeu ;

- les stratégies basées sur la monstration : des extraits de parties sont montrées, des formés rapportent les mises en œuvre effectuées dans leurs classes, des formés jouent en direct observés par d'autres formés (modalité du jeu de rôles) ;

- les stratégies basées sur l'homologie : les participants jouent entre eux au *jeu de Go*, notamment pour apprendre les règles du *jeu de Go*, soit une partie complète, soit la poursuite d'une partie à partir d'un état donné ;

- les stratégies basées sur la transposition : les formés se regroupent par niveau de classe et préparent ensemble une activité ou une séance d'enseignement utilisant le *jeu de Go*, en précisant les hypothèses et les objectifs d'enseignement. Ils essaient d'adopter la démarche d'ingénierie didactique : « une phase d'analyse et de conception préliminaires, une phase d'expérimentations pédagogiques et une phase d'analyse rétrospective » (Margolinas et al. 2015, traduction).

Les formations culturelles visent à délivrer des connaissances pour l'enseignement dans un cadre assez directif très contraint en durée (souvent limitée à la durée d'une conférence ou à une intervention de monstration en classe) et dans lequel le formé est simple auditeur du conférencier ou assistant de l'intervenant en classe (à distinguer d'un formé qui co-construit sa séance avec l'intervenant). Par exemple, une formation académique en 2025 a duré une journée, structurée en une matinée de formation culturelle avec une conférence de trois heures sur le jeu dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. L'après-midi semblait suivre un dispositif d'homologie, suivi d'un début de transposition avec différents ateliers, chacun présentant un jeu parmi le *Petit Bridge*, le *jeu de Go*, le *jeu Neutron* et le *jeu Awalé* suivi d'une initiation à ce jeu et d'une première discussion sur son exploitation dans l'enseignement des mathématiques (certaines pistes ayant été évoquées dans la conférence). Chaque formé pouvait participer à deux ateliers dans la demi-journée. Un autre exemple de formation avec monstration d'un intervenant, est décrit dans (Fenech et al., 2025) : le formateur intervient avec le maître en classe pour montrer comment les savoirs ludiques et mathématiques sont enseignés. Eysseric et al. (2012, pp. 334 à 335) présentent des dispositifs d'homologie-transposition utilisés en formation initiale ou continue. Fenech et al. (2020a, 2020b) présentent une formation sur plusieurs années dans le cadre d'un groupe IREM sur le *jeu de Go*. On voit donc que les dispositifs de formation sont très dépendants des variables durée, disponibilité des formés et des formateurs, moyens alloués.

3 Exemples de formation utilisant les jeux équitables

Dans une première approche, un jeu est équitable si aucun joueur n'est avantagé. En 2025, dans une formation académique en Corse de deux jours, il a été proposé aux enseignants en formation, le problème suivant, facile à résoudre pour l'enseignant, dont l'énoncé est extrait de (Batanero et al, 2019, p. 224). « Dans sa boîte, Eduardo a 10 boules blanches et 20 boules noires. Pour sa part, Luis en a 30 blanches et 60 noires. L'enfant qui sort le premier une boule blanche gagne 1 euro. Si les deux enfants sortent en même temps une boule blanche ou une boule noire, aucun des deux ne gagne. Ils remettent les boules dans les boîtes et le jeu continue. Eduardo affirme que le jeu n'est pas équitable parce que, dans la boîte de Luis, il y a plus de boules blanches. Qu'en penses-tu ? »

Plusieurs réponses d'élèves sont proposées aux formés qui doivent distinguer les réponses correctes et incorrectes et essayer de trouver les biais et raisonnements erronés qui ont conduit aux réponses incorrectes.

Batanero et al. (2019) proposent également d'autres problèmes où la notion de « jeu équitable[4] » nécessite le concept probabiliste d'espérance qui n'est pas, pour le moment, au programme de l'école primaire française. C'est pourquoi, pour des formations d'enseignants français de l'école primaire, nous jugeons plus difficiles ces problèmes par rapport au problème précédent de la boîte d'Eduardo. Voici un exemple de problème (Ibidem, p. 231) : « Miguel et Luis jouent avec deux dés ordinaires (comme tu le sais, chaque dé est numéroté de 1 à 6). Ils lancent les deux dés et multiplient les nombres obtenus. Miguel gagne 1 euro si le produit est pair et c'est Luis qui gagne 1 euro si ce produit est impair. Le jeu te semble-t-il équitable ? Pourquoi ? Combien Luis devrait-il gagner, si Miguel gagne 1 euro, pour que le jeu soit équitable ?

Les réponses d'élèves suivantes sont proposées.

- *B1 : « Miguel a 2 possibilités de plus que Luis de gagner, donc je crois qu'il serait juste que Luis gagne 2 euros. »*
- *B2 : « Luis doit gagner 6 euros pour que ce soit juste parce qu'il a moins de possibilités de gagner. »*
- *B3 : « Si on donnait 3 euros à Luis, le jeu serait équitable parce que, chaque fois que c'est à Miguel de jouer, on lui donne 1 euro. Mais ce serait équitable seulement si Luis pouvait jouer 3 fois puisque Miguel a 3 fois plus d'occasions de gagner. »*
- *B4 : « Le jeu n'est pas juste parce que Miguel a beaucoup plus de possibilités de gagner. Même si tu donnes plus d'argent à Luis quand il gagne, le jeu demeure injuste parce qu'il a moins de possibilités de gagner. »*
- *B5 : « Pour que le jeu soit juste, Luis doit gagner 3 euros. »*

La consigne donnée aux formés est la suivante :

1. Résoudre le problème.

2. Décrire les connaissances mathématiques nécessaires pour pouvoir donner la bonne réponse.

3. Indiquer, parmi les réponses des élèves, celles qui sont correctes et celles qui sont erronées.

4. Pour chaque réponse erronée, expliquer les raisonnements erronés qui ont mené les élèves à donner cette réponse.

Ces situations de formation sont intéressantes car elles renseignent les enseignants sur les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution du problème, et permettent des connaissances didactiques générées par des réponses d'élèves. On peut imaginer dans une classe le recueil des réponses d'élèves, et en constellation de professeurs, un travail de réflexion sur les origines des réponses incorrectes et les propositions pour y remédier. Pour une analyse plus détaillée nous renvoyons à (Batanero et al., 2019).

V - CONCLUSION

La rencontre entre les jeux de hasard et les jeux de stratégies mobilise le raisonnement de nécessité et le raisonnement de plausibilité : un enjeu fort de l'enseignement sera d'apprendre à les distinguer. Les différentes représentations des moments de jeu et des stratégies utilisées développent la compétence « représenter » utile dans la phase de recherche de stratégies, dans la justification des stratégies retenues et de manière générale dans l'élaboration des raisonnements.

[4] Un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain du joueur est nulle.

Le jeu est un moyen d'enseignement de deux savoirs distincts, le savoir ludique et le savoir mathématique, qui vont structurer cet enseignement. En formation il sera important de préciser les compétences (ludiques ou mathématiques) visées lors de l'utilisation des jeux, les conditions du jeu avec le choix des variables de jeu sur le matériel, la règle, le lieu, le temps, les conditions mathématiques avec le choix des variables didactiques pour hiérarchiser ou viser des procédures et des stratégies, et les difficultés et les obstacles rencontrés en distinguant ludique et mathématique.

Avec l'introduction des probabilités dans les programmes scolaires français de 2025, le recours au jeu est un moyen d'enseignement important, objet de ressources, de formation et de recherche. Les expériences d'autres pays (Martin et al., 2019 ; Chamorro et al., 2006) qui nous ont devancés dans cette démarche doivent être étudiées.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Ball, D., Thames, M.-H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching : what makes it special ? Journal of teacher education.

Batanero, C., Ortiz, J. J., Gómez Torres, E., Gea, M. M. (2019) Les jeux équitables comme moyen pour l'enseignement des probabilités et la formation des enseignants. Dans V. Martin, M. Thibault et L. Theis (éds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités !* (219 – 243). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Brêchet, M. (2022). Déconcertant hasard. *Revue de Mathématiques pour l'école, 237*, 32-38.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2001). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical behavior, 20*, 363-441.

Brousseau, G. (2002). Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Revue du Centre de Recherches en Éducation, Université de Saint Etienne*. *Didactique des mathématiques*, *22-23*, 83-155. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516813/fr/

Cabassut, R. (2005) Raisonnement plausible versus raisonnement de nécessité : où est la frontière ? Dans *Actes du XXXII^e colloque COPIRELEM,* 2004, Foix, *partie Communications,* 89-105. Toulouse : IREM de Toulouse.

Cabassut, R. (2009a). The double transposition in proving. Dans Lin, Hsieh, Hanna, de Villiers (eds*), ICMI Study 19. Conference Proceedings.* Taipei (Taiwan) : N.T.University Taipei.

Cabassut, R. (2009b). The double transposition in mathematisation at primary school. Dans *Proceedings of 6th Cerme*. *Lyon. France.*

Cabassut, R. (2025). Le hasard fait son entrée à l'école primaire : quels enjeux ? *Au fil des mathématiques, APMEP, 558*, 7-15.

Chamorro C. et al. (2006). *Didactica de la Matematicas para Primaria.* Pearson Educacion.

CSP (Conseil Supérieur des Programmes) (2024). Programme de mathématiques du cycle 3. Projet de programmes du MEN soumis à consultation. https://www.education.gouv.fr/le-conseil-superieur-des-programmes-41570

Delahaye, J.-P., Mathieu, P. (1995). La bataille enfin analysée. *Pour la science*, *215*.

Eysseric, P., Simard, A., Winder, C. (2012). Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques. In J.-L. Dorier, S. Coutat (éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF 2012* (GT2) (324–336). Genève : Université de Genève.

Fenech, A., Cabassut, R. (2020a). Dispositif de formation utilisant le jeu de Go pour enseigner les mathématiques à l'école primaire. *Revue de Mathématiques pour l'école*, *233*, 144-150. https://www.revue-mathematiques.ch/files/5215/9195/4938/RMe-233-Fenech.pdf

Fenech, An., Cabassut, R. (2020b). Dispositif de formation utilisant le jeu de go pour enseigner les mathématiques à l'école primaire. *Actes du 46e Colloque COPIRELEM, Lausanne 2019*, 142-149.

Fenech, An., Fenech, Al., Cabassut, R. (2024). Dispositif de formation utilisant le jeu de go pour enseigner les mathématiques aux cycles 1 et 2. *Actes du 49e Colloque COPIRELEM, Marseille 2023,* 427-436.

FFB (2023). *Le petit bridge à partir du CP. Les Grands Espoirs. Manuel pour une aventure ludique et éducative.* Fédération Française de Bridge. https://www.calameo.com/federation-francaise-de-bridge/read/006151560be140ff75ceb

Gouy, M. (2020). Le petit bridge. *Au fil des mathématiques, APMEP*, 536. https://afdm.apmep.fr/rubriques/eleves/le-petit-bridge

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Tome 1.* Paris : ARPEME.

Delahaye, J.-P., Mathieu, P. (1995). La bataille enfin analysée. *Pour la science*, 215.

Haye, T. (2019). Étude des conditions et des contraintes d'implémentation d'un jeu de société à l'école, comme vecteur d'apprentissages mathématiques : cas du jeu de Go au cycle 3. Thèse. Montpellier : Université de Montpellier.

Henry, M. et al. (2001). *Autour de la modélisation en probabilités*. Besançon : Presses Universitaire de Franche-Comté.

Huizinga, J. (1977). *Homo ludens*. Paris : Gallimard.

Groupe Élémentaire de l'IREM de Franche Comté (2007). Qui peut le plus ? Introduction de l'aléatoire en cycle 3. *Grand N, 80* (43-58).

Jaquet, F., Henry, M. (2014). Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10-15 ans. *Repères IREM*, 94, 5-20.

Margolinas, C., Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France ; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. ZDM Mathematics Education, 47, 893–903.

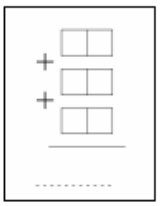
Martin, V., Thibault, M., Laurent Theis, L. (2019). *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités !* (219 – 243). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Millett, A., Brown, M., Askew, M. (2007). *Primary Mathematics and the Developing Professional*. Berlin : Springer.

Polya, G. (2014, réédition). *How to solve it*. Princeton University Press.

Toulmin, S.E. (1958). *The Uses of Arguments*. Cambridge : Cambridge University Press.

ANNEXE 1 QUI PEUT LE PLUS ?



Ce jeu se joue en binôme selon les règles suivantes. Chaque binôme possède un paquet de 9 cartes numérotées de 1 à 9. Chacun des deux joueurs dispose d'une feuille-réponse reproduite ci-contre. Un des membres du binôme tire au hasard une carte une première fois sans la remettre dans le paquet. Chacun des deux joueurs doit alors écrire le chiffre obtenu par la carte dans une des deux cases de la première ligne (soit la case gauche, soit la case droite) de sa feuille-réponse. Lorsque chacun l'a placé, le tireur tire une nouvelle carte. Ce deuxième chiffre est noté dans la case restante de la première ligne. Les joueurs renouvellent cette opération de tirage – écriture sur les deuxième et troisième lignes. Enfin, chaque joueur fait la somme des trois nombres à deux chiffres obtenus. Le gagnant est celui qui obtient la plus grande somme.

ANNEXE 2 LES PETITS CHEVAUX

Règle : 2 à 4 joueurs disposent chacun d'un ou plusieurs pions-chevaux, et jouent en lançant un dé à tour de rôle (un 6 obtenu sur le dé permettant de rejouer). Un joueur doit d'abord réaliser un 6 avec le dé pour pouvoir sortir un petit cheval de son écurie. Il doit ensuite lui faire parcourir toutes les cases situées à la périphérie du plateau, en le faisant avancer d'un nombre de cases égal au résultat du dé, avant de remonter une dernière allée propre à chaque couleur. Les pions sont avancés dans le sens des aiguilles d'une montre. Lorsqu'un petit cheval arrive sur une case occupée par un concurrent, il le renvoie dans son écurie (le départ). En revanche, si le joueur arrive sur une case occupée par un autre petit cheval de sa couleur, il arrête son pion juste derrière. La victoire est remportée par le premier joueur qui arrive à amener, selon les variantes, un ou plusieurs de ses pions-chevaux à la coupe.

ANNEXE 3 LA BATAILLE

Distribuer aux deux joueurs au hasard toutes les cartes d'un jeu de 54 cartes dont on ne conserve que certaines cartes à nombre (par exemple que les 1 et 2, ou bien que les 1, 2, 3, 4). Les joueurs ne prennent pas connaissance de leurs cartes et les posent devant eux en un tas.

À chaque tour, chaque joueur retourne la carte du haut de son tas.

Le joueur qui dévoile la carte ayant la plus haute valeur emporte la levée qu'il place sous son tas, en plaçant d'abord la carte qu'il a jouée et ensuite celle de l'autre joueur.

Si deux cartes sont de même valeur, il y a « bataille ».

Alors les joueurs dévoilent la carte suivante du haut de leur tas, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un joueur dévoile une carte plus haute que celle de l'autre joueur. Il emporte alors toutes les cartes en les replaçant dans l'ordre suivant : d'abord sa dernière carte jouée suivi de celle de l'autre joueur, ainsi de suite. Lorsque l'un des joueurs possède toutes les cartes du jeu, la partie s'arrête et ce dernier gagne.

ANNEXE 4 PARTIE NULLE OU SANS FIN

Dans un jeu de bataille à 8 cartes 1 et 2 des 4 couleurs Delahaye et al. (1995) proposent un exemple de distribution conduisant à une partie nulle. On indique les cartes des joueurs en début de pli en numérotant le pli ; la carte du haut de la pile se situe à gauche et les cartes gagnées se rajoutent à droite.

1 [1,2,1,2] joueur A

[2,1,1,2] joueur B

2 [2,1,2] joueur A

[1,1,2,2,1] joueur B

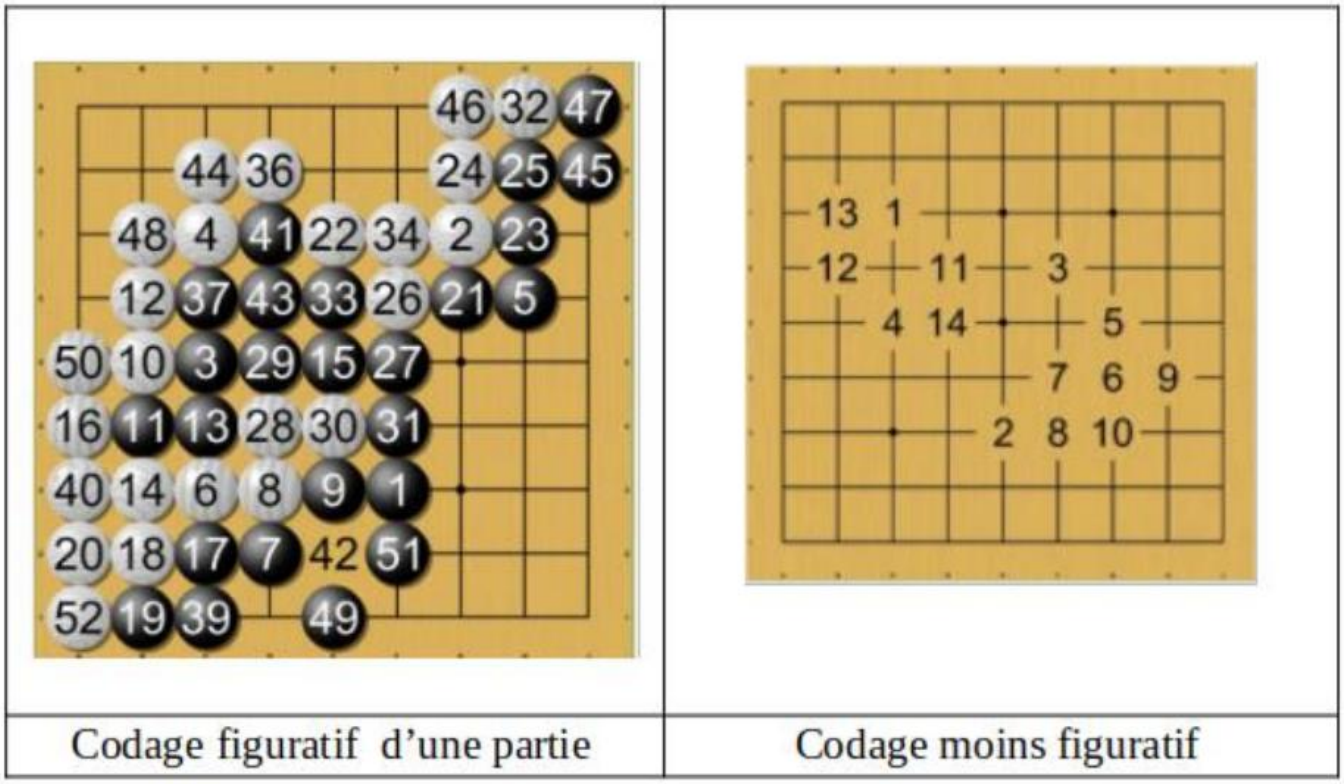
3 [1,2,2,1] joueur A

[1,2,2,1] joueur B

Dans le même article Delahaye et al. proposent une partie sans fin.

ANNEXE 5 EXEMPLES DE REPRÉSENTATIONS

Codage d'une partie au *jeu de Go* (Fenech et al. 2020a, 2020b)



Codage figuratif d'une partie | Codage moins figuratif

Codage d'un moment de partie au *Petit Bridge* (FFB 2023)

1 ► VOCABULAIRE Qui est le coéquipier de Nord ?

2 ► ENTAME Si Sud entame, quel est le joueur qui joue la deuxième carte ?

3 ► MÉMOIRE Combien y a-t-il de cartes bleues dans le jeu ?

4 ► CALCUL MENTAL À la fin de la partie, l'équipe adverse a gagné 3 levées. Combien de levées notre camp a-t-il gagnées ?

5 ► RAISONNEMENT Que doit jouer Ouest pour que son camp gagne deux levées ? Cliquez pour ajouter un texte.



ANNEXE 6 EXEMPLES D'EXERCICES HORS JEU

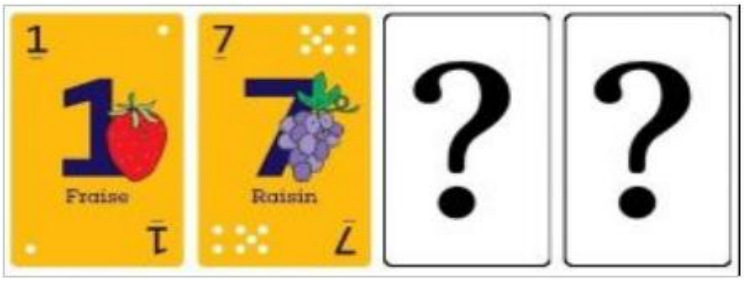
Au *jeu de Go*



Utilisation des pierres de Go pour apprendre les tables de multiplications (nombres rectangles) (Millett et al. , 2007).

Au *Petit Bridge* (Gouy, 2020)

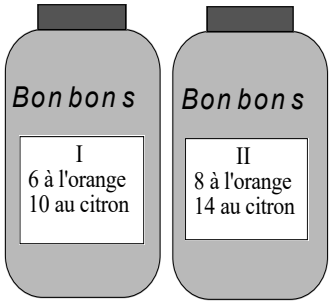
En ajoutant les points des quatre cartes qu'il possède, Pierre a obtenu 15 points. Quels sont les numéros des cartes qui lui manquent ? Propose deux solutions différentes. Y en a-t-il une troisième ?



ANNEXE 7 LE PROBLÈME DES BONBONS

Exemple issue d'une compétition : le rallye transalpin.

(Jacquet, Henry, 2014, p. 6) « *Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron. Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron. Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon. Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit : « Tu peux prendre un bonbon.*



Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur. Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange. À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ? Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement. »

L'examen des réponses montre des modélisations incorrectes (« *Julien doit prendre la boîte n° I car il y a moins de bonbons au citron que dans la boîte n° II.* » ou encore « *À la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°I car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron.* » et des modélisations correctes (« *Le nombre des bonbons de la boîte n°I est égal à 16. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (8) par 16, on obtient alors : * Bonbons à l'orange : 37,5 % * Bonbons au citron : 62,5 %. Le nombre des bonbons de la boîte n°II est égal à 22. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (8) et au citron (14) par 22, on obtient alors : * Bonbons à l'orange : 36 % * Bonbons au citron : 64 %. Si nous étions à la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°I, car il a plus de chances d'avoir un bonbon à l'orange (37,5 % contre 36 % dans le pot n°II .* »

UNE INGÉNIERIE COOPÉRATIVE POUR TRAVAILLER LES ROBOTS DE SOL

Aurélie VERGON DARTOIS
Professeure des écoles spécialisée, CHU, Besançon
CREAD
aurelie.vergon_dartois@univ-fcomte.fr

Francine ATHIAS
Enseignante-chercheure, INSPE Besançon
ELLIADD
francine.athias@univ-fcomte.fr

Résumé
Nous souhaitons présenter le travail d'un collectif de professeurs des écoles et de chercheurs en didactique des mathématiques qui tend à s'organiser, progressivement et selon certains principes, en ingénierie coopérative, afin de travailler la programmation du déplacement d'un robot de sol. Les membres du collectif ont d'abord élaboré une séquence liée à la robotique pédagogique pour travailler des connaissances spatiales. Cette séquence a été mise en œuvre dans des classes de cycle 2 et de cycle 3, puis elle a été analysée dans le but de la faire évoluer, avant de la mettre en œuvre une nouvelle fois, dans un processus itératif. Au sein du collectif, les membres repèrent un problème de la pratique, le décrivent et l'analysent au regard des notions modèles de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD). Comment ce travail collectif peut-il orienter les professeurs afin de permettre à tous les élèves de programmer adéquatement le déplacement du robot ? Les premières analyses permettent de montrer comment le travail d'ingénierie améliore la compréhension de ce qui se joue en classe, en particulier lors du codage d'un déplacement en fonction de la position de celui qui programme.

Cette communication vise à analyser les premiers effets d'un collectif constitué de professeurs des écoles et de chercheurs en didactique des mathématiques engagé dans une ingénierie coopérative (développé plus loin), lorsqu'il s'attache à explorer les usages pédagogiques des robots de sol à l'école primaire[1]. Ces effets se manifestent à deux niveaux : d'une part, sur la dynamique du collectif lui-même et sur les transformations des pratiques des professeurs et des chercheurs qui y participent ; d'autre part, sur les élèves et leurs apprentissages. Inscrite dans une perspective d'école inclusive, notre démarche vise à concevoir des situations didactiques accessibles à l'ensemble des élèves (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013; Assude, Perez, Suau, Tambone, & Vérillon, 2014; Suau & Assude, 2016; CDpE, 2024)

[1] L'enseignement primaire, en France, regroupe l'école maternelle (petite, moyenne et grande sections) pour des élèves de 3 à 6 ans et l'école élémentaire (CP, CE1, CE2, CM1 et CM2) pour des élèves de 6 à 11 ans. Elle s'organise par ailleurs en cycles : cycle 1, de la petite à la grande sections, cycle 2, du CP au CE2 (1P, 2P, 3P) et cycle 3 du CM1 (4P et 5P)à la sixième (la 6ème, dernière année du cycle 3 correspond à la première année du collège).

La première partie de cette communication présente le contexte de la recherche, tant du point de vue institutionnel que théorique. Puis nous précisons nos questions de recherche. Une étude de cas y est ensuite développée, considérée comme emblématique (CDpE, 2024) au cours de laquelle nous montrons des interactions observées en classe et au sein du collectif d'ingénierie coopérative. Enfin, nous engagerons une discussion.

I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE

1 Les programmes

(Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations (Cycle 2, programme 2020)	(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations (Cycle 3, programme 2020)
- S'orienter et se déplacer en utilisant des repères. - Réaliser des déplacements dans l'espace et les coder pour qu'un autre élève puisse les reproduire. - Produire des représentations d'un espace restreint et s'en servir pour communiquer des positions. - **Programmer les déplacements d'un robo**t ou ceux d'un personnage sur un écran : • repères spatiaux ; • relations entre l'espace dans lequel on se déplace et ses représentations.	Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte (école, quartier, ville, village). Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers. **Programmer les déplacements d'un robot** ou ceux d'un personnage sur un écran en utilisant un logiciel de programmation. • vocabulaire permettant de définir des positions et des déplacements (tourner à gauche, à droite ; faire demi-tour, effectuer un quart de tour à droite, à gauche) ; • divers modes de représentation de l'espace : maquettes, plans, schémas.

Tableau 1. Extraits des programmes de 2020

En France, les programmes scolaires introduisent, dès 2015, des éléments relatifs au codage et au décodage des déplacements de robots. Toutefois, cette orientation curriculaire reste peu visible dans les manuels scolaires de mathématiques, qui accordent une place limitée à l'étude de ces contenus (Kummer-Hannoun & Baron, 2024). En tant que savoirs nouveaux à enseigner, ces contenus ont donné lieu à de nombreuses offres de formation institutionnelle. Néanmoins, les enseignants rapportent que la participation à ces formations ne garantit ni la mise en œuvre effective en classe, ni un sentiment de maîtrise suffisant pour enseigner ces notions de manière assurée (Fluckiger, Grugier, & Haspekian, 2024).

C'est ce qui nous a conduit à organiser un collectif de professeurs et de chercheurs.

2 Le travail au sein de l'ingénierie coopérative

Nous allons présenter maintenant le travail de notre collectif de professeurs et de chercheurs. Il est constitué de trois professeurs enseignant en cycle 2 ou cycle 3, une enseignante spécialisée coordonnatrice d'ULIS[2], une chercheure et une doctorante. Il est organisé en ingénierie coopérative (Sensevy, 2011a; Sensevy et al., 2013; Joffredo-Lebrun, 2016; Perraud, 2022; Athias, Vergon Dartois, &

[2] Les ULIS (Unités Localisées pour l'Inclusion Scolaire) sont des dispositifs d'appui à la scolarisation, régis par la circulaire n° 2015-129 du 21-8-2015.

Jussy, 2023; CDpE, 2024) afin de travailler la programmation du déplacement d'un robot de sol (Spach, 2017). Ce collectif se développe en collectif de pensée qui élabore une œuvre commune. Précisons cela. Dans notre cas, nous travaillons à l'élaboration conjointe de séquences didactiques autour de la programmation de robots de sol. Les séquences sont mises en œuvre, analysées, modifiées, et mises en œuvre de nouveau à partir de cette analyse, au sein d'un processus itératif. L'ingénierie coopérative que nous avons élaborée ensemble poursuit une double finalité : comprendre les pratiques d'enseignement et les transformer, c'est-à-dire pour les faire évoluer afin de résoudre des problèmes rencontrés. Ces deux visées s'articulent de manière dialectique, chacune nourrissant et enrichissant l'autre : une meilleure compréhension des pratiques permet de les transformer tandis que leur transformation constitue en retour un levier de compréhension. De cette dynamique émerge une posture d'ingénieur concepteur, partagée par les professeurs et les chercheurs, qui se distingue des postures traditionnelles de chacun tout en les reliant. Cette posture se concrétise notamment dans la production collective d'un objet commun ; dans notre cas, il s'agit de concevoir et de mettre au point une séquence d'enseignement-apprentissage intégrant l'usage d'un robot de sol. Cette assomption commune d'une posture d'ingénieur a plusieurs conséquences cruciales. Elle permet une critique, qui n'est pas celle d'un professeur qui réalise la séance, mais celle des effets de décisions et d'actions qui résultent de dispositions prises collectivement. La critique n'a pas pour objet une simple évaluation, mais elle s'inscrit dans une perspective d'amélioration continue des pratiques (dimension itérative du fonctionnement de l'ingénierie). Ce travail dans la durée permet la constitution d'un langage commun, une sorte de jargon (Sensevy, Gruson, & Le Henaff, 2019; Le Henaff, 2021; Le Hénaff, 2024) qui permet une conceptualisation au service de la compréhension et de l'amélioration de la pratique et de ses effets. Les conceptualisations, d'habitude du côté des chercheurs, et les accomplissements pratiques, d'habitude du côté des professeurs, sont progressivement approchés par tous les membres du collectif, devenant ainsi un collectif de pensée.

3 L'œuvre commune

Nous avons d'abord élaboré une séquence liée à la robotique pédagogique pour travailler des connaissances spatiales (Pérès, 1987; Berthelot & Salin, 1992) et des connaissances algorithmiques (Spach, 2017). Cette séquence a été mise en œuvre par l'ensemble des professeurs, dans des classes de CP-CE1, CE1 et CM1-CM2, en alternance la plupart du temps (pour des questions matérielles), puis elle a été analysée dans le but de la faire évoluer, avant de la mettre en œuvre une nouvelle fois, dans un processus itératif. Il n'y a pas d'observateur, puisque les professeurs sont seuls dans leur classe.

Voici le plan initial de la séquence :

Séances	Objectifs	Activités de l'élève
1	Découverte du robot (identifier les fonctions du robot)	Faire se déplacer le robot sur une feuille blanche Définir ce qu'est un robot

2	Coder un déplacement simple	Faire se déplacer le robot d'un point A vers un point B en suivant un programme. Coder son déplacement
3	Décoder un déplacement simple	Anticiper le déplacement du robot d'un point A vers un point B en suivant un programme
4	Coder un déplacement complexe	Coder le déplacement d'un robot quand celui-ci est orienté différemment de l'élève
5	Coder un déplacement simple ou complexe dans un espace numérique	Faire se déplacer le robot d'un point A vers un point B en suivant un programme à partir des barres de programmation ou d'un logiciel. Coder son déplacement
6	Évaluation	Coder et décoder le déplacement d'un robot, orienté comme l'élève ou différemment de lui

Tableau 2. Structure de la séquence

La séquence est constituée de 6 séances, qui sont adaptées au fur et à mesure des mises en œuvre, selon les contextes. Les robots réalisent leurs déplacements sur un quadrillage de 24 cases (méso espace), placé au sol.

4 Éléments théoriques

Afin d'étudier l'appropriation de l'usage des robots de sol, par les élèves et par les professeurs, nous souhaitons analyser ce qui se passe en classe et dans le collectif d'ingénierie coopérative. Nous utilisons pour ce faire les notions de *contrat didactique* et de *milieu didactique* dans le cadre de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD), (Sensevy, 2011b; CDpE, 2024). Le *contrat* didactique, initialement défini par Brousseau (1988), et repris par Sensevy (2011), renvoie au « déjà-là » construit par les élèves au sein des interactions didactiques dans la classe. Autrement dit le contrat didactique peut être vu comme un système de capacités incorporées, d'attentes et d'attributions d'attentes, relatives aux habitudes d'actions dont une partie essentielle résulte de l'action conjointe du professeur et des élèves, à laquelle nous pouvons avoir accès par les analyses. Le concept de *milieu didactique* modélise l'ensemble des éléments, matériels et symboliques, avec lesquels les élèves et l'enseignant interagissent dans le cadre d'une situation d'apprentissage, et qui conditionnent l'avancée dans la résolution d'un problème (CDpE, 2024). Cette acception permet d'analyser les actions conjointes du professeur et des élèves comme des réponses aux contraintes et aux ressources offertes par ce milieu.

Nous proposons une généralisation de la notion de milieu didactique en l'élargissant à celle de *milieu-problème*, quelle que soit la nature de l'enquête engagée (Dewey, 1993; Sensevy, 2011b), et notamment dans le cadre spécifique de l'ingénierie coopérative. En effet, les membres du collectif mènent une enquête conjointe visant à comprendre les usages des robots de sol dans l'enseignement, ce qui nous conduit à modéliser le contexte de cette activité collective en termes de milieu-problème (CDpE, 2024). Par ailleurs, la notion de *déjà-là* permet de rendre compte des éléments qui se constituent

progressivement au fil de l'action conjointe, à travers les situations singulières produites et analysées dans le cadre du collectif.

II - QUESTIONS DE RECHERCHE ET ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Le collectif de professeurs et de chercheurs a donc élaboré une séquence intégrant un robot de sol, le *bluebot*. Les professeurs l'ont mise en œuvre en classe, sachant qu'au sein de l'ingénierie coopérative, une attention particulière est portée à ce que *tous* les élèves puissent accéder aux situations. À la suite de cette mise en œuvre, une analyse du déroulement de l'action en classe est proposée au sein du collectif de professeurs et de chercheurs. Cette analyse a pour finalité la nouvelle mise en œuvre.

Notre question de recherche peut être formulée de la façon suivante : comment le dialogue d'ingénierie, au sein du collectif, peut-il contribuer à des changements de pratiques des professeurs et des chercheurs ?

Le collectif a été créé au début de l'année 2023-2024 pour travailler les déplacements dans l'espace en utilisant des robots de sol. Nous terminons la deuxième année. Les modalités de rencontre ont été définies ensemble. Il a été convenu de programmer sept réunions durant l'année scolaire. Des échanges informels (en dehors de ces temps de réunion) ont également eu lieu.

Pour tenter de répondre à notre question, nous avons filmé les séances de classe réalisées par les professeurs du collectif d'ingénierie coopérative, et nous avons également filmé les réunions du collectif. Des extraits de la pratique sont choisis par les chercheures, puis analysés en appui sur les concepts énoncés plus haut. Ces extraits sont alors partagés dans le collectif[3], comme étant des moments importants.

III - UNE ÉTUDE DE CAS

Nous allons présenter un moment de classe puis nous montrerons les échanges qui ont suivi au sein du collectif.

1 Un premier moment dans la classe

1.1 Le problème posé à l'élève

Ce moment se situe au cours de la séance 3. L'élève dispose d'une feuille de route, à savoir une feuille de papier sur laquelle figure le programme et sont notifiées la position et l'orientation du robot sur un quadrillage réduit (cf fig.1). Cette feuille de route n'est pas unique : les élèves peuvent avoir des missions[4] différentes à réaliser.

Voici les éléments qui servent à coder le programme de déplacement du robot dans cette classe (cf fig.1).

[3] Il est prévu que les extraits soient choisis par les professeurs eux-mêmes.

[4] Une mission correspond à exercice (ici l'élève doit décoder un programme et anticiper un déplacement)

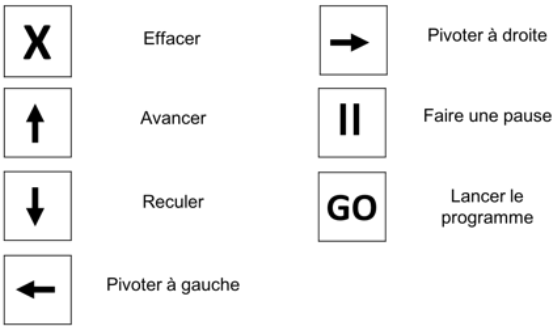


Figure 1. Représentation des énoncés d'action

Ci-dessous, les feuilles de route des deux élèves.

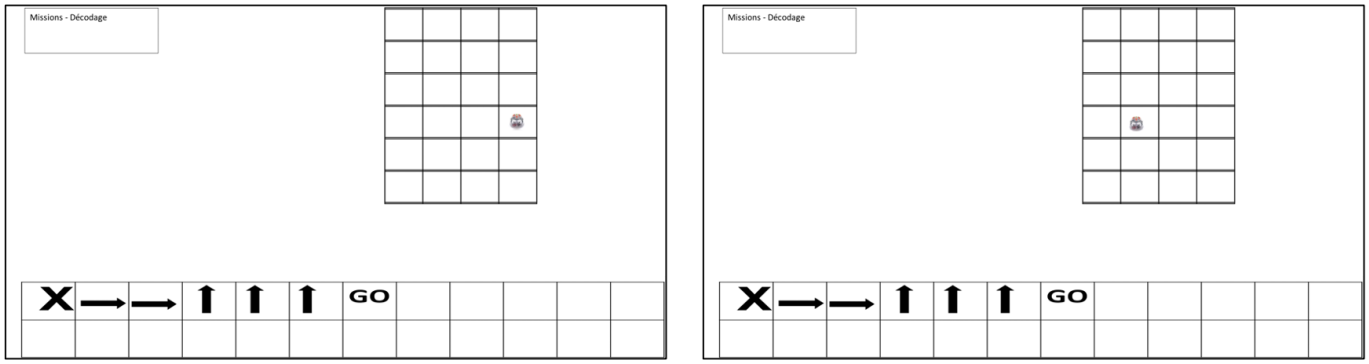


Figure 2. Feuilles de route de Stan et Enzo

Le programme à décoder est identique.

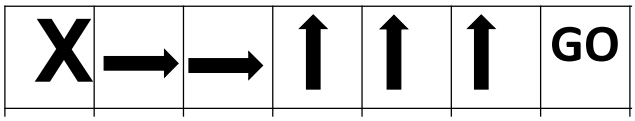


Figure 3. Programme à décoder

On peut traduire ce programme en énoncés d'action : effacer (le programme précédent), pivoter à droite deux fois (double pivot), avancer 3 fois et lancer le programme.

La position du robot sur le quadrillage est différente (cf fig. 4).

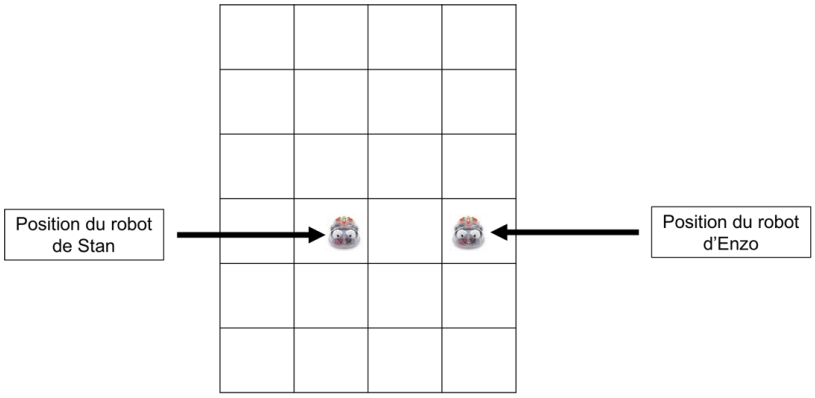


Figure 4. Position initiale des robots de Stan et Enzo

Sur la table, avec le bluebot, l'élève doit décoder le programme (lecture du programme), tracer (sur le quadrillage) le chemin parcouru par le bluebot et identifier la case d'arrivée sur la feuille de route en y inscrivant un point (cf fig. 5 et 6).



Figure 5. Décoder sur la table

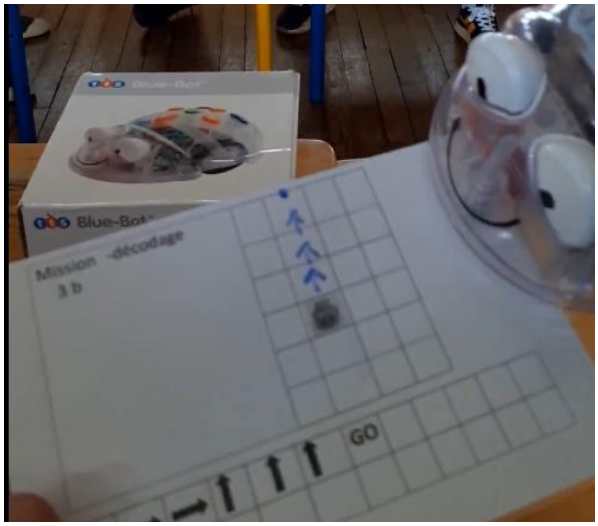


Figure 6. Tracer sur la table

Lorsque l'élève a terminé, il se déplace vers le quadrillage (en vraie grandeur) sur lequel va se déplacer le bluebot (cf fig. 7).

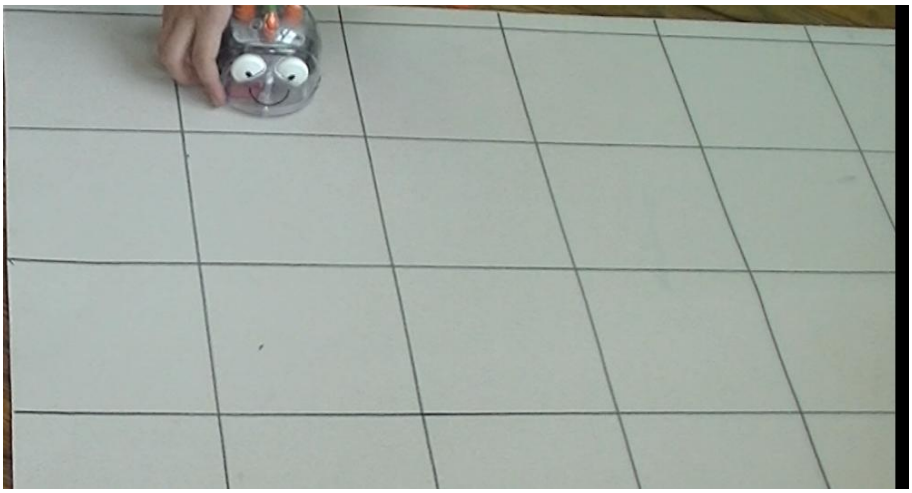


Figure 7. Vérifier sur le quadrillage réel

L'élève place le robot comme indiqué sur la représentation de la feuille de route (position et orientation). Il place un lego dans la case qui sera atteinte par le robot. Il programme le robot pour vérifier qu'il atteint la case proposée (matérialisée par le lego).

1.2 Analyse a priori

Pour placer le robot sur le quadrillage réel, l'élève peut prendre des indices sur le quadrillage réduit (par exemple troisième ligne à partir du « bas »). Ces indices peuvent être repris sur le quadrillage réel, car les quadrillages sont identiques dans les deux espaces (micro-espace et méso-espace). Nous ne reviendrons pas sur le placement initial, car tous les élèves y parviennent.

Lorsque l'élève doit décoder le programme, le robot est placé de sorte que les yeux soient vers le « bas ». Ce dernier se trouve « en miroir », c'est à dire dans le sens opposé à l'élève (qui regarde la feuille). Le

double pivot, (quand l'élève programme consécutivement deux fois l'action de pivoter dans une même direction), permet au robot de se (re)placer dans le même sens que l'élève. La flèche « avancer » conduit à un déplacement « en avant » par rapport à l'élève. Cette analyse rapide nous permet de dire que le décodage de programme est aisé.

1.3 Actions de deux élèves Enzo et Stan

Nous n'avons pas vu les élèves Stan et Enzo travailler sur la table. Lorsqu'ils arrivent sur le quadrillage réel, voici ce qu'ils ont proposé sur la feuille de route[5] (cf fig. 7 et 8).

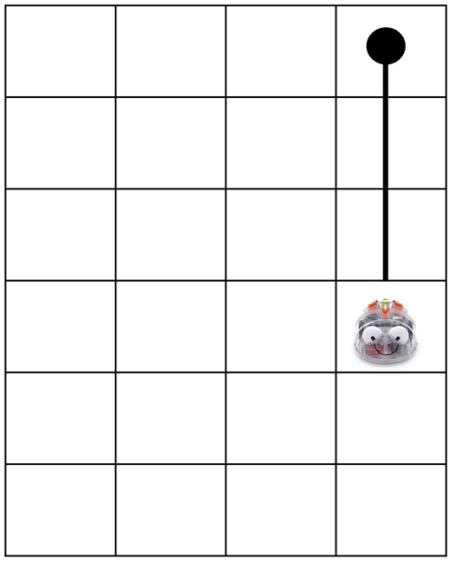


Figure 7. La feuille de Stan

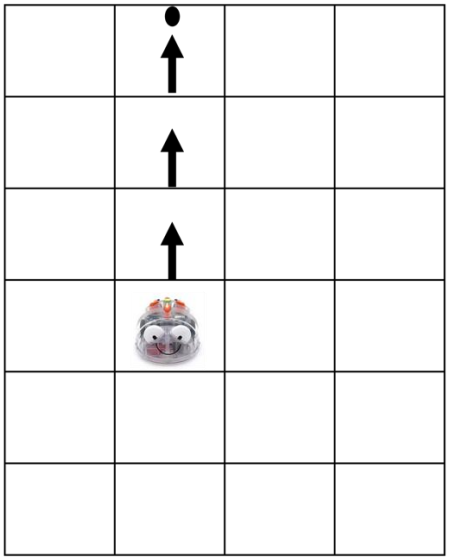


Figure 8. La feuille d'Enzo

Enzo place le robot au bon endroit. Il programme le robot sans utiliser la touche « GO ». Il dénombre les cases à partir de la position du robot et place le lego indiquant l'arrivée. Il appuie alors sur la touche « GO » du robot. Il regarde le robot atteindre la case visée. Il prend le robot et s'en va.

Nous allons regarder ce qui se passe avec Stan. Nous précisons que le programme à décoder et l'orientation du robot sont les mêmes. Seule la position initiale du robot sur la feuille de Stan n'est pas la même. Autrement dit, nous allons considérer que ces feuilles de route sont très proches et représentent les mêmes enjeux de savoir. L'élève Stan a déterminé le chemin en étant sur la table (nous ne l'avons pas vu faire ce travail). Puis il vérifie sur le quadrillage en vraie grandeur.

Contrairement à ce qui s'est passé avec Enzo, la professeure qui est présente depuis le début, intervient. Elle demande à Stan de placer la feuille de route dans le sens de la lecture pour qu'elle soit accessible à tout moment (cf fig. 9). Stan place le robot au bon endroit sans hésiter.

[5]Pour faciliter la lecture, nous avons reproduit leurs feuilles.



Figure 9. La feuille de Stan posée sur le quadrillage

Puis la professeure demande à l'élève d'expliquer (cf. fig 10 et 11).

P : « Qu'est-ce que le robot va faire d'abord ? » E : « Il va « pivoter à droite » » (il montre le robot et pointe la touche « pivoter à gauche », en utilisant sa main gauche. Puis il ajoute : « Euh à gauche, euh à droite, je ne sais plus ».	 *Figure 10. L'élève montre le robot avec la main gauche*
La professeure l'interroge lorsque l'élève pointe la touche « pivoter à gauche ». P : Là c'est vers la gauche ? (L'élève pointe la touche « pivoter à gauche », en utilisant sa main droite)	 *Figure 11. L'élève montre le robot avec la main droite*

C'est seulement après ces échanges au cours desquels l'élève a du mal à repérer la droite de la gauche et la professeure a du mal à aider l'élève à se repérer, qu'il place le lego dans une des cases du quadrillage. Il programme le robot et le valide, en appuyant sur la touche « go ».

1.4 Analyse de ces deux moments

À ce moment de la séquence, les deux élèves Enzo et Stan connaissent la signification de la touche « avancer », lorsque le robot se trouve dans le même sens qu'eux. Nous pouvons le voir sur les deux feuilles de route (avec une flèche ou avec un trait représentant le chemin parcouru par le robot, cf fig.7 et 8). Effectivement le robot avance de 3 cases.

Concernant la touche « pivoter », nous pouvons dire que l'effet de la touche « pivoter » deux fois correspond à un demi-tour et que les deux élèves semblent avoir compris que le double pivot vers la gauche ou vers la droite permet au robot de réaliser un demi-tour et de se placer dans le même axe qu'eux.

Cependant, aucun indice de ce demi-tour n'apparaît sur la feuille de route. De même, lorsque les élèves placent le lego, ils ne font aucun signe ou geste correspondant au mouvement du robot.

Nous pouvons analyser ce moment de la façon suivante : le milieu organisé entre la feuille de route (micro-espace) et le quadrillage réel (méso-espace) est facilement accessible pour les deux élèves. Anticiper le chemin que le bluebot va réaliser lorsque le programme sera effectué est accessible pour eux.

Par contre, nous pouvons observer une différence d'action conjointe notable : dans le premier cas, l'élève agit sans intervention de la professeure alors qu'elle est présente. Dans le deuxième cas, la professeure demande à l'élève d'expliciter ce qu'il y a à faire.

Les demandes de verbalisation de la professeure mettent en évidence des difficultés chez l'élève qu'il n'avait pas rencontrées lors de la réalisation de la mission : lorsque le robot se trouve en miroir, c'est-à-dire « en face de lui », l'élève a du mal à repérer et verbaliser la droite et la gauche (qui sont alors inversées par rapport à sa droite et sa gauche à lui). Cependant, si l'élève repère que le double pivot permet au robot d'opérer un demi-tour, il est inutile de s'intéresser au sens (droite ou gauche). En effet, si le robot pivote deux fois vers la gauche ou vers la droite, il aura opéré un demi-tour et se trouvera, au final, orienté dans la même direction que l'élève.

Nous devons également préciser que la professeure rencontre elle aussi des difficultés pour trouver les mots : lorsqu'elle demande où est la touche « pivoter à gauche », elle est peu précise (là ou là). L'élève montre en disant « là » et en précisant que c'est « parce qu'elle est à l'envers ». La professeure n'en demande pas plus.

2 Description et analyse au sein du collectif

2.1 Description

Les chercheures ont choisi d'analyser collectivement cet épisode en raison d'une différence notable dans les modalités de l'action conjointe observée. Elles s'appuient pour cela sur un extrait vidéo de la séance en classe (dont sont tirés les photogrammes présentés). Une interrogation émerge : bien que Stan et Enzo aient produit une feuille de route identique, seul Stan se voit demander d'expliciter ses actions. Pourquoi? La professeure explicite alors son intention : Stan étant bénéficiant du dispositif ULIS, elle cherche à s'assurer de sa compréhension ; quant à Enzo, qui ne présente pas de difficulté d'apprentissage identifiée,

elle le laisse agir seul. Ce faisant, elle se rend compte qu'elle est plus exigeante avec Stan qu'avec Enzo. Elle en vient à questionner *a posteriori* la pertinence de sa posture, allant jusqu'à envisager qu'elle aurait pu agir autrement.

2.2 Analyse

Les chercheures veulent engager une enquête au sein du collectif d'ingénierie. Elles analysent un moment de classe et souhaitent partager ce moment dans le collectif. Le milieu-problème est engagé en appui sur le film de classe et les échanges entre la professeure qui agit avec les deux et le collectif. Le collectif interroge les demandes de verbalisation de la professeure qui mettent en évidence des difficultés pour cet élève. Ce sont donc les questions de la professeure qui génèrent une difficulté. Cette demande d'explicitation part d'une bonne intention, alors que l'analyse par le collectif montre qu'elle met Stan en difficulté. Nous pouvons reconnaître ici un schéma classique dans les collectifs. Ce qui l'est moins, c'est le système d'analyse critique des séances, institué dans le dispositif d'ingénierie coopérative. On constate que c'est la professeure qui se retrouve « en difficulté », devant le groupe de professeurs et de chercheurs qui mène l'analyse. Mais ce qu'il est intéressant d'observer, c'est le partage, par le collectif, de cette responsabilité, en repérant et cherchant à travailler, ensemble, un problème de la pratique (Perraud, 2022). C'est précisément la posture d'ingénieur, qui permet une critique, qui n'est pas celle d'un professeur qui réalise la séance, mais celle des effets de décisions et d'actions qui résultent de dispositions collectivement décidées. Dans l'exemple décrit et analysé, la professeure prend l'initiative de demander à Stan une explicitation de son action. Et c'est le problème, engendré par cette initative, qui va conduire à une discussion du collectif et une prise de décisions consécutives à l'analyse du probème. Enfin, le collectif a échangé sur les supports. En effet, la représentation du déplacement pivoter à droite pourrait avoir été mal lue par l'élève (flèche avec pointe vers la droite) et être interprétée par avancer deux fois vers la droite. Nous avons envisagé un autre moyen de représenter cette touche, par exemple en proposant un arrondi, comme c'est le cas sur le robot (cf tab. 3).

Le robot de sol	Le programme proposé dans la classe	Le programme envisagé dans le collectif
		

Tableau 3. Réflexions collectives sur les représentations des touches

IV - DISCUSSION-CONCLUSION

Notre question de recherche porte sur la manière dont le dialogue d'ingénierie s'établit, au sein du collectif, conduisant ainsi à des changements de pratiques collectives des professeurs et des chercheurs. Les premières analyses permettent de montrer comment le travail d'ingénierie améliore la compréhension de ce qui se joue en classe, en particulier lors du décodage d'un déplacement en fonction de la position de celui qui programme (Mari, 2022) et l'orientation du robot. Nous savons que le rôle du langage permet de définir les objets et les propriétés (Vergnaud, 1991) et de développer un « jargon » (Sensevy, Gruson, Le Henaff, Joffredo-Lebrun, & Bloor, 2021) : un des enjeux dans l'usage de robot de sol

est de parler un même jargon pour exprimer des connaissances spatiales dans des situations de programmation. Pivoter et tourner, par exemple, ne produisent pas les mêmes résultats d'action. Quand on pivote, on reste sur le même axe, on ne se déplace pas, contrairement à l'action de tourner qui implique une poursuite du déplacement.

Cependant, notre analyse montre que les problèmes rencontrés dans la mise en oeuvre de la séquence ne peuvent relever de la seule responsabilité de l'élève ou de la seule responsabilité du professeur dans la classe. C'est le collectif dans son ensemble qui en sera responsable. En effet, la posture d'ingénieur concepteur, commune aux professeurs et aux chercheurs, conduit à proposer des changements dans la séquence. Ici, identifier les enjeux de savoirs (quand on demande de verbaliser, cela implique des connaissances et savoirs spécifiques), s'interroger sur le choix de questionner certains élèves plutôt que d'autres et comprendre les incidences de ces choix. Plus largement, cela concernera également des notations spécifiques pour la touche « pivoter », le rôle du double pivot...

L'attention que nous avons portée collectivement au décodage d'un programme pourrait conduire chaque professeur à se rendre sensible à ce qui se passe en classe. Cette nouvelle compréhension pourrait être partagée dans le collectif, non plus à l'initiative des chercheurs, mais à l'initiative des professeurs et aboutir à de nouveaux gestes. Nous proposons ici une circulation des savoirs en lien avec la programmation des robots de sol.

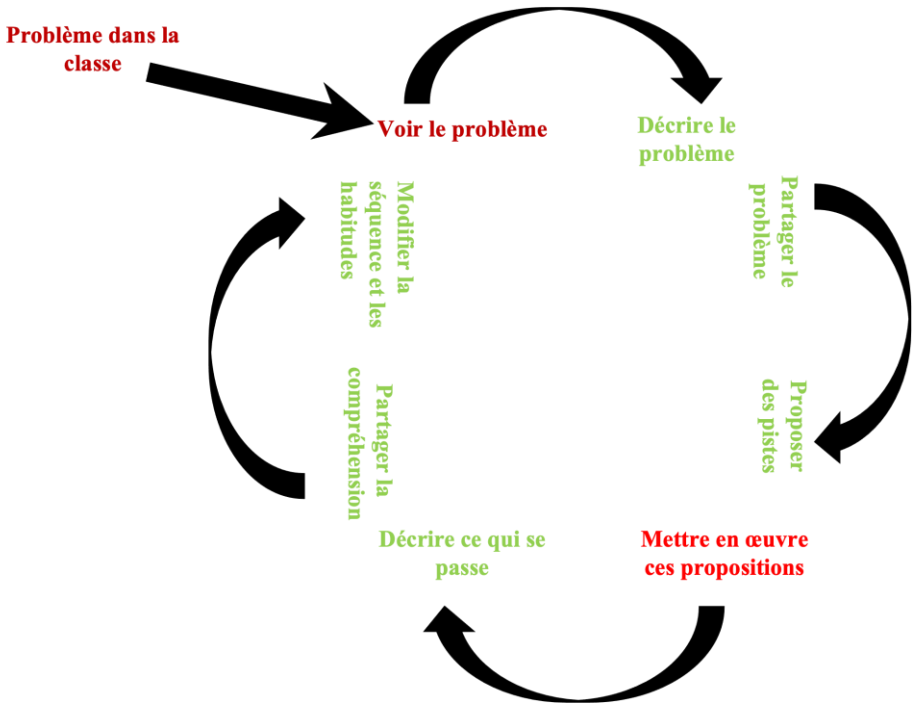


Figure 12. La circulation des savoirs

Nous pouvons ainsi considérer que le dialogue au cœur de l'ingénierie coopérative contribue à des changements de pratiques des professeurs et des chercheurs : repérer les problèmes rencontrés (ici l'usage de la verbalisation), les partager pour mieux les voir et mieux les anticiper. La séquence concernant l'usage des robots s'en trouve modifiée : ces habitudes d'échanges contribuent de fait à une œuvre commune, basée sur les habitudes de coopération, en lien avec la séquence mise en œuvre.

Cependant, il est à noter que ces habitudes de coopération sont longues à mettre en place. Par exemple, le partage d'un film d'étude se prépare et n'est possible qu'au bout de quelques mois de travail. De plus nous sommes une ingénierie coopérative avec peu de professeurs impliqués et la question du développement de ce dispositif est encore à l'étude.

V - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : Une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématique*s, 34(1), 33-57

Athias, F., Vergon Dartois, A. et Jussy, V. (2023). Représentation et déplacement d'un robot de sol. Dans *Coopération et Dispositifs de coopération*. Actes du 3e Colloque International de la TACD (85-96). Brest : CCSD.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.*

[Université de Bordeaux].

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 309-336.

CDpE. (2024). *Un art de faire ensemble. Les ingénieries coopératives.* Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Dewey, J. (1993). *Logique : La théorie de l'enquête* (2e éd). Paris : Presses universitaires de France.

Fluckiger, C., Grugier, O., & Haspekian, M. (2024). Pratiques envisagées des enseignants pour un enseignement de l'informatique à l'école primaire. Dans C. Fluckiger, L. Boulc'h, S. Nogry, & C. Reffay (Éds), *Enseigner, apprendre, former à l'informatique à l'école : Regards croisés* (pp. 51-68).

Joffredo-Lebrun. (2016). *Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire : Une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative*. [Université de Bretagne Occidentale].

Kummer-Hannoun, P., & Baron. (2024). Quelles ressources pour enseigner l'informatique dans le premier degré ? Une étude de cas. Dans *Enseigner, apprendre, former à l'informatique à l'école : Regards croisés* (pp. 69-84). Université Paris Cité. https://doi.org/10.53480/2024iecare04r.

Le Henaff, C. (2021). *La langue et la culture en éducation. De la notion de jargon aux ingénieries coopératives en didactique*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Rennes : Université de Bretagne Occidentale.

Le Hénaff, C. (2024). *Pratiques, langage, culture : Une approche didactique*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Mari, E. (2022). *Potentialités de la robotique pédagogique pour le développement de connaissances spatiales à l'école*. Marseille : Aix Marseille Université.

Pérès, J. (1987). Recherche sur l'utilisation de la tortue de sol LOGO dans une grande section de maternelle. *IREM d'Aquitaine*.

Perraud, C. (2022). *Travail, handicap et coopération en ESAT : Vers un dispositif émancipateur*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G. (2011a). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G. (2011b). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique.* Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM*, *45*(7), 1031-1043.

Sensevy, G., Gruson, B. et Le Henaff, C. (2019). Sur la notion de jargon. Quelques réflexions sur le langage et les langues. Dans C. Chaplier et A.-M. O'Connel (Éd.), *Épistémologie à usage didactique. Langue de spécialité* (35-52). Paris : L'Harmattan.

Sensevy, G., Gruson, B., Le Henaff, C., Joffredo-Lebrun, S., & Bloor, T. (2021). La TACD et le langage : La notion de jargon, ses sources, ses raisons d'être, et ses affinités. Dans *Pour une reconstruction de la forme scolaire d'éducation*. Actes du 2ème Congrès International de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique. Nancy : Collectif Didactique Pour Enseigner.

Spach, M. (2017). *Activités robotiques à l'école primaire et apprentissage de concepts informatiques. Quelle place du scénario pédagogique ? Les limites du co-apprentissage.* Sorbonne Paris Cité.

Suau, G., & Assude, T. (2016). Pratiques inclusives en milieu ordinaire : Accessibilité didactique et régulations. *Carrefours de l'éducation*, *n° 42*(2), 155-169.

Vergnaud, G. (Éd.). (1991). Les sciences cognitives en débat. Dans Actes *Les Sciences Cognitives*. Première École d'Été du CNRS. Paris: Ed. du CNRS.

FORMATION À LA CRÉATIVITE DIDACTIQUE AU SERVICE DE LA CRÉATIVITE MATHÉMATIQUE

Maya ACHKAR EID
Doctorante,
Laboratoire de Recherche en Éducation,
Faculté des Sciences de l'Éducation,
Université Saint-Joseph de Beyrouth
maya.achkar@net.usj.edu.lb

Sonia CONSTANTIN
Cheffe du Comité Scientifique,
Laboratoire de Recherche en Éducation,
Faculté des Sciences de l'Éducation,
Université Saint-Joseph de Beyrouth
sonia.constantin@usj.edu.lb

Résumé
La créativité des élèves semble très requise en arts et littérature, mais moins dans les disciplines scientifiques, en particulier les mathématiques. Les enseignants, en général, semblent manquer de temps, d'autonomie, de compétence et de formation pour intégrer la créativité dans leur enseignement (Beghetto, 2021). Particulièrement, les enseignants de mathématiques semblent plus enclins à développer la pensée convergente chez leurs élèves, plutôt que la pensée divergente (Guilford, 1967), essentielle pour la créativité (Besançon et Al., 2005). La communication se base sur une recherche doctorale qualitative menée dans un établissement homologué du Liban, sur huit semaines. Elle présente les effets d'une formation adressée à deux enseignantes de mathématiques, en vue d'élaborer puis d'animer des activités visant à stimuler la créativité mathématique des élèves en classe de 6ème et 4ème (entre 11 et 13 ans). Elle met en exergue l'évolution de la créativité didactique des enseignantes participantes tout au long de la formation. L'article propose enfin des pistes de réflexion pour que la créativité dépasse les activités ponctuelles pour mieux être intégrée dans l'enseignement-apprentissage.

I - INTRODUCTION

La créativité des élèves semble très requise en arts et littérature, mais moins dans les disciplines scientifiques, en particulier les mathématiques. Les enseignants, en général, semblent manquer de temps, d'autonomie, de compétence et de formation pour intégrer la créativité dans leur enseignement (Beghetto, 2021). Particulièrement, les enseignants de mathématiques semblent plus enclins à développer la pensée convergente chez leurs élèves, plutôt que la pensée divergente (Guilford, 1967), essentielle pour la créativité (Besançon et Al., 2005). La pensée divergente est celle qui intervient dans des situations qui requièrent la production d'un large éventail de solutions possibles à un même problème. Tandis que la pensée convergente, elle, se mobilise dans la recherche d'une solution unique, jugée la plus pertinente ou optimale (Besançon, Barbot et Lubart, 2011). En effet, « les enseignants demandent plus facilement : « Combien font 7+7 ? », où la seule réponse possible est 14, plutôt que « qu'est-ce qui fait 14 ? », question à laquelle différentes solutions peuvent être données » (Besançon et al., 2005, p. 48).

En fait, élèves et enseignants vivent dans un monde où il semble y avoir divorce entre ce que la technologie peut offrir et ce que l'école, particulièrement en classe de mathématiques, continue de demander. Plusieurs logiciels gratuits, facilement téléchargeables par les élèves, peuvent instantanément

effectuer un développement, une factorisation ou une résolution d'équation. Ainsi, le temps consacré en classe à des batteries de développements et de factorisations à la chaîne semble-t- il énorme, comparé au temps pris pour des apprentissages moins monotones qui, pour revenir sur les termes utilisés par le bulletin officiel, « contribuent à faire percevoir aux élèves la dimension créative, inductive et esthétique [des mathématiques] et à éprouver le plaisir de les pratiquer » (B.O. n° 31 du 30 juillet 2020, p. 137) !
Mais, pour aider les élèves à développer leur créativité mathématique, les enseignants ont-ils besoin d'être eux-mêmes créatifs ? Savent-ils déjà reconnaître les comportements à adopter ou à éviter pour stimuler la créativité de leurs élèves ?
Dans ce contexte, la question de recherche suivante se pose : quels effets pourrait avoir une formation autour de la créativité sur les perceptions et les pratiques d'enseignantes de mathématiques ?

II - CADRE THEORIQUE

1 La créativité didactique

La notion de « créativité didactique », mobilisée par Terzidis (2020), renvoie à la « faculté de l'enseignant de répondre à une situation donnée (adaptation au contexte) de façon nouvelle (pour l'enseignant lui-même ou pour l'enseignement en général), flexible et efficiente » (Terzidis, 2019, p. 504).

Dans le présent article, nous retenons une adaptation de la définition proposée par Lubart (2003) afin de préciser la créativité didactique en mathématiques comme la « capacité d'un enseignant à construire des situations didactiques nouvelles et adaptées » susceptibles de favoriser l'expression de la créativité mathématique des élèves. Ces situations sont considérées comme adaptées dans la mesure où elles permettent l'enseignement et l'apprentissage de notions mathématiques spécifiques tout en sollicitant la créativité des élèves. Elles sont originales dans la mesure où elles introduisent une nouveauté — pour l'enseignant, pour les élèves ou pour l'enseignement en général. La créativité didactique est ainsi envisagée comme une compétence au service de la créativité mathématique à développer chez l'élève.

2 La créativité mathématique

Selon Puozzo et Wentzel (2016), la créativité se manifeste chez l'élève lorsqu'il parvient à répondre à certaines contraintes tout en produisant une nouveauté. En mathématiques, Silver (1997) l'envisage comme une disposition face aux tâches, mobilisant des composantes telles que la fluidité, la flexibilité, l'originalité et l'adaptabilité (Guilford, 1967). Dans la même perspective, Bicer (2021) définit la créativité mathématique comme la capacité des élèves à générer des idées, procédures ou productions nouvelles pour eux, en identifiant et sélectionnant des modèles mathématiques pertinents. C'est cette dernière définition qui est retenue ici, car elle permet d'analyser en classe des manifestations de créativité à un niveau cohérent avec les connaissances et les acquis des élèves. Mais éduquer à la créativité en classe ne s'avère pas toujours facile.

3 La difficulté d'éduquer à la créativité

Cropley (2010) met en évidence un paradoxe : les enseignants valorisent la créativité dans leurs discours, mais perçoivent souvent négativement les élèves créatifs en pratique, en raison de leurs comportements associés. Runco (2015) attribue ce décalage non pas aux enseignants eux-mêmes, mais aux contraintes du système éducatif : classes surchargées, objectifs centrés sur des compétences conventionnelles, organisation stricte, notation favorisant la motivation extrinsèque, faible marge pour l'autonomie ou l'humour, et une réticence à prendre des risques. Ces facteurs rendent, selon lui, l'expression de la créativité en classe particulièrement difficile. Pourtant, dans la littérature scientifique, plusieurs tâches permettent de stimuler la créativité des élèves, notamment en mathématiques.

4 Des tâches mathématiques propices à la stimulation de la créativité

Il existe plusieurs techniques visant à générer de nouvelles idées, comme le brainstorming inventé par le publicitaire américain Osborn dans les années 1940, la méthode TRIZ, les six chapeaux de de Bono, les cartes heuristiques de Tony Buzan (Dortier, 2015).

Le lien entre la créativité et les mathématiques est surtout retrouvé dans la littérature scientifique dans le cadre de la résolution de problèmes (Pochon, 2008 ; Pehkonen, 1997), mais aussi et surtout, de la construction de problèmes et des tâches qui font appel à la pensée divergente (Guilford, 1967).

Les « open-ended problems » (OEP) (problèmes ouverts) et les techniques de résolution inventive de problèmes (TRIZ) sont mises en relation directe avec le développement de la créativité des élèves en classe de mathématiques. Pour Pochon (2008), créativité, apprentissage et résolution de problèmes mathématiques sont les facettes d'un même fonctionnement cognitif. Toutefois, Pehkonen (1997) met en garde contre le risque d'enseigner les méthodes de la résolution créative des problèmes en faisant appliquer de nouveaux algorithmes aux élèves, ce qui ôterait à l'enseignement-apprentissage toute créativité.

5 La pédagogie de l'erreur

Astolfi (1997) invite à un changement de perspective en voyant, en l'erreur, une source d'information plutôt qu'une faute digne de culpabilisation. Ainsi, il en fait un outil pour enseigner, « les symptômes intéressants d'obstacles auxquels la pensée des élèves est affrontée » (p. 15), « le témoin des processus intellectuels en cours » (p. 22) et il va même jusqu'à lui accorder la valeur d'être créatrice : « Les erreurs des élèves sont créatrices, juste décalées d'une norme qu'ils n'ont pas encore intégrée » (p. 27). Favre (2019) fait écho à cette vision, invitant les enseignants à *décontaminer* l'erreur de la faute.

6 La taxonomie de Bloom révisée (Anderson et Krathwohl, 2001)

La taxonomie de Bloom révisée (Anderson et Krathwohl, 2001, cités par Stockless et al., 2019) place la créativité au niveau taxonomique le plus élevé de l'apprentissage.

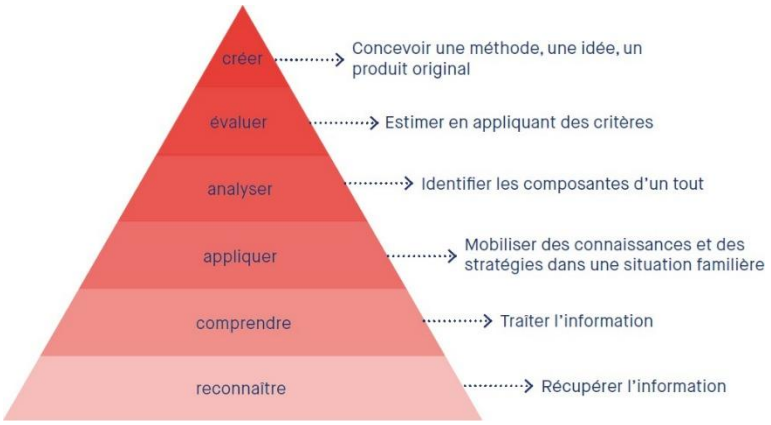


Figure 1. Taxonomie de Bloom révisée. Stockless et al., 2019, p. 19

De leur côté, Gras et Bodin (2017) mettent en place une taxonomie pour les énoncés mathématiques où la créativité fait aussi partie des processus cognitifs les plus avancés, après la connaissance et la reconnaissance, la compréhension et l'application, et juste avant le jugement (figure 2). Loin d'être en contradiction avec l'enseignement-apprentissage des mathématiques, la créativité se situe donc parmi les niveaux taxonomiques les plus élevés.

	Catégorie générale		Sous-catégorie
A	Connaissance et reconnaissance	A1	des faits
		A2	du vocabulaire
		A3	des outils
		A4	des procédures
B	Compréhension	B1	des faits
		B2	du vocabulaire
		B3	des outils
		B4	des procédures
		B5	Des relations
		B6	Des situations
C	Application	C1	Dans des situations familières simples
		C2	Dans des situations familières moyennement complexes
		C3	Dans des situations familières complexes
D	Créativité	D1	Utiliser dans une situation nouvelle des outils et des procédures connus
		D2	Émission d'idées nouvelles
		D3	Création d'outils et de démarches personnelles
E	Jugement	E1	Production de jugements relatifs à des productions externes
		E2	Auto-évaluation

Figure 2. Forme réduite de la taxonomie de Gras et Bodin (2017), p. 509

La figure ci-dessous (Lebrun, 2007, p. 27) permet de lire, en axe vertical, les compétences de haut niveau selon la taxonomie de Bloom, soutenues par les quatre formes du savoir, représentée sur l'axe horizontal : savoir, savoir-faire, savoir-être et savoir-devenir. Lebrun (2007) se base ici sur la taxonomie initiale de Bloom, dans laquelle c'est la compétence « évaluer » qui apparaît au niveau le plus élevé. En nous référant à la taxonomie révisée (Anderson et Krathwohl, 2001) où c'est la compétence « créer » qui se situe au niveau le plus élevé, nous pouvons conjecturer que c'est surtout le savoir-devenir qui intervient dans la manière dont un enseignant ou un élève engage sa créativité au cœur de son enseignement-apprentissage.

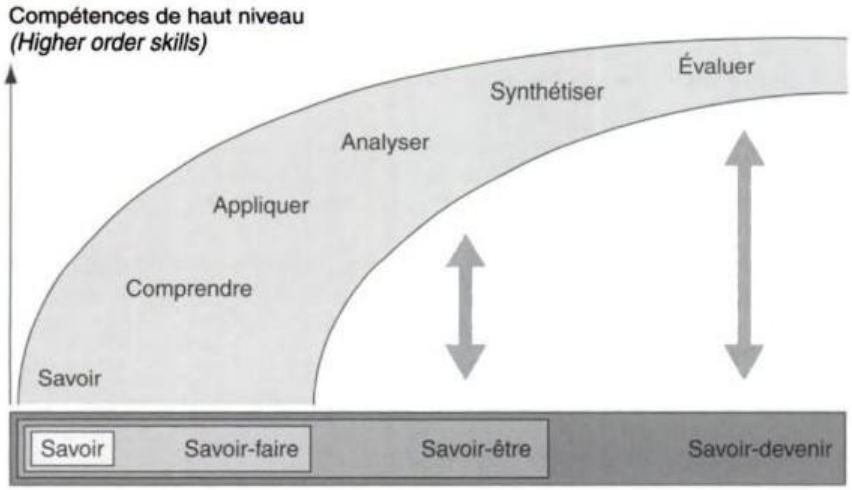


Figure 3. Les savoirs, savoir-faire, savoir-être et savoir-devenir pour le développement des compétences

III - METHODE

1 Contexte

Dans le contexte d'une recherche doctorale, une formation est assurée à deux enseignantes de

mathématiques : Maryam, enseignante de mathématiques d'une classe de 6e (11 ans) de 26 élèves et Maryna, enseignante de mathématiques d'une classe de 4e (13 ans) de 29 élèves. La durée de la formation est de huit séances de deux heures chacune, réparties sur huit semaines, une séance par semaine. Cette formation a pour objectif de familiariser les participantes avec les concepts de créativité et de les accompagner pour mettre en place des tâches propices aux développement de la créativité mathématique de leurs élèves en classe. Basée sur un matériel généreusement partagé par la spécialiste en créativité, Mme Amalia Terzidis, le contenu de la formation est mis en place. Il comporte, à chaque séance, un temps d'apprentissage où les enseignantes approfondissent leurs connaissances théoriques autour de la créativité, un temps de d'échange de pratiques et finalement un temps de préparation de la séance suivante. Par manque de temps, mais aussi à cause de la réticence des enseignantes surtout au début, c'est la formatrice-chercheure qui propose les tâches.

2 Posture de recherche

La question de recherche posée pourrait induire un éventuel questionnement autour de liens de causalité entre la créativité didactique (CD) des enseignants et la créativité mathématique (CM) des élèves.

En fait, cette recherche ne se veut pas explicative, pour plusieurs raisons :

- L'effectif des participants étant réduit, nous aspirons à obtenir des résultats transférables, mais pas nécessairement généralisables.
- Il nous semble qu'une période de quelques mois n'est pas suffisante pour permettre un développement de la créativité, que ce soit didactique ou mathématique.
- Enfin, la littérature scientifique recensée n'établit pas de lien direct de causalité entre les deux formes de créativité : didactique de l'enseignant et mathématique de l'élève.

La posture adoptée est donc compréhensive interprétative où il sera surtout question d'analyser le cheminement effectué par les enseignantes en formation et les élèves participants, afin de comprendre comment la créativité pourrait s'exprimer dans le contexte scolaire assez particulier qu'est l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

3 Objectifs de recherche

Les objectifs de recherche sont au nombre de trois que nous explicitons ci-dessous :

- O1 : Former des enseignants de mathématiques à la créativité, en particulier, la créativité didactique et la créativité mathématique.
- O2 : Accompagner les enseignants de mathématiques participant à l'étude dans la conception tâches favorisant l'expression de la créativité mathématique des élèves.
- O3 : Analyser les tâches conçues à l'aide des critères relatifs à la créativité.

Ainsi, suivant ce modèle, la formation est conçue de manière itérative : d'abord, une séance de formation, d'échange et de préparation avec les enseignantes participantes. Ensuite, chacune des enseignantes anime dans sa classe une séance de mathématiques observée par la formatrice-chercheure et pendant laquelle les tâches conçues, deux semaines plus tôt, sont réalisées auprès des élèves. Un temps d'analyse où la formatrice-chercheure analyse les séances d'observation et ajuste le matériel de formation en fonction des besoins émergeants du terrain.

IV - RESULTATS

1 Des tâches simples à appliquer

À l'issue de chacune des huit séances de formation, un temps de préparation est prévu pour mettre en place une tâche à faire réaliser par les élèves lors de l'une des semaines suivantes. Faute de temps, c'est la formatrice-chercheure qui propose les tâches dont trois seront présentées ci-dessous.

1.1 Problème ouvert :

Après avoir présenté aux enseignantes les deux pensées, convergente et divergente, toutes deux indispensables dans toute démarche créative, elles se rendent compte combien les questions qu'elles posent sont fermées, et sollicitent la pensée convergente, plutôt que la pensée divergente. Elles s'appuient ainsi sur les supports mis à leur disposition pour formuler des questions. Celles-ci peuvent être fermées, appelant une réponse unique, ou ouvertes, sollicitant une diversité de réponses de la part des élèves.

Ainsi, Maryam part de la question fermée suivante : « Calculer la longueur de la clôture nécessaire pour entourer le jardin » où le jardin est représentée par un triangle ABC. Elle formule la question ouverte suivante : « J'imagine un objet qui a la forme d'un triangle dont le périmètre est égal à 12 cm. Je trace ce triangle et je donne sa nature ».

Maryna part de la question fermée suivante, prise du manuel Théma, EB8, page 98, exercice II (figure 4). La longueur à calculer est celle d'un triangle rectangle dont les deux autres dimensions sont données. Elle formule la question ouverte suivante : « Imaginer un objet (jardin, équerre ou quoi que ce soit d'autre) qui a la forme d'un triangle rectangle et dont l'hypoténuse mesure 10 unités. L'unité est à préciser par chaque élève. Déterminer les dimensions de cet objet en justifiant par les calculs nécessaires. »

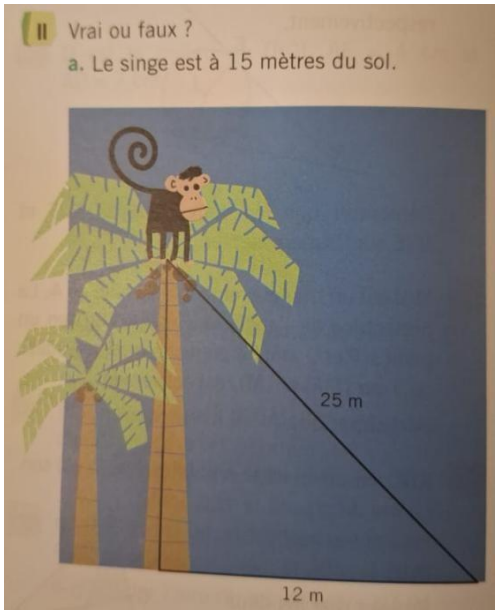


Figure 4. Théma, EB8, page 98, exercice II

Les tâches sont réalisées par les élèves en classe et donnent lieu à une multitude de réponses. Suite à cela, lors de la rencontre suivante avec les enseignantes, celles-ci ne cachent pas leur enthousiasme. « Ça a l'air si simple, mais l'effet est magique » (Maryna). « Les élèves m'ont étonnée. Le triangle de billiard, le cornet de glace, le cerf-volant ! trop de belles idées ! ». Certes, plusieurs des productions des élèves présentaient des erreurs, mais ce qui est évident, c'est que chacun a pu présenter une production nouvelle, unique, souvent en lien avec ses intérêts, adaptée aux apprentissages visés : le calcul du périmètre, la nature et la construction d'un triangle en 6e d'une part, et d'autre part, l'application du théorème de Pythagore en classe de 4e.

1.2 Problème sans énoncé :

Une autre tâche proposée aux élèves est celle de construire un problème. La consigne est la suivante :

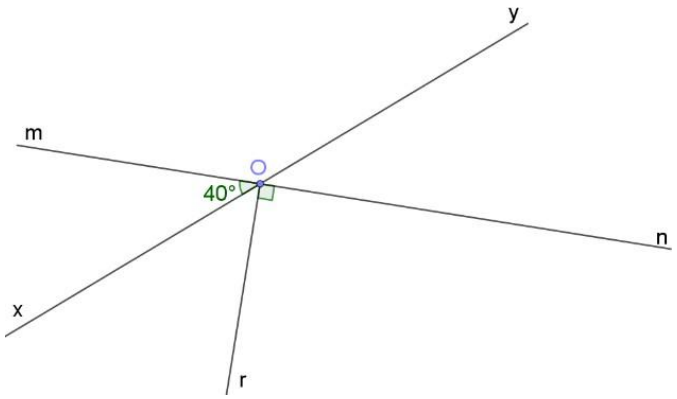


Figure 5. Début de figure pour le problème sans énoncé en 6ème

« En partant de la figure ci-dessus, inventer un problème de géométrie qui fait appel aux notions apprises en classe cette année ».

En 6ème, la figure proposée aux élèves est la Figure 5 ci-dessus. En 4ème, la figure proposée aux élèves est un cercle. Ils ont le droit d'ajouter les points et tous les éléments qu'ils veulent pour inventer eux-mêmes un problème. Les retours d'expérience sont très positifs, du côté des élèves : « j'ai aimé qu'on peut ajouter tout ce qu'on veut sur la figure » (Anaïs, 6e), « chacun avait une idée, mais on réfléchissait ensemble pour rendre les questions plus intéressantes » (Michel, 4e), « pour mettre une question dans le problème, il faut d'abord la résoudre » (Chloé, 4e). Du côté des enseignants, l'expérience n'est pas moins motivante. L'évolution de leur conception de la créativité est visible. Elles passent de « les élèves ne vont pas être intéressés si ce n'est pas noté » (Maryam) – et nous pouvons entendre « je ne suis pas intéressé de fournir un effort si ce n'est pas rémunéré par une note » – à « les élèves ont aimé » – et nous pouvons entendre « eh bien, cela vaut le coup ! ».

1.3 Erreurs inventées, erreurs évitées :

En préparation à l'évaluation prochaine, une tâche est mise en place par les enseignantes en formation, en collaboration avec la formatrice-chercheure. La consigne est la suivante : « J'invente les erreurs que je risque de faire demain, pour mieux les éviter ». Il s'agit pour les élèves de feuilleter chacun son cahier de mathématiques, en individuel, d'y repérer une ou plusieurs erreurs fréquentes. Un temps de mise en commun en binôme suit le travail individuel. Par la suite, chaque binôme invente une méthode pour partager, avec leurs camarades, les erreurs à éviter. Enfin, chaque binôme présente, en moins d'une minute, ce qu'il a préparé devant toute la classe. Les élèves, encore une fois, proposent des réponses assez diversifiées et riches : certains présentent un jeu de rôle entre une maman et son enfant le matin de l'évaluation, d'autres dessinent une BD « Le hibou et l'âne » où l'âne débite des erreurs et le hibou s'en étonne, d'autres inventent une interview avec Pythagore, etc.

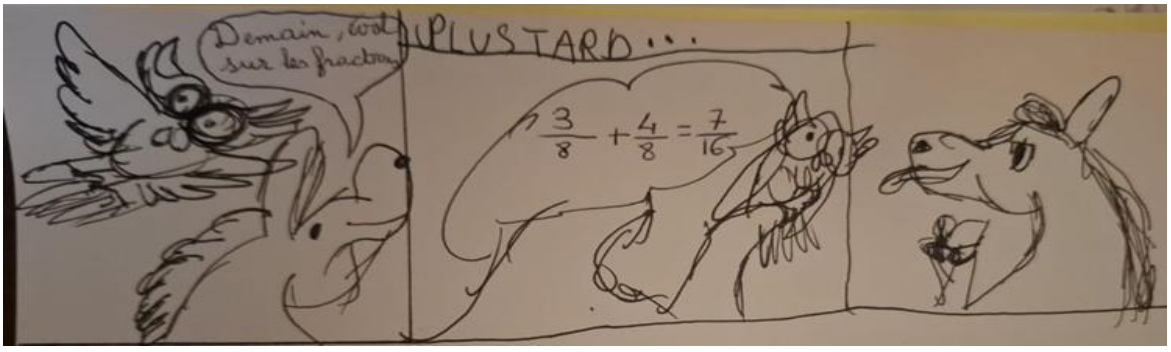


Figure 6. Production d'un groupe en classe de 6e : BD « Le hibou et l'âne »

Pinocchio gaffe en maths : conte raconté par les deux élèves E1 et E2 (en 4e)

E1 : Il était une fois, un petit pantin qui s'appelait Pinocchio. Pinocchio aimait beaucoup les maths, mais il faisait quelques erreurs parfois : quand il devait vérifier si un triangle ABC était rectangle en A, il commençait par écrire $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

E2 : Ah ! mais la semaine prochaine, je ne ferai pas son erreur ! je calculerai BC^2 d'une part, et $AB^2 + AC^2$ d'autre part ! et Pinocchio, il faisait aussi une autre erreur ! Figurez-vous ! il a écrit que $1 - (2x - 3) = 1 - 2x - 3$

E1 : Ah ! Mais la semaine prochaine, je ne ferai pas son erreur ! je changerai le signe de chacun des termes entre parenthèses !

E1 et E2 : et il grandit et fit encore beaucoup d'erreurs !

Figure 7. Production d'un groupe en classe de 4e : un conte

2 Des tâches plus faciles à appliquer qu'à mettre en place

Depuis le début de la formation, la formatrice-chercheure demande aux enseignantes de venir aux rencontres hebdomadaires avec des idées qui pourraient aboutir à des tâches propices à la stimulation de la créativité mathématique des élèves. Le manque de temps des enseignantes et leur manque de familiarité avec ce qui leur est demandé font que la plupart des temps, elles arrivent avec des excuses. La formatrice-chercheure propose la tâche du problème ouvert, puis celle du problème sans énoncé en second. À la demande de propositions la semaine suivante, Maryam trouve : « pourquoi ne pas inventer un problème cette fois en algèbre plutôt qu'en géométrie ? ». Mais, cela dénote-t-il vraiment une créativité didactique chez Maryam ? Cette proposition ne relève pas, en effet, d'une véritable création mais, bien plutôt, d'une simple application et réplication à l'identique de ce qui a déjà été réalisé.

3 Des tâches qui engagent un niveau taxonomique élevé chez les élèves

Les tâches proposées, au fur et à mesure que la formation est donnée, sont perçues par les enseignantes comme intéressantes. Si, au début, l'idée de la créativité – didactique ou mathématique soit-elle – leur semblait farfelue, cela n'était plus vrai par la suite. En effet, les tâches proposées aux élèves sont du niveau de la synthèse, de la métacognition et du jugement. Répondre à la question ouverte requiert que les élèves de 6e aient des connaissances relatives à la nature d'un triangle, au périmètre d'un triangle et qu'ils sachent construire un triangle. En classe de 4e, cela requiert que les élèves sachent appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle. La tâche du problème sans énoncé exige que les élèves sachent, au préalable, résoudre eux- mêmes un problème de géométrie, mettant en œuvre divers théorèmes à cette fin. « Pour mettre une question dans le problème, il faut d'abord la résoudre » (Chloé, 4e). Au-delà des connaissances et des applications, il est demandé aux élèves d'accéder à un niveau supérieur, celui de la synthèse, du jugement et de la métacognition, rendue possible principalement lors de la tâche « erreurs inventées, erreurs évitées ». Cela, les enseignantes s'en rendent compte. Cela leur permet de passer d'une attitude de réticence où la peur de ne pas terminer le programme les hante, à une motivation intrinsèque, celle de découvrir le plaisir, l'engagement et la créativité mathématique des élèves en classe. « L'élève est capable de découvrir plein de choses auxquelles peut-être on ne s'attend pas » (Maryam), « j'ai beaucoup aimé quand les élèves ont été capables de donner une évaluation objective sur leur propre travail » (Maryam), « j'ai senti que la créativité des élèves a boosté ma propre créativité » (Maryna).

V - DISCUSSION

1 Construction de tâches

La problématique initiale de ce projet portait sur les effets potentiels d'une formation à la créativité sur les perceptions et les pratiques d'enseignantes de mathématiques. L'enjeu consistait à intégrer la créativité au sein même de l'enseignement des mathématiques, en lien direct avec le curriculum, plutôt que de la considérer comme un ajout périphérique. Dans cette perspective, la construction de tâches favorisant la créativité mathématique des élèves nous a semblé un passage incontournable, tout en restant conforme aux objectifs fixés par le programme. Les tâches élaborées témoignent ainsi d'une certaine créativité, en ce qu'elles présentent simultanément des caractères de nouveauté et d'adaptation. Nous avons tout de même trouvé de la difficulté à ce que les enseignantes participantes réalisent elles-mêmes de telles activités. Il est possible que cette difficulté provienne du manque de familiarité qu'elles ont avec la créativité, ou de leur surcharge de travail ou pour d'autres raisons que nous ignorons. Conformément à Pochon (2008), qui considère créativité, apprentissage et résolution de problèmes mathématiques comme les facettes d'un même fonctionnement cognitif, ce projet a permis d'expérimenter la construction et la résolution de problèmes ouverts en tant que voies privilégiées pour stimuler la créativité mathématique des élèves. Toutefois, à l'instar de la mise en garde de Pehkonen (1997), il existe un risque que ces tâches se transforment en modèles reproductibles, ce qui viendrait réduire, voire annuler, leur dimension créative du point de vue de l'enseignant.
Le fait de parler de leurs erreurs en classe de mathématiques a offert aux élèves une véritable expérience de métacognition, au cours de laquelle ils ont pu faire preuve de créativité, tant dans le choix des erreurs à éviter que dans la manière de les présenter à l'ensemble de la classe. Or, un élève qui craint de se tromper se trouve dans l'impossibilité de prendre des risques, alors même que cette attitude constitue une condition essentielle de la créativité (Barbot & Lubart, 2012). La tâche « erreurs inventées, erreurs évitées » a ainsi placé les enseignantes dans une posture favorisant, grâce à leur ouverture d'esprit, la prise de risque par les élèves, ne serait-ce qu'à travers la simulation d'une erreur à éviter.

2 Évolution de la créativité didactique des enseignantes

Nous avons observé des moments de véritable jubilation, témoignant de la manifestation authentique du plaisir et de la motivation intrinsèque des enseignantes. Comme la créativité touche également aux savoir-être et au savoir-devenir (Lebrun, 2007), le facteur temps apparaît essentiel pour permettre une intériorisation réelle de la créativité didactique, ce qui rend légitime la question de la durée de la formation. À cet égard, il convient de nuancer la citation de Beghetto (2021), selon laquelle les enseignants n'auraient ni le temps, ni l'autonomie, ni les compétences, ni la formation, pour intégrer la créativité en classe. Si l'on considère la créativité didactique comme une compétence professionnelle à développer, et en la replaçant dans la taxonomie révisée d'Anderson et Krathwohl (2001), il semble que les enseignantes aient progressé sur plusieurs niveaux — reconnaître, comprendre, appliquer, analyser, et même évaluer. Elles ont acquis des notions sur la créativité et ont été capables d'évaluer celle de leurs élèves à travers leurs productions. Toutefois, elles n'ont pas véritablement atteint le niveau taxonomique le plus élevé, celui de « créer » : jusqu'à la fin du projet, elles ont rencontré des difficultés à concevoir des tâches favorisant la stimulation de la créativité mathématique de leurs élèves.

VI - CONCLUSION

En somme, cette étude met en lumière l'apport d'une formation à la créativité pour deux enseignantes de mathématiques, en renforçant leurs connaissances sur la créativité. Il est vrai que celles-ci ont eu du mal à entrer dans la créativité didactique, notamment, à concevoir des tâches nouvelles et adaptées, favorables à la stimulation de la créativité mathématique des élèves. Néanmoins, il semble qu'elles ont évolué dans leur perception de la créativité en classe de mathématiques et elles ont même apprécié

l'expérience. Cette étude est un exemple où, former les enseignantes à la créativité favorise l'émergence de tâches nouvelles et adaptées, bénéfiques pour elles comme pour leurs élèves. Si les bénéfices apparaissent moindres du côté du savoir-devenir, les retours d'expérience soulignent néanmoins des effets positifs tant pour les enseignantes que pour leurs élèves, confirmant ainsi la pertinence d'intégrer la créativité au cœur de l'enseignement-apprentissage des mathématiques.
Limitée au cadre d'un projet de huit semaines, nous ne pouvons pas affirmer si cette expérience a été suffisante pour assurer un développement durable de la créativité chez les participants. Il serait en tout cas intéressant de prolonger cette dynamique dans le temps, afin que la créativité ne soit pas réduite à un exercice ponctuel et devienne une véritable manière d'enseigner et d'apprendre.

VII - REFERENCES

Anderson, L. W., et Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: complete edition*. Addison Wesley Longman, Inc.

Astolfi, J. P. (1997). L'erreur, un outil pour enseigner.

Barbot, B., & Lubart, T. (2012). Adolescence, créativité et transformation de Soi. *Enfance*, *3*(3), 299-312.

Beghetto, R. A. (2021). Creative learning in education. In *The Palgrave handbook of positive education* (pp. 473-491). Cham : Springer International Publishing.

Besançon, M., Barbot, B., & Lubart, T. (2011). Évolution de l'évaluation de la créativité chez l'enfant de Binet à nos jours. *Recherches & éducations*, (5), 215-226.

Besançon, M., Georgsdottir, A. S., & Lubart, T. I. (2005). La créativité, son développement et l'école. *Diversité*, *140*(1), 47-54.

Bicer, A. (2021). A Systematic Literature Review: Discipline-Specific and General Instructional Practices Fostering the Mathematical Creativity of Students. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(2), 252-281.

Cropley, A. J. (2010). Creativity in the classroom: The dark side. In D. H. Cropley, J.C. Kaufman, A. J.Cropley,&M. Runco (Eds.), Creativity : The dark side. New York, NY : Cambridge University Press.

Dortier, J. (2015) . Qu'est-ce que la créativité ? Les Grands Dossiers des Sciences Humaines, N° 38(3), 19-

19. https://ezproxy.usj.edu.lb:2069/10.3917/gdsh.038.0019.

Favre, D. (2019). Chapitre 15. Décontaminer l'erreur de la faute dans les apprentissages. Transformer la violence des élèves. Cerveau, motivations et apprentissage. (p. 195-217). Dunod.
https://ezproxy.usj.edu.lb:2958/transformer-la-violence-des-eleves--9782100801152-page-195?lang=fr

Gras, R., & Bodin, A. (2017). L'ASI, analyseur et revelateur: de la complexite cognitive taxonomique ASI, analyser and developer: of taxonomic cognitive complexity. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *19*(1).

Guilford, J. P. (1967). Creativity: Yesterday, today and tomorrow. *The Journal of Creative Behavior*, *1*(1), 3-14.

Lebrun, M. (2007). Théories et méthodes pédagogiques pour enseigner et apprendre : quelle place pour les TIC dans l'éducation ? Bruxelles : De Boeck Université.

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2020). *Bulletin officiel de l'Éducation nationale, n° 31 du*

30 juillet 2020. Paris : MENJ. https://www.education.gouv.fr

Puozzo, I. C., & Wentzel, B. (2016). Créativité et réflexivité : vers une démarche innovante de formation des enseignants. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, (197), 35-50.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM*, *29*(3), 63-67.

Pochon, L. O. (2008). Créativité et résolution de problèmes. *Résonances*, *4*(7).

Runco, M. A. (2015). Meta-creativity: Being creative about creativity. *Creativity Research Journal*, *27*(3), 295-298.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *29*(3), 75-80.

Stockless, A., Carbone, C., Potvin Rosselet, E. Bisaillon, J., Malé-Mole, L., Allard Martin, D et Hottote, L. (2019). *Classe du futur. Un projet interdisciplinaire pour réfléchir aux espaces d'apprentissage actif en enseignement universitaire*. UQAM, Montréal, 65 p. archipel.uqam.ca/13541/

Terzidis, A. (2019). La créativité, un objet de formation des enseignants? Une enquête dans une Haute école pédagogique. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, *41*(2), 501-521.

Terzidis, A. (2020). La créativité didactique pour sortir des classes, des manuels, des habitus de l'enseignement de l'Histoire. *Didactica Historica*, 1-10.

DÉVELOPPER DES CONNAISSANCES SPATIALES AU CP : D'UN ATELIER DE LA COPIRELEM À UNE RESSOURCE EN LIGNE

Floriane WOZNIAK
Professeure des universités, université de Montpellier
IMAG, IRES de Montpellier, groupe premier degré
floriane.wozniak@umontpellier.fr

Sophie GASTAL
Professeure des écoles, RMC, école A. Boulloche, Montpellier
IRES de Montpellier, groupe premier degré
sophie.gastal@ac-montpellier.fr

Matthieu LAFON
Professeur des écoles, école F. Roosevelt, Montpellier
IRES de Montpellier, groupe premier degré
matthieu.lafon@ac-montpellier.fr

Résumé
Ce texte présente une séquence autour du repérage dans le micro-espace au cycle 2 fondée sur des situations d'émission-réception avec productions de messages verbaux ou écrits. Cette suite de cinq séances a été conçue par le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier à la suite d'une participation à un atelier de la COPIRELEM (Marchand, Braconne-Michoux, 2014). Elle est diffusée comme ressource en ligne pour la banque de séquences didactiques (BSD) de Canopé.
Le texte présente le processus de conception de la ressource et les choix didactiques réalisés. Il explicite comment les besoins praxéologiques des professeurs (Wozniak, 2019) identifiés pour enseigner les connaissances spatiales liées au repérage dans un micro-espace au cycle 2 sont pris en charge. Les effets sur l'apprentissage des élèves sont abordés à partir de l'évolution de leurs productions tandis que la conclusion revient sur la dimension formatrice de la ressource.

À la suite d'un atelier de la COPIRELEM (Marchand, Braconne-Michoux, 2014), le groupe[1] « premier degré » de l'IRES de Montpellier a décidé de travailler sur l'enseignement des compétences spatiales et en particulier le repérage dans le micro-espace au cycle 2. Ce texte, organisé en trois parties, présente la séquence « se repérer dans le micro-espace » mise en ligne[2] sur le site de la banque de séquences didactiques de Canopé qui découle de ce travail. La première partie présente le contenu de l'atelier de la COPIRELEM qui a été le point de départ de notre réflexion, nos premiers questionnements et leur pertinence au regard des programmes d'enseignement du cycle 2. La deuxième partie explicite comment le processus de conception de la séquence, fondé sur un cycle d'expérimentations et d'analyses, a permis d'identifier les déterminants didactiques (Hersant, 2011) qui assurent la robustesse de la situation. Révéler les éléments déterminants de la séquence permet de prendre en charge les besoins praxéologiques des professeurs (Wozniak, 2019) pour enseigner les connaissances spatiales liées au repérage dans un micro-espace au CP. C'est ainsi qu'il a été possible de développer la dimension

[1] Les membres du groupe lors de la conception de cette séquence étaient : Sonia Bayle, Samuel Causse, Anne Cortella, Virginie Dalmayrac, Deva Dauriac, Sophie Gastal, Hervé Gensac, Laëtitia Granier, Corinne Gruel, Émilie Jaudon, Matthieu Lafon, Sylvie Passet, Crystèle Pouget, Florence Valour, Floriane Wozniak.

[2] https://www.reseau-canope.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=886173

formatrice de la ressource initiale en s'appuyant sur la complémentarité des vidéos de situations de classe, des entretiens et des textes qui présentent la séquence et ses enjeux. La troisième partie montre comment l'évolution des productions des élèves atteste de leur appropriation des enjeux d'apprentissage au cours de la séquence. Enfin, la conclusion revient sur la dimension formatrice de la co-construction de la séquence et de sa diffusion en ressource, ainsi que sur l'usage en formation de cette ressource dans le cadre du plan « mathématiques » en constellation.

I - À L'ORIGINE DU PROJET, UN ATELIER DE LA COPIRELEM EN 2013

1 Un atelier autour d'une « boîte à image »

L'atelier présenté par Marchand Patricia et Braconne-Michoux Annette s'intitulait : « Quels types d'activités permettent de développer les connaissances spatiales chez les élèves du primaire ? Le cas de la boîte à image ». Il visait à soumettre aux participants des activités pour des élèves de cycle 2 (CP et CE1) dont les objectifs étaient de favoriser le développement de compétences spatiales. Ces activités reposaient sur un dispositif : « la boîte à image ». Il s'agissait d'une boîte en carton avec un trou par lequel on pouvait observer des objets fixés représentant une saynète (figure 1).



Figure 1. Boîte à images (Marchand, Braconne-Michoux, 2014).

L'atelier proposait ainsi quatre séances, chacune autour d'une activité particulière :

- La construction des saynètes et leur description ;
- Un jeu de devinettes pour retrouver une boîte à partir de la description de la saynète ;
- Le dessin de la saynète vu depuis le trou de la boîte ;
- Le dessin du contenu de la boîte vu depuis un trou imaginaire dans la boîte.

La richesse de la situation de la boîte à image a ainsi pu être expérimentée par les participants à l'atelier et a généré l'envie des membres du groupe IRES qui y ont assisté de la mettre en œuvre dans leur classe.

2 Le travail du groupe IRES de Montpellier à partir de cet atelier

Assez rapidement, après la présentation de l'atelier à l'ensemble du groupe, des fiches de préparation de séances ont été rédigées et les activités expérimentées dans différentes classes. Selon le mode de fonctionnement du groupe IRES de Montpellier (voir la section II. 2.2.), les expérimentations répétées ont conduit à des modifications et des ajustements successifs.

2.1 Les points clés discutés, l'exemple des objets dans la boîte

L'observation et l'analyse des séances expérimentées ont amené les membres du groupe IRES de Montpellier à discuter différents points clés que nous énumérons :

- Les types de tâches à réaliser : construire, décrire, représenter ;
- La nature des objets utilisés et représentés ;
- L'espace de travail ou l'espace représenté en lien avec les notions de micro, méso, macro-espace ;
- Les modes de représentation ;
- La trace écrite, l'évaluation et les prolongements possibles de la séquence.

- La mise en œuvre d'une situation d'émission-réception.

Afin d'illustrer les questionnements qui ont nourri l'élaboration de la séquence finale, nous nous attardons à présent sur la question du matériel, et plus particulièrement sur les objets présents dans la boîte.

La séquence d'origine proposait de travailler avec des objets de type Playmobil (figure 1) ou des animaux marins fabriqués en pâte à modeler par les élèves. Le dessin du contenu de la boite était difficile à réaliser. Les animaux étant orientés, la description du contenu de la boîte conduisait à des expressions langagières comme « à la droite du personnage » ou « à droite du personnage » qui généraient beaucoup d'incompréhensions pour des élèves du cycle 2. Difficultés qui gênaient les apprentissages visés.

C'est ainsi que nous avons d'abord choisi des objets non orientés, faciles à trouver dans une classe : deux cubes, une allumette et une boule de pâte à modeler (figure 2).



Figure 2. Deux cubes, une allumette et une boule de pâte à modeler.

Cependant, la représentation de ces objets restait difficile pour les élèves qui dessinaient dans le même schéma des vues de face et des vues de dessus. C'est ainsi que nous avons décidé d'utiliser 4 cubes colorés. Ce sont des objets non orientés, présents dans les classes et dont la représentation dessinée en vue de face ou de dessus est un carré. La représentation était ainsi clairement simplifiée pour les élèves.

Finalement, la séquence, ainsi conçue, reprend l'idée de l'observation du contenu d'une boîte fermée (des cubes colorés) par un trou que nous nommons porte lorsque la boîte est fermée ou par le dessus lorsque la boîte est ouverte. Si les membres du groupe IRES premier degré de Montpellier ont souhaité travailler sur les compétences spatiales à travers ces activités, c'est qu'elles sont présentes dans les programmes du cycle 2, en dépit des multiples changements depuis le début de nos expérimentations.

2.2 Les compétences spatiales des programmes.

Alors que de nouveaux programmes du cycle 2 entrent en vigueur en septembre 2025, la séquence reste en conformité avec les instructions officielles, tant dans le domaine « questionner le monde » que dans celui des mathématiques qui contient une section « repérage dans l'espace » au sein de la rubrique « Espace et géométrie ». Ainsi, « Les élèves consolident les compétences développées au cycle 1 pour décrire des positions et des déplacements en utilisant différents types de repères, en se limitant à l'espace de la classe. » (M.E.N.J.S, 2024, p. 32).

On peut relever les différents objectifs d'apprentissages pour le CP et le CE1 :

- Connaitre et utiliser le vocabulaire lié aux positions relatives.

- Situer des personnes ou des objets les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères dans la classe[3]*.*

- Construire et utiliser des représentations de la classe pour localiser, mémoriser et communiquer un emplacement[4]*.* (M.E.N.J.S., 2024, p. 33)

L'opportunité nous a été donnée de partager notre travail en proposant une séquence pour le réseau Canopé, c'est ce que nous présentons à présent.

II - LA RESSOURCE « REPÉRÉR DANS LE MICRO-ESPACE »

Avant de présenter la ressource en ligne sur le site de la Banque de séquences didactiques de Canopé, nous présentons la séquence conçue par le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier.

1 La séquence du groupe premier degré de l'IRES de Montpellier

La séquence consiste à décrire verbalement ou à dessiner le contenu d'une boîte afin qu'un élève puisse reproduire ce contenu sans l'avoir vu préalablement. Cette boîte possède un couvercle qui laisse passer la lumière grâce à une ouverture obstruée avec du papier calque et une « porte » sur une face latérale. Les objets dans la boîte sont des cubes de couleur fixés avec une pâte à fixer (voir figure 3).

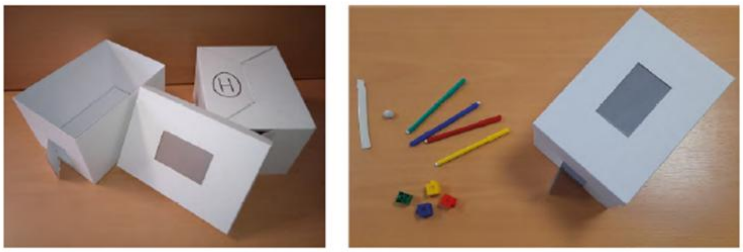


Figure 3. Le matériel de la séquence.

Le contenu de la boîte peut ainsi être regardé en ouvrant le couvercle de la boîte selon une vue de dessus ou par la porte selon une vue de face (figure 4).

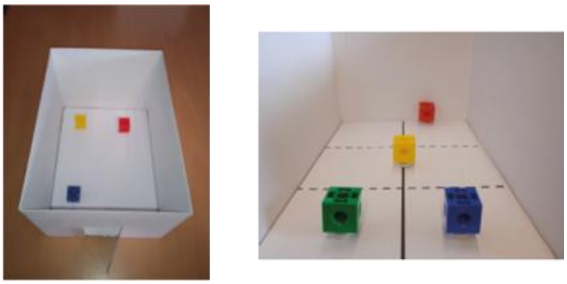


Figure 4. Vues boîte ouverte (à gauche) et boîte fermée (à droite).

Concernant les objectifs d'apprentissage, à l'issue de la séquence les élèves acquièrent du vocabulaire spatial comme à « gauche », « à droite », « au milieu » mais aussi « en haut », « en bas » lorsque la boîte est ouverte et le contenu observé en vue de dessus et « devant », « derrière » lorsque la boîte est fermée et le contenu observé en vue de face. Les situations d'émission-réception qui servent de moteur à la séquence sont par ailleurs propices à faire découvrir la nécessité de définir un repère. Durant chaque séance, les élèves en binôme produisent ou interprètent un message. Ils comprennent alors le rôle de la

[3] Pour le CE1, la formulation est légèrement différente, puisqu'il s'agit de « situer des personnes ou des objets les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères dans un espace familier. » (M.E.N.J.S, 2025, p. 35).

[4] Pour le CE1, la formulation est « Construire et utiliser des représentations d'un espace familier pour localiser, mémoriser ou communiquer un emplacement. » (M.E.N.J.S, 2024, p. 35).

porte et que deux informations sont requises selon chaque dimension du plan pour bien repérer. La séquence articule description orale, représentation dessinée et contenu des boîtes (figure 5).

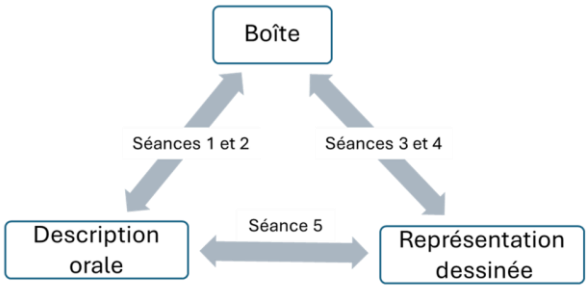


Figure 5. Articulation selon les types de messages.

Dans un premier temps, les élèves produisent des messages oraux avec la boîte ouverte (séance 1) et la boîte fermée (séance 2). Dans un second temps, ils produisent des représentations dessinées de la boîte ouverte (séance 3) et de la boîte fermée (séance 4). Enfin, dans la séance 5, les élèves interprètent la description orale d'une boîte fermée pour produire une représentation dessinée. Le tableau 1 présente l'organisation des cinq séances à partir des vues de dessus ou de face qui sont mobilisées alternativement.

	Vue de dessus (boîte ouverte)	Vue de face (boîte fermée)	
Message oral	Séance 1	Séance 2	Séance 5
Représentation dessinée	Séance 3	Séance 4	

Tableau 1. Organisation des cinq séances de la séquence selon les vues mobilisées.

L'opportunité de diffuser cette séquence dans la Banque de séquences didactiques de Canopé a amené le groupe à s'interroger sur les conditions de son appropriation au-delà du cercle de ses concepteurs et sur les descripteurs qui facilitent et permettent cette appropriation.

2 Les conditions d'appropriation d'une ressource

2.1 Les déterminants didactiques d'une situation d'enseignement

La question de la diffusion et de l'appropriation des ingénieries didactiques se pose de longue date (Artigue, 1988). Toute personne qui participe à la formation initiale ou continue des enseignants a pu faire le constat que les professeurs font des choix d'ajustements des ressources qui ne sont pas toujours étayés par des savoirs professionnels (Wozniak, 2010) et qui parfois dénaturent les situations d'enseignement au point qu'elles ne permettent plus d'acquérir les savoirs visés. Nous faisons l'hypothèse que ces ajustements sont révélateurs de besoins praxéologiques mathématiques ou didactiques des professeurs. Chevallard (2002) a introduit l'échelle des niveaux de codétermination didactique pour rendre visible l'espace des contraintes qui pèse sur les professeurs. Ce qui se fait dans la salle de classe dépend d'éléments qui dépassent ceux qui prévalent au moment où la scène se déroule. Les besoins praxéologiques des professeurs ne sont pas les manques individuels de tel professeur singulier mais les manques d'une profession. Le projet de diffusion de la séquence conduit alors à s'interroger sur la façon dont une ressource peut prendre en charge les besoins (collectifs) de la profession. Autrement dit, est-il possible qu'une ressource porte en elle une dimension formatrice ? Quels sont les descripteurs qui favorisent l'appropriation d'une séquence d'enseignement « robuste » dans le sens où elle a été suffisamment éprouvée pour qu'on puisse affirmer qu'elle produit les apprentissages qu'elle vise. Pour Hersant (2011, p. 305), « une des façons d'aborder cette problématique est d'identifier les éléments des situations qui garantissent leur robustesse par rapport au savoir, ce que nous appelons les déterminants d'une situation. ». Reste à présent à considérer la façon dont ces déterminants peuvent être identifiés. Une technique consiste à multiplier les mises en œuvre et à mettre au jour les effets sur les apprentissages

des ajustements faits par les enseignants. De ce point de vue, le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier offre une opportunité rare.

2.2 Le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier

Ce groupe est constitué de professeurs des écoles, de conseillères pédagogiques, référents mathématiques, maîtres-formateurs, d'une mathématicienne formatrice en INSPE et d'une enseignante-chercheuse didacticienne. Il n'a pas de fonctionnement hiérarchisé et chaque membre contribue à égalité à la réflexion collective qui se trouve ainsi enrichie de savoirs professionnels et universitaires. Ce groupe a aussi la particularité d'être pérenne de sorte que les expérimentations peuvent se réaliser sur un temps long (plusieurs années), dans une diversité de contexte (centre-ville, zone péri-urbaine, zone rurale) avec des publics socialement diversifiés. Les professeurs qui « testent » les situations d'enseignement peuvent être des concepteurs membres du groupe IRES ou des membres du groupe qui ne sont pas concepteurs (plusieurs projets se réalisent en parallèle et tous les membres ne travaillent pas sur les mêmes projets en même temps). Par ailleurs, la présence de conseillères pédagogiques et de formateurs facilite des expérimentations en réseau par des personnes extérieures au groupe. La figure 6 illustre le processus de co-conception d'une ressource.

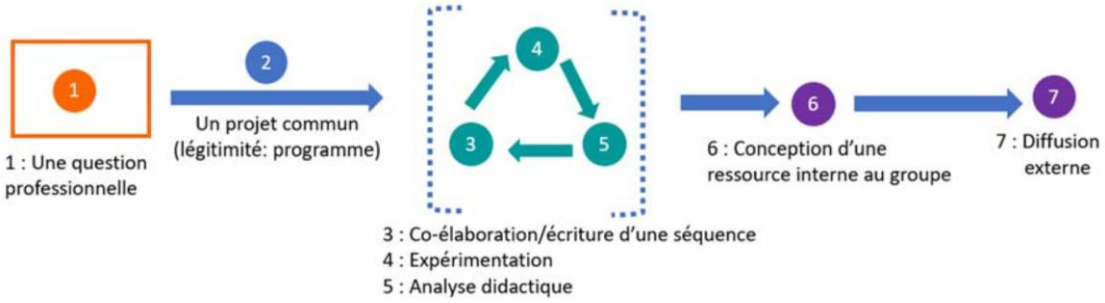


Figure 6. Co-conception d'une ressource dans le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier.

Si la possibilité d'expérimentations multiples dans des contextes diversifiés est une condition favorable pour mettre au jour les déterminants didactiques, avoir un modèle de l'activité du professeur permet d'orienter le regard et de structurer les analyses.

2.3 Le travail épistémologique du professeur

Pour exercer son activité, le professeur doit maîtriser des savoirs professionnels de différentes natures, comme des connaissances sur le système éducatif dans lequel il exerce, la psychologie de l'enfant ou la pédagogie (Shulman, 1986). Dans ce texte, nous nous limitons aux savoirs mathématiques et didactiques qui contribuent au travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019).

Le travail épistémologique du professeur se réalise *avec* et *sur* les objets mathématiques et a une finalité didactique. Il s'exerce *en amont* ou *en aval* de la situation d'enseignement mais aussi *pendant* qu'elle se déroule lorsque, par exemple, le professeur interprète les réponses des élèves. Dans son projet d'enseignement, les analyses mathématiques et didactiques sont consubstantielles car les mathématiques sont autant l'objet que l'outil de l'analyse didactique[5]. Par essence, les savoirs didactiques permettent de créer les conditions d'un apprentissage tandis que les choix qu'opère le professeur se fondent sur son épistémologie (Brousseau 2000), c'est-à-dire une théorie de la connaissance. Le travail épistémologique du professeur comporte ainsi trois dimensions : mathématique, didactique et épistémologique (figure 7).

[5] L'identification des variables didactiques est un geste didactique qui repose essentiellement sur une analyse mathématique, par exemple.

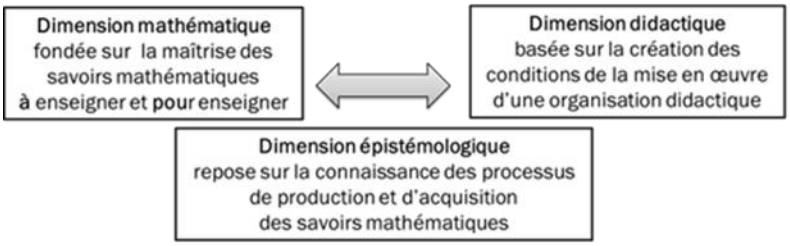


Figure 7. Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur (Wozniak 2019, p. 37).

Ce modèle du travail épistémologique du professeur nous conduit à faire l'hypothèse qu'au-delà du scénario de la situation d'enseignement-apprentissage, le professeur a besoin de lui donner du sens, d'avoir une certaine intelligibilité de ses enjeux et comprendre ses principes organisateurs. Présenter l'objectif d'apprentissage, le matériel, les différentes phases d'une séance ne suffit pas, il est nécessaire de nourrir les trois dimensions de son travail épistémologique. C'est ainsi, qu'au travers des différents documents qui constituent la ressource, nous avons explicité les savoirs mathématiques en jeu, la raison d'être des choix didactiques qui sous-tendent la séquence et notre position épistémologique concernant la construction des savoirs par les élèves.

3 La ressource « Repérer dans le micro-espace »

Nous allons à présent évoquer ce qui nous est apparu comme des déterminants didactiques en suivant les différents éléments constitutifs de la ressource. Ce faisant, nous illustrerons comment les différentes rubriques de la ressource nourrissent les trois dimensions du travail épistémologique du professeur.

3.1 Les différentes rubriques de la ressource

La ressource est organisée en trois grandes rubriques. La première rubrique présente un résumé de la séquence, les compétences visées en lien avec les programmes d'enseignement et cinq vidéos résumant chacune une séance avec un intitulé qui aide à comprendre immédiatement leurs enjeux : 1) Découverte de la boîte et des critères de comparaison ; 2) Décrire oralement des positions ; 3) Positionner des cubes à partir d'un message dessiné ; 4) Associer vue de face et vue de dessus ; 5) Associer description orale et représentation.

La rubrique « Mise au point » permet une focale sur trois éléments essentiels pour une mise en œuvre de la séquence telle que nous l'avons conçue. Le critère de la porte comme point de repère doit émerger lors d'une validation lorsque les élèves comparent le contenu de la boîte produite avec celui de la boîte modèle. La nécessité de représenter le fond de la boîte ne se révèle aux élèves que lorsque la feuille n'est plus rectangulaire. La forme rectangulaire des feuilles rend « invisible » le fond de la boîte de sorte que la forme de la feuille est bien une variable didactique. La troisième focale porte sur le niveau d'exigence du repérage. En réalité, ce sont des zones plutôt que des positions qui sont repérées (voir figure 3) et les élèves peuvent en prendre conscience lorsque le professeur prend le temps de discuter des cas litigieux. Le choix de ces trois focales a été réalisé sur la base de nos analyses mathématiques et didactiques de la situation et des différentes expérimentations de la séquence, mais aussi de notre position épistémologique nourrie d'une approche constructiviste où l'élève construit les savoirs à acquérir comme réponse à des questions qu'il se pose.

Dans la dernière rubrique, sont présentés trois entretiens, avec le professeur des écoles filmé, une formatrice qui justifie l'intérêt d'un enseignement des connaissances spatiales et avec une enseignante spécialisée qui revient sur l'adéquation de la séquence avec une démarche inclusive. La vidéo avec le professeur des écoles permet de revenir sur trois éléments déterminants lors de la validation. En premier lieu, l'orientation de la boîte (posée verticalement contre le tableau ou sur la table) a un effet sur le vocabulaire utilisé. Cette première partie de l'entretien nourrit la dimension mathématique du travail du professeur en lui permettant de percevoir le lien entre points de vue et vocabulaire spatial.

En second lieu, la validation en deux temps des situations d'émission-réception qui porte sur le processus plutôt que la seule comparaison entre le produit final et la boîte modèle (figure 8).

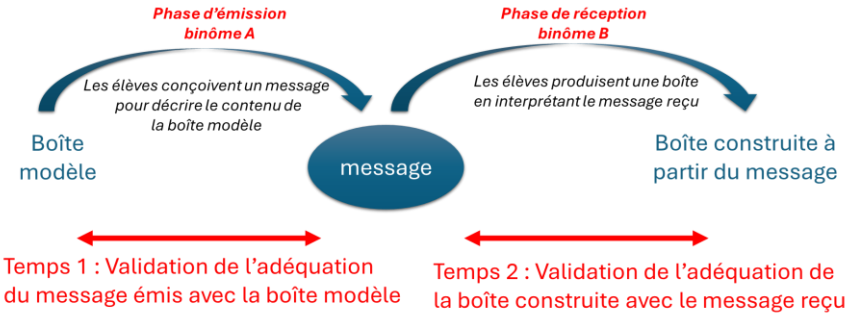


Figure 8. Validation d'une situation d'émission-réception.

La portée didactique de l'explicitation de ce geste professionnel est essentielle car elle permet au professeur d'une part d'identifier les deux origines possibles d'une inadéquation entre le produit final et le modèle initial et d'autre part donne les moyens pratiques de les révéler aux élèves.

Enfin, la dernière partie de l'entretien explicite le parti pris épistémologique de la séquence : la construction des apprentissages dans un rapport de nécessité. C'est ainsi que le professeur n'introduit pas le rôle de la porte, ce sont les élèves qui découvrent son utilité pour le repérage. Trois documents accompagnent ces vidéos. Le document « Présentation de la séquence et ses enjeux » explicite la différence entre connaissances spatiales et connaissances géométriques qui justifie l'intérêt d'une telle séquence. Il met en perspective les deux types d'information requis pour repérer et revient sur la construction des savoirs dans un rapport de nécessité. Le document « Fiche séquence » décrit chaque séance (durée, objectif, matériel, tâches de l'élève). Le « document enseignant » pose les principes organisateurs de la séquence (représentés par la figure 5 et le tableau 1) et révèle les éléments déterminants[6] pour une mise en œuvre de la séquence, tout en fournissant des exemples concrets d'institutionnalisation et d'affiches (figure 9), des indications pratiques pour faciliter la gestion de la classe comme la numérotation des boîtes ou l'usage d'un tableau de correspondance boîte/binôme.



Figure 9. Exemple d'affiche à l'issue de la séance 3.

Enfin, la ressource intègre une bibliographie et la référence aux programmes d'enseignement.

La ressource présentée, revenons sur la façon dont elle peut prendre en charge les besoins praxéologiques des professeurs.

[6] Comme par exemple, les variables didactiques et leurs effets : le nombre d'objets dans la boîte, l'impact de la forme des objets sur les représentations dessinées des élèves, la position des objets entre eux comme les alignements ou le nombre de portes et la possibilité de diversifier les points de vue boîte fermée.

3.2 La dimension formatrice de la ressource

La diffusion d'une ressource au-delà du cercle de ses concepteurs conduit à s'interroger sur les conditions de son appropriation. Notre hypothèse est qu'il faut dépasser la *praxis* qui réduit les ressources à une présentation des objectifs, la description du matériel et des moments de la séquence ou les phases d'une séance. C'est évidemment une condition nécessaire mais elle n'est pas suffisante car elle ne dit rien de ce qui se joue sur le plan épistémique. Il manque les ingrédients qui nourrissent la part *logos* des praxéologies du professeur c'est-à-dire les raisons d'être des choix mathématiques, didactiques et épistémologiques qui permettent la construction des savoirs visés. La ressource présentée dans ce texte a pour ambition de faire du professeur un acteur de son enseignement plutôt que l'exécutant d'une recette prête à l'emploi. La complémentarité des supports vidéo et textuels facilite l'articulation entre la pratique et ce qui nourrit la pratique (dimension *praxis* et le *logos* des praxéologies professorales). D'un point de vue ergonomique, le support numérique favorise l'entrée dans la ressource selon différents points de vue rendant nécessaires les redites. Les éléments déterminants de la séquence sont ainsi présentés dans les documents, mentionnés dans les entretiens ou illustrés dans les vidéos.

La séquence présentée, nous considérons à présent ses effets sur les apprentissages des élèves d'une classe de CP à travers leurs productions.

III - DANS UNE CLASSE DE CP, LES PRODUCTIONS DES ÉLÈVES

Si l'attention portée aux productions des élèves dans cette section permet d'illustrer la mise en œuvre de la séquence, elle permet, surtout, de donner accès à ce qui se joue sur le plan de l'appropriation des connaissances par les élèves. Les dessins et schémas réalisés constituent bien plus qu'une trace d'activité, ils sont un révélateur des obstacles, des cheminements et des possibles dans la construction des connaissances spatiales. C'est en ce sens qu'ils nourrissent la part de *logos* des praxéologies professorales. Leur analyse permet à l'enseignant de dépasser la simple description des tâches (dimension *praxis*) pour interroger les raisons d'être des choix didactiques et mathématiques. Observer comment un élève passe du dessin figuratif à une représentation organisée et codée, c'est déjà mettre en lumière la logique d'apprentissage visée et les leviers que le professeur peut mobiliser. Ainsi, les productions des élèves constituent un point d'articulation privilégié entre la pratique et ce qui nourrit la pratique, en cohérence avec l'ambition de cette ressource : faire de l'enseignant un acteur de son enseignement, capable de penser ses choix au-delà d'une « recette prête à l'emploi ».

1 Une évolution des productions comme indicateur de l'appropriation des enjeux de la séquence

1.1 Analyse des premières productions des élèves

Les premières productions recueillies montrent que les élèves abordent la tâche de représentation par un dessin figuratif, proche de ce qu'ils perçoivent. Leur objectif initial est de produire une image ressemblante plutôt que de rendre uniquement compte de la disposition spatiale des cubes. On retrouve ainsi des détails visuels parfois très fins – comme les creux présents sur les cubes ou les « pointes » permettant de les empiler – mais aussi des ajouts qui n'existent pas dans l'objet réel, tels qu'une poignée sur la porte de la boîte. Certains élèves choisissent de colorier l'intérieur des carrés pour signifier la présence des cubes. Les flèches dans la figure 10 illustrent cet aspect.

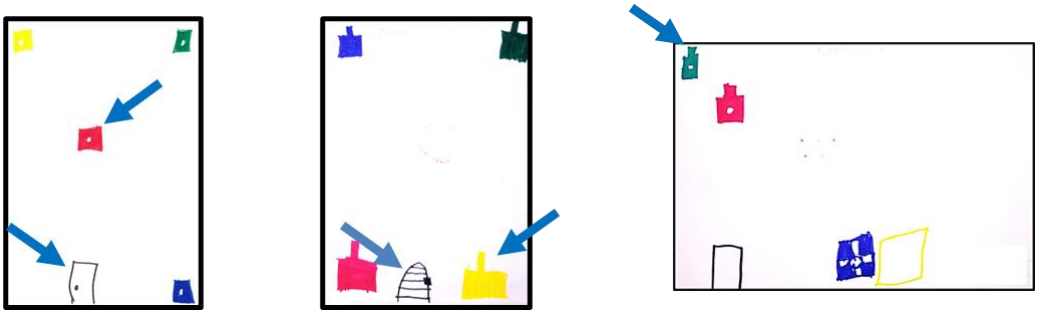


Figure 10. Quelques exemples de productions initiales d'élèves

Ces choix traduisent à la fois une volonté de fidélité perceptive et la difficulté à passer d'un objet à trois dimensions à une représentation plane. L'élève mobilise ses ressources graphiques pour « dire » ce qu'il voit, quitte à exagérer, déformer ou inventer certains traits. D'un point de vue didactique, cette étape est essentielle : elle constitue un premier jalon vers l'abstraction, puisqu'elle engage l'élève à sélectionner des éléments, à les coder graphiquement et à mettre en images sa perception.

Ces productions figuratives, bien qu'encore éloignées d'une véritable schématisation, fournissent à l'enseignant des indicateurs précieux. Elles permettent de repérer les obstacles liés au réalisme perceptif, mais aussi d'anticiper la progression vers des représentations plus organisées et codées. Leur analyse met ainsi en évidence la nécessité d'un accompagnement qui aide les élèves à distinguer les détails pertinents pour le repérage spatial de ceux qui relèvent de détails accessoires ou de l'imaginaire.

Si les premières traces mettent en évidence une volonté de ressemblance avec l'objet matériel, elles ne constituent qu'un point de départ. Considérons à présent leur évolution au cours de la séquence.

1.2 L'évolution des productions des élèves

L'évolution des productions montre comment les élèves passent peu à peu d'une logique de restitution perceptive à une logique de représentation visant la compréhension et la communication de l'organisation spatiale. Progressivement, leurs dessins cessent de viser la fidélité au réel pour se centrer sur ce qui est pertinent au regard des enjeux d'apprentissage : la position des cubes à l'intérieur de la boîte et l'orientation de celle-ci grâce à la porte, utilisée comme repère (figure 11).

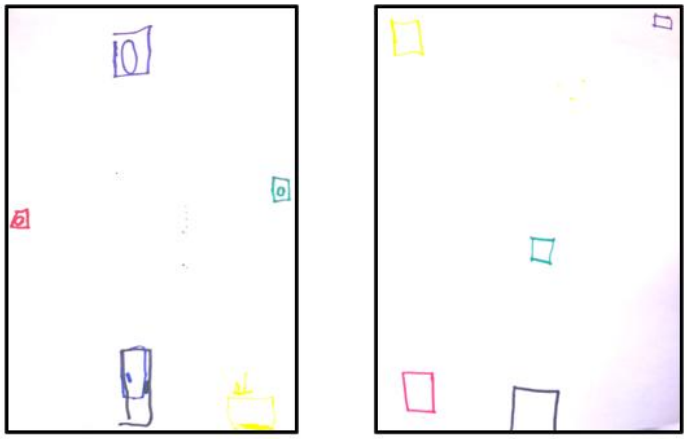


Figure 11. Évolution de la production d'une élève de la séance 3 (à gauche) à la séance 5 (à droite)

Cette sélection témoigne d'un processus de simplification et de hiérarchisation : les élèves apprennent à ne représenter que le nécessaire, en privilégiant les contours d'une face et l'indication de la porte, plutôt que des détails accessoires. Le passage du dessin au schéma, selon nous, illustre une transformation didactiquement essentielle : l'élève ne cherche plus à reproduire ce qu'il voit, mais à communiquer des relations de position dans l'espace restreint de la boîte (relations spatiales qui fondent le savoir visé).

Du point de vue de l'enseignant, ces productions constituent un indicateur précieux de la conceptualisation en cours. Elles révèlent que les élèves s'approprient progressivement une représentation codée et fonctionnelle (tracer des contours des cubes et de la porte), véritable outil de pensée, au service de l'apprentissage du repérage spatial.

Nous allons à présent considérer ce qui, dans les choix didactiques opérés, contribue à l'évolution des productions des élèves.

2 Favoriser l'évolution des productions des élèves par…

2.1 … le choix du matériel

Le choix du matériel joue un rôle déterminant dans la progression vers la schématisation (passage de la représentation dessinée au schéma). L'utilisation des cubes se révèle ainsi particulièrement pertinente : quelle que soit la vue adoptée, de face ou de dessus, la représentation se réduit toujours à un carré. Cette propriété contribue à limiter les ambiguïtés liées au passage de l'espace (avec ses volumes) au plan et oriente les élèves vers une codification simple et stable. Elle permet ainsi de focaliser l'attention non sur la forme des objets mais sur leurs relations de position, ce qui correspond aux enjeux didactiques de la séquence.

2.2 … le travail en binôme et les interactions entre pairs

Le travail en binôme favorise les interactions entre pairs, qui constituent un levier important pour l'apprentissage. En confrontant leurs points de vue, les élèves sont amenés à expliciter leurs démarches, à argumenter leurs choix de représentation et à ajuster leur production. Ainsi, la figure 12 illustre le cas d'une élève qui change le type de représentation des cubes en cours de travail du fait d'une remarque de l'élève en binôme avec elle « fais juste le tour du carré, ça ira plus vite ».

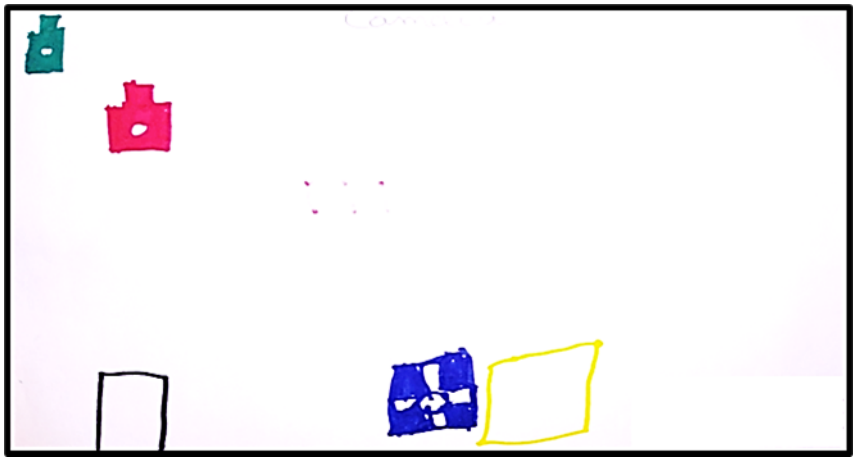


Figure 12. Effet de l'interaction entre élèves favorisant le passage à la schématisation

Ainsi, les cubes rouge et vert sont représentés en vue de face avec la marque du trou qui est sous les cubes, le cube bleu est représenté en vue de dessus mais avec les détails qui témoignent d'une volonté de représenter ce qui se voit, tandis que le cube jaune n'est représenté que par un carré.

Ces échanges permettent de progresser individuellement, mais aussi de construire collectivement le sens des savoirs visés. Les élèves découvrent ainsi la fonction et l'utilité des représentations produites, ce qui renforce leur appropriation. L'enseignant joue alors un rôle d'accompagnateur, en valorisant la coopération et en guidant la mise en commun des acquis. Il permet à l'élève de capitaliser les connaissances construites dans les situations à travers l'institutionnalisation qui les constitue en savoirs.

3 Les productions d'élèves comme support à l'institutionnalisation du savoir

Les productions des élèves constituent un support privilégié pour l'institutionnalisation. En s'appuyant sur ces traces et sur leur explicitation, l'enseignant engage une co-construction avec la classe qui aboutit à une trace écrite collective, telle qu'une affiche de classe (voir figure 9).

Ce travail permet de clarifier les enjeux de la séquence : savoir rendre compte des positions spatiales des cubes dans la boîte et utiliser la porte comme repère d'orientation de la boîte. La mise en commun favorise la sélection et la stabilisation des éléments pertinents, transformant les productions individuelles en un outil partagé de référence. L'enseignant joue ici un rôle clé de médiateur en reliant les expériences vécues aux savoirs institutionnalisés.

Ainsi, l'analyse des productions montre une progression claire allant du dessin figuratif vers des représentations organisées et codées. Cette évolution illustre le passage d'une appréhension globale et visuelle de la situation à une véritable mise en œuvre de conventions de représentation. Elle met en lumière la difficulté, mais aussi l'importance, du passage de l'espace en trois dimensions (manipulation de la boîte et des cubes) à l'espace en deux dimensions (schéma ou plan).

Ces traces écrites constituent donc à la fois des indicateurs précieux pour l'enseignant — permettant d'identifier où se situe chaque élève dans son rapport à l'espace et aux codes de représentation — et des supports d'apprentissage pour la classe. Leur mise en commun favorise la construction progressive d'un langage spatial partagé et prépare les élèves à mobiliser des outils plus formalisés (plans, schémas codés) dans la suite de leur parcours scolaire.

IV - CONCLUSION

En guise de conclusion, nous allons à présent aborder la formation selon deux aspects, d'une part la dimension formatrice de la ressource pour ses concepteurs et d'autre part l'usage de la ressource en formation par les membres du groupe premier degré de l'IRES de Montpellier.

1 La dimension formatrice de la co-construction d'une ressource

La ressource élaborée dans le cadre du travail collectif du groupe premier degré de l'IRES de Montpellier ne se réduit pas à une simple succession d'activités prêtes à l'emploi. Elle se présente avant tout comme un dispositif à visée formative, tant pour les enseignants que pour les élèves. Sa conception et sa mise en œuvre ont été traversées par une dynamique de réflexion et de confrontation de points de vue qui ont eu pour effet de faire évoluer les praxéologies professorales des concepteurs. C'est ainsi, que nous nous attardons ici sur les éléments qui, selon le point de vue d'un des membres de l'IRES et co-auteur de ce texte, a contribué à cette dynamique.

Un premier aspect déterminant tient à l'aller-retour continu entre les apports théoriques et la pratique de classe. La conception de la ressource a permis de mettre en dialogue les connaissances issues de la didactique des mathématiques avec l'expérience concrète des enseignants dans leur classe. Cette tension productive entre théorie et pratique favorise non seulement l'appropriation des concepts didactiques, mais aussi leur mise à l'épreuve dans des situations authentiques.

Par ailleurs, l'élaboration de la séquence a conduit à une réflexion approfondie en didactique sur les enjeux d'apprentissage liés au repérage dans l'espace. L'analyse des conditions de mise en œuvre — choix des tâches, formulation des consignes, modalités de représentation et de verbalisation — a permis de mettre en évidence les leviers et les obstacles dans la construction des savoirs. Ce travail ne vise donc pas uniquement à décrire une suite d'activités, mais à interroger le sens et la portée des choix opérés.

La dimension collective du projet s'est également révélée essentielle. Les échanges au sein du groupe ont nourri une réflexion partagée, permettant d'anticiper certains écueils et d'ajuster les dispositifs après expérimentation. Ces discussions ont porté sur des questions très concrètes — adéquation entre objectifs

et tâches, obstacles rencontrés par les élèves, rôle et place des traces écrites, organisation matérielle et spatiale de la classe. Elles ont ainsi favorisé une mise en commun d'expériences et une co-construction des savoirs professionnels, qui dépasse la seule analyse individuelle.

Enfin, l'impact de ce travail sur les praxéologies professorales s'est fait sentir dans la façon de conduire la classe au quotidien. L'élaboration de la ressource a conduit à interroger les habitudes pédagogiques, à affiner l'observation des productions d'élèves et à envisager de nouvelles manières de piloter les apprentissages. Elle a également renforcé la capacité des enseignants à s'ajuster face aux situations imprévues, qu'il s'agisse de difficultés inattendues rencontrées par certains élèves, de malentendus liés à une consigne ou de réactions imprévues lors d'une mise en commun. Ces ajustements, loin d'être de simples « bricolages », traduisent une véritable compétence professionnelle, consistant à transformer l'imprévu en ressource pour l'apprentissage. Cette transformation progressive témoigne du caractère formatif du projet, qui engage les enseignants dans une démarche réflexive durable, bien au-delà de la séquence conçue collectivement.

La conception de la ressource dans ce cadre n'a pas seulement valeur d'outil didactique : elle joue un rôle formateur en articulant théorie et pratique, en ouvrant un espace de réflexion didactique approfondie, en favorisant les échanges entre pairs et en développant la capacité d'ajustement face aux imprévus. Elle contribue ainsi à l'évolution des gestes professionnels et à l'autonomie des enseignants, confirmant que l'essentiel ne réside pas dans la prescription d'une « bonne pratique », mais dans l'appropriation raisonnée et réflexive des choix pédagogiques.

Après avoir considéré la dimension formative de la ressource pour ses concepteurs, nous nous intéressons à son exploitation en formation.

2 Une expérience de formation

La ressource « se repérer dans le micro-espace » est utilisée dans le cadre du « plan mathématique » de formation en constellations. Plusieurs membres du groupe IRES sont référentes mathématiques, l'une d'entre elles, co-auteure de ce texte, utilise cette séquence comme situation de référence pour développer les connaissances spatiales au cycle 2. La robustesse de la situation co-construite permet aux enseignants de l'adapter à tous les niveaux du cycle, voire en grande section de maternelle avec quelques adaptations, notamment du point de vue des attentes de représentation ou langagières. Les savoirs mathématiques sont clairement identifiés dans la ressource et l'enseignant peut se référer à cette situation pour remobiliser les savoirs dans le parcours de l'élève. Le détail dans la préparation et l'articulation des différentes séances permet au formateur d'illustrer le triptyque manipuler-représenter-abstraire et de mettre l'accent sur la verbalisation à travers la situation d'émission réception.

L'objectif de cette communication était de présenter un ensemble de documents textuels et vidéos avec l'espoir qu'ils serviront de ressource aux enseignants et aux formateurs.

V - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281–308.

Brousseau, G. (2000). *Éducation et didactique des mathématiques.* Communication au Congrès d'Aguas Calientes, Mexico, 1999. https://hal.science/hal-00466260/document

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M.Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-

Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak. (Éds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (305-326). Grenoble : La Pensée sauvage.

Marchand, P., Braconne-Michoux, A. (2014). Quels types d'activités permettent de développer les connaissances spatiales chez les élèves du primaire ? Le cas de la boîte à image. Dans *Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives*. *Actes du 50e colloque de la COPIRELEM* (Cédérom). IREM des pays de la Loire.

M.E.N.J.S. (2024). *Programmes d'enseignement, Bulletin officiel n°41 du 31 octobre 2024. Annexe 4. Programme de mathématiques du cycle 2.*

https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/ensel135_annexe4.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Wozniak, F. (2010). Transposition didactique interne et dialectique des médias et des milieux. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Éds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. (859-878). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Wozniak, F. (2019). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 39*(1), 15-50.

CARACTERISATION DES CONNAISSANCES PRESERVEES ET DES DIFFICULTES SPECIFIQUES DES ELEVES AVEC UN TROUBLE DES APPRENTISSAGES : LE CAS DES FRACTIONS

Marie-Line GARDES
Professeure ordinaire, HEP VAUD
marie-line.gardes@hepl.ch

Layla AYARI, Fabienne BARROCA-PACCARD
Christelle CARVALHINHAS, Estelle CUDRE-MAUROUX
Francesca GREGORIO, Pauline RUEGG-REYMOND
Christine SCALISI NEYROUD, Liliane VIALLE
Chargées d'enseignement, HEP VAUD
layla.ayari@edu-vd.ch, fabienne.barroca-paccard@hepl.ch,
christelle.carvalhinhas@edu-vd.ch, estelle.cudre-mauroux@hepl.ch,
francesca.gregorio@hepl.ch, Pauline.Ruegg-Reymond@hepl.ch,
christine.scalisi-neyroud@hepl.ch, liliane.vialle@hepl.ch

Florence PETEERS
Maîtresse de conférences, Université Cergy Paris
LDAR
florence.peteers@cyu.fr

Luc-Olivier BÜNZLI
Professeur HEP, HEP VAUD
luc-olivier.bunzli@hepl.ch

Michel DERUAZ
Professeur associé, HEP VAUD
michel.deruaz@hepl.ch

Chloé LEMRICH
Assistante doctorante, HEP VAUD
chloe.lemrich@hepl.ch

Résumé
Cette étude porte sur l'apprentissage des fractions chez des élèves de 9 à 11 ans avec des troubles des apprentissages en mathématiques (MLD). Un test conçu à partir d'un modèle praxéologique du concept de fraction a été administré à 555 élèves en France et en Suisse. Les résultats montrent que lors de la première année d'enseignement des fractions, il n'y a pas de différence entre les deux populations d'élèves pour certains types de tâches (notamment l'association de fractions équivalentes), mais que des difficultés spécifiques se posent pour d'autres (par exemple la conversion entre fractions et grandeurs). En revanche toutes les tâches deviennent significativement plus difficiles pour les élèves avec MLD après deux ans d'enseignement. Certaines difficultés spécifiques et des erreurs récurrentes sont mises en lumière, ouvrant des pistes pour un enseignement différencié et inclusif axé sur la variété des représentations, l'explicitation des démarches et la valorisation de l'erreur comme levier d'apprentissage pour lequel le regard de la didactique est indispensable.

La plupart des systèmes éducatifs cherche à développer une école à visée inclusive. Ces politiques éducatives impliquent l'inclusion des élèves avec des troubles et des difficultés d'apprentissage ou des handicaps sensoriels et moteurs dans les classes ordinaires. L'inclusion des élèves à besoins particuliers a ainsi posé de nouveaux défis aux enseignants et a suscité un intérêt croissant dans le domaine de la recherche en éducation. Dans cet article, nous nous intéressons spécifiquement aux élèves avec de grandes difficultés ou avec un trouble des apprentissages en mathématiques ; nous utiliserons dans la suite l'acronyme MLD pour *Mathematical Learning Difficulties, Disorders or Disabilities*. Bien que ce sujet de recherche soit en plein essor dans les recherches portant sur l'enseignement des mathématiques, les études s'intéressant spécifiquement aux élèves avec un trouble d'apprentissage en mathématiques restent relativement rares (Deruaz et al., 2020). Elles se concentrent sur les élèves en début de scolarité primaire, et sur des contenus arithmétiques (opérations et résolution de problèmes sur les nombres entiers). Toutefois, il existe quelques études qui s'intéressent à d'autres sujets mathématiques, par exemple l'algèbre (Gregorio, 2023), ou à d'autres ensembles de nombres, par exemple les nombres rationnels (Robotti, 2017 ; Bhatia et al., 2024 ; Hunt et al., 2019 ; Houle et Giroux, 2015). Afin de combler ce manque dans la littérature, nous avons mené une étude sur l'apprentissage des fractions auprès d'élèves avec MLD scolarisés à la fin de l'école primaire (élèves de 9 à 11 ans).

Notre question de recherche est la suivante : quelles sont les connaissances préservées et les difficultés spécifiques d'élèves avec MLD, comparées à celles d'élèves sans MLD, dans l'apprentissage des fractions ?

I - BREVE REVUE DE LITTERATURE

1 Troubles des apprentissages en mathématiques

Les troubles des apprentissage en mathématiques, ou MLD (*mathematical learning disabilities,* ou *mathematical learning difficulties* ou *mathematical learning disorder),* se caractérisent par des difficultés persistantes, indépendantes de facteurs externes, affectant la compréhension des nombres, le calcul et le raisonnement mathématique (Peteers et al., 2023). L'acronyme MLD est utilisé de manière polysémique dans les recherches. Dans cet article, nous suivons la revue de littérature de Deruaz et al. (2020) qui identifient trois usages du terme MLD : un trouble d'apprentissage spécifique aux mathématiques (tel que la dyscalculie), un trouble d'apprentissage non spécifique avec difficultés en mathématiques (comme la dyslexie), ou des difficultés sévères en mathématiques sans diagnostic formel.

2 Apprentissage des fractions

Les fractions peuvent être interprétées de diverses manières (par exemple comme la partie d'un tout, une division ou un rapport) et représentées sous différentes formes (dessins, écritures symboliques, code verbal ou graduation d'une droite numérique). Ces différentes interprétations et représentations engendrent chez les élèves de nombreuses difficultés d'apprentissage, identifiées et décrites dans de nombreuses recherches (Lortie-Forgues et al., 2015).

Quelques recherches s'intéressent aux difficultés spécifiques liées à l'apprentissage des fractions rencontrées par les élèves avec MLD. Par exemple, Mazzocco et Devlin (2008) révèlent que les élèves avec MLD ne maitrisent pas les différentes représentations des fractions, qu'ils éprouvent des difficultés à associer une représentation visuelle à une représentation plus abstraite telle que l'écriture symbolique, et à utiliser la fraction 1/2 comme point de repère (pour la comparaison par exemple). De plus, comparativement aux élèves sans MLD, ceux avec MLD doivent fournir plus d'efforts et prennent plus de temps pour ordonner des fractions, notamment parce qu'ils maitrisent moins rapidement les représentations symboliques et privilégient plus longtemps les représentations sous forme de dessins (Mazzocco et Devlin, 2008). Bhatia et al. (2024) ont mené une étude sur les connaissances des fractions chez les adultes avec MLD. Ils ont identifié des connaissances préservées (c'est-à-dire non impactées par leur trouble), telle que la conversion des représentations verbales en représentations symboliques, ainsi

que des difficultés persistantes, telles que placer et repérer une fraction sur une droite graduée, opérer avec des fractions ou résoudre des problèmes. De plus, les adultes avec MLD présentaient des patterns d'erreurs spécifiques par rapport aux adultes sans MLD.

II - MÉTHODOLOGIE

Afin d'identifier les connaissances préservées et les difficultés spécifiques d'élèves avec MLD dans l'apprentissage des fractions, nous avons conçu un test reposant sur un modèle praxéologique du concept de fraction. Nous l'avons ensuite proposé à des élèves avec ou sans MLD. Nous décrivons ci-dessous les différents éléments de notre méthode.

1 Contexte et participants

Nous avons mené l'étude dans deux pays, en France et en Suisse romande, auprès d'élèves scolarisés à l'école primaire. Comme dans de nombreux pays, les politiques éducatives suisse et française visent à aller vers une école de plus en plus inclusive (Loi 2013-595, 2013 ; DFJC, 2019). Malgré cette volonté politique, deux systèmes coexistent toujours, celui des écoles et classes inclusives, et celui des écoles ou classes spécialisées. Ainsi les élèves avec MLD peuvent être scolarisés dans des classes ordinaires, parfois avec un programme adapté ou avec des aménagements spécifiques, et ils peuvent également être scolarisés dans des classes spécialisées qui regroupent des élèves rencontrant des difficultés scolaires importantes. Dans notre étude, les données ont été récoltées au sein de classes ordinaires inclusives et de quelques classes spécialisées, chaque classe ayant des élèves avec et des élèves sans MLD. Dans le programme scolaire suisse, les fractions sont introduites en 7ème année (Grade 5[1]) et poursuivies en 8ème année (Grade 6), ce qui correspond aux deux dernières années de l'école primaire. Dans le programme scolaire français, les fractions sont introduites en CM1 (Grade 4) et poursuivies en CM2 (Grade 5), ce qui correspond aussi aux deux dernières années de l'école primaire. Les contenus enseignés sont assez similaires : les fractions sont introduites par des activités de mesure utilisant une bande d'unité ; de nombreuses tâches de conversion entre registres sont proposées, notamment entre l'écriture fractionnaire et une autre représentation ; quelques résolutions de problèmes sont également proposées. Les opérations avec des fractions ne sont pas enseignées à l'école primaire des deux pays. Tous les élèves de notre échantillon (avec et sans MLD) ont suivi cet enseignement des fractions (même durée et objectifs communs), cependant les exigences peuvent être moindres pour les élèves présentant un trouble diagnostiqué et disposant d'un programme personnalisé.

Deux populations ont été retenues : d'une part, des élèves de Grade 4 (CM1) en France et de Grade 5 (7ème année) en Suisse ayant reçu une année d'enseignement des fractions ; d'autre part des élèves de Grade 5 (CM2) en France et de Grade 6 (8ème année) en Suisse ayant reçu deux années d'enseignement des fractions. Pour chaque population, nous avons distingué les élèves identifiés comme présentant des MLD ou pas (selon les critères explicités dans le paragraphe I-1). Le détail des effectifs est présenté dans le tableau 1. Comme l'indiquent les effectifs différents entre la première et la deuxième année, il ne s'agit pas d'une étude avec un suivi de cohorte mais bien de deux groupes distincts.

		Effectifs	
		Sans MLD	**Avec MLD**
1ère année d'enseignement	France Grade 4 et Suisse Grade 5	162	36
2ème année d'enseignement	France Grade 5 et Suisse Grade 6	274	83

Tableau 1. Les participants au test

[1] Pour éviter toute confusion concernant les intitulés des années d'enseignement dans deux contextes différents, nous nous réfèrerons aux classes avec la nomenclature internationale : de Grade 1 pour les élèves de 6 ans, Grade 2 pour le élèves de 7 ans, etc.

2 Recueil de données

La collecte des données s'est effectuée à l'aide d'un test. Ce dernier a été construit à partir d'un test existant, conçu dans une recherche portant sur l'identification et la caractérisation des difficultés dans l'apprentissage des fractions chez des adultes avec MLD (Bhatia et al., 2024). Il a été élaboré en utilisant un modèle praxéologique, au sens de Bosch et Gascon (2005), qui fournit un modèle de la connaissance « fractions ». Cinq genres de tâches ont été déterminés et chaque genre de tâches génère plusieurs types de tâches (tableau 2), à partir de différentes variables. Ces variables sont de nature didactique, c'est-à-dire qu'elles influencent la hiérarchie des procédures de résolution (Brousseau, 1997), ce qui permet de mettre en évidence différentes techniques de résolution et donc différentes difficultés potentielles. Le choix des genres de tâches et des variables didactiques s'est effectué grâce à une étude des instructions officielles, des programmes de l'école primaire et de quelques manuels scolaires, confrontée à une étude épistémologique, cognitive et didactique du concept de fractions (Zarpas, 2020). Voici quelques-unes de ces variables et les valeurs qu'elles peuvent prendre :

- nature du dénominateur : familier (2, 3, 4), non familier (5, 6, 8, 11, ...) ou décimal (10) ;
- relation entre les fractions : mêmes dénominateurs, dénominateurs multiples ou dénominateurs premiers entre eux ;
- nécessité de trouver une fraction équivalente : oui ou non.

Grâce à ce modèle praxéologique, 28 questions ont été créées, composées au total de 54 items. Le classement des questions pour chaque type de tâches est présenté dans le tableau 2 et le test est disponible en ligne[2].Le test a été distribué aux élèves en classe par les enseignants eux-mêmes, à partir de consignes de passation précises fournies en amont par l'équipe de recherche afin d'assurer l'homogénéité des conditions de passation pour les élèves. Le test était individuel et non limité dans le temps pour éviter d'avoir les dernières questions non traitées.

Genre de tâches	Type de tâches	Questions du test
CONVERTIR	Convertir une fraction en une grandeur et inversement Convertir une fraction en une graduation et inversement	Q1 à Q7 Q10, Q11
ASSOCIER	Associer une fraction à un code verbal et inversement Associer une fraction à une autre fraction (fractions équivalentes) Associer une décomposition à une fraction et inversement Associer un code décimal à une fraction et inversement	Q8, Q9 Q13 Q14 Q15, Q16
COMPARER	Comparer une fraction à 1 Comparer deux fractions Ordonner des fractions Intercaler une fraction entre deux nombres	Q12 Q17 Q18, Q19 Q20, Q21, Q22
OPÉRER	Ajouter des fractions Soustraire des fractions	Q23 Q24
RÉSOUDRE DES PROBLEMES	Résoudre des problèmes verbaux avec des fractions	Q25 à Q28

Tableau 2 - Genres et types de tâches utilisés dans le modèle praxéologique pour la construction du test

3 Codage des données

Les données ont été codées[3] en attribuant à chaque réponse d'un item l'un des codes suivants : 0 pour une réponse erronée ; na pour une absence de réponse ; 1 pour une réponse correcte et conforme à celle

[2] Adresse du test : https://osf.io/re6zd/files/eb7qd

[3] Les données ont été codées par les auteurs de l'article. Pour assurer une fiabilité maximale du codage des réponses, un livret de codage a été élaboré, précisant, pour chaque item du test, la liste des réponses attendues ainsi que le code à attribuer à chaque type de réponse. La fiabilité interjuges a ensuite été mesurée par des tests statistiques d'accord intercodeurs (coefficient kappa de Cohen). Les résultats montrent une valeur moyenne de kappa de 0,88, avec une erreur standard de 0,04.

attendue ; pl pour une réponse non lisible ou non interprétable. Ce premier niveau de codage a permis une analyse quantitative des performances des élèves. En complément, un deuxième niveau de codage a été mis en place, visant à catégoriser les différents types d'erreurs commises. Cette étape visait à enrichir l'analyse en identifiant les difficultés récurrentes rencontrées par les élèves.

4 Analyses des données

Compte tenu de la taille de l'échantillon (N = 555), une première série d'analyses quantitatives a été menée afin de faire émerger les grandes tendances dans les réponses des élèves. Cette étape a mobilisé à la fois des statistiques descriptives (pourcentages, moyennes, écarts-types) et des statistiques inférentielles permettant d'examiner la significativité de certaines différences observées entre groupes d'élèves ou entre types de tâches (tableau 2). Le critère de normalité des distributions n'étant pas respecté, les analyses inférentielles pour déterminer les différences significatives ont été réalisées à l'aide de tests non paramétriques, en particulier le test de Mann-Whitney pour la comparaison de deux groupes indépendants que sont par exemple les groupes « élèves avec MLD » *vs* « élèves sans MLD », ainsi que le test du khi² pour l'analyse de distributions binomiales (différence de réussite à certaines questions par exemple). Afin de compléter les analyses quantitatives et de mieux appréhender les processus sous-jacents aux erreurs observées, des analyses qualitatives ont également été menées. Celles-ci ont porté en particulier sur les types d'erreurs produites par les élèves. L'objectif était notamment d'identifier si certains types d'erreurs étaient spécifiques aux élèves à besoins éducatifs particuliers, en particulier les élèves avec MLD, ou si les erreurs observées étaient partagées par l'ensemble des élèves. Cette exploration a donné lieu à une comparaison des erreurs entre élèves avec MLD et sans MLD à l'aide de statistiques descriptives. Les critères pour déterminer si les connaissances sont préservées et si les difficultés sont spécifiques pour les élèves avec MLD sont les suivants :

- si le taux de réussite à une tâche est inférieur à 50% sur l'ensemble de l'échantillon, alors la difficulté sous-jacente est caractérisée comme « commune à tous les élèves » ;
- si le taux de réussite à une tâche est supérieur à 50% sur l'ensemble de l'échantillon, alors la différence de réussite entre le groupes d'élèves avec MLD et sans MLD est étudiée ; s'il existe une différence statistiquement significative, la difficulté sous-jacente à la tâche est caractérisée de « spécifique aux élèves avec MLD » ; s'il n'existe pas de différence statistiquement significative, la connaissance évaluée est caractérisée de « préservée ».

III - RÉSULTATS

Les résultats sont présentés selon trois genres de tâches (tableau 2) : CONVERTIR, ASSOCIER et COMPARER. Nous n'avons pas analysé les réponses des élèves sur le genre de tâches OPÉRER car les opérations avec des fractions ne font pas partie de l'enseignement reçus par les élèves de nos échantillons, ni le genre de tâches RÉSOUDRE DES PROBLEMES car ces questions ont été peu traitées.

1 Genre de tâches CONVERTIR

Nous présentons ici les résultats relatifs au genre de tâches CONVERTIR, qui concerne neuf questions du test et évalue deux types de tâches : « Convertir une fraction en une grandeur et inversement » (Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7) et « Convertir une fraction en une graduation et inversement » (Q10, Q11). Les résultats montrent que, dès la première année d'enseignement, les élèves avec MLD sont moins performants de manière statistiquement significative dans ces deux types de tâches, et que l'écart se creuse à l'issue de la deuxième année (figure 1).

Selon les critères généralement admis dans la littérature (Landis et Koch, 1977), cette valeur indique un accord jugé presque parfait entre les codeurs.

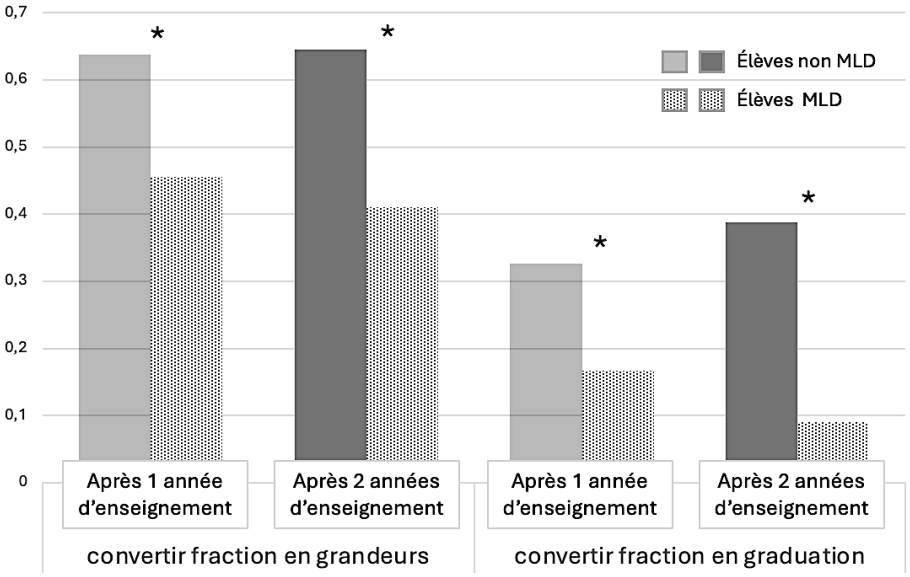


*Figure 1. Différence de performance entre les élèves avec MLD ou sans MLD après une ou deux années d'enseignement des fractions pour des tâches du genre CONVERTIR. En ordonnée : moyenne des scores obtenus par les élèves à l'ensemble des tâches relevant du type de tâches. La significativité est indiquée par *.*

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'analyse des questions Q3, Q4 et Q7 (tableau 3) du type de tâches « Convertir une fraction en une grandeur et inversement ».

	Q3		Q4		Q7a		Q7b	
	Avec MLD	Sans MLD	Avec MLD	Sans MLD	Avec MLD	Sans MLD	Avec MLD	Sans MLD
Après une année	69%	88%	33%	40%	83%	94%	8%	40%
Après deux années	65%	87%	10%	41%	69%	91%	7%	40%

Tableau 3. Pourcentage de réussite aux questions Q3, Q4, Q7 des élèves avec et sans MLD

La question Q3, qui consiste à construire et colorier un quart d'un disque, est globalement bien réussie par l'ensemble des élèves, que ce soit après un an ou deux ans d'apprentissage des fractions (tableau 3). Néanmoins, une différence statistiquement significative de performance entre les élèves avec et sans MLD apparaît dès la première année d'enseignement. Parmi les erreurs relevées, une part importante correspond à des erreurs de type « complémentaire », c'est-à-dire le coloriage de trois quarts du disque au lieu du quart demandé (figure 2a). Cette erreur représente environ un quart des erreurs observées lors de la première année d'enseignement. En deuxième année, cette confusion est davantage présente chez les élèves avec MLD, tandis qu'elle tend à diminuer chez ceux sans MLD. Le taux de réussite étant globalement similaire, cela suggère que les erreurs des élèves sans MLD évoluent vers d'autres types de procédures. En ce qui concerne les pourcentages de non-réponses, il est faible la première année (1% pour les élèves sans MLD, contre 3% pour ceux avec MLD), et l'écart est plus grand entre les groupes de deuxième année : si l'on retrouve un taux de non-réponses similaire pour les élèves sans MLD, les élèves avec MLD présentent un taux de non-réponses plus élevé (14%).

Si la Q3 est bien réussie par la plupart des élèves, ce n'est pas le cas de la Q4 qui pourtant présente le même type de tâches : il s'agit de construire et colorier 5/4 d'un rectangle. Pour cette question, les résultats sont deux fois plus faibles que pour la Q3 après la première année et sont également modestes en deuxième année pour les élèves sans MLD (tableau 3). Chez les élèves avec MLD, le taux de réussite est de 10 % après deux ans, ce qui établit une différence significative entre les deux groupes dès la deuxième année. La disparité entre les performances aux questions Q3 et Q4 s'explique probablement par la nature de la fraction – Q3 mobilise une fraction inférieure à un, alors que Q4 implique une fraction

supérieure à un – ce qui entraine des difficultés majeures, comme abondamment décrit dans la littérature (Bhatia et al., 2024 ; Hecht et Vagi, 2010 ; Mazzocco et Devlin, 2008). Concernant les erreurs relevées en Q4, le coloriage de 4/5 du rectangle correspondant à l'inversion du numérateur et du dénominateur (figure 2b), est la plus observée chez près de la moitié des élèves avec MLD et un peu moins chez les élèves sans MLD. Le coloriage de 4/4 est également fréquent. On observe aussi à plusieurs reprises le recours à une unité inappropriée telle que le cercle (figure 2c) ou encore des erreurs de type « ratio » consistant à dessiner neuf parts et colorier quatre ou cinq parts (figure 2d).

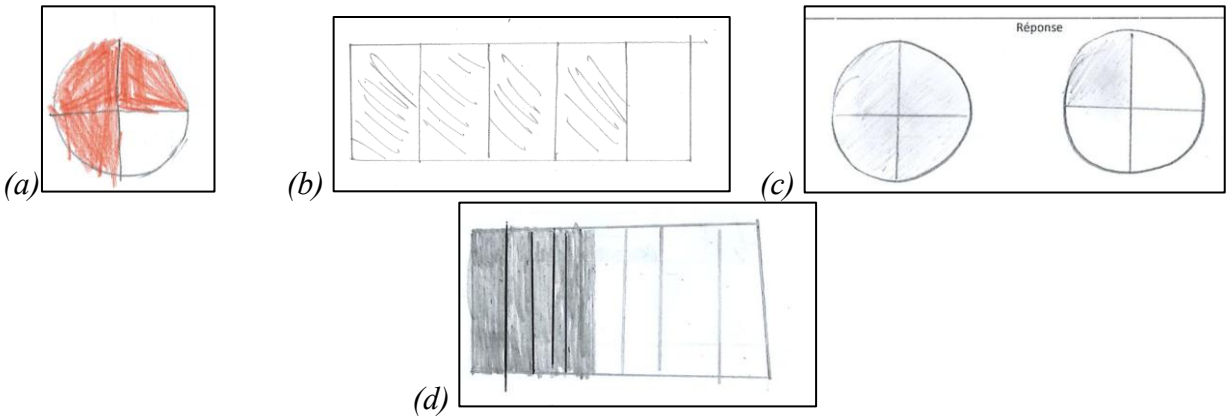


Figure 2. Erreurs du type de tâches « Convertir une fraction en une grandeur et inversement » : pour Q3, coloriage du complémentaire (a) ; pour Q4, inversion numérateur/dénominateur (b),recours à une unité inappropriée (c), erreurs de type « ratio » (d)

Dans Q7, où il s'agit d'exprimer par une fraction une portion coloriée d'une surface-unité, on retrouve le même schéma que pour Q3 et Q4 : l'item comportant une fraction inférieure à un (Q7a) est nettement mieux réussi que celui comportant une fraction supérieure à un (Q7b). Après la première année, les élèves sans MLD obtiennent 94 % de réussite à Q7a contre 40 % à Q7b ; l'écart est plus prononcé chez les élèves avec MLD (83 % de réussite à Q7a, 8 % à Q7b), établissant une différence significative entre les groupes. Les erreurs observées à Q7 sont variées. Les plus récurrentes sont le fait de considérer les deux polygones de Q7b comme une seule unité, ce qui aboutit à l'écriture 10/12 (pour environ la moitié des élèves), et l'inversion numérateur/dénominateur (4/1 pour Q7a et 10/6 ou 12/10 pour Q7b), erreur fréquente dans la compréhension des fractions, notamment chez les élèves avec MLD (Mazzocco et Devlin, 2008 ; Hecht et Vagi, 2010 ; Ikhwanudin et al., 2019).

En conclusion, pour les tâches relevant du type « Convertir une grandeur en une fraction et inversement », la réussite est systématiquement plus faible pour les questions impliquant des fractions supérieures à un, avec un écart plus important entre élèves avec MLD et sans MLD après deux années d'enseignement des fractions. Enfin, nous n'avons relevé aucune réponse spécifique aux élèves MLD : les types d'erreurs sont variés dans les deux groupes.

2 Genre de tâches ASSOCIER

Cette section présente les résultats relatifs au genre de tâches ASSOCIER. Ce regroupement concerne six questions du test répartis en quatre types de tâches : « Associer une fraction à un code verbal et inversement » (Q8, Q9), « Associer une fraction à une autre fraction » (fractions équivalentes) (Q13), « Associer une décomposition à une fraction et inversement » (Q14), « Associer un code décimal à une fraction et inversement » (Q15, Q16). Pour tous ces types de tâches, on a observé des différences de performance statistiquement significatives après deux années d'enseignement entre les élèves avec MLD et ceux sans MLD. Pour le type de tâches « Associer une fraction à une écriture décimale et inversement », cette différence est déjà significative après une année d'enseignement, et on voit que l'écart se creuse après deux années entre ces élèves à profil différent (figure 3).

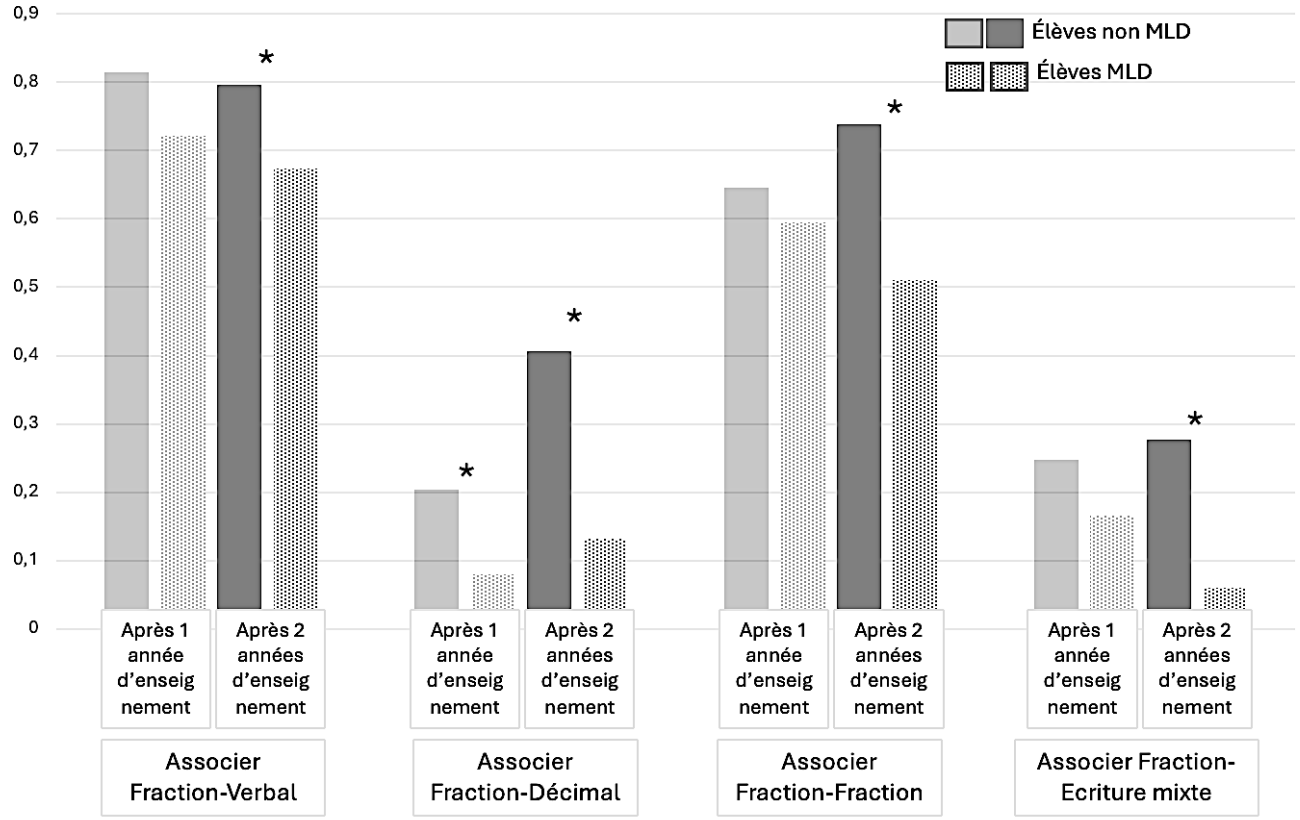


*Figure 3. Différence de performance entre les élèves avec MLD ou sans MLD après une ou deux années d'enseignement des fractions pour des tâches du genre ASSOCIER. En ordonnée : moyenne des scores obtenus par les élèves à l'ensemble des tâches relevant du type de tâches. La significativité est indiquée par *.*

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'analyse de Q 8 et Q9 (relevant du type de tâches « Associer une fraction au langage naturel et inversement ») et de Q15 (relevant du type de tâches « Associer une fraction à une écriture décimale et inversement »).

	Q8		Q9		Q15	
	Avec MLD	**Sans MLD**	**Avec MLD**	**Sans MLD**	**Avec MLD**	**Sans MLD**
Après une année	69%	88%	33%	40%	83%	94%
Après deux années	65%	87%	10%	41%	69%	91%

Tableau 4. Pourcentage de réussite aux questions Q8, Q9, Q15 des élèves avec et sans MLD

Le premier type de tâches comprend les questions Q8 et Q9, qui consistent à associer une fraction à une expression en langage naturel, et inversement. Nos analyses ont montré que ce type de tâches est généralement bien maîtrisé par l'ensemble des élèves, avec des taux de réussite compris entre 67 % et 88 %, selon le profil des élèves et le nombre d'années d'enseignement (tableau 4). Concernant plus particulièrement Q8, les résultats indiquent qu'il n'existe pas de différence statistiquement significative de performance entre les élèves avec MLD et sans MLD après une ou deux années d'enseignement. Toutefois, le taux de non-réponse est plus élevé chez les élèves avec MLD (20 %) que chez les élèves sans MLD (9 %). L'analyse qualitative des erreurs a révélé que des réponses incorrectes telles que 2/5 (inversion numérateur/dénominateur), 2/11 ou 10/2 apparaissent plus fréquemment chez les élèves avec MLD. En ce qui concerne Q9, une différence statistiquement significative de performance est observée entre les deux groupes après deux années d'enseignement. Là encore, le taux de non-réponse est plus élevé pour les élèves avec MLD (29 %) comparé aux sans MLD (6 %). De plus, la réponse « six sur dix » est fréquemment utilisée par les élèves avec MLD, alors qu'elle est moins courante chez les autres.

En ce qui concerne Q15, les résultats montrent que cette tâche est généralement peu réussie, quel que soit le profil des élèves. En effet, le taux de réussite est inférieur à 15 % chez les élèves sans MLD après une année d'enseignement, et reste en dessous de 35 % après deux années. Chez les élèves avec MLD, le taux de réussite atteint seulement 2% la première année, et reste inférieur à 10 % la deuxième année. Une différence importante entre les deux groupes est constatée (15% *vs* 2%), et cette différence devient significative après deux années d'enseignement (33% *vs* 8%). Le taux de non-réponse à cette question est de 38 % chez les élèves avec MLD, contre seulement 6 % chez les sans MLD. Parmi les réponses erronées, l'écriture 1,4 qui juxtapose les nombres du numérateur et du dénominateur est fréquemment retrouvée, et ce dans des proportions similaires entre les deux groupes d'élèves.

Ces résultats mettent en évidence plusieurs éléments importants concernant les tâches du genre ASSOCIER. Tout d'abord, les questions mobilisant l'association entre fraction et langage naturel (Q8 et Q9) semblent globalement bien maîtrisées, en particulier par les élèves sans MLD. Néanmoins, des différences notables apparaissent entre les deux groupes d'élèves, en particulier après deux années d'enseignement, suggérant une progression plus marquée chez les élèves sans MLD. Ceci confirme le fait connu en littérature que tout au long de la scolarité les différences de performance entre élèves avec MLD et sans MLD deviennent de plus en plus marquées (Gardes et Lemrich, 2024). Deuxièmement, le taux plus élevé de non-réponses chez les élèves avec MLD, observé de manière récurrente pour les trois questions présentées ici, pourrait refléter des difficultés d'accès au sens des énoncés ou une hésitation à formuler une réponse lorsque l'élève n'est pas sûr de lui. Par ailleurs certaines erreurs spécifiques, telles que l'inversion du numérateur et du dénominateur ou le fait de voir la fraction comme deux nombres séparés par un trait – biais du nombre entier (Ni et Zhou, 2005) – semblent plus fréquents chez les élèves avec MLD, ce qui indique une compréhension partielle ou instable du concept de fraction. Enfin en ce qui concerne l'association entre fraction et écriture décimale (Q15), les performances sont faibles dans l'ensemble, même chez les élèves sans MLD. Cela souligne la complexité particulière de cette tâche qui requiert non seulement une compréhension des équivalences mais aussi une maîtrise de la numération décimale. Les très faibles taux de réussite et le fort taux de non-réponses chez les élèves avec MLD indiquent que ce type d'association représente un véritable obstacle conceptuel à ce stade de l'apprentissage.

3 Genre de tâche COMPARER

Un dernier genre de tâches que nous souhaitons présenter ici est celui qui concerne la comparaison. Il concerne sept questions du test répartis en quatre types de tâches : « Comparer une fraction à 1 » (Q12), « Comparer deux fractions » (Q17), « Ordonner des fractions » (Q18, Q19), « Intercaler une fraction entre deux nombres » (Q20, Q21, Q22). Concernant les niveaux de performance sur ces tâches de comparaison, on constate des différences significatives statistiquement à l'issue de la première année d'enseignement sur trois types de tâches, et sur tous les types de tâches à l'issue de la deuxième année entre les élèves avec ou sans MLD (figure 4). À noter également que si les élèves sans MLD voient leur performance augmenter entre les deux années, on note une tendance inverse (donc à la baisse) des performances entre les deux années chez les élèves avec MLD.

Nous présentons dans ce qui suit les résultats concernant les questions Q18, Q19 et Q21 (tableau 5).

	Q18		Q19		Q21	
	Avec MLD	**Sans MLD**	**Avec MLD**	**Sans MLD**	**Avec MLD**	**Sans MLD**
Après une année	91%	90%	0%	17%	50%	76%
Après deux années	67%	88%	1%	22%	52%	82%

Tableau 5. Pourcentage de réussite aux questions Q18, Q19, Q21 des élèves avec et sans MLD

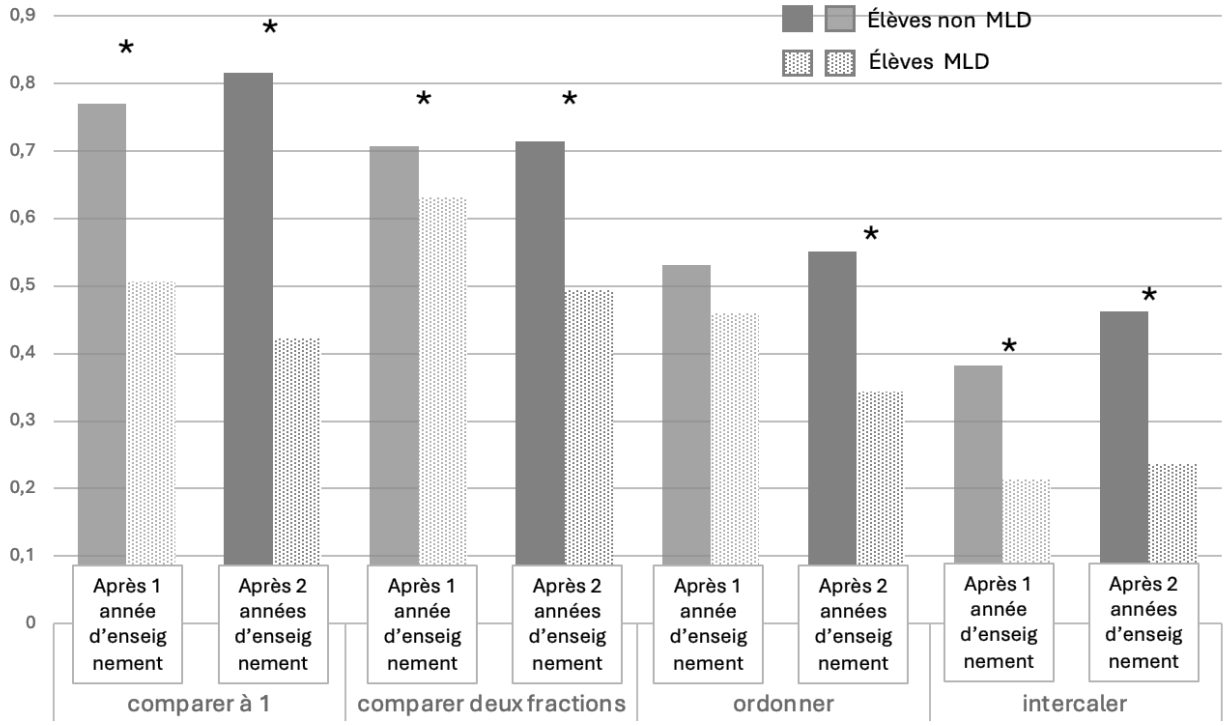


*Figure 4. Différence de performance entre les élèves avec MLD ou sans MLD après une ou deux années d'enseignement des fractions pour des tâches du genre COMPARER. En ordonnée : moyenne des scores obtenus par les élèves à l'ensemble des tâches relevant du type de tâches. La significativité est indiquée par *.*

La question Q18 est assez bien réussie par tous les élèves, à l'issue de la première comme de la deuxième année d'enseignement des fractions (tableau 5). Il n'y a pas de différence significative entre les groupes d'élèves avec ou sans MLD après une année d'enseignement. Après deux années d'enseignement, la différence devient significative entre les élèves avec ou sans MLD : le taux de réussite diminue à 67% pour les élèves avec MLD, alors que les élèves sans MLD obtiennent un taux de réussite de 88%, soit un taux stable entre la fin de la première et de la deuxième année d'enseignement des fractions. Le taux de non-réponse après deux ans double chez les élèves avec MLD (passant de 6% à 12%), alors qu'il augmente légèrement (passant de 6 à 8%) chez les élèves sans MLD.

Pour Q19, les taux de réussite sont faibles pour l'ensemble des élèves, ce qui montre une difficulté indépendamment de la présence de MLD. Aucun élève avec MLD répond correctement à cette question après une année d'enseignement. Un seul d'entre eux répond correctement après deux ans d'enseignement. En ce qui concerne les élèves sans MLD, le taux de réussite pour la première année est de 17%, soit 1/6 des élèves. Pour cette catégorie, on observe une augmentation du taux de réussite après deux années d'enseignement pour atteindre 22%. Ces premières observations nous ont conduits à analyser plus finement les types d'erreurs des élèves pour cette question. Autant à l'issue de la première que de la deuxième année, il y a davantage d'élèves avec MLD qui ordonnent les fractions en se basant uniquement sur le numérateur (figure 5a). Lors de la première année cela correspond à la moitié des réponses erronées des élèves avec MLD et à un tiers lors de la deuxième année. Une hypothèse pour ces résultats est que le numérateur est la première information – et peut-être la seule - prise en compte à la lecture. On a également observé qu'un tiers des réponses fausses des élèves avec MLD sont dues au classement des fractions selon la valeur du dénominateur (figure 5b) à l'issue de la première année et un quart à l'issue de la deuxième. Pour les élèves sans MLD les mêmes types d'erreurs se distinguent. Toutefois ils sont moins représentés, au profit d'autres types d'erreurs dues par exemple à la recherche de correspondances avec d'autres formes d'écriture du nombre pour s'aider dans ce classement (figure 5c).

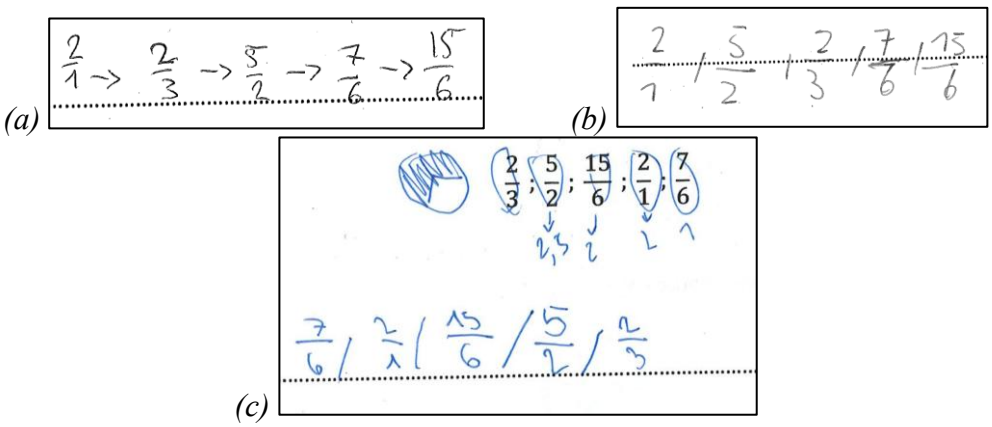


Figure 5. Erreurs du type de tâches « Ordonner des fractions » : selon la valeur du numérateur (a) ; selon la valeur du dénominateur (b),recours à l'écriture décimale (c)

La question Q21 est moyennement réussie par les élèves avec MLD, avec environ la moitié d'entre eux qui répondent correctement après la première et la deuxième année d'enseignement (tableau 5). On observe donc une différence significative entre les élèves avec MLD et sans MLD dès la première année : ces derniers obtiennent en effet des taux de réussite élevés (76% et 82% pour la première et la deuxième année). L'écart entre les deux catégories d'élèves se creuse après deux ans d'enseignement. On a constaté une particularité : le taux de non-réponse pour les élèves avec MLD augmente, passant de 19% à 25% à l'issue de la deuxième année, alors que le taux de non-réponse pour les élèves sans MLD reste stable à 11%. Pour Q21, il a été identifié un type d'erreur particulier, les fractions extrêmes : les élèves choisissent comme réponse les fractions-repères déjà indiquées (en l'occurrence 2/7 ou 4/7). On constate qu'environ un quart des élèves, autant avec que sans MLD, commet ce type d'erreur après un an d'enseignement. Cependant, il est intéressant de constater que ce taux augmente pour les élèves avec MLD après deux ans pour atteindre 33%, contrairement aux élèves sans MLD pour lesquels ce taux diminue de moitié (13%). Parmi les autres erreurs faites par les élèves (avec ou sans MLD), on trouve notamment 3/2, 2/0, 3/6. Nous avons également relevé des erreurs spécifiques chez les élèves avec MLD, par exemple 5/3 qui résulte d'une soustraction entre le dénominateur et le numérateur (figure 6a) ou 27/47 qui montre une juxtaposition du dénominateur et du numérateur (figure 6b).

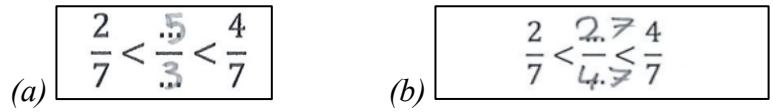


Figure 6. Erreurs du type de tâches « Intercaler une fraction » : soustraction entre le dénominateur et le numérateur des fractions données (a) ; juxtaposition du dénominateur et du numérateur (b)

En conclusion, pour le genre de tâche COMPARER, on constate que pour les questions globalement bien réussies par les élèves, il y a une stagnation ou une régression chez les élèves avec MLD après la deuxième année. Cela nous laisse à penser que ces compétences ne sont pas réellement stabilisées. Nous faisons l'hypothèse que le travail avec des fractions de même dénominateur est considéré comme une compétence « élémentaire » et par conséquence probablement peu retravaillée lors de la deuxième année d'enseignement. Pour les élèves sans MLD, cette manière de faire pourrait suffire pour maîtriser cet apprentissage. Néanmoins, compte tenu que les élèves avec MLD ont besoin de davantage de répétitions et de temps pour acquérir une notion, cela expliquerait pourquoi ces compétences « élémentaire » ne sont pas stabilisées pour ces élèves.

IV - CONCLUSION

Nous avons détaillé les analyses qualitatives et quantitatives effectuées selon trois genres de tâches sur les fractions afin d'identifier les connaissances préservées et les difficultés spécifiques des élèves avec

MLD. Pour rappel, nous avons caractérisé une connaissance comme préservée s'il n'y aucune différence statistiquement significative entre les résultats des élèves MLD et non MLD concernant les tâches rattachées à cette connaissance. Nous avons caractérisé une difficulté de spécifique aux élèves MLD s'il existe une différence statistiquement significative entre les résultats des élèves MLD et non MLD concernant les tâches rattachées à cette difficulté. La figure 7 présente une synthèse de ces résultats.

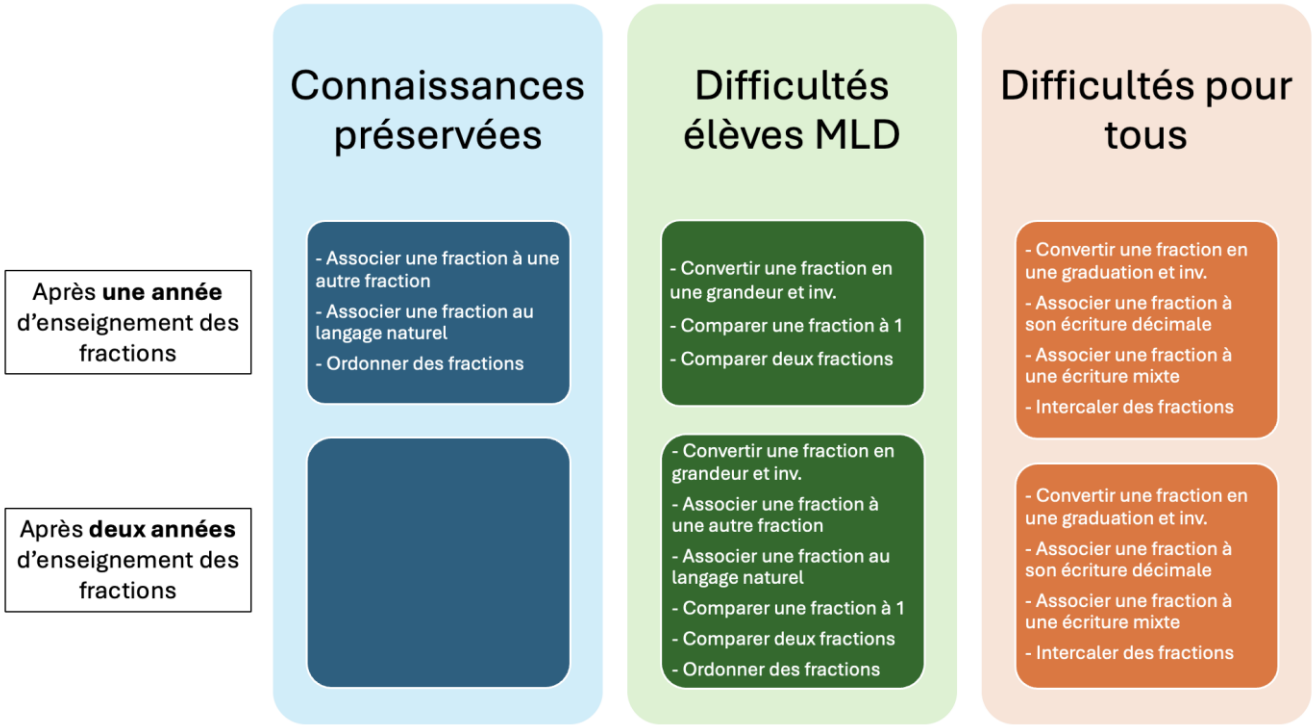


Figure 7. Synthèse des connaissances préservées et des difficultés spécifiques pour les élèves avec MLD, ainsi que les difficultés pour tous les élèves

Après une année d'enseignement des fractions, trois connaissances sont considérées comme préservées pour les élèves avec MLD : associer une fraction à une autre fraction, associer une fraction au langage naturel et inversement et ordonner des fractions (de même dénominateur). Des difficultés spécifiques ont également été identifiées : convertir une fraction en une grandeur et inversement, comparer une fraction à 1 et comparer deux fractions. Après deux années d'enseignement des fractions, nous constatons qu'il n'y a plus de connaissances préservées, c'est-à-dire que les élèves avec MLD réussissent de manière statistiquement significative moins bien que les élèves sans MLD sur tous les types de tâches liées à l'apprentissage des fractions. De plus, la liste des difficultés spécifiques s'est agrandie. Il est à noter que la liste des difficultés pour tous reste la même entre la première et la seconde année d'enseignement, ce qui n'est pas étonnant étant donné que ces types de tâches sont, soit peu abordés dans l'enseignement primaire – par exemple intercaler une fraction) – soit connues pour être complexes pour de nombreux élèves au début de l'apprentissage des fractions – par exemple convertir une fraction en une graduation et inversement (Mazzocco et Devlin, 2008).

Si le fait que les élèves avec MLD réussissent moins bien que les élèves sans MLD n'est pas surprenant, il est plus étonnant de remarquer que certaines connaissances ne sont pas préservées dès la première année d'enseignement. C'est par exemple le cas des tâches de conversion entre une fraction et une grandeur, alors même que c'est un type de tâches très présent dès le début de l'enseignement des fractions, dont l'objectif est de donner du sens à la notion de fraction, et en particulier à l'écriture fractionnaire. Ce résultat rejoint les travaux de Mazzocco et al. (2013) qui montrent que les élèves avec MLD rencontrent des difficultés durables dans la maîtrise des représentations symboliques des fractions et restent plus longtemps dépendants de représentations figuratives.

Nous pouvons faire l'hypothèse qu'une introduction trop précoce des écritures fractionnaires constitue un obstacle majeur pour ces élèves, et que le recours à d'autres registres de représentation devrait être prolongé afin de soutenir la construction de sens. Par ailleurs, le fait que certaines connaissances apparaissent comme préservées à un moment donné puis ne le soient plus ultérieurement, peut s'expliquer par des trajectoires d'apprentissage différentes (Mazzocco et al., 2013). Les élèves sans MLD semblent en effet tirer davantage profit de la poursuite de l'enseignement et de la diversification des tâches. Nous pouvons faire l'hypothèse que les connaissances de base des élèves avec MLD étant plus fragiles, ils ont plus de difficulté à les mobiliser pour construire de nouvelles connaissances. Les progrès sont présents mais leur évolution est moins marquée, ce conduit ainsi à un accroissement des écarts de performance entre les deux groupes.

Notre étude présente plusieurs limites qu'il convient de considérer avec prudence dans l'interprétation des résultats. Tout d'abord, la nature du test utilisé – des questions à choix multiples et des questions ouvertes – peut restreindre la portée des données recueillies. En effet ce type d'outil, bien qu'il permette une analyse quantitative et comparative, ne rend pas toujours compte de la complexité des raisonnements ou des conceptions des élèves. Il serait dès lors pertinent de compléter cette approche par des entretiens individuels ou collectifs susceptibles d'apporter un éclairage plus fin sur les processus de pensée et les logiques sous-jacentes aux réponses observées, surtout pour les élèves avec MLD. En outre, la prise en compte de variables supplémentaires telles que le niveau socio-économique, le contexte scolaire ou encore le parcours antérieur des élèves, pourrait contribuer à affiner l'analyse et à mieux comprendre la diversité des trajectoires d'apprentissage au sein de la population étudiée.

Pour conclure, nous voulons souligner qu'observer plus finement les performances des élèves avec MLD est doublement pertinent. D'une part, l'identification des difficultés spécifiques de ces élèves est importante pour leur prise en compte dans un enseignement à visée inclusive afin de proposer des différenciations pédagogiques adaptées à leurs besoins situés. À l'avenir, nous aimerions ainsi concevoir un ensemble de « situations didactiques inclusives » pour l'enseignement des fractions, c'est-à-dire des situations pour tous les élèves, prenant en compte leur diversité, en agissant sur l'adaptation du milieu. D'autre part ce focus sur les connaissances des élèves avec MLD agit comme une loupe qui aide à mieux comprendre, de manière générale, les difficultés d'apprentissage liées aux fractions. Par exemple nos résultats suggèrent la nécessité de renforcer l'enseignement des liens entre les différentes représentations des fractions, en particulier pour les élèves en difficulté, en veillant à expliciter les correspondances symboliques, verbales, décimales et droite graduée dans des contextes variés. Nos résultats rejoignent les quatre recommandations données par Ennis et Losinski (2019) dans leur revue de littérature pour proposer un enseignement des fractions plus adapté et efficace en milieu scolaire : (1) s'appuyer sur les connaissances préalables des élèves ; (2) reconnaitre les fractions comme un nombre, notamment lorsqu'elle se situent sur une droite numérique ; (3) comprendre le sens des opérations ; (4) développer diverses stratégies pour résoudre des problèmes. Enfin, du point de vue des perspectives en formation, il pourrait être pertinent d'attirer l'attention des enseignants sur certaines difficultés spécifiques rencontrées par les élèves présentant des troubles des apprentissages en mathématiques. Parmi celles-ci, la maîtrise fragile de connaissances de base (comme l'association entre fraction et grandeur) illustre leur difficulté à stabiliser durablement certains acquis. Cela souligne l'importance de réactivations régulières en classe, tout en veillant à prendre en compte la singularité des besoins de chaque élève. Cette étude peut également constituer un point d'appui pour engager une évolution du regard porté sur les élèves dits « en difficulté ». Les résultats mettent en lumière l'importance de sensibiliser les enseignants au fait que ces élèves ne présentent pas uniquement un « retard » à combler, mais qu'ils mobilisent parfois des conceptions alternatives, qu'il convient d'identifier et de travailler.

V - BIBLIOGRAPHIE

Bhatia, P., Léone, J., Gardes, M.-L. et Prado, J. (2024). Fraction Knowledge in Adults With Persistent Mathematics Difficulties. *Learning Disability Quarterly, 47*(1), 30-43. https://doi.org/10.1177/07319487231171380

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier, et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Dans *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M.-L., Gregorio, F., Ouvrier-Buffet, C., Peteers, F. et Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *The Journal of Mathematical Behavior, 60*, 100807. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807

Ennis, R. P. et Losinski, M. (2019). Interventions to improve fraction skills for students with disabilities: A meta-analysis. *Exceptional Children, 85*(3), 367-386.

Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC) (2019) *Concept 360°.* https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/dgeo/fichiers_pdf/concept360/Concept_360.pdf

Gardes, M.-L. et Lemrich, C. (2024). Fractions : concepts et difficultés. Dans A. Lafay et M. Villain (dir.), *Troubles de la cognition mathématique : de la compréhension aux interventions* (p. 221-234). Louvain-La-Neuve : De Boeck supérieur.

Gregorio, F. (2023). Algebraic generalisation of a student with MLD: Skills despite difficulties and implications for diagnostic tests. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi et E. Kónya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (p. 552–559). Budapest: Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Hecht, S. A. et Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology, 102*(4), 843-859. https://doi.org/10.1037/a0019824

Houle, V. et Giroux, J. (2015). Intervention orthopédagogique en mathématiques fondée sur une approche didactique. *Regards sur le travail de l'enseignant de mathématiques, 95*.

Hunt, J. H., Silva, J. et Lambert, R. (2019). Empowering students with specific learning disabilities: Jim's concept of unit fraction. *The Journal of Mathematical Behavior, 56*, 100738.

Ikhwanudin, T., Prabawanto, S. et Wahyudin, W. (2019). The Error Pattern of Students with Mathematics Learning Disabilities in the Inclusive School on Fractions Learning. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 18*(3), 75 95. https://doi.org/10.26803/ijlter.18.3.5

Landis, J. R. et Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics, 33*(1), 159-174.

Loi n°2013-595 du 8 juillet 2013 d'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République; JORF n°0157 du 9 juillet 2013. https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000027677984&categorie Lien=id

Lortie-Forgues, H., Tian, J. et Siegler, R. (2015) Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult ? *Developmental Review, 38*, 201-221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Mazzocco, M. M. M. et Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes' : Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science, 11*(5), 681-691. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x

Ni, Y. et Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Peteers, F., Lemrich, C., Gregorio, F. et Gardes, M.-L. (2023). État des lieux de la recherche en *Mathematics Education* de 2007 à 2021 sur les troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école, 240*, 3-15. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.4229

Robotti, E. (2017) How the representations take on a key role in an inclusive educational sequence concerning fraction. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10) (p. 3992–3999). DCU Institute of Education and ERME.

Zarpas, P. (2020). Analyse d'un jeu vidéo didactique élaboré pour l'apprentissage des fractions. *Petit x, 113*, 41-58.

UNE UTILISATION DU BOULIER POUR LA CONSTRUCTION DU NOMBRE ET L'APPROCHE DU CALCUL EN GRANDE SECTION DE MATERNELLE

Chantal TUFFÉRY-ROCHDI
MCF, Université de Montpellier
LIRDEF (EA 3749)
chantal.tuffery-rochdi@umontpellier.fr

Pauline POLGE
PEMF, Académie De Montpellier
pauline.polge@ac-montpellier.fr

Nadège RIBO
PE, Académie De Montpellier
nadege.ribo@ac-montpellier.fr

Résumé
Cette communication relate une partie de la recherche menée par un groupe de l'IRES de Montpellier et soutenue par l'INSPE de Montpellier pendant deux années consécutives, de 2022 à 2024. La recherche porte sur l'usage du boulier à 20 ou 100 boules en fin de cycle 1. Le groupe a analysé les caractéristiques pédagogiques et didactiques du matériel choisi pour la construction du nombre et du calcul et a proposé des situations de construction matérielle et de construction conceptuelle du boulier par les élèves lors des rituels d'appel. Il a ensuite œuvré à adapter des situations de référence en tenant compte de l'usage de ce matériel. Ce travail a permis l'identification, dans la mise en œuvre des séquences proposées, des différentes étapes nécessaires aux apprentissages des élèves ainsi qu'une appropriation facilitée du nombre en appui sur le groupement par cinq.

Cette communication s'appuie sur une recherche menée par un groupe de l'IRES de Montpellier et soutenue par l'INSPE de Montpellier pendant deux années consécutives, de 2022 à 2024. Le groupe est composé de trois enseignantes-chercheuses[1], une conseillère pédagogique de circonscription[2], trois enseignants de cycle 1[3] et deux enseignantes de cycle 2[4]. Le projet a également fait l'objet d'un mémoire[5] de master MEEF premier degré. La constitution de ce groupe IRES trouve sa source dans des constatations faites dans l'académie de Montpellier. À leurs retours de stages, réalisés dans le cadre de leur master MEEF, les étudiants de première et deuxième année étaient nombreux à dire avoir observé peu, voire pas du tout, de séances de mathématiques avec un appui quelconque sur de la manipulation et, lorsqu'un matériel de manipulation était utilisé, il l'était souvent comme outil de différenciation à destination des élèves en difficulté. De fait, les situations s'appuyant sur de la manipulation vues en formation initiale semblaient déconnectées de la réalité du terrain et n'infusaient pas dans leurs pratiques débutantes.

[1] Anne Cortella (MCF, IMAG, UM), Louise Nyssen (MCF, IMAG, UM), Chantal Tuffery-Rochdi (MCF, LIRDEF, UM)

[2] Sonia Bayle (CPC, Académie de Montpellier)

[3] Rémy Michel, Pauline Polge, Nadège Ribo (PE Maternelle, Académie de Montpellier)

[4] Laurence Munch, Isabelle Reynaud (PE Cycle 2, Académie de Montpellier)

[5] Elsa Corrado, Louna Aubaterre (étudiantes en M2 MEEF, Faculté d'Education, Université de Montpellier)

Ce constat n'est pas limité au territoire de l'académie et fait écho à d'autres recherches. Ainsi, dans le cadre de l'enquête PRAESCO 2019 qui porte sur les pratiques des enseignants de CM2, seuls 19% des enseignants interrogés disent utiliser souvent ou très souvent du matériel de numération (barrettes Cuisenaire, blocs de numération, etc.) avec leurs élèves (Allard et al., 2022, p.25). Par ailleurs, le matériel à manipuler est plutôt vu comme un outil de différenciation à laisser à disposition des élèves les plus faibles, comme dans le cas des problèmes de division. (Allard et al., 2022, p.39)

Ces pratiques vont pourtant à l'encontre des recommandations de l'institution. En 2018, le rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (Villani et Torossian, 2018) préconisait, en cinquième mesure, de mettre en œuvre dès le plus jeune âge un apprentissage des mathématiques fondé sur : la manipulation et l'expérimentation, la verbalisation, l'abstraction. Pour rendre cela possible, la quatrième mesure visait à « Proposer à toutes les écoles un équipement de base, accompagné de tutoriels, favorisant les manipulations d'objets réels ou virtuels. » (Ibid., p.59).

L'objectif du groupe IRES qui s'est constitué à la suite de ce constat est de construire des ressources et une action de formation continue à destination des tuteurs de stagiaires MEEF premier degré avec du matériel simple à se procurer et qui fait sens pour les enseignants, et avec des propositions de mises en œuvre expérimentées en conditions réelles mais incluant des variantes possibles justifiées par les conditions d'exercice. Le tout est mis en lien avec les apprentissages effectifs des élèves.

Le groupe a fait le choix d'une thématique qui s'intègre dans le domaine numérique, à savoir la construction du nombre et du système de numération ainsi que l'entrée dans le calcul entre la fin du cycle 1 et le cycle 2. Il a également fait le choix d'un matériel central pour la progression : le boulier à 20 boules (deux tiges de dix boules chacune) et le boulier à 100 boules (dix tiges de dix boules chacune). Un usage habituel du matériel a été prévu par le groupe : chaque boule représente une unité d'une collection ; dans un premier temps, toutes les boules sont d'un côté (et ne sont pas prises en compte), on pousse les boules pour les dénombrer en commençant par la tige du haut et on ne passe à la suivante que lorsque toutes les boules ont été décalées (Le Dantec, 2024).

Nous développons ici uniquement le travail réalisé par le groupe IRES pour le niveau Grande Section de maternelle (élèves de cinq à six ans). Après un bref rappel historique sur l'usage des abaques à jetons, nous montrerons comment nous nous sommes appuyés sur les rituels pour la construction matérielle et conceptuelle du boulier avec les élèves, puis comment nous avons adapté des situations de référence en tenant compte de l'usage de ce matériel. Nous apporterons enfin nos premières conclusions et les poursuites envisagées.

I - RAPPEL HISTORIQUE, CHOIX DU BOULIER, APPUI SUR LE GROUPEMENT PAR CINQ

En français, le terme générique « abaque » désigne tous les instruments dans lesquels on place des petits objets identiques (cailloux, jetons, boules...) sur des colonnes, des lignes ou des tiges parallèles matérialisées sur un support plan, de manière à représenter des nombres et à calculer sur eux. On en distingue deux catégories :

- Les « abaques à jetons », dont le principe est de poser des jetons sur une « table à calculer » marquée de lignes ou de colonnes.
- Les « abaques à boules » ou « bouliers » qui consistent à faire coulisser des boules sur des tiges parallèles fixées dans un cadre.

La différence majeure entre ces deux familles d'artéfacts réside dans le fait que dans les abaques à jetons, on peut placer un nombre illimité de jetons sur chaque ligne ou chaque colonne, alors que dans les bouliers, le nombre de boules pouvant coulisser sur une tige donnée est limité par la construction de l'outil (Tournès, 2016).

Les abaques ont été le principal instrument de calcul de l'humanité pendant plus de 2000 ans. Le plus ancien des abaques connus, daté du 5e ou du 4e siècle avant notre ère, a été découvert en Grèce. Il se présente sous la forme d'une grande plaque de marbre blanc portant des lignes parallèles et des signes représentant le système de numération utilisé par les Grecs. Ce système est en base dix, mais avec une sous base cinq, analogue à celui adopté plus tard par les Romains (Tournès, 2016).

Tournès (Ibid.) met en avant l'usage d'une sous base cinq dans de nombreux systèmes de numération et la présence de jetons dits « quinaires », qui représentent cinq, dans de nombreuses abaques. Tout comme la base dix semble être issue de nos dix doigts, la sous base cinq pourrait évoquer une main de cinq doigts. Le phénomène de subitisation (dénombrement instantané d'une collection de cardinal inférieur à quatre) étudié par les neurosciences pourrait également expliquer cet appui sur le cinq. Ainsi, dans les abaques, la présence de jetons « quinaires », rend le dénombrement rapide, le nombre de jetons isolés ne dépassant pas quatre.

Cette sous base cinq et la présence de boules « quinaires » se retrouvent également dans le boulier chinois. Celui-ci est composé de treize tiges, chacune correspondant à un rang de notre numération positionnelle, et d'une barre centrale. Sur chaque tige sont disposées, de part et d'autre de la barre centrale, cinq boules et deux boules. À la différence du boulier à 100 boules dans lequel chaque boule représente une unité quelle que soit sa position sur les tiges, dans le boulier chinois la valeur d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée (unités, dizaines, centaines…) mais également de sa position par rapport à la barre centrale : du côté de la barre qui contient cinq boules, chaque boule représente une unité, elle est dite « unaire », du côté de la barre qui contient deux boules, chaque boule représente cinq unités et est dite « quinaire » (Bueno-Revel et al., 2014).

En France, l'usage du boulier à 100 boules à l'école maternelle n'est pas récent. On en trouve des traces dans les écrits de Marie Pape-Carpantier, en particulier dans l'ouvrage *L'enseignement pratique dans les écoles maternelles ou premières leçons à donner aux petits enfants*, dont la première édition date de 1848. L'auteure y liste des exercices tels que la numération jusqu'à 100, la « convention ingénieuse » du système décimal, mais également l'ajout de petites quantités (2, 3, 4, 5, 10), le retrait de petites quantités (1, 2, 3) et la distinction entre nombre pair et impair (Régnier, 2003).

Plus récemment, Maschietto et Bartolini Bussi (2013), dans une recherche menée en Italie, introduisent en classe de maternelle un boulier géant composé de 40 boules (quatre rangées de dix boules chacune) réalisé par des menuisiers de la ville. Le boulier géant est livré en pièces détachées et les enseignants peuvent choisir de l'assembler avec les élèves, ou de le faire assembler et de le montrer déjà prêt. Dans les deux cas le boulier est introduit à partir de questions (Qu'est-ce que nous pourrions construire avec cela ? ; À quoi peut-il servir ?). La construction du boulier et l'appui sur la verbalisation a amené les élèves à l'étudier comme un objet matériel composé de parties ayant des relations spatiales particulières entre elles et a favorisé son appropriation.

D'autres recherches, menées dans les années 2010, conjointement dans les ESPE de Bretagne et de La Réunion (Poisard, Tournès et Cochet, 2016), expérimentent l'utilisation d'abaques à jetons pour introduire le boulier chinois en cycle 2. Dans les deux cas, la présence de jetons ou boules « quinaires » favorise l'appui sur le groupement par cinq. Si l'abaque présente plus de souplesse quant aux nombres de jetons que l'on peut manipuler sur un rang de numération, le boulier chinois est plus adéquat pour travailler les grands nombres. Une version matérielle et une version numérique des outils sont proposées.

Cet usage d'une manipulation conjointe d'une version matérielle et numérique du matériel est également présent dans la *Mallette de ressources mathématiques pour l'école - CE1 et CE2* conçue dans le cadre d'un projet impulsé par le ministère de l'Éducation Nationale français et associant des équipes de recherche

de la COPIRELEM, de l'IFE et du CREAD[6] (Bueno-Revel et al., 2014). La conception de cette mallette repose sur l'hypothèse de « l'importance de la manipulation directe d'objets tangibles, dans un contexte de résolution de problèmes, pour soutenir les premiers apprentissages mathématiques » (Ibid., p.1). Ici encore c'est le boulier chinois qui est choisi.

Cette revue de recherches antérieures, qui ne se veut pas exhaustive, nous a permis d'effectuer des choix et de formuler nos questions de recherche, que nous développons dans la deuxième partie. Nous apportons également des éléments sur notre méthodologie de travail et sur notre cadrage théorique.

II - QUESTIONS DE RECHERCHE, METHODOLOGIE ET CADRAGE THEORIQUE

Dans le cadre de notre recherche, notre choix s'est porté spontanément sur le boulier à 100 boules. La possibilité d'utiliser le boulier chinois n'a pas été discutée, son usage nous paraît davantage adapté à l'apprentissage du système de numération décimal qui n'est pas attendu en cycle 1. Bien que le boulier à 40 boules utilisé en Italie (Maschietto et Bartolini Bussi, 2013) nous semble tout à fait adapté pour des élèves de maternelle, nous avons fait le choix de nous diriger vers un matériel disponible dans le commerce[7] et facile à se procurer pour les enseignants. Nous nous sommes donc procuré des bouliers à 20 boules composés de deux tiges avec dix boules chacune alternant deux couleurs (cinq boules consécutives rouges et cinq boules consécutives bleues) et des bouliers à 100 boules conçus de façon similaire mais avec dix tiges (Figure 1). L'alternance des couleurs favorise l'appui sur le groupement par cinq. Nous nous sommes par ailleurs focalisés sur la manipulation matérielle du boulier et nous n'avons pas expérimenté un usage virtuel du boulier.

Une fois ces choix effectués, les questions de recherche qui ont émergé sont les suivantes :

- Comment amener les élèves à construire matériellement et conceptuellement le boulier avec cet appui sur le groupement par cinq ?
- Comment adapter des situations de référence en tenant compte de l'usage de ce matériel ?
- Quel est l'effet induit par l'usage du boulier sur les apprentissages des élèves relatifs à la construction du nombre ?

La méthodologie de travail et de recherche est semblable à celle de nombreux groupes IRES. Les réunions avec l'ensemble du groupe ont conduit à des réflexions et des choix collectifs aussi bien autour des rituels, qu'autour des situations de références. Ces choix ont malgré tout été déclinés différemment par les trois enseignants de maternelle qui se sont appropriés le matériel et les différentes situations. Les séances mises en œuvre ont régulièrement été filmées par les enseignants eux-mêmes ou lors des visites des chercheuses. Des extraits de ces films ont été analysés par le collectif.

Nous nous appuyons sur le cadre de l'approche instrumentale développé par Rabardel (1995), puis introduit en didactique des mathématiques (Trouche, 2005). L'approche instrumentale distingue l'artefact de l'instrument. L'artefact désigne l'objet, matériel ou abstrait, qui a été élaboré pour répondre à un besoin spécifique et qui est proposé à un sujet. L'instrument est ce que le sujet construit à partir de l'artefact. Il comprend l'artefact et un ou des schèmes d'utilisation de cet artefact. Rabardel (1995) reprend le concept de schème de Vergnaud (1996). Un schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations donnée. Il comprend quatre composantes : un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations ; des règles d'action, de prise d'information et de contrôle ; des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) ; des possibilités d'inférence. Suivant

[6] COPIRELEM : Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire ; CREAD : Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique (EA 3875) ; IFE : Institut Français de l'Éducation.

[7] https://www.wesco.fr/ ou https://toutpourlejeu.com/ ou https://www.didacto.com/

Rabardel (1995), nous différencions les schèmes d'usages, relatifs aux tâches secondes, des schèmes d'action instrumentée relatifs aux tâches premières et principales, orientées vers l'objet de l'activité, et pour lesquelles l'artefact est un moyen de réalisation. Le processus par lequel un utilisateur transforme un artefact en instrument est nommé genèse instrumentale (Ibid.). La genèse instrumentale combine deux composantes : l'instrumentation pendant lesquelles l'utilisateur développe des schèmes d'utilisation de l'artefact, et l'instrumentalisation pendant lesquelles l'utilisateur met l'artefact à sa main.

Nous nous plaçons dans le champ de la résolution de problèmes numériques et nous allons considérer différentes classes de situations : réaliser une collection équipotente à une autre, dénombrer une collection, résoudre des problèmes de composition avec recherche du composé, résoudre des problèmes de division quotition (Vergnaud, 1983, 1986). Nous étudions comment l'artefact introduit, le boulier avec ses possibilités et ses contraintes, va instrumenter le sujet, l'élève de grande section avec ses connaissances, pour résoudre ces problèmes du champ numérique. Nous essayons d'identifier les schèmes d'utilisation développés et les connaissances sous-jacentes relatives à la construction du nombre. Nous sommes également attentives à de possibles instrumentalisations du boulier par les élèves.

III - UNE PROGRESSION SUR LES RITUELS : CONSTRUCTION MATERIELLE ET CONCEPTUELLE DU BOULIER

Notre première question de recherche est : comment faire pour amener les élèves à construire matériellement et conceptuellement le boulier avec l'appui sur le groupement par cinq. Nous avons, pour cela, construit une progression sur l'année avec des évolutions autour du rituel d'appel. Ces évolutions sont initiées par la résolution d'un problème posé à la classe puis répétées tous les jours de la période. Ces rituels d'appels participent à construire le nombre à la maternelle mais également à l'émergence des schèmes d'usage et d'action instrumentée du boulier afin que celui-ci puisse servir d'instrument aux élèves dans les rituels mais aussi pour d'autres types de problèmes. Nous développons dans la suite de ce paragraphe le travail mené à chaque période et synthétisé dans la frise chronologique ci-dessous (Figure 1). La classe est une classe à double niveau composée de 15 élèves de grande section (GS) et de 11 élèves de petite section (PS).

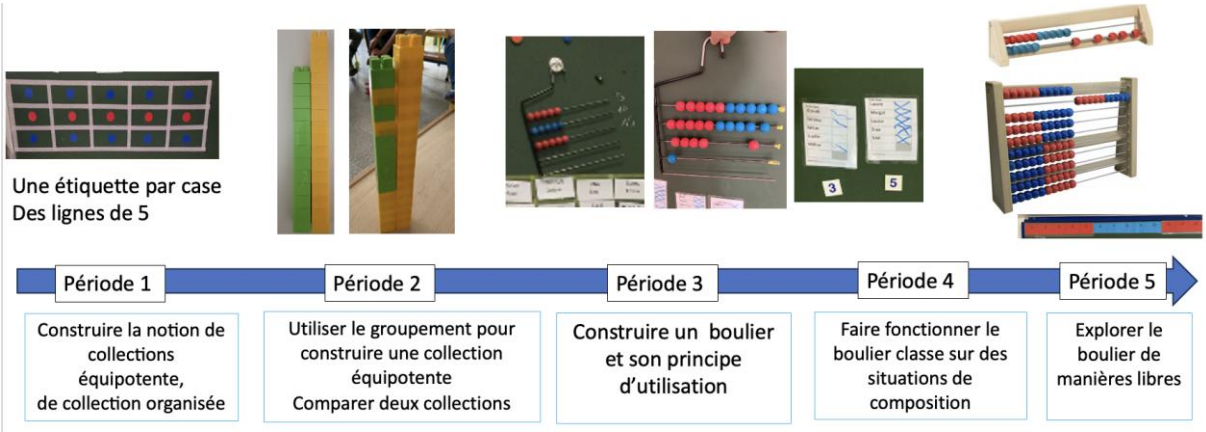


Figure 1 : la progression sur les rituels

1 Première période : construire une collection équipotente, organiser cette collection

Pendant la première période, le rituel d'appel est classique : à son arrivée en classe le matin, chaque élève de GS doit identifier son étiquette posée sur une table et doit aller l'aimanter au tableau. La reconnaissance du prénom n'est plus une difficulté à ce stade de la scolarité dans cette classe. L'objectif d'apprentissage est d'établir la notion d'équipotence en construisant une collection témoin : autant d'élèves de GS présents que d'étiquettes aimantées au tableau et ce quelle que soit la disposition des étiquettes sur le tableau. Dans un premier temps la collection n'est pas organisée (Figure 2, photo 1).

Le premier problème de l'année proposé en cours de cette période aux élèves est le suivant : comment organiser les étiquettes pour qu'elles n'occupent pas tout le tableau ? Des organisations diverses sont proposées par les élèves dont celle en colonne (Figure 2, photo 2). L'enseignante oriente alors vers une proposition en ligne avec cinq étiquettes par ligne afin de rendre visible le groupement par cinq qui n'est pas à ce stade explicité pour les élèves (Figure 2, photo 3). La classe étant composée de 15 élèves de GS, le tableau est composé de trois lignes de cinq cases chacune.



Photo 1 : collection non organisée



Photo 2 : organisation en colonnes proposée par les élèves



Photo 3 : Proposition de l'enseignante : Rendre visible le groupement par 5

Figure 2 : rituels, période 1, construire une collection équipotente organisée

2 Deuxième période : utiliser l'organisation et le groupement par cinq pour construire une collection équipotente

Pour cette deuxième période, le rituel reprend ici encore une situation classique : la tour d'appel[8]. Après construction d'une tour de référence, autant de cubes que d'élèves de GS dans la classe, les élèves sont amenés à construire la tour du jour, autant de cubes que d'élèves de GS présents, et à comparer les deux tours.

Le rituel initial est ensuite modifié de la façon suivante : un seul élève est responsable chaque jour de construire la tour du jour une fois tous les élèves arrivés et toutes les étiquettes rangées dans le tableau. Le matériel disponible est composé de tours de cinq cubes scotchés entre eux et de cubes libres de deux couleurs (Figure 3, photo 1). Le deuxième problème de l'année est le suivant : avec le matériel à disposition, comment peux-tu construire seul la tour du jour ? L'objectif est d'amener les élèves à percevoir la concordance entre les lignes de cinq étiquettes et les colonnes de cinq cubes (Figure 3, photo 2). Le travail se poursuit avec le dénombrement des présents et des absents (Figure 3, photo 3). L'élève au tableau est encouragé par l'enseignante à verbaliser sa procédure. On perçoit ici un appui sur le cinq pour la construction de la tour mais également pour le dénombrement des présents avec comme connaissance sous-jacente que deux fois cinq font dix.



Photo 1 : Tours scotchées de 5 cubes, cubes libres



Photo 2 : *« Là il y en a 5 comme sur la ligne, là il y en a encore 5, donc il faut 5, 5 et encore 4 »*



Photo 3 : *« 2 tours de 5 et 4 cubes isolés, ça fait 10 et 4, aujourd'hui il y a un absent. »*

Figure 3 : rituels, période 2, construire une collection équipotente en appui sur le groupement par 5

[8] https://circ-ien-strasbourg3.site.ac-strasbourg.fr/wp/wp-content/uploads/2020/11/La-tour-dappel-.pdf

3 Troisième période : construction du boulier de GS, puis du boulier de la classe, et son principe d'utilisation

Nous utilisons ici un outil pensé et conçu par le groupe : il s'agit d'un cintre à pantalons acheté dans le commerce composé de cinq tiges. Sur ces tiges, nous enfilons des perles de deux couleurs, bleues et rouges (voir Figure 4, photo 2) avec la même alternance de couleur que sur le tableau des présents. Dans un premier temps, chaque matin, chaque élève vient enfiler sa perle sur le cintre en respectant les règles suivantes : à partir de la lecture de gauche à droite des cases d'appel, chaque élève appelé prend une boule qui correspond à la couleur de sa case et il vient placer sa boule sur le cintre. Il y a cinq boules par ligne et on change de ligne lorsqu'il y a cinq boules placées. Notre objectif est d'aller vers la construction matérielle mais également conceptuelle du boulier. Il s'agit de donner du sens au geste, de construire le schème d'usage du boulier : une boule poussée est une boule comptée. On remplit le boulier de haut en bas et on passe à la ligne du dessous quand la première ligne est complète.



Photo 1
Le tableau des présents de GS

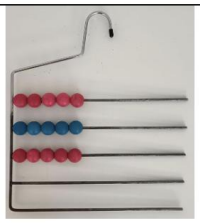


Photo 2
Le boulier des GS

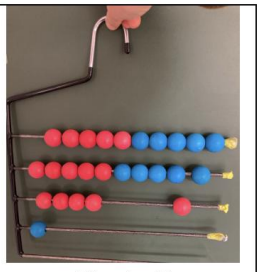


Photo 3
Le boulier de la classe : PS et GS

Figure 4 : rituels, période 3, construire le boulier de la classe et son principe d'utilisation

Le troisième problème à résoudre est ensuite proposé : comment ajouter des boules pour les élèves de petite section ? Comme la classe est constituée de 26 d'élèves en tout, les cinq tiges ne suffisent plus si on laisse cinq boules par tiges. Les élèves proposent spontanément de regrouper deux paquets de cinq boules (cinq rouges et cinq bleues) par ligne. Le choix est fait de laisser une ligne de cinq et une boule seule (Figure 4, photo 3). Ce choix fait dans l'action par l'enseignante de la classe a été longuement discuté au sein du groupe IRES. Il aurait été possible, voire préférable, de mettre la dernière boule bleue sur la troisième tige. Des boules de pâte à modeler sont collées au bout des tiges du cintre afin de sceller le boulier de la classe (comparable ainsi à la tour de référence). Le boulier devient une collection équipotente à la collection d'élèves de la classe, organisée et manipulable.

4 Quatrième période : utiliser le boulier pour calculer

À partir de la période 4, durant le temps d'accueil, les élèves se répartissent l'appel à partir de fiches d'appel de quatre, cinq ou six prénoms (Figure 5, photo 1). Pendant le moment de regroupement, un élève est chargé de reconstituer le boulier des présents à partir des fiches aimantées au tableau. D'un jour à l'autre, le nombre d'enfants par fiche, l'ordre de prise en charge des fiches, le nombre de présents changent.



Photo 1 : les fiches d'appel

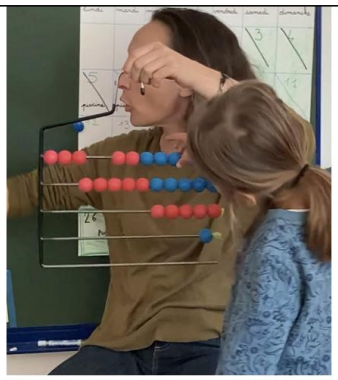


Photo 2 : « D*eux et trois ça fait cinq* »

Figure 5 : rituels, période 4, utiliser le boulier pour calculer

Le jour filmé, l'élève au tableau a déplacé trois boules en une seule fois pour la fiche la plus à gauche. L'enseignante lui demande alors le nombre écrit sous la deuxième fiche en partant de la gauche. L'élève répond cinq et pousse en une seule fois cinq boules (Figure 5, photo 2). L'enseignante lui demande comment elle a fait. L'élève répond que « deux et trois ça fait cinq », ce qui est reformulé dans la foulée par l'enseignante de la façon suivante « deux et encore trois, si on les met ensemble, ça fait cinq. » l'élève va poursuivre de façon similaire avec toutes les fiches, y compris quand il faut passer sur la ligne suivante. Parfois c'est un autre élève qui est invité à verbaliser : « deux et encore un, ça fait trois ». A la fin, après un temps de réflexion, l'élève au tableau est en mesure de dire qu'elle a poussé 21 boules. Un autre élève est invité à vérifier et le fait en surcomptant à partir de la deuxième rangée, c'est-à-dire à partir de 11.

Nous percevons ici, des schèmes d'usage du boulier : une boule poussée (ici vers la gauche) est comptée, on commence par pousser les boules de la première ligne avant de passer à celles de la deuxième ligne et ainsi de suite. Nous identifions également des schèmes d'action instrumentée. Ainsi pour pousser les trois boules correspondant à la première fiche, il n'est plus nécessaire pour cette élève de les pousser une par une, elle pousse directement un paquet de trois boules avec un appui probable sur la subitisation. Pour pousser les cinq boules suivantes en une seule fois, elle est en mesure d'expliquer que deux et trois font cinq en référence aux deux boules rouges et trois boules bleues poussées. Nous notons un appui fort sur la décomposition des petits nombres (inférieurs à six) et également sur le cinq (favorisé par les boules de deux couleurs bien tranchées). L'élève interrogée perçoit également l'équipotence entre l'ensemble des boules poussées et le nombre d'élèves présents, le cardinal de l'ensemble des présents s'obtient en ajoutant le cardinal de chaque fiche. Elle parvient à dénombrer 21 présents sans expliquer sa méthode. Le deuxième élève interrogé par l'enseignante explicite quant à lui sa méthode et met en place un surcomptage à partir de dix, en commençant à la deuxième ligne et en poursuivant son comptage de un en un. L'ensemble du travail est accompagné par l'enseignante qui, à chaque étape, amène soit l'élève interrogée, soit un ou une de ses camarades sur le banc à verbaliser la procédure et qui, lorsque c'est nécessaire, reformule à voix plus haute.

5 Cinquième période : une introduction des bouliers et un premier temps en exploration libre

En période 5, les bouliers à 20 et 100 boules sont introduits dans la classe et laissés dans un premier temps en exploration libre sur le temps d'accueil. Les élèves les prennent spontanément, et leurs manipulations les amènent à faire des « trouvailles » sur les nombres. Ces « trouvailles » sont partagées en collectif, et on observe des répétitions des « trouvailles » de camarades pour certains élèves et de nouvelles, s'appuyant parfois sur des « trouvailles » antérieures. Une dynamique créative autour des nombres via le boulier se crée, elle permet aux élèves de progresser dans leur construction du nombre avec les habiletés qui sont les leurs à ce moment-là. Le boulier se révèle porteur de différenciation.

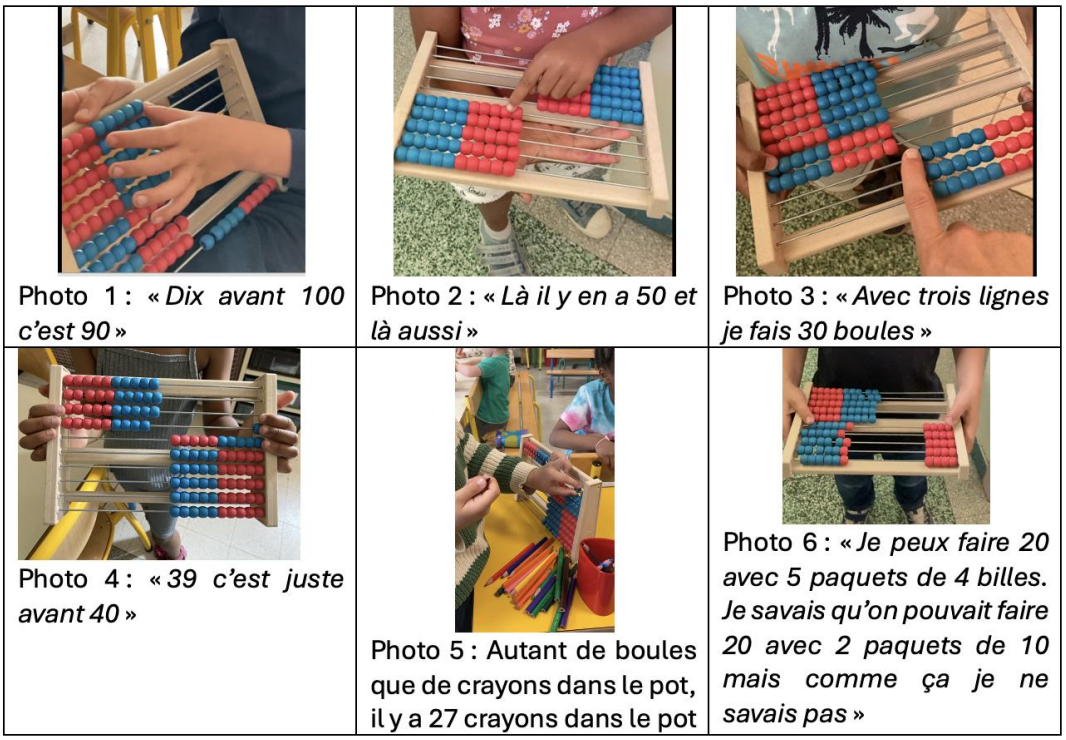


Figure 6 : manipulations libre autour du boulier

La variété des « trouvailles » que nous avons illustrées dans la figure 6 montre une appropriation du boulier qui devient pour les élèves un instrument au service de la découverte et de l'apprentissage des nombres. Nous identifions une instrumentalisation du boulier par l'élève de la photo 6 (Figure 6). Il n'utilise pas le boulier de façon conventionnelle car il isole cinq paquets de quatre billes rouges d'un côté. Sa trouvaille le conduit à une décomposition de 20 en cinq paquets de quatre billes.

IV - DES SITUATIONS DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Le deuxième questionnement du groupe est le suivant : comment adapter des situations de référence en tenant compte de l'usage de ce matériel ? Nous avons fait le choix d'intercaler entre les rituels décrits ci-dessus des résolutions de problèmes (Figure 7) en modifiant le milieu pour favoriser les procédures de groupements au détriment des procédures de comptage dénombrement. Nous avons observé le transfert des notions construites en rituels, l'appui sur le cinq puis sur le dix, l'usage du boulier.

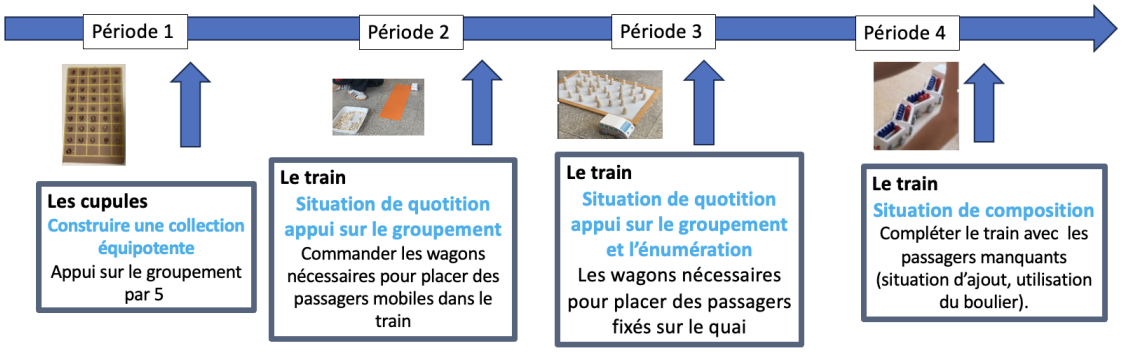


Figure 7 : les situations de résolution de problèmes

1 Premier problème : utiliser le groupement par cinq pour construire une collection équipotente

La première situation proposée en première période vise à observer si les élèves parviennent à transférer l'appui sur le groupement par cinq mobilisé pendant le rituel. Elle s'appuie sur des objets récupérés lors

d'une sortie pédagogique : des cupules et des glands (Figure 8, photos 1 et 2). Les cupules ont été collées par l'enseignante sur un tableau composé de lignes et de cinq colonnes (photo 1). Les glands sont dans un bac éloigné du tableau. La consigne donnée aux élèves est d'aller chercher juste ce qu'il faut de glands pour pouvoir mettre un gland dans chaque cupule. Les élèves sont par groupe de trois et disposent d'un matériel collectif varié : papier crayon, beaucoup de timbales (photo 3), des boîtes à œufs découpées avec des lignes de cinq alvéoles (photo 4). Les allers-retours entre le tableau des cupules et le bac de glands sont autorisés.

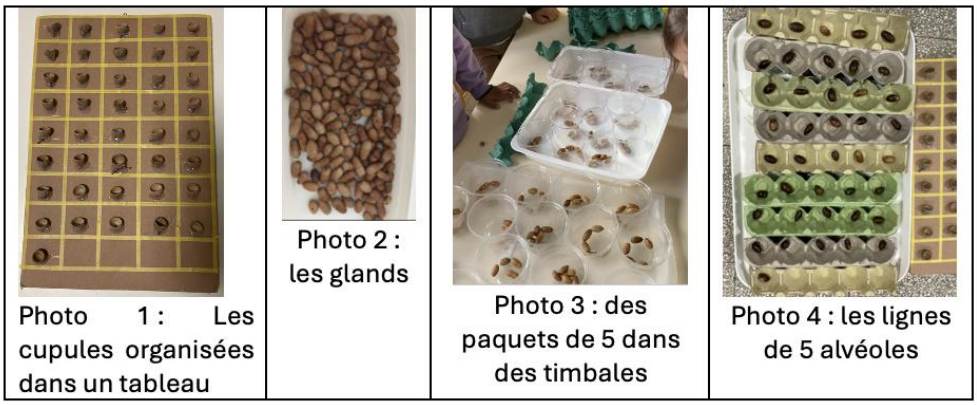


Photo 1 : Les cupules organisées dans un tableau

Photo 2 : les glands

Photo 3 : des paquets de 5 dans des timbales

Photo 4 : les lignes de 5 alvéoles

Figure 8 : Période 1, la situation des cupules et des glands

La quantité de cupules (41) est trop importante pour être dénombrée par les élèves à cette période de l'année, d'autres stratégies devront être mises en œuvre. Il s'agit ici de réaliser une collection de glands équipotente à la collection de cupules sans avoir à dénombrer la collection. Une ligne est volontairement incomplète. La validation sera réalisée en groupe et reposera sur le principe de correspondance terme à terme : les glands seront déposés dans les cupules.

Les premières stratégies observées n'aboutissent pas. Un groupe prend un grand nombre de glands au hasard puis en retire quatre (car il en manque quatre sur la dernière ligne). On observe également des tentatives de dénombrement par comptage de un en un, plutôt réussies sur le tableau bien que le nombre soit conséquent mais que les élèves ne parviennent pas à reproduire devant le bac de glands : plusieurs élèves du groupe comptent en même temps, les glands roulent et se mélangent… Enfin, devant les échecs des premières tentatives, des stratégies utilisant le groupement par cinq apparaissent. Un groupe utilise les timbales et met cinq glands par timbale jusqu'à épuisement du nombre de glands dans le bac (Figure 8, photo3). Il n'y a pas de prise en compte du nombre de lignes dans un premier temps, mais on observe ensuite un ajustement de la procédure et une bonne gestion de la ligne incomplète avec une timbale avec six cupules. Un autre groupe utilise les lignes de cinq alvéoles fournies et installe spatialement les alvéoles comme sur le tableau des cupules (Figure 8, photo 4).

Lors du temps de bilan, animé par l'enseignante, les différentes stratégies mises en œuvre sont rappelées et celles s'appuyant sur l'organisation de la collection et le groupement par cinq font rapidement consensus dans la classe.

2 Deuxième problème : utiliser le groupement par cinq ou par dix pour résoudre un problème de division - quotition

En période 2, un nouveau matériel est introduit. Il s'agit du train à compter[9] qui est composé de dix wagons pouvant accueillir dix passagers chacun. Les passagers sont de couleur bleue ou rouge (Figure 9, photo 1). Ce matériel reprend certaines des caractéristiques du boulier : les groupements par dix sont vus

[9] Matériel disponible chez Milbulles (https://www.milbulles.fr/)

comme deux groupements de cinq, les couleurs sont les mêmes que celles du boulier (rouge et bleu). Nous nous sommes également procuré des passagers de couleur neutre en bois (Figure 9, photos 2 à 6).

À partir de ce nouveau matériel, manipulé en amont, une nouvelle situation est proposée inspirée de celle du jeu des voyageurs de la collection ERMEL GS[10]. Une locomotive seule est proposée ainsi que des passagers mobiles de couleur neutre dans une barquette, le quai est matérialisé par une feuille de papier orange (Figure 9, photo 2). La consigne est la suivante : « commandez juste ce qu'il faut de wagons pour installer tous les passagers dans le train. Vous les installerez sur le quai pour que l'on voit bien les wagons qu'il vous faut ». Notre objectif est de changer le contexte d'utilisation et d'amener les élèves à transférer les stratégies travaillées en les adaptant à ce nouveau matériel.

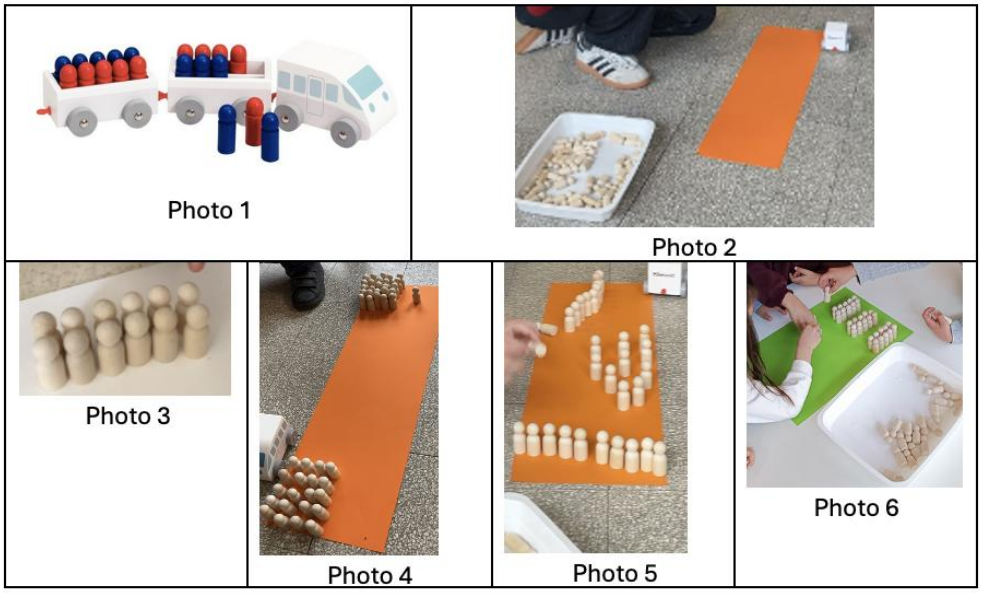


Figure 9 : La situation des voyageurs

Le nombre de passagers (46) est trop important pour permettre le dénombrement de la quantité et il ne s'agit pas d'un multiple de dix. Il faut donc commander cinq wagons et il y aura donc un wagon non complet. Il s'agit d'un problème de division quotition (Vergnaud, 1983). La réponse attendue correspond au quotient augmenté d'un.

Les procédures de dénombrement mises en œuvre par certains groupes dans un premier temps n'aboutissent pas. D'autres stratégies sont alors envisagées. Un groupe organise la collection de passagers avec des groupements de deux fois dix passagers (Figure 9, photo 3). Nous émettons l'hypothèse que les élèves s'appuient sur une représentation spatiale des wagons mais avec une maitrise erronée du nombre de passagers par wagon. Un autre groupe propose des groupements par cinq (Figure 9, photo 4) mais ne parvient pas à prendre en charge l'interprétation de cette organisation pour aboutir au nombre de wagons attendu. Un groupe réalise des groupements par 10 (Figure 9, photo 5) et aboutit au nombre de wagons attendus. Enfin, le dernier groupe organise la collection pour faire apparaitre les groupements par cinq puis des paquets de 10 avec une organisation spatiale proche de celle des wagons (Figure 9, photo 6) et parvient au nombre de wagons attendu.

3 Une variante du deuxième problème, énumération d'une collection

En période 3, une variante de la situation est proposée aux élèves avec des passagers collés sur le quai (Figure 10, photo 1). Les élèves sont confrontés à un problème d'énumération (Briand et al., 2000). Les stratégies développées par les élèves s'appuient toutes sur des groupements par dix. Après quelques

[10] https://www.editions-hatier.fr/livre/ermel-gs-ed-2023-situations-apprentissage-numeration-calcul-geometrie-9782401096363

tâtonnements, ces groupements de dix passagers sont matérialisés selon les groupes par des ficelles et/ou des gommettes de couleurs différentes (Figure 10, photo 2).



Photo 1 : les passagers sont collés sur le quai

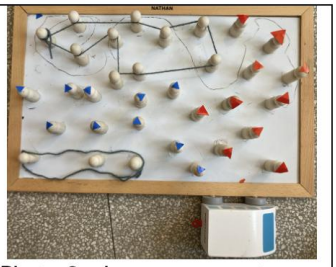


Photo 2 : des groupements par 10, matérialisés par des ficelles et/ou des gommettes.

Figure 10 : une variante de la situation des voyageurs

4 Troisième problème : utiliser le boulier pour résoudre un problème de composition

En période 4, un dernier problème est proposé aux élèves toujours à partir du matériel locomotive, wagons, voyageurs. Le train présenté aux élèves est composé de quatre wagons incomplets. Les personnages sont cette fois ci colorés. Il manque quatre passagers dans le premier wagon, deux dans le deuxième, trois dans le troisième et quatre dans le dernier. Les élèves identifient le nombre de passagers manquants. Chaque wagon est alors recouvert d'une feuille sur laquelle est noté en chiffre le nombre de passagers manquants (Figure 11, photo 2).

La consigne est la suivante : un élève du groupe doit aller chercher dans une réserve éloignée, en un seul voyage, juste ce qu'il faut de passagers pour compléter les quatre wagons. Du matériel d'aide à la résolution est à disposition des élèves : des feuilles et des crayons, des bouliers à 20 boules, des jetons.

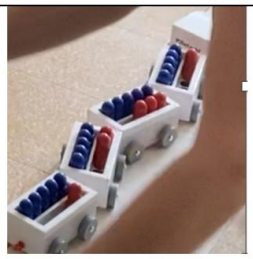


Photo 1 : le train avec les wagons incomplets

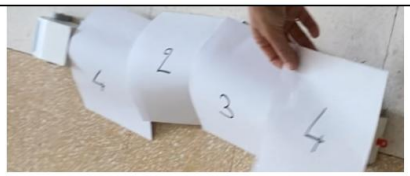


Photo 2 : les wagons sont recouverts d'un papier, le nombres de passagers manquants dans le wagon est noté sur le papier

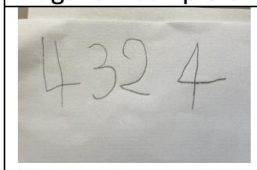


Photo 3 : codage avec l'écriture chiffrée

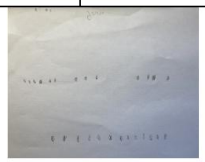


Photo 4 : Schématisation d'une collection intermédiaire de même cardinal



Photo 5 : un usage non conventionnel du boulier



Photo 6 : un usage conventionnel du boulier

Figure 11 : le problème des passagers manquants

Certains groupes choisissent feuille et crayon. Un groupe s'appuie sur le codage avec l'écriture chiffrée (Figure 11, photo 3) mais la stratégie n'aboutit pas. Un autre groupe schématise une collection intermédiaire de même cardinal et dessine d'abord quatre, puis deux, puis trois, puis quatre points avec des espaces entre les collections intermédiaires. Sur la ligne en dessous, il dessine les points mais sans les espaces puis il dénombre un à un les points dessinés en récitant la comptine numérique (Figure 11, photo 4).

Deux autres groupes ont choisi le boulier. Le premier des deux utilise le boulier de façon non conventionnelle en isolant quatre, puis deux, puis trois boules sur la première ligne et enfin quatre boules sur la ligne du dessous (Figure 11, photo 5). Nous identifions ici une forme d'instrumentalisation du boulier. Enfin le dernier groupe utilise le boulier de façon conventionnelle (Figure 11, photo 6).

V - UN MÉMOIRE DE MASTER MEEF

Comme nous l'avons signalé en introduction, le travail mené par le groupe IRES a fait l'objet d'un mémoire de master MEEF écrit et soutenu en binôme par deux étudiantes[11]. Dans le cadre de ce mémoire, elles ont proposé un problème à résoudre à la classe de CP qui accueille des élèves issus de différentes classes dont celles des deux enseignantes de maternelle du groupe IRES.

Le problème proposé est classique : dénombrer le nombre de pâtes présentes dans un paquet. Les élèves de la classe ont été séparés en quatre groupes. Deux groupes sont composés d'élèves issus de classes dont les enseignants ne font pas partie du groupe IRES, ils n'ont pas utilisé le boulier en GS et de façon plus générale n'ont pas mené le travail sur l'appui sur le groupement par cinq puis par dix. Deux groupes sont composés d'élèves des classes ayant utilisé le boulier en GS et ayant suivi la progression sur les rituels et la résolution de problèmes décrits ci-dessus. Le problème est proposé en janvier, plusieurs mois après la fin de la GS, et il est mené par les deux étudiantes que les élèves ne connaissent pas.

Les stratégies mises en œuvre par les différents groupes figurent dans le tableau ci-dessous (Figure 12) et montrent des procédures différentes selon que les élèves ont utilisé ou pas le boulier en GS.

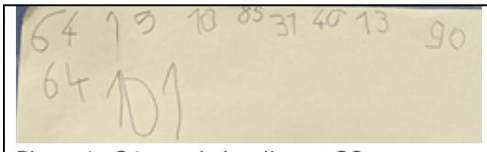
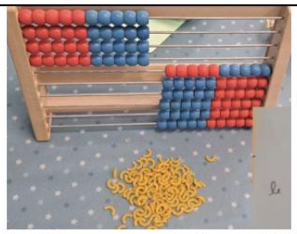
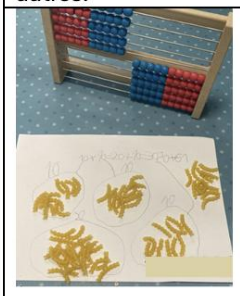
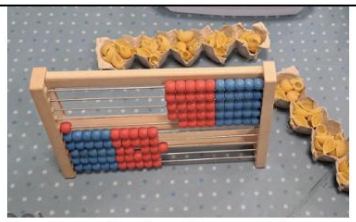
<table>
<tr>
<td> 
Photo 1 : G1 pas de boulier en GS
Les élèves dénombrent individuellement une à une les pâtes en les mettant dans un pot jusqu'à le remplir. Ils écrivent leur résultat sur la feuille et remettent les pâtes dénombrées dans la barquette avec les autres.</td>
<td> 
Photo 2 : G2, pas de boulier en GS
Dès qu'ils prennent une pâte, les élèves poussent une boule du boulier</td>
</tr>
<tr>
<td> 
Photo 3 : G3, boulier en GS
Les élèves font des paquets de 10 et un paquet de 20 puis ils additionnent les dizaines</td>
<td> 
Photo 4 : G4, boulier en GS
Les élèves mettent 10 pâtes dans chaque alvéole. Pour chaque alvéole de 10 pâtes, ils poussent une ligne du boulier.</td>
</tr>
</table>

Figure 12 : le problème proposé en CP

On remarque que l'appui sur des groupements (de 10 et parfois de 20) apparait uniquement chez les élèves ayant utilisé le boulier en GS.

VI - PREMIÈRES CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous reprenons ici nos questions de recherche et nous apportons nos premières conclusions.

[11] Elsa Corrado, Louna Aubaterre (étudiantes en M2 MEEF, Faculté d'Education, Université de Montpellier)

1 Comment amener les élèves à construire matériellement et conceptuellement le boulier avec un appui sur le groupement par cinq ?

L'appui sur les rituels d'appel et leur progression sur l'année nous semble avoir permis la construction matérielle et conceptuelle du boulier. Le travail mené en début d'année a renforcé le concept d'équipotence entre deux collections qui est essentiel pour la poursuite des apprentissages. L'organisation du tableau des présents en lignes de cinq cases puis le travail mené sur la tour des présents constituée principalement de tours de cinq cubes a initié l'appui sur le groupement par cinq pour la constitution d'une collection équipotente et le dénombrement d'une collection (de cardinal inférieur à 15). L'introduction du cintre en période 3 et le fait que chaque élève ait à glisser sa boule sur une tige du cintre et à la pousser vers le fond a contribué au développement des schèmes d'usage du boulier (une boule doit être poussée pour être prise en compte, on ne passe à la ligne suivante que lorsque toutes les boules de la ligne précédente ont été totalement poussées, les boules qui ne sont pas poussées ne sont pas prises en compte). La présence de cinq boules par ligne a renforcé l'appui sur le groupement par cinq.

L'évolution du rituel et l'ajout des boules des élèves de PS a permis de positionner dix boules par ligne de deux couleurs différentes et a conduit vers une représentation du boulier traditionnel et vers le groupement par dix reconnu comme deux paquets de cinq. Le travail mené à partir des fiches des présents a conduit à un usage conventionnel du boulier pour représenter une collection équipotente et dénombrer une collection (de cardinal inférieur à 26). Nous identifions des schèmes d'action instrumentée comme le fait de déplacer plusieurs boules en un seul geste, y compris quand cela inclut un passage à la ligne suivante. Nous percevons, dans les actions et les verbalisations des élèves, les connaissances sous-jacentes relatives à la construction du nombre : subitisation, décomposition des petites quantités et en particulier du nombre cinq, comptine numérique, surcomptage, comptage de cinq en cinq et en fin d'année de dix en dix. Nous identifions également des connaissances plus globales sur l'usage cardinal du nombre et en particulier l'axiome d'additivité : le cardinal total s'obtient en ajoutant le cardinal de chaque fiche. Ces apprentissages sont renforcés par les demandes de verbalisation régulières voire systématiques des enseignantes engagées.

La prise en main spontanée des bouliers du commerce introduits en fin d'année et laissés en libre accès ainsi que la richesse des « trouvailles » faites (Figure 6) nous amène à conclure que les élèves se sont appropriés cet artefact qui les instrumente dans la construction du nombre et qu'ils se permettent même de l'instrumentaliser (Figure 6, photo 6) par un usage non conventionnel mais porteur d'apprentissages.

2 Comment adapter des situations de référence en tenant compte de l'usage de ce matériel ?

Nous avons adapté des situations de référence classiques pour renforcer la nécessité de faire des groupements de cinq puis de dix éléments d'une collection. En proposant une quantité trop importante pour être dénombrée et en proposant du matériel adapté (comme des lignes de cinq alvéoles) nous avons volontairement conduit les élèves à transférer les stratégies mises en œuvre lors des rituels à la résolution de problèmes qui relèvent de la même classe de situations (constituer une collection équipotente, dénombrer un tout dans un problème de composition) mais également à des problèmes qui relèvent d'autres classes de situations (comme des problèmes de division quotition ou des tâches d'énumération). Les résultats obtenus en CP, avec toute la mesure que nous leurs apportons, renforcent les constatations faites en classe de GS. L'idée de groupement par dix, qui est la base du système de numération, semble prépondérante chez les élèves ayant utilisé le boulier et elle est préférée à d'autres tentatives de comptage de un en un développées par les élèves n'ayant pas utilisé le boulier en GS.

3 Quel est l'effet induit par l'usage du boulier sur les apprentissages des élèves relatifs à la construction du nombre ?

Nous avons apporté des éléments de réponses positifs à cette troisième question dans les deux premiers paragraphes. Nous modérons ici nos conclusions. Les résultats obtenus portent sur trois classes de GS et l'expérimentation gagnerait à être développée. Le travail a été mené par des enseignants qui participent au groupe IRES et qui montrent un niveau d'expertise et d'analyse réflexive développé. Les activités autour du boulier s'inscrivent par ailleurs dans une progression riche autour de la construction du nombre et dans des pratiques de classes installées et porteuses d'apprentissages, en particulier concernant la verbalisation. Les résultats obtenus sur l'apprentissage des nombres, ne peuvent donc pas être uniquement associés à l'utilisation du boulier. Le travail mené sur l'appui sur le groupement par cinq, puis par dix, est néanmoins nouveau pour ces enseignants et les résultats obtenus nous semblent très encourageants.

4 Poursuite du travail à mener

Le travail engagé autour de l'usage du boulier se poursuit avec les enseignantes de cycle 2 et pourrait également être envisagé en cycle 3. Il doit surtout conduire maintenant à la conception et la mise en œuvre d'un dispositif de formation à destination des enseignants de l'académie.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Allard, C., Masselot, P. Peltier-Barbier, M.L., Roditi, E., Solnon, A., Tempier, F. (2022). Résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. DEPP-MEN.

https://archives-statistiques-depp.education.gouv.fr/Default/doc/SYRACUSE/52597/resultats-de-l-enquete-sur-les-pratiques-d-enseignement-des-mathematiques-praesco-en-classe-de-cm2-e?_lg=fr-FR

Bueno-Ravel, L., Eysseric, P., Riou-Azou, G., Soury-Lavergne, S. (2014). Mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 – cycle 2. Dans quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire. Actes du 41è Colloque COPIRELEM. https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO15034.pdf

Briand, J., Lacave Luciani, M.J., Harvouët, M., Bedere D., Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, 66*, 7-22. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-66-grand-n/1-enseigner-l-enumeration-en-moyenne-section--488278.kjsp

Le Dantec, O. (2024). Le boulier-compteur. Au fil des maths-APMEP. 554.

Maschietto M., Bartolini Bussi M. (2013). Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Dans *faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité des élèves. Actes du 39° Colloque COPIRELEM*, (38-58) Paris : ARPEME. *https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO13003.pdf*

Poisard, C., Tournès, D., Cochet, I. (2016). De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1. *MathémaTICE, 51*. http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique135

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, une approche cognitive des objets contemporains, préface de Jacques Leplat. Paris : Armand Colin. https://hal.science/hal-01017462/document

Regnier, J.-C. (2003). Le Boulier-Numérateur de Marie Pape-Carpantier. *Le Bulletin Vert, 447*, 457-471. https://shs.hal.science/halshs-00363431v1/document

Tournès D. (2016). Perspectives historiques sur les abaques et bouliers. *MathémaTICE, 51*. http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique135

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. Actes de l'université d'été de St Flour, « Le calcul sous toutes ses formes ». https://hal.science/hal-01559831v1

Vergnaud G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, pp. 127-174. https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1983_multiplicative-structures_acquisition-mathematics.pdf

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Grand N, 38*, 21-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-38-grand-n/2-psychologie-du-developpement-cognitif-et-didactique-des-mathematiques-un-exemple-les-structures-additives--529350.kjsp

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin (Éds.), Actes de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM, Université de Clermont-Ferrand 2. https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1996_fond-action-conceptualisation_savoirs-theoriques-savoirs-action.pdf

Villani, C. & Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242

COORDINATIONS DE PERSPECTIVES AVEC UN ENVIRONNEMENT VIRTUEL

Sylvia COUTAT
Chargée d'enseignement, Université de Genève
DiMaGe
Sylvia.coutat@unige.ch

Jean-Luc DORIER
Professeur honoraire, Université de Genève
DiMaGe
Jean-Luc.Dorie@unige.ch

Sabrina MATRI
Collaboratrice scientifique, Université de Genève
DiMaGe
Sabrina.Matri@unige.ch

Résumé
Les connaissances spatiales sont fondamentales pour les connaissances géométriques (Berthelot & Salin, 1992) ainsi que les autres champs scientifiques comme les STEM (Nagy-Kondor, 2017). Nous souhaitons comprendre comment les connaissances spatiales peuvent être introduites dans le contexte scolaire à l'aide d'un environnement virtuel disponible dans l'application SPAGEO (https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/).
Les appuis théoriques principaux qui ont guidé nos choix d'élaboration de séquences didactiques adaptées proviennent des recherches de Berthelot et Salin (1992) et de Clements (1999) qui définissent le repérage spatial comme permettant de situer et déplacer un sujet ou un objet, d'anticiper et communiquer ses actions sur l'espace et également de mobiliser des images mentales. Ces travaux sont aussi utilisés par Marchand (2020) qui propose une structure génératrice d'activité pour développer et analyser des activités visant les connaissances spatiales. L'utilisation de cette structure est illustrée par deux activités développées dans le cadre du projet SPAGEO. Ces analyses sont complétées par quelques résultats autour des procédures des élèves.

Utiliser une carte aujourd'hui n'implique pas les mêmes actions ou connaissances qu'hier. La technologie participe à ce changement. En effet, lorsque la carte était ? disponible uniquement en papier, il était de la responsabilité du lecteur d'identifier sa position sur la carte ou d'orienter la carte au cours de son déplacement. Depuis que la carte est disponible dans un GPS, la position est donnée dans l'environnement et il est possible de programmer l'affichage pour offrir une orientation correspondant à la direction du déplacement. Ces changements dans l'appréhension de l'espace et les actions qui sont opérées sur cet espace qui nous entoure nous déchargent-ils de connaissances spatiales pour autant ? Ne devons-nous pas au contraire profiter de ces environnements pour diversifier notre enseignement des connaissances spatiales ? Dans la recherche SPAGEO nous avons choisi d'utiliser la technologie au service du développement des connaissances spatiales. Comment alors développer l'environnement et les activités associées ? Après avoir présenté quelques éléments théoriques et défini quelques termes, nous présentons la structure génératrice d'activité développée par Marchand (2020) qui permet à la fois d'accompagner le développement de tâches en lien avec les connaissances spatiales et d'analyser a priori

les activités. Pour illustrer notre travail, deux activités réalisées en classe de CM1 sont présentées ainsi que quelques résultats relatifs au travail des élèves.

I - QUELQUES DEFINITONS ET PRECISIONS SUR NOTRE ENVIRONNEMENT

Avant de présenter l'environnement et les activités, nous précisons le contexte de notre recherche qui s'appuie sur des travaux de psychologie cognitive et des travaux de didactique des mathématiques.

1 Habiletés spatiales

En cognition spatiale, les termes d'habiletés ou de compétences spatiales sont majoritairement utilisés. Les définitions de ces habiletés spatiales peuvent varier selon les auteurs. Selon Carroll (1993), les habiletés spatiales renvoient à la faculté de traiter mentalement des informations visuelles en intégrant leurs relations spatiales. Ces habiletés spatiales sont caractérisées par différents facteurs ou sous-habiletés. Il en existe une variété importante et là encore ces facteurs varient selon les auteurs. Toujours selon Carroll, ceux que l'on retrouve le plus fréquemment dans la littérature sont la visualisation spatiale, la rotation mentale, l'orientation spatiale et la navigation spatiale. En géométrie, ces habiletés se retrouvent dans différentes tâches comme les tâches de symétrie ou faisant intervenir des solides (Coutat & Berney, 2023). Dans le cas de situations en lien avec le repérage dans le plan, la navigation spatiale tient une place toute particulière. Elle est définie comme la capacité à se localiser et se déplacer dans un espace réel ou virtuel baser sur la perception et la compréhension de l'organisation de l'espace. Selon Tolman (1948) la navigation spatiale est soutenue par la construction d'une carte cognitive. Cette carte cognitive peut utiliser différentes perspectives (Klatzky, 1998 ; van der Ham et al., 2020), qui permettent de définir la position et l'orientation des différents objets de l'environnement. La perspective égocentrée correspond à une perception de l'environnement depuis une vue de l'observateur, appelée aussi vue 1ère personne. Dans ce cas, les informations de directions sont données relativement à la position de la personne qui se situe dans l'environnement. La perspective allocentrée est elle indépendante de la personne qui observe. Les informations s'appuient sur les relations entre les objets de l'environnement. Cette perspective est classiquement associée à une carte qui permet d'identifier les relations spatiales entre les différents éléments de l'environnement. Si chaque perspective peut être associée à une perception spécifique, il est aussi possible d'utiliser une perspective égocentrée lors de l'utilisation d'une carte. En effet, il suffit que la personne s'imagine l'environnement en vue 1ère personne, en se projetant comme faisant partie de l'environnement. De même, il est possible de s'appuyer sur une représentation mentale de la carte pour s'orienter dans une ville, c'est-à-dire mobiliser une perspective allocentrée tout en étant immergé dans l'environnement.

De nombreux travaux en psychologie (Lubinski, 2010; Stieff & Uttal, 2015) pointent une corrélation entre des habiletés spatiales élevées et des performances élevées dans les disciplines scientifiques comme les mathématiques, sciences, ingénierie, technologies. Cela rend d'autant plus pertinent de travailler ces habiletés dans le contexte scolaire.

2 Connaissances spatiales

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, plusieurs travaux soulignent l'importance des connaissances spatiales dans le développement des apprentissages géométriques (Berthelot & Salin, 1992, 1999 ; Clements, 1999 ; Marchand, 2006). Selon Berthelot et Salin (1999), ces connaissances constituent un ensemble de savoirs permettant à l'élève d'anticiper et de maîtriser les effets de ses actions dans l'espace. Elles interviennent non seulement dans la reconnaissance des formes et objets géométriques, mais également dans la description de positions relatives et dans la gestion des déplacements. Clements (1999) propose une structuration de ces connaissances autour de deux composantes : l'orientation, qui correspond à la capacité à se situer et à situer des objets dans l'espace,

en lien avec la définition initiale de Berthelot et Salin, et l'organisation, qui renvoie à la construction et à la coordination d'images mentales des relations spatiales entre objets. En s'inscrivant dans cette continuité, Marchand (2020) enrichit la définition des connaissances spatiales en intégrant explicitement le rôle central des images mentales (Marchand, 2006), de leur développement et de leur coordination, articulant ainsi les apports de Berthelot, Salin et Clements. Dans une perspective didactique, le développement de ces compétences de repérage dans le plan nécessite la mise en œuvre de situations variées, mobilisant différents types d'espaces (physique, graphique, symbolique ou virtuel), afin de favoriser la construction progressive des invariants spatiaux et des structures géométriques.

Dans les situations de repérage dans le plan, différentes procédures peuvent être utilisées (Argaud et al., 1998 ; Emprin, 2014). Les critères utilisés pour indiquer une position peuvent être relatifs à la personne ou à d'autres éléments de l'environnement. Lorsque les critères peuvent être communiqués et interprétés indépendamment de l'observateur, par un système de repère propre, on les considère comme absolus. Si on reprend les perspectives présentées dans le chapitre précédent, les critères absolus seraient plus associés à une perspective allocentrée alors que les critères relatifs seraient associés à une perspective égocentrée.

3 L'environnement virtuel

Dans le cadre projet SPAGEO[1], un environnement virtuel a été développé. Cet environnement[2] est le résultat de la collaboration de trois champs de recherche (didactique, cognition spatiale et technologies éducatives). Il se compose de situations d'apprentissages organisées autour d'une ville virtuelle inspirée des villes américaines dans sa structure de rues parallèles et perpendiculaires. Il est possible d'accéder à cette ville par une vue 1ère personne immergée dans la ville. Cet accès favorise une perspective égocentrée avec des critères de repérage relatifs. Il est aussi possible d'appréhender la ville à l'aide d'une carte (Figure 1). Cet autre accès favorise une perspective allocentrée avec des critères de repérage absolus.

La ville est composée de différents quartiers. Un quartier commercial avec des bâtiments verts et de nombreux points de repères se distingue d'un quartier plus urbain avec des maison rouge et des points de repères plus discrets. Dans le quartier d'affaire les tours sont visibles depuis différents lieux dans la ville. Finalement un quartier résidentiel où toutes les maisons sont identiques permet de développer des stratégies qui se détachent des points de repères au profit de stratégies de comptage de carrefours par exemple. Ces différentes spécificités de l'environnement sont principalement visibles dans la vue 1ère personne. En effet, la vue carte n'est qu'une représentation simplifiée des éléments de l'environnement. Certaines informations apparaissent comme, par exemple, les enseignes de boutiques, les parkings ou parcs. Ces informations sont indiquées à l'aide de pictogrammes ou de texte.

II - PROBLÉMATIQUE

Les connaissances spatiales restent importantes tant pour les connaissances géométriques que les autres connaissances scientifiques. Les technologies peuvent être utilisées en classe au service des connaissances spatiales. Il reste à définir les activités qui pourraient agir sur ces connaissances tout en s'appuyant sur les environnements technologiques. Cela nous amène à la problématique suivante : comment les connaissances spatiales peuvent être introduites dans le contexte scolaire à l'aide d'un environnement virtuel disponible dans l'application SPAGEO ? Pour répondre à cette question nous nous

[1] Rethinking the links between spatial knowledge and geometry in primary education through a virtual environment, financé par le Fond national Suisse (Subside no 100019_188947 Sept 2000 – Aug 2024).

[2] https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/

sommes appuyés sur la structure générative d'activités développée par Marchand (2020). Cette structure permet une analyse a priori des activités selon différentes composantes. Afin d'identifier plus finement l'effet des activités développées sur les connaissances des élèves, nous complétons l'analyse a priori par des résultats d'analyse de productions d'élèves.

III - STRUCTURE GENERATRICE D'ACTIVITE

Pour construire nos situations nous avons utilisé la structure génératrice d'activités proposée par Marchand (2020) qui s'appuie sur trois balises : les composantes des connaissances spatiales, les niveaux d'abstractions et les variables de la situation. Ces balises sont présentées plus précisément pour ensuite être réinvesties dans l'analyse de deux situations expérimentées en CM1.

1 Composantes des connaissances spatiales

La première balise concerne les composantes des connaissances spatiales. Marchand, en s'appuyant sur les travaux de Clements (1999), scinde ces connaissances en deux composantes. Une première composante est désignée « orientation ». Elle concerne les connaissances de repérage dans le plan à l'appui d'un référentiel mais aussi l'identification des relations entre les objets, ce qu'elle nomme les relations extrinsèques. La deuxième composante identifiée comme « organisation » concerne la création et le contrôle d'images mentales des objets (positionnement, relation dans l'espace), ainsi que le contrôle sur les relations spatiales intrinsèques, c'est-à-dire les relations entre les parties d'un même objet.

2 Niveaux d'abstraction

En s'appuyant sur les travaux de Berthelot & Salin (1992) ainsi que ceux de Gobert (2001), Marchand complète les acquisitions spatiales obtenues par les expériences visuelles par les expériences sensori-motrices. En effet il s'avère que le mouvement du corps participe au développement des connaissances spatiales (Coutat & Dorier, 2016). Si le mouvement du corps permet de compléter les expériences visuelles dans le développement des connaissances spatiales, se détacher de la vue est aussi un moyen pertinent d'agir sur les connaissances spatiales. Cette deuxième composante s'appuie sur les travaux de la théorie de l'abstraction reprise par Clements et Battista (1992) et Battista (2007) pour l'enseignement des mathématiques et de la géométrie.

Le premier niveau d'abstraction concerne la perception d'objet. En effet, dans un premier temps, les objets de l'environnement sont observés, certaines propriétés peuvent être isolées, mais les analyses s'opèrent en présence de l'objet. Ce premier niveau est appelé le niveau Archéologique, pour le rapprocher du travail de l'archéologue qui observe les objets récoltés.

Le deuxième niveau d'abstraction est intitulé Photographique. Dans ce deuxième niveau, les objets ont été suffisamment observés pour pouvoir être représentés mentalement. Selon Marchand « Les images mentales impliquées sont statiques et reproductrices et elles ne donnent accès qu'à une seule perspective » (Marchand, 2020, p. 151). Les connaissances spatiales développées au niveau Photographique restent minimes.

Au troisième niveau d'abstraction les objets sont manipulés par les images mentales, ces images mentales peuvent être dynamiques, les objets représentés peuvent être transformés, et observés mentalement selon différentes perspectives, il s'agit du niveau Scénographique. Le passage d'un niveau d'abstraction à un autre n'est pas forcément spontané chez l'élève, la tâche doit assurer la mobilisation de ces différents niveaux d'abstraction. Cela se fait à l'aide des variables didactiques.

3 Variables de la situation

Dans une perspective didactique, Marchand (2020) identifie quatre variables essentielles à la conception des situations mobilisant les connaissances spatiales : l'espace, le type de tâche, la dimension des objets, et le questionnement didactique relatif aux connaissances spatiales.

La première variable concerne l'espace de travail. Reprenant les travaux de Berthelot et Salin (1992) ainsi que de Brousseau (2000), Marchand souligne l'importance de mobiliser différents types d'espaces – micro-espace, macro-espace et meso-espace – et d'en favoriser l'articulation. L'intégration du macro-espace est notamment considérée comme un levier essentiel au développement des connaissances spatiales, notamment par l'engagement corporel de l'élève dans l'espace réel.

La seconde variable porte sur le type de tâche proposée. En s'appuyant sur les travaux de Davis et al. (2015), Moss et al. (2016) ainsi que sur ceux de Berthelot et Salin (1992), Marchand identifie six groupements de tâches mettant en jeu les connaissances spatiales. Parmi ceux-ci, le deuxième groupement cible spécifiquement le repérage dans le plan, notamment par la coordination de différentes perspectives. Toutefois, ces groupements de tâches ne doivent pas être envisagés de manière cloisonnée. Marchand insiste sur l'importance d'un maillage de tâches, c'est-à-dire une articulation entre différents types de tâches au sein d'une même séquence, qui permet de moduler la complexité didactique et cognitive des situations. Ainsi, une tâche relevant du premier groupement (Observer ou toucher / Identifier / Décrire) peut présenter une faible exigence cognitive si elle ne requiert pas d'anticipation ou de recherche (groupement 6). En revanche, si une forme d'anticipation est introduite (groupement 6), la tâche devient plus complexe car les images mentales deviennent nécessaires à la réussite, et la performance des élèves tend à augmenter, révélant le rôle crucial de ces représentations (groupement 5).

La troisième variable concerne la dimension des objets considérés dans les situations. En appui des travaux de Duval (2005), les objets peuvent être de dimension 0 (points), 1 (lignes), 2 (figures planes) ou 3 (volumes). Dans le contexte des connaissances spatiales, les objets unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels peuvent être appréhendés selon différentes perspectives. Cela favorise l'élaboration et la mobilisation d'images mentales, notamment dans des situations de déplacement en environnement réel (par exemple, se repérer dans une ville), où les objets perçus doivent être coordonnés mentalement selon des points de vue variés.

Enfin, la quatrième variable renvoie au questionnement didactique relatif aux connaissances spatiales que la situation permet de verbaliser, en particulier au moment de l'institutionnalisation. Cette dimension est en lien avec les travaux en Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), notamment autour des situations de formulation et de communication, qui permettent de verbaliser, de structurer et de mettre en débat les connaissances spatiales mobilisées.

IV - - DES EXEMPLES

Cette structure génératrice proposée par Marchand a inspiré la conception des activités des séquences didactiques développées et testées dans le cadre du projet SPAGEO. Les différentes situations expérimentées s'organisent autour de deux situations fondamentales. Dans la situation de position il s'agit de décrire un lieu ou interpréter une description d'un lieu. Dans une situation de chemin, il s'agit là encore de décrire un chemin ou interpréter la description d'un chemin. Il est aussi possible de travailler autour de la planification et production d'un chemin selon certaines contraintes. La valeur ajoutée de cet outil dans l'analyse a priori de situations relatives à l'espace est illustrée à travers deux activités de la séquence expérimentée avec les élèves de CM1 (un exemple pour les lieux et un exemple pour les chemins). Quelques résultats sur l'évolution des réponses d'élèves sont proposés à la suite de l'analyse

1 Rejoindre une position

Un point jaune indique une position de départ sur la carte. Des points spécifiques sont indiqués par un numéro sur la carte à l'élève qui doit les rejoindre dans la vue 1ère personne (Figure 1). Une fois que l'élève pense être au bon endroit dans la vue 1ère personne, il valide sa position. Si l'élève est effectivement au bon endroit, on lui demande de rejoindre le point suivant. Dans le cas contraire, l'élève est renvoyé à la dernière position validée.



Figure 1. Cartes où le point jaune indique la position de départ

Cette première activité a été conçue conjointement avec l'équipe de psychologie cognitive. Pour les collègues de psychologie, l'objectif de cette activité était d'identifier si la nature des informations disponibles sur la carte influence la performance des élèves. Ainsi la même activité a été répétée quatre fois, chaque fois avec une carte différente. Sur la Figure 1, la carte avec les numéros verts contient toutes les informations à travers des pictogrammes ou des textes, une deuxième carte (violette) n'indique que

les pictogrammes, les informations textuelles sont supprimées du rectangle gris. Dans une troisième carte (orange), les pictogrammes sont supprimés des cadres bleus et les informations textuelles apparaissent. Enfin dans la quatrième carte toutes les indications textuelles ou pictogrammes sont supprimées. D'un point de vue didactique, l'objectif était d'analyser les procédures des élèves pour rejoindre les différents points indiqués sur la carte et de voir si ces procédures variaient selon les informations disponibles. Cette activité ayant été proposée au début et à la fin de la séquence, elle permet aussi de comparer les performances des élèves avant et après la séquence.

1.1 Composantes des connaissances spatiales

Concernant les composantes des connaissances spatiales, la composante Orientation (relations extrinsèques et repérage dans le plan à l'appui d'un référentiel) est mobilisée à travers la mobilisation de points de repères pour identifier les différents lieux (départ et arrivé) ainsi que dans les différents lieux de changement de direction.

La composante Organisation (création et le contrôle d'images mentales des objets et relation intrinsèques) est aussi présente dans la création et l'organisation des images mentales propre à chaque vue (carte vs 1ère personne). En effet, les deux vues ne sont pas disponibles aux élèves simultanément, ce qui les oblige à faire des bascules entre les vues (1ère personne et carte). Afin de s'assurer que les élèves sont familiers avec la vue carte, et de les accompagner dans la correspondance entre les deux vues, leur position est indiquée par un cercle rouge sur la carte (sur Figure 1 la position initiale est au départ) et l'orientation par un petit triangle rouge (sur la Figure 1 vers le Musée). Cependant, après trois bascules l'orientation disparait et après quatre bascules la position n'est plus indiquée. Ainsi les élèves doivent développer des images mentales pour articuler les deux vues. En effet en plus des informations concernant le chemin à produire, des informations concernant la position dans l'une ou l'autre des vues doivent être prélevées pour être réinvesties dans l'autre vue.

1.2 Niveaux d'abstraction

Concernant les niveaux d'abstraction, ici comme les deux vues ne peuvent être visibles simultanément l'élève doit créer des images mentales contenant des informations disponibles dans une vue et qui doivent être utilisées dans l'autre vue. Cela implique à minima un niveau d'abstraction photographique.

Les orientations différentes entre la vue carte et la vue 1ère personne impliquent des changements de perspectives. En effet, si la vue carte conserve une orientation fixe (le haut de la carte correspond au nord), le point de vue dans la vue 1ère personne s'adapte à la direction du déplacement. Par exemple lorsqu'il faut atteindre le point 1 dans la carte violette ou orange, les deux points de vue ne sont pas dans la même orientation. Dans la vue 1ère personne, l'arrivée dans la première intersection se fait dans une direction sud. Ainsi, sur la carte violette, le point 1 se trouve vers la droite du point de départ alors que dans la vue 1ère personne, le point 1 se trouve sur la gauche. La mise en relation des images mentales développées à partir de chaque vue lors des changements de directions nécessite d'utiliser des images mentales qui en plus d'être anticipatrices du chemin à prendre doivent être dynamiques pour articuler les deux vues, ce qui implique un niveau d'abstraction scénographique.

1.3 Variables de la situation

Concernant la première variable de la situation, les élèves accèdent à la ville à travers deux espaces différents. Lorsque la ville est disponible via la vue carte, les élèves interagissent avec un micro-espace. Lorsque la ville est disponible en vue 1ère personne, les élèves interagissent avec un macro-espace simulé. En effet, les élèves ne sont pas physiquement et réellement à l'intérieur de l'espace, cependant ils ne peuvent accéder à l'ensemble de l'environnement, des recollements de l'espace perçu sont nécessaires. Ces deux types d'espaces impliquent des dimensions différentes. Ainsi dans la vue carte, les objets sont dans la dimension du plan, soit 2D alors que dans la vue 1ère personne les objets sont en 3 dimensions.

Ces variables impliquent des perspectives très spécifiques. La vue carte et ses objets 2D favorisent une perspective allocentrée. La vue 1ère personne et les objets 3D favorisent une perspective égocentrée. Il est cependant possible de mobiliser une perspective allocentrée dans la vue 1ère personne en s'appuyant sur des images mentales de la carte, dans ce cas une prise de distance avec la vue disponible permet de s'appuyer sur des points de repères qui ne sont pas forcément visibles dans la vue 1ère personne pour s'orienter. De même, il est possible de mobiliser une perspective égocentrée dans la vue carte en s'appuyant sur des images mentales de la vue 1ère personne.

Cette situation permet de travailler deux types de tâches : le type de tâche 2 (Repérer / Situer / Cartographier / Coordonner les perspectives) et l'anticipation-recherche (groupement 6).

Finalement le questionnement sur les connaissances spatiales convoquées n'est pas exploité dans cette situation qui prend la forme d'une évaluation des connaissances et dans laquelle les élèves travaillent individuellement sans aucune interaction.

1.4 Quelques résultats didactiques

Cette situation a été proposée à 66 élèves au pré-test et 77 élèves au post-test de CM1 (que nous suivions depuis le CE1) une première fois avant la séquence didactique puis une deuxième fois (huit semaines plus tard) après la séquence. Les résultats présentés sur la Figure 2 concernent l'étude comparative entre ces deux sessions. L'analyse concerne la réussite au premier point dès la première validation (réussite en 1 validation) voire en deux validations (réussi +1 validation). Au-delà de deux validations la réponse de l'élève est considérée comme échec (même si l'élève a réussi par la suite). Seul le premier point est analysé car de nombreuses différences apparaissent rapidement entre les élèves. En effet, plus l'élève fait de bascule, plus il perd rapidement les informations de position et orientations rapidement, à l'opposé l'élève qui utilise modérément les bascules peut s'appuyer sur ces informations sur plusieurs points.

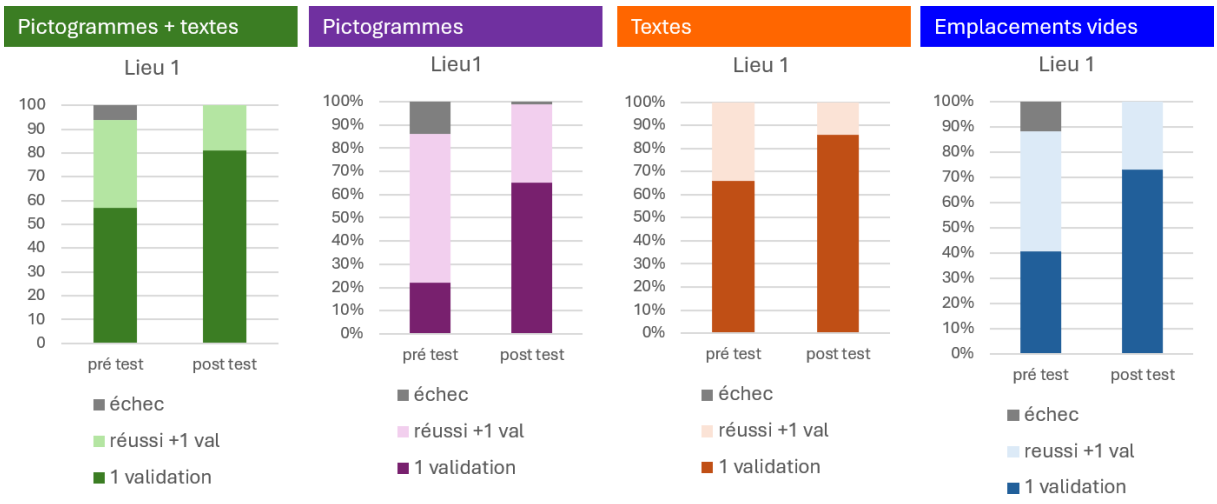


Figure 2. Graphiques présentant les performances des élèves pour chaque carte

Pour les quatre cartes, les performances des élèves sont meilleures au post-test. De plus, lors de la première passation, quelques élèves ne sont pas parvenus à retrouver le premier point même après une validation (zone grise du diagramme). Lors de la deuxième passation, tous les élèves ont trouvé le premier point, éventuellement avec une deuxième tentative. Ainsi globalement leurs connaissances spatiales de repérage dans le plan pour retrouver une position en faisant utilisant une carte semblent être plus efficaces à la fin de la séquence. La carte orange (uniquement les informations textuelles) est la mieux réussi dans les deux cas alors que la carte violette (uniquement les pictogrammes) est la moins bien réussie dans les deux cas. Il serait tentant d'en conclure que les informations textuelles permettent aux élèves de mieux réussir que les informations dessinées. Cependant, si on regarde les relations extrinsèques entre le point de départ et la position du premier point sur la carte orange, celui-ci se trouve

très proche du départ (le plus proche des quatre premiers points avec deux segments de route) et dans la même orientation que l'orientation de départ (vers l'ouest), de plus un seul changement de direction doit être effectué. Pour les trois autres points, deux changements de directions sont nécessaires et ils sont tous à environ quatre segments de route du point de départ. Pour le premier point violet, contrairement au premier point vert et premier point bleu, celui-ci se trouve dans une orientation opposée à celle du point de départ. En effet, au point de départ, l'élève est orienté vers l'ouest, c'est-à-dire la gauche de la carte. La distance et l'orientation par rapport au point de départ de ce point sur la carte violette peuvent avoir un effet sur la réussite de l'élève. Dans la carte bleue, le premier point est aussi à l'opposé de l'orientation de départ mais le chemin va vers le nord, c'est à dire qu'il est dans la même orientation que la carte. Il en résulte que la relation extrinsèque entre le point de départ et le point à atteindre demande une manipulation des images mentales plus exigeante dans le cas de la carte violette et cela peut être une explication dans les différences de performance des élèves au même titre que les signes des points de repères (textes vs pictogrammes). Pour confirmer cette hypothèse nous avons recueilli le premier lieu de validation pour chaque carte (Figure 3 et Figure 4). Pour chaque carte, chaque position de validation du premier point est indiquée par une sphère. Plus le diamètre de la sphère est grand, plus il y d'élèves concernés par cette position. La couleur rouge indique la position de l'élève a été validée.

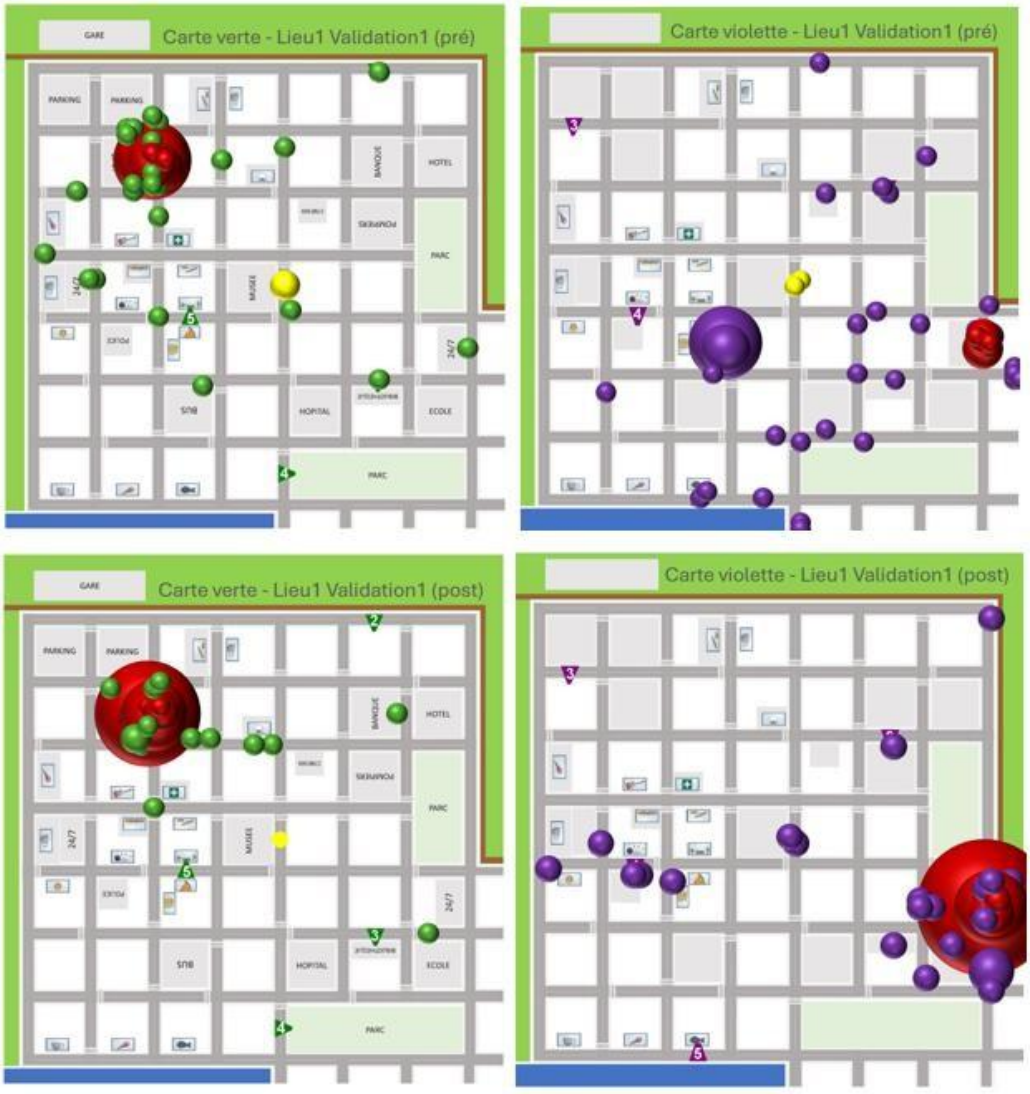


Figure 3. Premier lieu de validation pour le premier point au pré-test (ligne du haut) et post-test (ligne du bas)

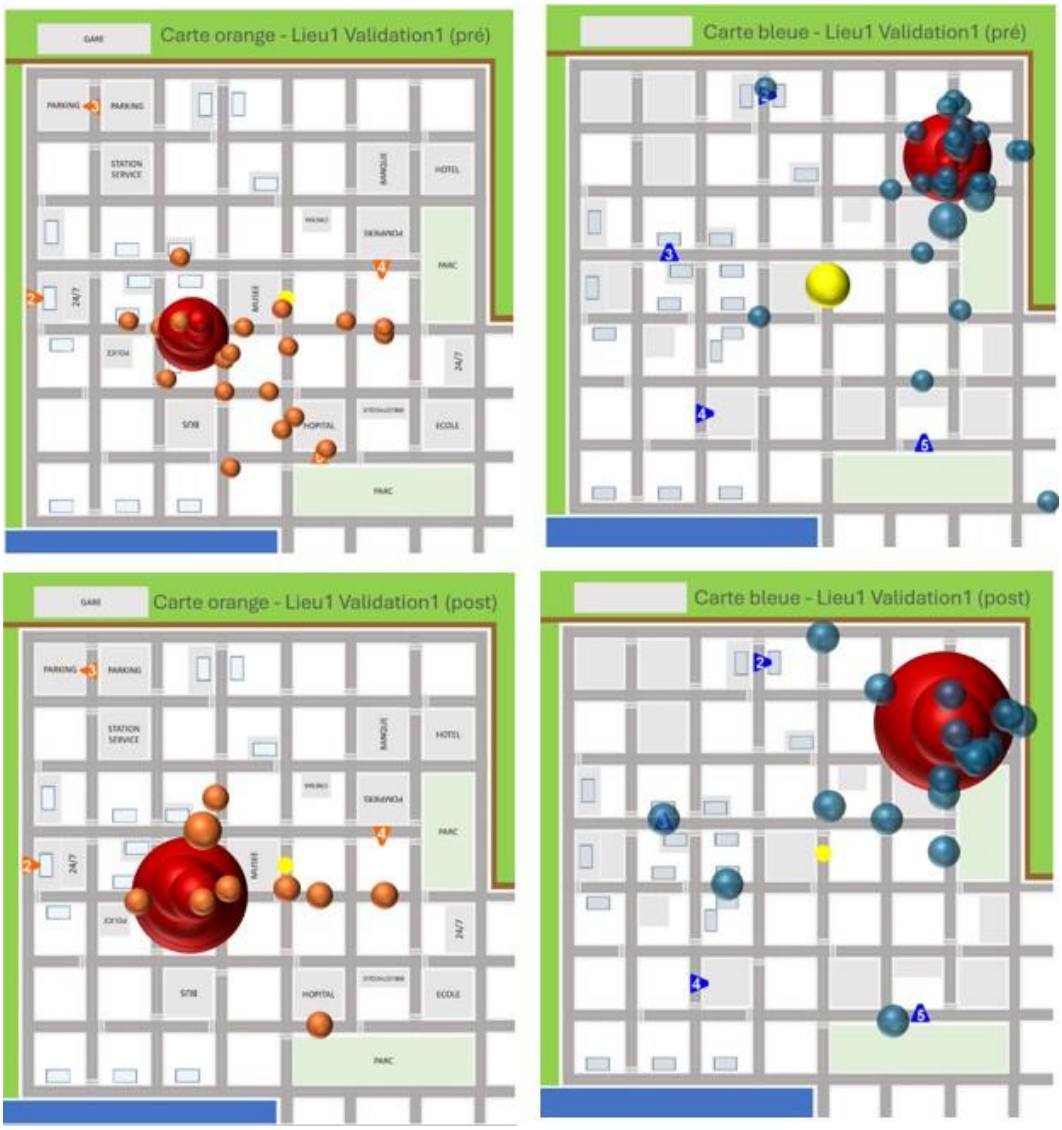


Figure 4. Premier lieu de validation pour le premier point au pré-test (ligne du haut) et post-test (ligne du bas)

On retrouve des sphères plus importantes au post-test qu'au pré-test, ce qui rejoint le résultat de la Figure 2. Si maintenant on regarde plus spécifiquement la carte violette (Figure 3), on remarque que lors du pré-test, une sphère importante se trouve dans la direction opposée à la position du premier point. En effet, sur les 66 élèves qui ont réalisé cette tâche, 14 ont validé au premier essai la position du premier point, et 19 ont validé une position correspondant à la grosse sphère violette. Enfin cette visualisation des points de validation des élèves montre aussi une plus grande dispersion des validations lors du pré-test que lors du post-test. Pour conclure, les informations disponibles sur la carte peuvent influencer les stratégies des élèves mais il semble que les positions relatives entre les différents points ainsi que les orientations entre les deux vues peuvent aussi être un facteur dans la difficulté de la tâche. La manipulation des images mentales apparait alors comme essentielle dans cette tâche d'anticipation et de coordination de perspectives.

2 Reproduit un chemin

Ce deuxième exemple est une tâche proposée lors de la dernière séance de la séquence, avec 79 élèves. Cette séance avait pour but l'évaluation des élèves. Plusieurs exercices étaient proposés, concernant des itinéraires ou des chemins. Un des exercices avait pour consigne de dessiner sur la carte (accessible sur

l'ordinateur) un chemin qui était dicté par l'enseignante. La Figure 5 présente la consigne orale ainsi que le dessin solution, le point jaune désignant le point de départ.

À ma droite j'ai le parc, à ma gauche l'hôpital. J'avance jusqu'au carrefour après l'école. Je tourne à droite. J'avance de 4 carrefours. Je tourne à gauche j'avance de 2 carrefours.

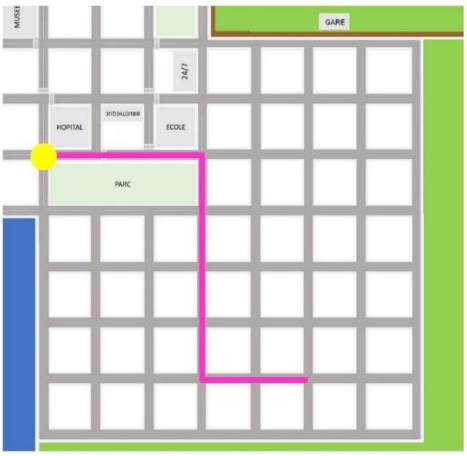


Figure 5. Consigne sur la gauche et solution du tracé sur la droite

Le déplacement commence dans une zone de la ville qui contient des points de repère et ces points de repère sont utilisés dans la description du chemin. Cependant, rapidement le chemin s'effectue dans le quartier résidentiel où les points de repère sont absents. C'est pour cela que la description utilise une stratégie de comptage des carrefours.

Après avoir présenté l'analyse de cette tâche, quelques résultats vont être présentés. Les élèves étaient positionnés sur le point de départ. Le dessin du chemin était à réaliser sur l'ordinateur à l'aide des flèches directionnelles. Ainsi l'orientation de la carte était fixée, le haut de la carte correspondant au nord.

2.1 Composantes des connaissances spatiales

Concernant les connaissances spatiales, la composante orientation est ici évidement présente à travers la mobilisation d'un référentiel dans une situation de déplacement dans le plan.

Il est aussi possible d'exploiter la composante organisation à travers l'articulation des perspectives. Cette articulation à lieu à deux niveaux. D'une part dans les changements de directions indiqués dans une perspective égocentrée « je tourne à droite » à interpréter dans la vue carte qui induit plutôt une perspective allocentrée. D'autre part dans les orientations propres à chaque perspectives, la carte étant dans une orientation nord et les indications dans l'orientation du déplacement, Est puis Sud puis Est.

2.2 Niveaux d'abstraction

Dans cette tâche, la seule image disponible aux élèves est la carte disponible sur l'écran. Il s'agit alors de s'appuyer plutôt sur des images mentales préalablement construites (lors des situations précédentes) ce qui implique un niveau d'abstraction scénographique, par la mobilisation de ces images mentales mais surtout la manipulation de ces images pour articuler les changements de perspectives.

2.3 Variables de la situation

Concernant le type d'espace mobilisé, ici seul le micro-espace est disponible, le macro-espace étant évoqué dans la consigne par le déplacement effectué. Concrètement les élèves interagissent avec un micro-espace et des objets du plan. Cependant l'évocation du macro-espace et l'utilisation d'une perspective égocentrée impliquent une coordination des perspectives (groupement 2) dans la représentation du chemin sur la carte. Enfin concernant le questionnement des connaissances spatiales, bien que cette tâche soit intégrée à une évaluation, les élèves ont pu accéder directement à la solution une fois le dessin validé. Cela leur a permis de confronter leur dessin au dessin solution, les deux étant présentés l'un à côté de l'autre.

2.4 Quelques résultats

L'analyse des tracés des élèves s'intéresse aux lieux de changement de direction. Selon la consigne, deux lieux de changements de directions sont indiqués, tourner à droite au carrefour après l'école et tourner à gauche après quatre carrefours. Le carrefour a été utilisé à plusieurs reprise dans la séquence d'enseignement comme unité de mesure de longueur dans la ville, aussi bien dans la vue carte que dans la vue 1ère personne. Pour chacun des lieux deux éléments sont analysés, la position de ce lieu et l'orientation choisie par l'élève.

Concernant le premier lieu de changement de direction, la Figure 6 présente la répartition des élèves autour du lieu de changement de direction.

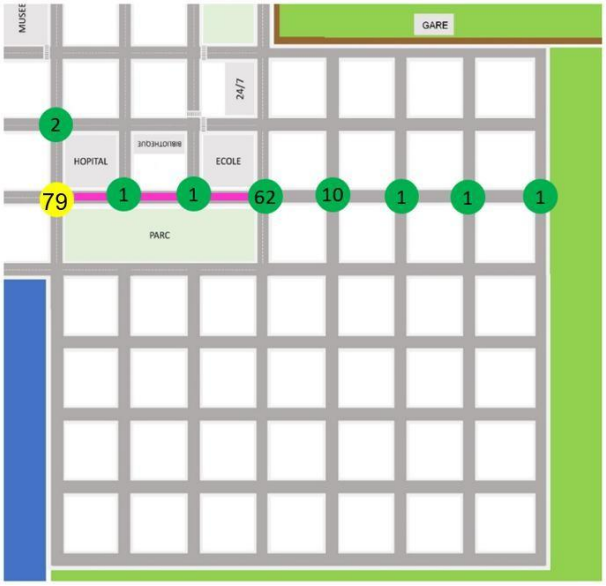


Figure 6. Répartition des élèves au lieu du premier changement de direction

Pour ce premier lieu de changement de direction, presque 20% des élèves ne s'arrêtent pas au bon endroit. L'information « le carrefour après l'école » reste ambigüe pour quelques élèves qui s'arrêtent au carrefour suivant le carrefour indiqué (10 élèves sur 79).

Pour les élèves qui ont su identifier le carrefour d changement de direction, il s'agit maintenant de voir quelle a été leur interprétation de la consigne « Je tourne à droite ».

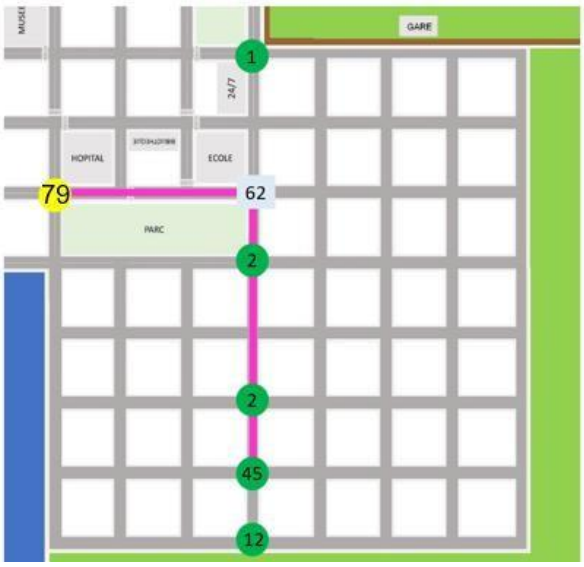


Figure 7. Répartition des élèves lors du premier changement de direction

Si on ne considère que les 62 élèves qui se sont effectivement arrêtés dans la bonne intersection, seul un élève a tourné dans la mauvaise direction (Figure 7). Il semblerait que les élèves parviennent à interpréter l'information « Je tourne à droite » dans la perspective allocentrée de la carte. Concernant l'information « J'avance de 4 carrefours » sur les 61 élèves qui ont choisi la bonne direction, 45 se sont arrêtés dans le bon carrefour. Les deux indications de lieux utilisées, « le carrefour après l'école » ou « J'avance de 4 carrefours » semblent être difficiles à interpréter pour certains élèves.

Le premier changement de direction a été bien réalisé par les élèves, qu'en est-il du second ? La Figure 8 présente les changements de directions opérés par les élèves ainsi que le carrefour d'arrêt.

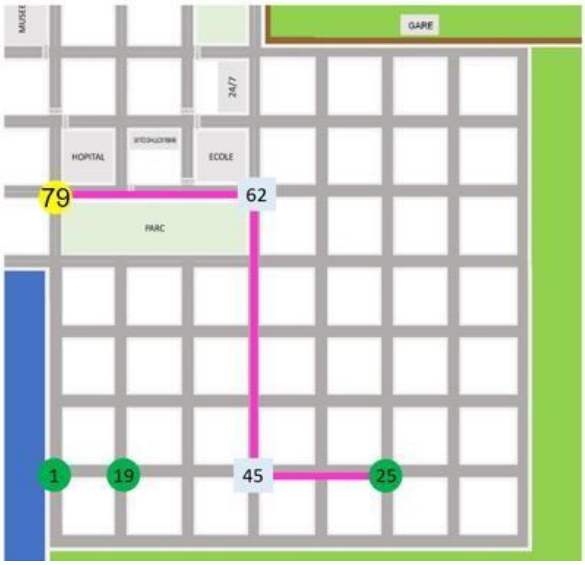


Figure 8. Répartition des élèves pour le deuxième changement de direction

Sur les 45 élèves qui ont su réaliser le chemin correspondant à la description, seuls 25 ont su interpréter correctement l'indication de changement de direction. De plus, ces 25 élèves ont tous identifié le bon carrefour d'arrêt. Contrairement au premier changement de direction qui a été bien réussi, l'indication « Je tourne à gauche » n'a pas été concluante pour presque la moitié des élèves. Cette deuxième consigne de changement de direction nécessite une coordination des perspectives entre la perspective égocentrée de la consigne et la perspective allocentrée de la carte. Cette coordination est d'autant plus nécessaire que les orientations sont opposées (nord pour la carte et sud pour la description). Dans le premier changement de direction, la coordination des perspectives était certainement plus « explicite » dans le sens où l'élève avait pour information de tourner et s'il gardait l'orientation nord dans son interprétation de la description, soit il revenant sur ses pas en allant vers la gauche de la carte, soit il continuait son chemin en allant vers la droite de la carte. Dans cette première situation, le milieu indiquait qu'il fallait changer d'orientation dans l'interprétation de la description. Dans la deuxième situation de changement de direction, le milieu ne permet plus d'invalider une interprétation qui ne prendrait pas en compte le changement de perspective.

Finalement seulement 25 élèves sur les 79 du départ sont parvenus à reproduire le chemin correspondant à la description. Deux principales difficultés expliquent ce score. D'une part l'interprétation des indications de lieux ou de distances et d'autres part la coordination des perspectives.

V - DISCUSSION CONCLUSION

La technologie prend de plus en plus de place dans notre quotidien. Elle devient un soutien dans certaines de nos tâches et peuvent aussi agir sur nos connaissances. Dans le cas des connaissances spatiales, les technologies comme les GPS modifient notre rapport à l'espace en prenant à leur charge certaine sous-

tâches comme retrouver sa position sur la carte ou orienter la carte dans le sens du déplacement. Il devient nécessaire d'introduire ces technologies dans les classes ne serait-ce que pour familiariser les élèves à l'utilisation de ces environnements. Le projet SPAGEO (Matri, 2024) illustre le développement de différentes séquences d'enseignement qui utilisent un environnement virtuel au service des connaissances spatiales. Cet article présente deux tâches extraites de ces séquences analysées à l'aide de la structure génératrices d'activité développée par marchand (2020). Cette structure permet de distinguer différentes composantes des connaissances spatiales convoquées dans la résolution des tâches. Elle utilise aussi trois niveaux d'abstraction mis en relation avec les images mentales mobilisées. Enfin elle explicite les choix didactiques à travers les variables didactiques possibles dans le développement de situations d'enseignement. Cette structure nous a permis l'analyse a priori de deux activités utilisées lors de la recherche SPAGEO. Nos analyses ont mis en évidence que la relation entre deux lieux consécutifs (dans l'exemple 1, le départ et le premier lieu à rejoindre) peut aussi influencer la réussite des élèves. On peut en déduire que les images mentales, essentielles pour caractériser les niveaux d'abstraction, sont essentielles lors de la mise en relation de la vue carte et la vue 1ère personne.

Marchand insiste sur la nécessité d'un maillage des composantes, nous dirions qu'il en va de même pour les variables de la situation. Dans notre cas, la présence conjointe ou non des différentes vues pour travailler les différentes perspectives (allocentrée et égocentrée) et mettre en relation ces différentes perspectives. Le premier exemple présente des performances en hausses entre les deux tests pour le repérage de positions dans la ville. Ainsi les élèves parviennent à mieux utiliser les informations de la carte pour retrouver une position dans la vue 1ère personne.

Enfin, nos analyses pointent une difficulté dans la formulation des longueurs de déplacement. En effet dans les échanges entre élèves et avec les enseignants les carrefours ont été utilisés comme unité de longueur. Cependant le dernier exemple démontre que l'interprétation des longueurs à l'aide des carrefours n'est pas partagée par tous les élèves. En effet, le carrefour correspond à une position, l'unité de longueur serait plutôt la distance entre deux carrefours, c'est-à-dire un segment de route entre deux carrefours. Cela mériterait d'être corrigé dans notre séquence didactique.

La structure génératrice d'activités (Marchand, 2020) est un apport précieux pour développer amis aussi analyser des activités visant des connaissances spatiales. Elle permet d'organiser les différents éléments à prendre en compte pour une activité mais peut aussi servir dans la conception de séquences didactiques afin de s'assurer d'une diversité des composantes des connaissances spatiales convoquées.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Argaud, H.-C., Castry, O., Castry, A., Maillard, M., & Valesa, M.-H. (1998). Où placer le jeton ? *Grand N*, *64*, 9-25.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Éd.), *Second handbook of research on mathematics reaching and learning* (843-908). National Council of Teachers of Mathematics.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. [Université de Bordeaux]. https://hal.science/tel-03872631v1

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. Grand N, 65, 37-59. Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire—Etude de l'espace et de la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques*, Rethymon 2000, 1-25.

Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities. A survey of factor-analytic studies* (1st ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Éd.), *Mathematics in the early years.* (66-79). Washington, DC.: National association for the education of young children.

Clements, D. H., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasonning. In D. A. Grouws (Éd.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (420-464). Macmillan.

Coutat, S., & Berney, S. (2023). Connaissances spatiales et habiletés visuo-spatiales – croisement de deux paradigmes pour mieux comprendre les enjeux d'enseignement et d'apprentissage en géométrie. In F. Vandebrouck & M.-L. Gardes (Éds.), *Nouvelles persepctives en didactique des mathématiques : La preuve, la modélisation et les technologies numériques (volume 2)* (59-68). IREM de Paris. https://hal.science/hal-04050994

Coutat, S., & Dorier, J.-L. (2016). Comment la corporéité peut-elle intervenir dans l'apprentissage de des mathématiques ? Quelques références et deux exemples. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, 38(1), 23-38. https://doi.org/10.24452/sjer.38.1.4968

Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In B. Davis & the Spatial Reasoning Study Group (Éds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (139-150). New York: Routledge.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Emprin, F. (2014). Le point de vue d'ingénieries didactiques. In *Actes du XXXXème colloque de la COPIRELEM*, Nantes, 2013. (ARPEME, p. 1-12).

Klatzky, R. L. (1998). Allocentric and egocentric spatial representations: Definitions, distinctions, and interconnections. In C. Freska & C. Habel (Éds.), *Spatial Cognition. An Interdisciplinary Approach to Representing and Processing Spatial Knowledge* (1-17). Springer.

Lubinski, D. (2010). Spatial ability and STEM: A sleeping giant for talent identification and development. *Personality and Individual Differences, 49*(4), 344-351. https://doi.org/10.1016/j.paid.2010.03.022

Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en 3 dimensions ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 103-121.

Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 40*(2), 135-178.

Moss, J., Bruce, C. D., Caswell, B., Flynn, T., & Hawes, Z. (2016). *Taking Shape. Activities to develop Geometric and Spatial Thinking. Grades K-2.* Pearson Canada.

Stieff, M., & Uttal, D. H. (2015). How Much Can Spatial Training Improve STEM Achievement? *Educational Psychology Review, 27*, 607-615. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9304-8

Tolman, E. C. (1948). Cognitive maps in rats and men. *Psychological review, 55*(4), 189.

van der Ham, I., Claessen, M., Evers, A., & van der Kuil, M. (2020). Large-scale assessment of human navigation ability across the lifespan. *Scientific Reports, 10*. https://doi.org/10.1038/s41598-020- 60302-0

CONCEPTION D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE SUR LES FRACTIONS : UNE INGÉNIERIE COOPÉRATIVE

Sophie JOFFREDO-LE BRUN
MCF, Université Catholique de l'Ouest
LIRFE/CREAD
sjoffred@uco.fr

Carine FRAPPIER-JEGO
Docteure en didactique des mathématiques,
Institut Supérieur de Formation de l'Enseignement Catholique de Bretagne
LIRFE/CREAD
carine.jego@ac-rennes.fr

Résumé
Dans cette communication, nous présenterons une recherche coopérative en cours financée par l'UNISFEC regroupant deux chercheuses en didactique et des professeur.e.s des écoles du 1er degré et du 2nd degré également formateur.trice.s en didactique des mathématiques pour les futurs professeur.e.s. Cette recherche se constitue en ingénierie coopérative (Collectif Didactique pour Enseigner, 2024 ; Joffredo-Le Brun et al., 2018).
Cette communication a pour objectif de décrire le processus d'enquête collective qui nous a permis de déterminer un problème commun sur lequel notre travail allait porter, soit celui de l'enseignement des fractions au cycle 3.
Pour cela, nous nous appuierons sur la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). Nous allons analyser des échanges au sein de ce collectif à partir de l'ensemble des transcriptions des réunions du collectif pour montrer progressivement la construction du problème commun.

La Recherche Action Collaborative (RAC) en didactique des mathématiques, objet de cette communication, est financée par l'UNISFEC (Union Nationale des Instituts Supérieurs de Formation de l'Enseignement Catholique) sur 3 années consécutives de 2023 à 2026. Ce dispositif de Recherche Action Collaborative a été choisi pour que la recherche « vienne nourrir les pratiques et notamment les pratiques de formation » comme le précise le document cadre de cette recherche. Il précise que cette démarche vise à combiner le travail conjoint de praticiens et de chercheurs, dans une dynamique collaborative et contribue au développement de l'expertise des acteurs impliqués dans un champ donné (ici la didactique des mathématiques) par des productions partagées. Le travail collectif est organisé de la manière suivante : la première année est consacrée à la détermination de la problématique et à sa stabilisation, la seconde année est centrée sur la construction d'outils et à la mise à l'épreuve des hypothèses par un dispositif d'observation, la dernière année permettra de concevoir progressivement des ressources sous forme de livrables qui seront ensuite partagées (rapport de recherche ; outils conçus et évalués, productions scientifiques). Dix-huit heures de travail collectif par an sont prévues avec une réunion en présentiel et le reste en visioconférence. Cette recherche regroupait à ses débuts une douzaine de formateur.trice.s de huit ISFEC de France intervenant auprès des étudiants en Master MEEF 1er et 2nd degré en didactique des mathématiques[1] et deux chercheuses en Sciences de l'Éducation. Ces formateur.trice.s sont aussi des professeur.e.s du 1er et du 2nd degré.

[1] A. Chollet, G. Daniel, A-L Cozannet, A. Girou, S. Joucla, C. Robieu, A-C Cayre, O. Schettino, M. Rajaiah,

À partir de cette commande institutionnelle, la première des nécessités a été de déterminer un problème commun sur lequel notre travail collectif allait porter. Cette communication a pour objectif de décrire le processus d'enquête collective qui nous a permis de travailler sur un dispositif sur l'enseignement des fractions lors de la première année de cette recherche.

Pour analyser ce processus, nous situerons tout d'abord le cadre dans lequel la coopération au sein de cette recherche s'organise. Puis nous présenterons le cadre théorique qui va permettre d'analyser ce processus d'enquête. La troisième partie se centrera sur les analyses des échanges au sein de ce collectif. Enfin, une conclusion sera proposée.

I - L'INGÉNIERIE COOPÉRATIVE, CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Pour construire un problème commun et organiser la coopération, une première réunion en présence a eu lieu en janvier 2024. La chercheuse, pilote de cette recherche, a alors présenté le cadre de l'ingénierie coopérative (Collectif Didactique pour Enseigner (CDpE), 2024 ; Sensevy et Bloor, 2019 ; Joffredo-Le Brun, 2020 ; Joffredo-Le Brun *et al.*, 2018) dans lequel le travail collectif allait s'organiser.

L'ingénierie coopérative peut être considérée comme un processus méthodologique où un collectif constitué d'acteurs de l'éducation, de la formation et de chercheurs s'engagent dans une action conjointe dans le but de co-construire une séquence d'enseignement, de formation.

Elle constitue une forme particulière de *design-based research* (Cobb *et al.*, 2003 ; Collins, 2011), c'est-à-dire de recherche fondée sur la production d'un dispositif.

Professeurs, formateurs et chercheurs se regroupent autour d'un projet commun de conception et d'analyse d'un dispositif didactique à partir d'hypothèses de travail pour la construction de savoirs théoriques et pratiques. L'élaboration conjointe de ce dispositif prend forme dans une enquête (Dewey, 1938/2006) collective entre membres de ce collectif. Elle repose sur des principes qui s'entrecroisent et qui organisent la coopération.

Les deux premiers principes reposent sur la recherche de symétrie entre professeurs et chercheurs et de la reconnaissance des différences pratiques et épistémiques entre membres du collectif. Le troisième principe est celui de la définition commune des fins de l'action (Sensevy, 2016) et des moyens, des stratégies nécessaires pour nourrir ces fins dans une enquête collective. Chacun assume son point de vue et le fait valoir (Sensevy *et al.,* 2018) pour que l'enquête collective progresse dans un principe d'assomption des différences. Cependant, à certains moments du dialogue d'ingénierie, il existe des zones locales, ponctuelles d'indiscernabilité entre professeurs et chercheurs où chaque participant joue le rôle d'ingénieur didacticien. Ce principe de posture d'ingénieur (CDpE, 2024 : Sensevy *et al.*, 2013) se réalise lorsque chaque membre du collectif mobilise des moyens théoriques et/ou concrets pour résoudre un problème de la pratique tout en gardant ses spécificités. Il existe alors entre professeurs et chercheurs une égalité, en pratique et en dignité, des intelligences « de leurs compréhensions, spécifiques à chacun, des situations étudiées » (Sensevy, 2021, p.166).

La question est alors comment dans notre collectif s'est construit l'objet commun sur lequel portera la conception d'un dispositif didactique ?

II - CADRE THÉORIQUE : LA THÉORIE DE L'ACTION CONJOINTE EN DIDACTIQUE

Pour répondre à cette question, nous mobiliserons la théorie de l'action conjointe en didactique qui développe une théorisation sur les ingénieries collectives, qui sont un lieu de transactions entre les professeurs et les chercheurs autour de la résolution d'un problème à résoudre. Ce problème peut être considéré comme une situation indéterminée qu'il faut transformer à un tout unifié par une enquête conjointe (Dewey, 1938/2006).

Tout en sachant que ce problème devait porter sur l'enseignement des mathématiques, sur les dispositifs de formation en didactique des mathématiques en Master MEEF 1er et 2nd degré, le problème commun au début de cette recherche n'était pas encore déterminé.

Le dialogue d'ingénierie (CDpE, 2024) que nous analysons, c'est-à-dire la manière d'échanger entre professeurs et chercheurs, va alors permettre la construction au fur et à mesure des fins vers lesquelles s'orientent l'enquête et les moyens pour résoudre le problème à partir d'une référence commune du point de vue de la pratique et du point de vue théorique. Cette nécessité de construire un raisonnement commun sur les fins et les moyens permet à chacun et chacune d'être capable de comprendre et construire une relation de première main avec les raisons d'être de la conception du dispositif (Joffredo-Le Brun *et al.,* 2018), donner et demander les raisons (Brandom, 2009).

Il va donc se construire progressivement dans le collectif un arrière-plan partagé (Wittgenstein, 2004) en tant que « tressage de significations sur la base duquel ils [signes et expressions] prennent leur sens pour les personnes qui s'expriment et pour celles et ceux qui tentent de les comprendre » (CDpE, 2024 p. 427). Cet arrière-plan va fournir une référence pour comprendre un signe, une expression, une action pour tendre vers un style de pensée partagé (Fleck, 2006) qui va permettre d'agir ensemble dans un processus de problématisation (Joffredo-Le Brun *et al*., 2018). Cet arrière-plan va progressivement se réduire en déjà-là qui permet d'identifier les éléments directement agissant à certains moments du dialogue d'ingénierie.

Nous verrons dans cette communication comment ce déjà-là se spécifie au cours du travail d'enquête collective à travers l'étude de différents problèmes de la pratique. Cette enquête (Dewey, 1938/2006) prend sa source dans un milieu-problème, ce qui pose problème au collectif. Il est constitué au départ d'un ensemble d'éléments épars en tant que situation indéterminée pour passer à un tout unifié. Dans le dialogue d'ingénierie étudié, le milieu-problème va comme nous le verrons se spécifier, se déterminer progressivement dans l'enquête.

La question de recherche à laquelle nous allons essayer de répondre dans cette communication est donc : Comment se construit un arrière-plan partagé dans une ingénierie collective et comment se spécifie un milieu-problème ?

III - MÉTHODOLOGIE

Comme présenté dans l'introduction, le collectif est constitué au départ de douze Professeur.e.s-Formateur.trice.s (PF) du 1er et 2nd degré en didactique des mathématiques et deux chercheuses en didactique.

Pour répondre à notre question, nous nous sommes appuyées principalement sur deux types de données recueillies la première année de la recherche et plus spécifiquement entre janvier et juillet 2024.

Dans un premier temps nous avons visionné l'ensemble des enregistrements des réunions collectives : six réunions de deux heures réalisées en visio et enregistrées sur une équipe TEAMS où l'ensemble des données est stocké (articles scientifiques partagés, les enregistrements, les comptes-rendus de réunions, des bilans de mise en œuvre…).

Réunion en présence le 05/01/2024
Réunion du 01/02/2024 de 18h-20h
Réunion du 11/03/24 de 18h-20h
Réunion du 04/04/24 de 18h-20h
Réunion du 13/05/24 de 18h-20h
Réunion du 12/06/24 de 18h-20h
Réunion du 01/07/24 de 18h-20h



Figure 1 : les six réunions analysées sur l'année 2023-24 et enregistrées sur TEAMS

Puis dans un second temps, nous avons repris le compte-rendu de la première réunion en présence qui a eu lieu le 5 janvier 2024 pour comprendre la genèse de la coopération.

Un synopsis des réunions a été réalisé ainsi qu'une transcription des moments clés. Cette transcription du dialogue d'ingénierie a été réalisée à partir d'une enquête. Elle a permis de regrouper un ensemble de signes (Leutenegger, 2000) autour de la production d'assertions, collectivement appropriées par le collectif, c'est-à-dire à propos desquelles à la fois engagements et autorisations sont partagées par tous. » (Sensevy, 2011, p. 685).

IV - L'ENQUÊTE COLLECTIVE

1 Enquête collective, point de départ

La première rencontre du collectif a eu lieu en présentiel en janvier 2024. Elle a été l'occasion de présenter le contrat de recherche et de faire un premier état des lieux des pratiques de formation. Pour cela, deux questionnaires ont été proposés. Le premier a permis de réaliser un état des lieux des pratiques des PF et le second, d'analyser et d'identifier les raisons qui semblent, selon les PF, rendre efficaces ou non les dispositifs de formation mis en place. Les différentes réponses sont partagées et questionnées lors de la mise en commun tout d'abord en groupe pluri degrés puis en collectif.

L'analyse des échanges tant pour les PF du 1 et 2nd degrés montre que la conception d'un dispositif de formation doit partir des connaissances des étudiants afin de répondre à leurs besoins en apportant des apports théoriques didactiques et épistémologiques. Ces dispositifs doivent permettre aux étudiants d'être acteurs de leurs apprentissages en les faisant vivre et expérimenter des situations pour s'approprier des notions mathématiques et produire des gestes d'enseignement spécifiques (par exemple, la formulation de consignes). Ces dispositifs doivent faire sens pour les étudiants et permettre la transposition de certains éléments de la situation étudiée dans les classes.

Une des questions centrales qui émerge est celle des ressources accessibles pour les formateurs et formatrices.

2 Continuation de l'enquête : la question de la manipulation en mathématiques

Le problème commun va se construire progressivement lors des réunions suivantes en partant des conclusions qui ont émergées dans ce premier temps de travail.

Lors des deux premières réunions du 1er février et du 11 mars, plusieurs questions et hypothèses de travail émergent.

Tout d'abord la question des connaissances mathématiques des étudiants et des notions à leur faire travailler notamment pour le 1er degré.

Puis vient la question de la place de l'erreur. Certains PF mettent en avant que les étudiants ne verbalisent pas leurs difficultés voire les cachent lorsqu'ils ne savent pas répondre d'où la nécessité de partir de leurs difficultés. La question de l'erreur comme obstacle est alors abordée.

Ensuite, la place de la manipulation en formation est interrogée et reprise lors de la réunion suivante. Les PF partagent le constat que les étudiants utilisent les manipulations sans réellement avoir identifié à quoi elles servent, quels apprentissages elles permettent. Les PF partagent différents constats en lien avec leur expérience de formateur.trice.s :

Tout d'abord, les échanges sont orientés vers le lien entre erreur et manipulation.

> *PF2 : Il faut travailler sur le tâtonnement, sur l'erreur.*
>
> *PF1 : Relier tout cela à l'erreur, c'est-à-dire à partir de l'erreur, de l'obstacle trouver une situation de manipulation […]. On demande aux étudiants de partir du savoir, de chercher [...] et d'arriver à créer une situation de manipulation. C'est l'inverse de ce qu'on fait avec les élèves, vous voyez ? ... dans le cheminement. Nos élèves partent de la manipulation pour aller vers l'abstraction. Est-ce qu'en formation, il ne faudrait pas proposer aux étudiants de les faire manipuler, pour cheminer comme les élèves. On veut faire expérimenter nos élèves, il faut faire expérimenter nos étudiants, mais comment ?*
>
> *PF2 : Et la manipulation, c'est le moyen de mettre du sens pour abstraire. Et nos étudiants, c'est pareil.*

La question de l'importance de la manipulation en formation pour donner du sens aux notions mathématiques travaillées qui a émergé lors de la première réunion en visio est reprise et partagée lors de la seconde réunion.

Pendant la troisième visio du 4 avril, cette question est reprise

> *PF3 : A quel moment l'abstraction est suffisante pour qu'ils [les étudiants] puissent utiliser les techniques, mettre du sens derrière ? Ils ne sont pas encore autonomes au niveau des connaissances mathématiques et là il faut passer par des manipulations pour qu'ils en aient une représentation ?*
>
> *PF2 : L'enjeu pour la formation c'est de passer par la manipulation pour donner du sens plutôt que de donner des trucs. Il faut que les étudiants soient conscients de leurs manques de connaissances.*

On assiste ici à la construction d'un premier milieu-problème en tant que point de départ de l'enquête future qui s'ancre dans un premier temps sur un arrière-plan individuel qui devient progressivement commun par une reconnaissance réciproque entre membre de l'ingénierie de la structure symbolique du problème à travailler pour enseigner les mathématiques, « la manipulation pour abstraire ». Il se spécifie dans un déjà-là autour de la question de la manipulation pour que les étudiants comprennent leurs difficultés en mathématiques et ainsi construisent des connaissances sur certaines notions mathématiques. Il y a donc ici une première spécification du milieu de l'action des membres de l'ingénierie. La question est maintenant, sur quelle notion mathématique travailler ?

3 Emergence du questionnement sur les fractions et des problèmes pour les travailler.

Lors de la réunion du 4 avril apparaît la question de la compréhension du concept de fractions par les élèves mais aussi par certains étudiants en formation.

> *PF1 : En tout cas sur la fraction, il y a beaucoup de Master 2 premier degré qui maitrisent mal la fraction, ça c'est sûr.*
>
> *PF3 : Dans les programmes de 6ème il faut qu'ils comprennent que* $2 \times \frac{3}{2}$ *c'est 3. J'en ai pas mal parlé avec des collègues surtout quand je suis arrivé dans le second degré. Comment vous faites pour arriver, pour mettre en place, c'est un point compliqué même pour des collègues expérimentés d'introduire la fraction-quotient. C'est un exemple mais la fraction présente plein d'obstacles. […] Le partage, ils maitrisent mais le quotient voir que c'est un nombre, ils ne maitrisent pas. Ils restent dans le partage et pour nos étudiants c'est pareil.*
>
> *PF1 : C'est les différents sens de la fraction qui sont difficiles.*
>
> *PF3 : Ce n'est pas évident même pour les adultes de se dire que* $\frac{5}{4}$ *c'est la même chose que 5 divisé par 4.*

S'en suit un échange lié à l'importance de la parenté épistémique entre ce que l'on peut proposer dans un dispositif de formation et à l'art de faire (Sensevy et Le Hénaff, 2025) du mathématicien :

> *PF1 : Les mathématiques c'est tâtonner, chercher, faire des erreurs. Il faut donner à voir cette démarche-là : je tâtonne, je cherche, je manipule car j'ai besoin de revenir à du sens concret après je lâche le matériel pour abstraire. Ces allers-retours sont nécessaires. Si en fin de formation les étudiants ont compris ce que c'est vraiment de faire des maths, ça, ça pourrait être chouette de monter un dispositif par exemple autour des fractions qui permette de mettre les étudiants en position de chercheur pour qu'eux même après puissent mettre leurs élèves en position de chercheur.*

La 4ème visio du 13 mai va permettre aux PF de mettre en évidence la question des problèmes ouverts pour travailler la place de l'erreur, de la valoriser et faire prendre conscience aux étudiants que lorsque l'on fait des mathématiques, la réponse n'est pas nécessairement immédiate. Lors de la visio suivante du 12 juin, une définition des problèmes pour chercher est apportée (Charnay, 1993) et le site DREAMaths[2] visité.

Puis, le dialogue d'ingénierie s'oriente alors sur les attentes institutionnelles :

> *PF4 : Dans les programmes récents, mais les problèmes ouverts sont laissés de côté, vus comme moins utiles. On se positionne donc d'une certaine manière par rapport aux attendus. On est divergent. Ce qui est pas mal mais il faut être conscient de ça […] C'est dommage de ne pas travailler ces problèmes ouverts.*

Il y a ici densification du milieu-problème dans l'enquête collective avec l'introduction de la notion de fraction à partir de l'expérience partagée des PF et de l'expérience de classe avec leurs élèves. De même, le dispositif didactique pour travailler les fractions se spécifie avec l'arrivée des problèmes ouverts qui doivent permettre aux étudiants de se mettre en position de chercheurs. On assiste de même à la croissance d'un style de pensée qui se caractérise par une « disposition dans la perception dirigée » dans un collectif de pensée (Fleck, 2005).

4 Les différences des fractions

La vision du 12 juin revient sur les notions mathématiques à travailler avec les élèves et les étudiants en lien avec l'expérience de chacun des membres du collectif. Les fractions sont alors reprises en tant que notion difficile à enseigner et à comprendre par les élèves et les étudiants.

PF2 met alors en évidence les difficultés de ses élèves :

> *PF2 : Sur la fraction, [...], moi je vois mes élèves, ils sont très bons en calcul [...] par contre on leur met un problème, ils ne savent pas du tout le sens de la fraction, ils n'ont rien compris. Ils savent multiplier, additionner, ils savent ce qu'on attend d'eux après par contre si je mets un problème après où il faut comprendre le sens de la fraction, ils n'ont rien compris derrière. […] Qu'est-ce que ça veut dire une fraction concrètement ? Créer une situation qui donne du sens à la fraction. »*

Dans un second temps, le dialogue s'oriente vers ce qu'est une fraction :

> *PF5 : le pb est qu'il faut qu'on soit bien d'accord sur ce que c'est qu'une fraction et quelle utilité ça a ? Est-ce que c'est un nombre, un opérateur, une classe de nombres. Les enfants ne voient pas les fractions comme des nombres et ils ne comprennent pas pourquoi on les additionne. Ils n'ont pas acquis le statut de nombre.*
>
> *PF3 : La fraction en tant que nombre n'apparaît qu'en 6eme. Ils comprennent très bien la fraction-partage jusqu'en CM2 et en 6eme on va très vite sur la fraction-quotient. Pour eux, c'est un partage. Ils disent des fois quand ils ont une pizza devant eux, c'est une fraction partage et puis tout à coup lorsqu'on fait des maths un peu plus haut, c'est un peu un nombre, on peut en faire ce que l'on veut. Mais, ils ne voient pas du tout le lien entre les deux.*

PF2 propose une définition de la fraction quotient et de la fraction-partage

[2] https://math.univ-lyon1.fr/dream/

> *La fraction-quotient c'est le nombre a multiplié par combien donne b et c'est le nombre qui multiplié par a donne b. c'est $\frac{b}{a}$, alors que pour moi la fraction partage, c'est on partage une quantité […] Je pense qu'il y a une difficulté. En fait la fraction partage […] Ça s'est facile à comprendre pour les élèves partager en un certain nombre. Ce qui est difficile à comprendre, c'est quand ça devient un nombre. C'est peut-être là-dessus qui a un travail à faire autant pour les élèves que pour les étudiants que pour tout le monde. On peut partir de la fraction-partage, montrer que des fois c'est un nombre*

On voit ici que les difficultés des élèves trouvent leur origine dans le passage de la fraction « partie-tout ou partition » qui qualifie la relation entre un tout et le nombre de partie à celle de la fraction quotient (Behr *et al.*, 1983 ; Martinez et Roditi, 2017), c'est-à-dire le nombre que représente une fraction.

S'en suit un échange sur l'usage du guide-âne, préconisé par les programmes du cycle 3 (MEN, 2020 ; 2025) pour la classe de 6ème. PF5 explique ainsi qu'il utile le guide-âne avec ses étudiants, lauréats du concours 2nd degré.

Puis le dialogue revient sur la difficulté de passer de la fraction partage à la fraction en tant que nombre avec le guide-âne.

> *PF2 : c'est la difficulté de passer de la fraction partage avec le guide-âne à la fraction nombre qui donne du sens à la division au final parce que la division, c'est juste la fraction quotient ou est ce qu'on veut qu'ils cherchent et qu'ils manipulent sur les fractions […].*

Le milieu-problème semble ici se stabiliser, passer de la fraction-partage, identifiée par le collectif comme une entrée dans l'enseignement des fractions au cycle 3, à la fraction-quotient travaillée dès le collège. L'arrière-plan du collectif se spécifie alors en déjà-là, chacun amenant les raisons. Le dialogue d'ingénierie a permis de décrire les pratiques et créer ainsi un répertoire commun rendant capables les membres du collectif de concevoir des « end-in-views » (Dewey, 2008), des fins en vue qui émergent des accomplissements pratiques (Joffredo-Le Brun *et al.*, 2018).

5 Quelles ressources pour travailler les fractions ?

Cette première enquête a déterminé les notions mathématiques qui seront investiguées. Mais sur quelles ressources s'appuyer pour concevoir un dispositif de formation destiné pour les Master MEFF 1 et 2nd degré ?

Dans un premier temps, deux PF, respectivement professeure des écoles et professeure de mathématiques au collège proposent de regarder les situations présentées dans le manuel ERMEL CM1 et CM2 sur les apprentissages numériques et la résolution de problèmes (Charnay *et al.*, 2005a, 2005b).

> *PF2 : Repartir du ERMEL et de prendre les situations qui sont proposées […] et réfléchir à une analyse qui nous permettrait nous si on veut aller sur les étudiants de les comprendre et de les transférer pour les mettre en place en classe parce qu'en fait le ERMEL si on n'est pas formé ?*

Ce manuel semble ainsi faire partie de l'arrière-plan commun du collectif lié aux expériences individuelles.

Puis, après un temps de recherche individuelle, la chercheuse partage l'article de C. Margolinas (2020) intitulé « Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. » Dans cet article, Margolinas, s'appuie sur l'ingénierie de Brousseau (Brousseauet Brousseau, 1987) sur les rationnels et les décimaux dans la scolarité obligatoire. Elle propose une situation fondamentale mise en scène dans des situations de partage utilisant le guide-âne.

Nous proposons ci-dessous un rapide descriptif des contenus des quatre premières séances proposées dans cet article :

Séance	Contenu
Séance 1 : Installation du milieu 12 en 3	Objectif : Passer d'un partage par tâtonnement à l'utilisation d'un instrument (le guide-âne)
Séance 2 : Situation de communication	Objectif *:* Introduction du nombre-fraction en s'appuyant sur une situation qui ne permet pas d'utiliser les nombres entiers. Réinvestissement de l'usage du guide-âne

	Comprendre qu'il faut deux nombres entiers pour désigner une bande pliée.
Séance 3 : Introduction d'un questionnement "10 en 3"	Objectif : comprendre que "10 en 3" n'est pas un entier mais un nouveau type de nombre défini 10u/3 x3 =10u. (définition d'un rationnel) Institutionnalisation du nombre fraction.
Séance 4 : Entraînement " 10 en 4"	Objectif : Comprendre que partager en 4, c'est partager en 2, deux fois. Ancrer les nombres rationnels dans une situation qui permet une rétroaction du milieu Représentation schématique sur une ligne graduée Mémorisation de la relation fondamentale

Figure 2 : synthèse des quatre premières séances (Margolinas, 2020)

Après un temps court de lecture individuel, PF2 rebondit alors en disant qu'il y a beaucoup de choses dont on a parlé, notamment la question de la manipulation avec le guide-âne. PF1 fait alors référence à sa propre expérience avec l'usage du guide-âne présenté en formation et dans sa classe de CM « ç*a m'a pris une semaine pour en tirer quoi ? Pas grand-chose. Et en fait je pense que les gens ne savent pas l'utiliser, ils ne savent pas comment* ». PF2, professeure du 2nd degré reprend : « *ça me prend un temps fou quand je l'utilise parce qu'en fait comme ils n'ont jamais vu. Et puis ça reste dans les programmes* ».

Les échanges se centrent alors sur la situation : le problème ouvert dans lequel le guide-âne pourrait être utilisé pour travailler les fractions. Puis revient la question du problème ouvert dont les fractions seraient l'objet d'enseignement et d'apprentissage.

On voit ici que l'arrière-plan partagé se stabilise autour des éléments saillants : la manipulation, les problèmes ouverts et l'enseignement des fractions.

Avant la dernière visio du le 1er juillet, les membres du collectif ont pu lire de manière attentive cet article. Dans un premier temps, PF5, professeur du 2nd degré reprend un élément de la définition de la situation fondamentale présente dans l'article

> *« Une situation fondamentale n'est donc pas une « introduction » qui, une fois passée, sera vite mise de côté au profit d'une formalisation et de calculs, c'est au contraire une situation qui engendre les situations d'une séquence qui va rendre possible, la construction des connaissances (Margolinas, 2020, p.11). C'est génial, c'est-à-dire que la situation problème, et ça je ne l'avais pas perçu, elle n'est pas là que pour introduire les fractions. Elle sert tout le temps, cad qu'ils ont toujours leur guide-âne avec eux ».*

Dans cette réunion, on peut voir comment les membres du collectif déterminent collectivement les moyens pour arriver à travailler la question des fractions avec leurs élèves mais aussi avec leurs étudiants pour une meilleure compréhension du concept et le passage ~~à~~ de la fraction-partage à la fraction-quotient.

Se pose alors deux questions :

Comment transposer cette situation en classe, pour le cycle 3 et 4 ?

Comment la proposer en formation pour les étudiants, futurs professeur.e.s des écoles ou professeur.e.s de mathématiques ? Après ce premier travail de définition d'un objet commun, deux groupes se sont formés au sein du collectif, d'une part, un groupe réunissant des professeurs du cycle 3 (CM1 et 6ème) et d'autres part des professeurs du cycle 4 et du lycée. L'objectif a alors été de transposer cette situation dans les classes en fonction des attendus des programmes (les analyses sont en cours). En cette dernière année et à partir des premières mises en œuvre, la réalisation d'un dispositif de formation est entamée et mis en œuvre dans les ISFEC.

Revenons maintenant au point de départ de la présente étude en présentant quelques éléments de réponse à notre question de recherche dans la partie conclusive.

V - CONCLUSION

Reprenons la question de recherche de cette communication : Comment se construit un arrière-plan partagé dans une ingénierie coopérative et comment se spécifie un milieu-problème ?

Dans les collectifs la question de recherche, l'objet de la recherche collective, est définie par les acteurs de terrain, par la recherche ou les institutions (ministère, cadre de l'éducation nationale).

Dans notre recherche, il a été nécessaire de définir conjointement les fins et les moyens et construire un arrière-plan partagé qui s'est spécifié progressivement en déjà-là et un milieu de l'enquête comme le montre la figure ci-dessous (cf. figure 3).

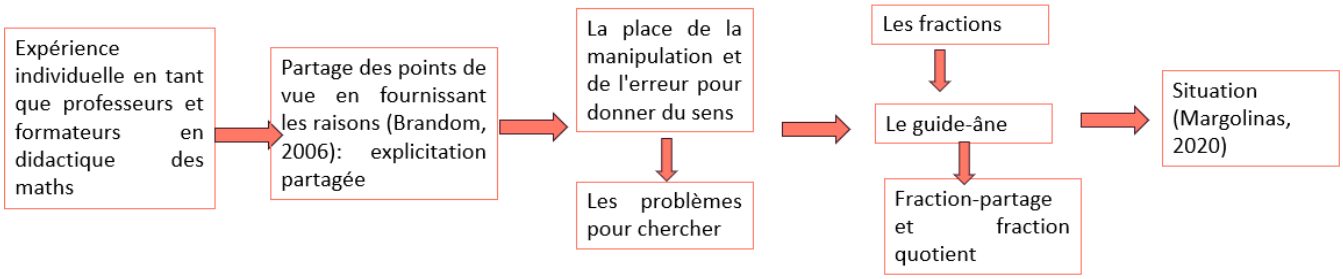


Figure 3 : déroulé de l'enquête collective

À partir de sa propre expérience qu'elle soit vécue dans les classes, dans l'action conjointe avec les élèves, le PF partage son point de vue en fournissant des raisons (Brandom, 2009) qui elles-mêmes autorisent l'enquête collective. Les acteurs s'engagent alors dans un espace de dialogue, dans une recherche de symétrie qui s'exprime par le principe d'explicitation partagée (Sensevy, 2011). Cela n'est possible que si tout le monde s'approprie les questions posées et les réponses élaborées conjointement dans une assomption des différences. Dans un premier temps, la question de la manipulation, de la place de l'erreur sont interrogées. Comment peuvent-elles donner du sens aux apprentissages mathématiques ? Puis l'importance de proposer des problèmes ouverts, des problèmes pour chercher pour travailler la manipulation, la question de l'erreur est mise en évidence. Dans un troisième temps, la question de l'enseignement de la fraction est apparue à partir de problèmes de la pratique : les difficultés des élèves à comprendre ce qu'est une fraction en tant que nombre et l'usage du guide-âne pour aboutir à *in fine* au problème du passage de la fraction-partage à la fraction-quotient. Enfin, le milieu-problème, dans la continuité des éléments saillants précédents, s'est densifié avec la situation proposée par Margolinas, point de départ d'une nouvelle enquête du collectif qui est en cours.

Le dialogue tel qu'il est analysé à partir de concepts définis dans cet article donne à voir l'entrée dans l'ingénierie c'est-à-dire comment s'est construit ce que « l'on veut faire et concevoir ensemble » (CDpE, 2024, p. 65), point de départ de la coopération telle qu'elle est théoriser en TACD. Les fins collectives déterminées librement, grâce à des échanges entre chercheurs et professeurs sur un temps long, amènent, dans un second temps, nous en faisons l'hypothèse, à un engagement conjoint, à la constitution d'un style de pensée partagé (Fleck, 2005).

Pour poursuivre ce travail, une analyse des pratiques des professeurs du collectif viendra compléter cette première étude pour décrire et comprendre les pratiques et les gestes d'enseignement spécifiques et génériques liés à la mise en œuvre de ce dispositif didactique. Une analyse collective à partir de films de classes pourrait donner lieu à une compréhension fine de ce qui se joue dans l'action conjointe entre professeur/élèves et formateur/étudiants et ainsi améliorer cette séquence à partir de l'arrière-plan commun du collectif.

Cependant, les concepts mobilisés ne donnent pas à voir le développement des connaissances professionnelles des acteurs de l'ingénierie. L'approche documentaire du didactique (Gueudet et

Trouche, 2009) pourrait dans un second temps nous permettre d'étudier les interactions entre les étudiants en formation initiale et les ressources mobilisées pour leur enseignement des fractions.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Behr, M., Lesh, R., Post, T. et Silver E. (1983). Rational number concepts. Dans R. Lesh, et M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes, (91-125). Academic Press Inc.

Brandom, R. (2009). *L'articulation des raisons, introduction à l'inférentialisme*. Paris : Cerf.

Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, *IREM de Bordeaux*.

Collectif Didactique pour enseigner (2024). *Un art de faire ensemble, les ingénieries coopératives*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Collectif Didactique pour enseigner (2019). *Didactique pour enseigner*. Rennes : Presses universitaires de Rennes

Charnay, R. (1993). Problème ouvert. Problème pour chercher. *Grand N, 51*, 77-83.

Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D. et Guillaume, J-C. (2005*). Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1 cycle 3*. Paris : Hatier ERMEL.

Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D. et Guillaume, J-C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2 cycle 3*. Paris : Hatier ERMEL

Cobb, P., Confrey, J., Dissessa, A., Lehrer, R. et Schauble, L. (2003). Design experiments in education Research. *Educational Research, 3*2(1), 9-13.

Collins, H. M. (2011). Language and practice. Social Studies of Science, 41(2), 271–300. https://doi.org/10.1177/0306312711399665

Dewey, J. (2008). *The Collected Works of John Dewey*. Vol. 8: The Later Works, 1925–1953 (1933). Carbondale, Southern Illinois University Press.

Dewey, J. (1938/2006). *Logique. La théorie de l'enquête*. Paris : Presses Universitaires de France.

Fleck, L. (2005). *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Les Belles Lettres.

Gueudet, G et Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218.

Joffredo-Le Brun, S. (2020). Co-conception d'un curriculum en mathématiques au CP entre professeurs et chercheurs : une étude exploratoire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *40*(3), 269–318

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G. et Quilio, S. (2018). Cooperative engineering as a joint action. *European Educational Research Journal*, *17*(1), 187-208.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une "clinique" pour le didactique : Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209–250.

Margolinas, C. (2020). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N, 106,* 5-30.

Martinez, S. et Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire : Quelques enseignements tirés de TIMSS 2015. *Éducation & formations, 2017*(94), 23-40.

Sensevy, G. (2021). Des sciences interventionnelles ancrées sur des alliances entre recherche et terrain ? Le cas des ingénieries coopératives. *Raisons éducatives, 25*, 163–194. https://doi.org/10.3917/raised.025.0163

Sensevy, G. (2011). *Le Sens du Savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. De Boeck.*

Sensevy, G. et Le Hénaff, C. (2025). A cultural turn in educational action and research*. Journal of Curriculum Studies, 1-25.* https://doi.org/10.1080/00220272.2025.2476953

Sensevy, G. et Bloor, T. (2019). Cooperative didactic engineering. Dans S. Lerman (dir.), Encyclopedia of Mathematics Education. Springer.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education, 45*(7), 1031- 1043.

Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques*. Paris : Gallimard.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES VERBAUX AU CP : ANALYSE DES GESTES ÉVALUATIFS QUOTIDIENS D'UNE PROFESSEURE DES ÉCOLES

Aline BLANCHOUIN
Maître de conférences en sciences de l'éducation et de la formation, INSPE de Bretagne
CREAD
aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

David BEYLOT
Formateur en mathématiques, INSPÉ de Poitiers
david.beylot@univ-poitiers.fr

Résumé
La thématique du colloque est abordée en proposant quelques résultats d'une recherche exploratoire à propos de l'analyse de l'activité évaluative (Jorro, 2016) en résolution de problèmes d'une enseignante de Cours Préparatoire en Réseau d'Éducation Prioritaire dans le contexte collaboratif d'un institut de recherche en enseignement des mathématiques. La définition des gestes évaluatifs (Blanchouin et al., 2022) enrichie du modèle de Verschaffel et De Corte (2008) revu par Mounier et al. (2024) concernant l'activité et les savoirs en jeu en résolution de problèmes arithmétiques verbaux (RPAV) nous sert de cadre théorico-méthodologique. Nous le présentons en première partie. Puis, nous documentons l'activité évaluative de l'enseignante étudiée à partir de trois critères : son recours à des dispositifs évaluatifs en RPAV intégrés au quotidien ; les objets évalués lors de ces dispositifs ; les gestes évaluatifs déployés en classe. Nous exposons enfin les déterminants de son agir évaluatif en RPAV en classe. La conclusion aborde les retombées de cette étude exploratoire pour le travail des formateurs dans trois directions.

L'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux (RPAV) à l'école est notamment marqué par les résultats aux évaluations nationales où la compétence « résoudre un problème » est et reste la plus faible parmi celles évaluées en mathématiques. Parallèlement, la majorité des enseignants de l'école élémentaire peinent à s'emparer de ces évaluations pour penser leurs pratiques quotidiennes de classe et les ajuster en « envisageant que les critères des évaluations pourraient être pertinents. […] les ressources de remédiation proposées sur le site Eduscol sont, elles, très rarement mentionnées par les équipes pédagogiques » (IGESR, 2023, p. 27).

C'est dans ce contexte qu'au sein d'un groupe de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématique (IREM) Paris-Nord, nous nous intéressons à l'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes (RP) au cycle 2 en lien avec les pratiques évaluatives au quotidien. Le groupe auquel nous appartenons est composé de six autres formateurs-chercheurs (F-Ch) et d'une dizaine de professeurs des écoles (PE). Il fonctionne selon la démarche des recherches collaboratives (Bednarz, 2015). L'objet commun, co-défini en croisant problématiques enseignantes et projet scientifique, est d'aider les élèves à délaisser des postures (Bucheton, 2021) de refus (de non engagement), ludiques (de détournement) et premières (de réussite et non d'apprentissage) au profit de postures créatives et réflexives. Pour ce faire, ce groupe IREM interroge des dispositifs de classe complémentaires à la ressource pédagogique utilisée par toutes les PE. Il s'agit lors d'espace-temps réflexifs de mettre en relation les réussites et difficultés des élèves objectivées, avec la compréhension des choix de conception et d'ajustement en situation des PE. C'est donc l'opportunité au sein d'un groupe mixte – PE et F-Ch – de faire des constats argumentés à propos de l'activité des élèves, d'énoncer des hypothèses de régulation, de se mettre d'accord pour tester des hypothèses afin de les approfondir, les altérer, les abandonner. Pour les PE, l'enjeu est d'avoir le

sentiment d'un gain possible d'efficience de l'action quotidienne. Pour les F-Ch, c'est la possibilité de recueillir des données empiriques pour documenter l'activité évaluative des PE.

Dans cette communication, en lien avec la thématique du colloque, nous souhaitons montrer comment nous renseignons les savoirs professionnels effectivement en jeu lors des interactions évaluatives entre PE et élève(s). Lors de la première partie, nous présentons le cadre conceptuel que nous utilisons, en articulant deux référents : l'un concernant les gestes évaluatifs de l'enseignant (Jorro, 2016 ; Blanchouin et al., 2022) et l'autre les processus engagés par l'élève en RP (Mounier et al., 2024). La formulation de la problématique et le cadre méthodologique composent la deuxième partie. La troisième partie avance les résultats de l'étude de l'enseignante de CP enquêtée. Enfin, en conclusion, nous formulons trois perspectives pour la formation des PE.

I - CADRE CONCEPTUEL

1 Des gestes situés, comme indicateurs de l'activité évaluative

1.1 L'activité évaluative (Jorro, 2016)

Pour Jorro (2016, p.53), l'évaluation en tant qu'activité professionnelle « suppose une réflexion non seulement sur l'initiateur de l'action, ses motivations à agir mais aussi sur le contexte de l'action, le déroulement du processus évaluatif, ses enjeux, ainsi que sur l'interactivité évalué-évaluateur ». Pour penser la formation à l'évaluation, l'auteure dégage quatre *feuilletés* de l'activité évaluative : la culture de l'évaluation, les postures de l'évaluateur, le savoir-évaluer en situation et les gestes évaluatifs qui en sont les indicateurs. Ces dimensions sont interdépendantes, liées par « des relations de congruence, de complémentarité » ou « des dissonances, des ruptures, des incompatibilités » (p. 54-55). En ce sens, « leur intrication constitue le réel de l'activité évaluative ». Les gestes évaluatifs situés représentent la plus petite unité descriptive ; un geste étant défini comme un « mouvement adressé, irrigué par des valeurs, ajusté à la situation et mobilisé au moment opportun » (Jorro, 2016, p. 59). C'est ainsi que le répertoire de gestes évaluatifs déployés au fil du temps d'enseignement-apprentissage en classe caractérise un jeu postural (en tant qu'évaluateur), entre contrôle (mesure des écarts, identification de conformité), conseil (pointage de réussite et enjeux d'amélioration) et herméneutique (recherche de compréhension, de co-construction). Ce jeu postural actualise dans l'action des connaissances professionnelles sur l'évaluation (Magnusson et al., 1999) de différentes natures : théoriques (à propos des différentes démarches et fonctions de l'évaluation), éthiques, méthodologiques et didactiques (conception d'un dispositif de classe ; choix d'une tâche permettant d'évaluer ce qui est visé ; définition de ce qui est à évaluer ; processus de référentialisation (Figari, 1994)). Du point de vue compréhensif, les gestes évaluatifs sont donc irrigués par la relation (conflictuelle ou convergente) entre d'une part des expériences évaluatives personnelles (scolaire, universitaire, familiale, sociale) concernant les mathématiques et les autres disciplines à enseigner et d'autre part, le rapport aux prescriptions et ressources sur l'évaluation de la sphère de la formation mais également aux normes, valeurs et pratiques évaluatives du métier. Précisons à propos de la culture personnelle, qu'elle « permet de comprendre les imaginaires [de contrôle, de maîtrise, de construction, de compréhension] qui irriguent l'évaluation, de mettre en regard deux grandes modalités de l'évaluation [formative, certificative-de mesure des résultats], et enfin de questionner la tentation du jugement [sur la personne] à laquelle cèdent parfois les acteurs » (Jorro, 2016, p. 55). Ajoutons que la culture évaluative en France est marquée par des encouragements de l'institution à pratiquer une évaluation soutien aux apprentissages encouragées par l'institution de façon récurrente depuis plus de dix ans et de plus en plus outillées[1] mais qui peinent à exister dans les faits (IGESR, 2023). Ainsi, la définition du sens de l'action évaluative en classe et les façons d'arbitrer les conflits de normes

[1] Par exemple, la page Eduscol « Évaluations des acquis et besoins des élèves au CE1 » : https://eduscol.education.fr/2298/evaluations-des-acquis-et-besoins-des-eleves-au-ce1 (consulté le 25/11/2025).

d'efficacité de l'action rapportées aux coûts cognitifs, temporels, matériels, émotionnels, relationnels permettent de dessiner les contours de l'agir évaluatif.

La figure 1 propose sous forme synthétique le modèle d'intelligibilité que nous venons d'évoquer.



Figure 1. Modèle de l'intelligibilité de l'agir évaluatif de l'enseignant

1.2 Définition et repérage des gestes évaluatifs en classe

Pour définir les gestes évaluatifs, dans une perspective pragmatique de description, nous avons articulé la définition de Jorro (2016) précédente et les composantes du processus évaluatif synthétisées par Mottier-Lopez (2015, p. 43) : « l'objet à évaluer et ses dimensions à analyser ; les attentes vis-à-vis de cet objet [...] ; le recueil d'un ensemble d'informations en rapport avec l'objet […] ; l'interprétation des informations recueillies [...] ; la formulation d'une appréciation qui doit pouvoir être communiquée et fonder des prises de décision ». Nous entendons donc par geste évaluatif déployé en classe, la combinaison d'un geste de recueil d'informations et d'un geste de rétroaction portant sur les connaissances d'un, de certains ou de tous les élèves en lien avec un objet évalué, et ceci relativement aux attentes de l'enseignant (Blanchouin et al., 2022). Le geste de rétroaction renseigne le niveau sur lequel porte le feedback : la tâche, le traitement de la tâche, l'autorégulation ou encore la personne (Hattie & Timperley, 2007). Pour décrire le couple de geste (de recueil d'informations-de rétroaction), nous avons conçu un outil méthodologique sous la forme d'un arbre à choix pour chacun des gestes à partir de trois critères : à qui il s'adresse (directement ou indirectement) ; la forme du message (comment ?) ; le contenu du message (à propos de quoi ?). Ces arbres figurent en annexe 1. L'identification de l'objet à évaluer pose la question du référentiel (les programmes, les savoirs savants, le résultat de choix de transposition didactique d'une ressource, les connaissances didactiques des PE, …). Dans la sous-partie suivante, nous exposons le référentiel retenu par les F-Ch concernant la RPAV, notamment notre relecture de Verschaffel et Corte (2008), partagée au sein du groupe IREM.

2 Un modèle de l'activité cognitive de l'élève en RP

2.1 À propos de la RP et de la RPAV

Le développement des habiletés en RPAV est un objectif majeur de l'enseignement des mathématiques dès le début de la scolarité selon les programmes de l'école maternelle et du cycle 2. Elles sont testées dans les évaluations nationales dès le début du CP (MENESR, 2025). Pour autant, les résultats des élèves obtenus à ces évaluations peuvent être jugés peu satisfaisants. Par exemple, moins de la moitié des élèves de CE1 atteignent un niveau dit « satisfaisant » et les performances ne progressent pas de manière significative d'une année à l'autre. Par ailleurs, dans la littérature scientifique, l'activité de RP est

communément décrite comme un processus complexe de modélisation mathématique (Fagnant, 2018), qui engage simultanément des ressources nombreuses et variées : connaissances mathématiques, savoirs sur le monde, habiletés métacognitives. En RPAV, l'énoncé est donné par un texte ; ce qui inclut sa compréhension. Or ce texte relève d'un genre particulier, distinct du texte narratif, plus proche du texte informatif moins travaillé en début de scolarité (Voyer et al., 2012). De plus, il contient une question qui est à interpréter comme une partie du texte (et non une consigne pour s'engager dans la lecture d'un texte). Tout cela contribue à la complexité de la tâche RPAV pour des élèves en début de scolarité élémentaire dont les compétences langagières, la maîtrise des représentations graphiques à partir de manipulations, et le contrôle métacognitif sont au début de leur maîtrise, ancré dans leur vécu en maternelle à partir d'une offre spécifique de curriculum réel concernant le domaine.

2.2 Le choix d'un référentiel : le modèle de Verschaffel et de Corte (2008)

Le modèle de Verschaffel et De Corte (2008) permet de distinguer des démarches qualifiées d'*expertes* d'autres qualifiées de *superficielles* (Fagnant, 2018). Les démarches expertes supposent en particulier la construction d'un modèle de situation à partir de phénomène sous étude, soit l'énoncé textuel du problème en RPAV. À l'inverse, les démarches superficielles consistent à appliquer un modèle mathématique sans procéder à une analyse approfondie du phénomène sous étude ; ce qui compromet la pertinence de la solution et la possibilité de contrôler sa vraisemblance. Mounier et al. (2024) ont ainsi formalisé (figure 2) une grille de lecture de l'activité de l'élève en début de scolarité. Ils distinguent trois sous-processus imbriqués, ne se succédant pas nécessairement dans le temps, et d'autre part, la présence possible de contrôles à différents moments et en lien avec un ou plusieurs sous-processus.

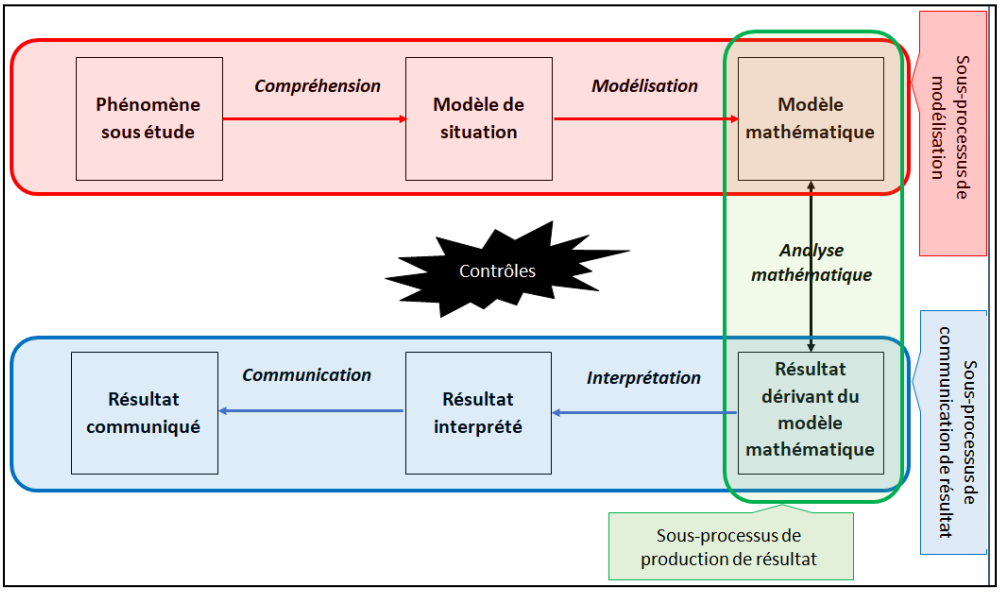


Figure 2. Modèle de Verschaffel et De Corte (2008) revu par Mounier et al. (2024)

Le sous-processus de modélisation (en rouge dans la figure 2), via une certaine compréhension de la situation et une mise en relation des données numériques du problème, connues ou inconnues, conduit à la mobilisation d'un « modèle mathématique » non nécessairement explicite. Le sous-processus de production de résultat (en vert dans la figure 2) consiste à produire un résultat numérique par l'utilisation d'une procédure de calcul ou de comptage (Chenevotot et al., 2023). Enfin, le sous-processus de communication de résultat (en bleu dans la figure 2) consiste à interpréter le(s) résultat(s) numérique(s) obtenu(s) et communiquer une réponse.

PE et F-Ch du groupe IREM partagent cette grille pour ensemble repérer et analyser les démarches superficielles d'élèves en début de scolarité, avec la visée de concevoir des régulations en termes de contenus, tâches et gestes.

II - PROBLÉMATIQUE ET CADRE MÉTHOLOGIQUE

1 Formulation de notre question

Le processus de RP nécessite la mobilisation de multiples connaissances. Ce qui rend la tâche particulièrement complexe pour les élèves de début de l'école élémentaire (6-8 ans), entrant simultanément dans des apprentissages fondamentaux en français (lecture, compréhension de texte, écriture) et en mathématiques (construction de la numération décimale, calcul mental, le sens des opérations, l'écriture arithmétique…). De même, pour ces jeunes élèves, verbaliser après l'action (décrire, expliquer, justifier) dans la perspective d'apprécier le travail réalisé par rapport à l'attendu, ou engager de nouveaux moyens de recherche sont deux tâches exigeant une réflexivité peu présente spontanément et périlleuse à étayer. On perçoit dès lors la complexité du travail de l'enseignant pour interpréter les productions orales, écrites ou matérielles des élèves afin de soutenir leurs apprentissages. Car, évaluer les différentes connaissances disponibles et mobilisables de chacun des élèves pour, d'une part, faire des choix éclairés de conception et de régulation des contenus d'enseignement et, d'autre part, ajuster en classe ses gestes et postures à ceux des élèves, nécessite un recueil régulier d'informations avec une participation effective de l'élève (en prenant du temps pour l'observer avant de dialoguer, en lui offrant des repères pour qu'il revienne sur ses actions, sa démarche, son résultat,…). Les résultats de nos différentes études à propos des gestes évaluatifs de PE en classes de CP et de CE1 (Blanchouin et al., 2022) pointent la difficulté à le faire malgré le discours volontaire de l'institution et les ressources qu'elle produit à cette fin, et ainsi à faire marcher l'évaluation sur ses deux pieds, certificatif et formatif (Mottier-Lopez, 2015). Pour continuer à documenter cette difficulté des PE et interroger les réponses trouvées au sein du groupe IREM, nous nous demandons dans quelle mesure le modèle de Verschaffel et De Corte (2008) revu par Mounier et al. (2024) en tant que référentiel des savoirs en jeu en RP peut nous aider à l'analyse des gestes évaluatifs dans des contextes ordinaires de classe. Dans une double visée technologique et épistémique, quelle mobilisation d'un tel référentiel pour caractériser les objets évalués par l'enseignant en lien avec ses connaissances professionnelles sur l'évaluation et en RP, et pour interpréter ses gestes évaluatifs en lien avec ses motifs d'agir(s) évaluatif(s) en RP ? Avec quelles retombées pour la formation ?

Dans cette contribution, nous répondons de façon exploratoire à ces questions.

Pour ce faire, nous avons opté pour une étude de cas en enquêtant à propos de l'activité évaluative d'une des PE du groupe IREM exerçant au CP. En 2022, lorsqu'Élise rejoint le groupe et l'école dont les PE du groupe font alors toutes partie, elle n'est pas familière de l'enseignement de la RP et elle découvre la ressource pédagogique choisie par les PE de cycle 2 de l'école[2].

2 Démarche méthodologique

L'approche *ergonomique et didactique* nous amène classiquement à mettre en regard des traces de chacune des trois activités professionnelles de l'enseignant (planification, mise en œuvre en classe, bilan). Pour récolter de telles traces, nous prenons en compte trois dimensions du contexte collaboratif : une dé-synchronie des agendas quotidiens des PE et des F-Ch ; l'utilisation d'une même ressource pédagogique par les PE pour enseigner la RP ; peu voire pas d'écrits préparatoires produits par les PE. Le recueil de ce qui se passe en classe complété par le point de vue des acteurs est multi modal (audios, vidéos de la classe ou d'entretiens avant ou après la classe), effectué régulièrement au cours d'au moins une année scolaire, et concernant les PE mais aussi leurs élèves. Quant au traitement, il procède d'une démarche de triangulation (Grostephan, 2019) à propos des sources (différentes prises de données) et des méthodes : observations in situ ou à partir de film ; techniques d'entretiens plurielles dont l'auto confrontation (Clot

[2] Cette ressource (manuel, guide pédagogique, matériel pédagogique) est Haut les maths CP, CE1 et CE2, éditions Retz, 2021. Elle propose une séquence de RPAV par période programmée sur les quatre jours d'une semaine. Pour les problèmes additifs, des schémas différents sont proposés pour chaque structure (composition, transformation et comparaison) étudiée.

& Faïta, 2001) et la pensée à voix haute (Charters, 2005). L'enjeu est d'une part de caractériser le dispositif d'enseignement-apprentissage effectivement proposé aux élèves (but de la tâche, énoncé de problème, support, conditions matérielles, temporelles, spatiales, humaines) et d'autre part d'étudier la co-activité entre PE et élève(s) à partir des objets évalués ou non par le PE et de ses gestes évaluatifs. Pour ceci, nous procédons tout d'abord à une mise en récit du déroulé de séance (bornage et titrage d'étapes puis d'unités et sous unités temporelles à partir des objets au cœur de l'interaction) puis au codage en gestes évaluatifs à l'aide des arbres de choix (annexe 1) du contenu d'unités temporelles sélectionnées en fonction de différentes finalités (de formation ; d'écriture d'un article de recherche).

3 Le corpus de matériau empirique et son exploitation

Nous avons retenu deux séances de classe (juin 2023 et mars 2025) situées différemment dans l'année par rapport au remplissage des bulletins, et espacées dans le temps de la recherche collaborative. Un problème de composition de mesures (Vergnaud, 1991) est à chaque fois proposé dans une organisation de classe différente et lors d'une tâche différente, comme on peut le voir dans le tableau 1 ci-dessous.

	Séance 1 : DÉ-j23	Séance 2 : DÉ-m25
Énoncé de problème écrit donné aux élèves	Je suis allé au marché. J'ai acheté des saucisses et des merguez. J'ai acheté 12 saucisses et 9 merguez. Combien de produits ai-je achetés ?	Marcel achète 19 livres de Sami et des livres de poésie. En tout, il a 25 livres. Combien de livres de poésies a-t-il achetés ?  19 ? 25
Organisation de la classe et tâche principale	Résolution d'un problème par un élève ciblé lors d'une séance alors que les 23 autres élèves s'entraînent sur le fichier, supervisés par le second PE.	-Situation dite « des 3 essais »[3] : trois temps successifs de résolution d'un même problème, pour tous les élèves, suivis d'une mise en commun. Lors du 1er essai, les élèves se lancent avec leurs connaissances disponibles à partir de la lecture orale de l'énoncé par le PE. Lors des essais suivants, les élèves poursuivent ou reviennent sur leurs recherches en bénéficiant d'aides lors de nouvelles présentations du même problème (par exemple une théâtralisation avec les objets réels) et lors du temps de résolution (par exemple en proposant un certain matériel). -Échanges avec des élèves ciblés s'étant regroupés sur un îlot de fond de classe (dit « table d'appui »). -Mise en commun en sollicitant ces élèves.

Tableau 1. Les deux dispositifs évaluatifs, lors de séances de juin 2023 (DÉ-j23) et mars 2025 (DÉ-m25)

Concernant le matériau relatif aux deux séances, il est constitué du film de classe pour chacune et de traces (écrites ou enregistrées en audio) du discours d'Élise de natures différentes. Pour DÉ-j23, il s'agit des informations écrites après coup à propos de la conception de la séance et d'une auto confrontation à partir de la transcription du moment évaluatif autour du premier problème. Pour DÉ-m25, il s'agit d'une oralisation de la préparation à partir d'un entretien de type pensée à voix haute et d'échanges après coup avec d'autres PE et un F-Ch à propos des expérimentations faites dans les différentes classes. À ce matériau, s'ajoutent deux sources d'informations concernant la pratique d'Élise : ce qu'elle a expliqué à propos de ses gestes évaluatifs entre novembre 2022 et mars 2023 (Blanchouin et al., 2023) et la rédaction d'un écrit réflexif à propos de son enseignement en RPAV et des situations de type « 3 essais », préparatoire à la dernière réunion collective du groupe IREM en mai 2025.

La mise en relation de l'ensemble de ce matériau a été réalisée pour construire :

[3] Cette situation a été imaginée par le groupe IREM en 2022, sans Élise. Elle l'expérimente pour la faire évoluer en 2024-2025 au sein d'un sous-groupe constitué de quatre PE et d'un F-Ch, avec la visée d'une communication dans une revue d'interface.

- Les synopsis de séances (annexe 2) et le codage des gestes évaluatifs lors d'unités temporelles ciblées. Nous avons croisé ainsi les observations à partir des films et l'auto confrontation (concernant DÉ-j23) ou de l'oralisation de la préparation de la séance (concernant DÉ-m25).

- Une analyse de contenu de ce qu'Élise dit de sa pratique pour repérer les éléments au fondement de l'agir évaluatif et de l'enseignement-apprentissage de la RPAV : quelles préoccupations avant la classe, quels dilemmes vécus dans l'action, quels constats à propos de l'activité des élèves.

III - RÉPONSE CONCERNANT L'ACTIVITÉ ÉVALUATIVE D'ÉLISE

Nous commençons par présenter des résultats à propos du choix des deux dispositifs évaluatifs. Puis nous documentons les objets évalués et les gestes évaluatifs d'Élise en classe lors de DÉ-j23. Enfin, nous caractérisons son agir évaluatif en classe, en utilisant des données construites lors des deux dispositifs.

1 Des dispositifs évaluatifs RPAV intégrés au quotidien de la classe

1.1 Une évaluation soutien aux apprentissages

Premièrement, pour les deux dispositifs, Élise pense et conduit un temps de classe pour observer et interagir avec un ou des élèves qu'elle cible, afin d'apprécier leurs connaissances du moment et de comprendre les obstacles qu'ils rencontrent. Il s'agit pour elle d'être dans « de bonnes conditions » et « d'avoir du temps » et « d'adapter le rythme de ses actions à l'élève » (Blanchouin et al., 2023). Ainsi concernant DÉ-j23, tandis que les 23 autres élèves résolvent à leur rythme des problèmes du fichier sous la supervision du second enseignant, Élise envisage pour un élève (C°) une modalité individuelle de passation d'une série de quatre problèmes portant sur un contexte d'achats au marché. Elle débute par un problème de composition avec recherche du tout, classe de problèmes la plus travaillée avec celle des problèmes de transformation avec recherche de l'état final. Ce qui peut participer a priori à mettre en confiance l'élève d'autant plus que les nombres ne sont pas grands (12 et 9). De plus, elle adapte l'énoncé pour lui en choisissant l'achat de merguez et de saucisses pensant que cela pourrait résonner avec une situation vécue. Élise n'a pas prévu de durée pour la passation de chaque problème et décide en classe avec l'accord de C° après la vingtaine de minutes autour de ce premier problème, d'enchaîner avec un deuxième problème multiplicatif et de reporter au lendemain la passation des deux autres (recherche de l'état final et recherche d'une partie). Son objectif est de recueillir des traces du processus de RP de C° afin d'apprécier ses progrès, et des informations pour compléter le livret du second semestre. Plus précisément, elle veut apprécier dans quelles mesures il sait utiliser du matériel. Ainsi commentant le début du dialogue, elle dit : « je signale le matériel pour qu'il sache qu'il est là et moi je veux voir s'il va aller le chercher seul car j'ai beaucoup utilisé de "procéduralisation" pour l'aider à entrer dans les problèmes (notamment ceux de réunions avec des barquettes et toute une gestuelle et un peu les transformations » (auto confrontation). On perçoit ainsi toute l'importance qu'accorde Élise à mesurer les effets de son action d'accompagnement individualisé depuis janvier. Et plus largement, à sa définition du travail bien fait qui est de faire réussir avant tout les élèves les plus éloignés des codes et des pratiques scolaires ou n'ayant pas un milieu familial dans lequel la langue française est première. Concernant DÉ-m25, on retrouve ce même motif d'action alors même que le dispositif évaluatif diffère (la situation des 3 essais). Dans ce contexte, Élise conduit des dialogues évaluatifs discontinus avec des élèves ciblés lors de leur recherche, qu'elle prolonge de façon explicite (en interpellant nominativement l'élève) lors de la mise en commun. Elle s'appuie alors sur deux élèves capables de montrer leurs façons d'agir sur la bande numérique en les commentant (annexe 3). De cette façon, Élise boucle ses échanges avec les élèves ciblés avant la séance qui composaient la table de la réussite en fond de classe à laquelle elle s'est assise (sous-groupe de 4 élèves qu'elle voulait superviser dont celui accompagné habituellement par une AESH).

Deuxièmement, Élise cherche à instaurer un rapport de communication basé sur la contractualisation et la prise d'initiative de l'élève. Ce qui se traduit par le fait de « formuler clairement l'enjeu global » dès le

départ. Par exemple lors de DÉ-j23, Élise commence par dire : « bonjour C°, je vais te faire faire des petits problèmes. Je vais regarder où tu en es dans la résolution de problèmes ». Cette préoccupation s'exprime ensuite par le fait de laisser l'élève prendre « un chemin de résolution » en mettant à sa disposition un matériel varié (bande numérique, cubes, calculatrices, …) pour lui permettre de choisir. Élise recherche ainsi une accroche (une trace de recherche) pour conduire le dialogue évaluatif en mobilisant dès qu'elle le peut la technique *Valoriser-Interpréter-Poser l'écart (VIP)* développée par Brigaudiot (2022). Plus particulièrement, elle conduit des observations et des régulations régulières concernant la manipulation de la bande numérique avec des cubes (Cf Annexes 2 : étape 3-unités 2 et 3 de DÉ-j23 ; étape 2 de recherche. Cf Annexe 3 : mise en commun de DÉ-m25) par l'élève. Enfin, elle clôture formellement le moment de travail et contractualise la suite. Ainsi lors de DÉ-j23, elle demande à C° son adhésion pour le lancer sur un deuxième problème ; pour DÉ-m25, elle demande à un élève de la table de la réussite son accord pour utiliser sa production lors de la mise en commun.

Troisièmement, Élise laisse dès que possible des traces sur les supports des élèves, que ce soient ceux avec qui elle « s'est posée » ou ceux avec qui elle a pu avoir un échange furtif avant la mise en commun (pour le DÉ-m25). Cette préoccupation à garder en mémoire les conditions dans lesquelles les élèves ont produit une trace de recherche ou de réponse peut se doubler de la photographie des manipulations faites avec le matériel. L'ensemble lui permet ainsi de poursuivre son dessein évaluatif relatif à une meilleure compréhension de l'activité des élèves. Si Élise se sert de ces traces au sein du groupe IREM pour évoquer les difficultés persistantes et les apprentissages de ses élèves, elle ne les exploite pas après coup avec l'élève pour lui signaler un progrès, ou encore définir avec lui un horizon d'apprentissage.

Pour conclure, Élise conçoit donc une diversification de dispositifs évaluatifs intégrés au quotidien de la classe selon un imaginaire évaluatif tourné vers la construction et la compréhension et un idéal d'accompagnement des élèves repérés en grande difficulté scolaire. Les postures évaluatives en classe qu'elle souhaite adopter sont davantage herméneutique et de conseil, et moins de contrôle.

1.2 Choix des énoncés de problème

Lors de la conception des deux dispositifs évaluatifs, Élise réfléchit tout d'abord aux énoncés de problèmes additifs en raisonnant à partir de la typologie de Vergnaud (1991) qu'elle s'est appropriée au fil de l'utilisation du manuel, depuis 2022 ; la progressivité des séquences étant conçue à partir des différentes classes de problèmes. Ainsi, pour DÉ-j23, les quatre énoncés balayent les principales classes de problèmes travaillées lors de l'année scolaire ; pour DÉ-m25, le problème de recherche d'une des parties du tout est choisi pour la *résistance* aux apprentissages du moment qu'il propose. En lien avec les échanges au sein du groupe IREM, pour DÉ-m25 elle choisit d'utiliser la locution adverbiale « en tout », et de recourir à un mot étiquette (livre) repérable pour désigner les deux collections à mettre en relation. Ce qui n'était pas le cas pour le problème de DÉ-j23 (produits). Élise, en 2025, en plus du recours ou non à du lexique inducteur, fait attention à trois autres critères :

- Les nombres en jeu. Élise privilégie les petits nombres qui rendent efficaces des stratégies informelles (Fagnant, 2018) qu'elle vise plus particulièrement, contrairement au calcul.

- La familiarité des élèves avec le contexte du problème et le lexique utilisé. Pour s'ajuster à C°, lors de DÉ-j23, Élise modifie les *produits achetés* (merguez et saucisses) davantage que le contexte (faire le *marché*). Pour DÉ-m25, elle joue à présent sur les deux aspects : un univers de référence connu de tous les élèves (vie de la classe) et deux collections de livres (de Samy ; de poésie) que connaissent les élèves.

- La présentation de l'énoncé. Élise a élargi son questionnement en 2025, en faisant des choix à propos : de sa façon de lire à voix haute le texte (lecture lente, réglée sur les coupes de souffle), de l'organisation du texte écrit (changement de ligne à chaque phrase, mise en évidence de la question), ou encore du recours à un visuel l'accompagnant, en lien avec celle que propose le manuel.

Élise mobilise donc des connaissances disciplinaires et didactiques qui se reconfigurent au fil du temps pour choisir une classe de problème et rédiger un énoncé en fonction des enjeux évaluatifs qu'elle a et en fonction du moment : plus ou moins proche du renseignement des livrets ; en rapport avec la réalisation des séquences du manuel et des obstacles repérés des élèves.

2 Étude des objets évalués et des gestes évaluatifs : illustration à partir de DÉ-j23

2.1 Les objets évalués par Élise

Les trois résultats suivants s'appuient sur l'annexe 4.

Premièrement, les objets d'enseignement-apprentissage que nous référons aux trois sous-processus de RP sont principalement des objets évalués. Deuxièmement, les objets évalués par Élise peuvent être référés à ces trois sous-processus, et plus particulièrement au sous-processus de modélisation, mais aussi à des contrôles de différents types (Étape 3, U1-U3-U4). Troisièmement, la présence d'objets d'enseignement évalués (et de gestes évaluatifs) est moindre en deuxième partie de dialogue (à partir de la sixième minute). À partir de l'étape 3 (U3), Élise s'écarte de son projet initial en endossant une posture d'enseignement (Bucheton, 2021) à propos de la décomposition des nombres à partir des dizaines (U3), de l'écriture et du sens de l'opération (U3), de la qualification du résultat numérique pour produire une phrase réponse (U6). Elle sort de sa posture évaluative de façon cohérente avec un *imaginaire évaluatif* d'évaluation constructive pour les apprentissages de l'élève. Elle agit alors avec des gestes de monstration sur le matériel (cubes, calculatrice) accompagnés oralement d'une référence sélective à l'énoncé du problème, afin de signaler les données pertinentes à mettre en relation. Ses gestes de rétroactions cherchent à s'ajuster à ce qu'elle perçoit de l'activité de C° à partir : d'une réponse erronée (U3, U4), d'une trace produite de recherche (U4-U5), d'absence d'actions manifestes d'un engagement cognitif (U6). Elle précise après coup (auto confrontation) que ces gestes servent le maintien de l'attention de C° jusqu'à l'écriture du résultat numérique qualifié pour répondre au problème.

Ces trois constats invitent à étudier plus particulièrement au grain des gestes évaluatifs, ce qui se passe entre elle et C° autour du sous-processus de modélisation en première partie de dialogue.

2.2 Caractérisation des gestes évaluatifs concernant le sous-processus de modélisation : illustration à propos des 8 premières minutes

Étude des trois premières minutes (Étapes 1 et 2 et le tout début de l'étape 3)

Lors de l'ouverture du moment de travail (Étape 1 : explicite le contrat de travail, signale le matériel à disposition), de la présentation du problème (Étape 2) et lors du début du dialogue évaluatif (Étape 3, U1), Élise évalue l'engagement de C° dans une activité mathématique de recherche d'une solution au problème. Elle ne procède pas à une seconde lecture pour respecter le choix de C°, alors même qu'elle l'a identifié comme « petit lecteur », pour prendre des informations (tableau 2).

En CLASSE : Étape 2-Présentation du problème -Élise lit -Élise propose de relire -C° répond « non »	**AUTO CONFRONTATION** *« Lui laisser des initiatives et lui donner plus de présence ; m'effacer ; l'aider à prendre le lead ;1er élément de retour pour moi : il pense avoir compris puisqu'il ne souhaite pas que je relise »* *« J'esquive la question [du matériel] parce que comme il a tendance à partir bille en tête sans prendre le temps de ce qu'on lui a raconté j'essaie aussi de savoir si « à son sens à lui » il a compris ou « si à son sens à lui » il a besoin que je relise pour reprendre encore des éléments*

Tableau 2. Actions d'Élise en classe éclairées par l'auto confrontation

À cet instant son observation est dirigée dans trois directions : C° recherche-t-il des indices dans le texte ? Quel matériel choisit C° et comment agit-il dessus ? C° peut-il produire une trace de recherche sur le cahier avant d'agir sur le matériel ? Élise semble penser que C° pourrait s'engager dans la recherche.

Étude de l'étape 3-Unité 1 lors de la production par C° d'un résultat invraisemblable (3)

Après la première lecture, au bout de 25 secondes, Élise constate que C° n'a laissé aucune trace de recherche. Elle décide de relire l'énoncé sans en relire le début (« je suis allé au marché. J'ai acheté des

saucisses et des merguez ») et en transformant le pronom personnel de la question, pour impliquer C° à se projeter dans la situation (« Combien de produits as-*tu* achetés ? »). En réalisant cette rétroaction, Élise met fin à son temps d'observation et par là-même réduit le temps de recherche de C°. Après cette lecture partielle, Élise laisse de nouveau l'initiative à C° sans introduire d'aide, ce qu'elle argumente par sa connaissance des ressources conatives de C° et par le contexte évaluatif de fin d'année de CP (Annexe 5). Ainsi elle ne rétroagit pas par exemple en proposant à C° un ou plusieurs schémas de référence du manuel. Elle dit faire attention à déjouer des stratégies superficielles consistant pour l'élève à associer une certaine démarche à un certain schéma. Elle veut évaluer si C° est capable de s'engager de façon plus ou moins abstraite (actions sur du matériel choisi, utilisation d'un dessin, d'un schéma, d'une opération) dans la résolution. À cet instant, Élise ne souhaite donc pas guider C° vers une démarche de résolution particulière, même si implicitement elle l'a invité en posant un crayon dans son cahier ouvert, à y laisser une trace (donc à ne pas agir sur du matériel) alors qu'il s'était saisi d'un feutre Velléda (pour agir sur la bande numérique plastifiée).

Étude de l'étape 3-Unité 1 (Fin) lors de l'invalidation du résultat produit par C° (3)

Élise rétroagit en relisant et pointant le texte écrit « j'ai acheté 12 saucisses et 9 mergez ». Elle laisse quelques secondes de réflexion à C°, qui ne dit et ne fait rien. Puis, elle l'interroge explicitement sur la correspondance entre ses actions sur la petite bande numérique (« ce que tu as fait ») et la partie du texte qu'elle vient de relire, et qu'elle relit de nouveau. Ce faisant, elle invalide indirectement mais non explicitement le résultat « 3 ». Dans son tapuscrit, elle indique qu'elle veut « redonner les données essentielles pour voir [si C°] peut s'autocorriger, […] s'il arrive à dépasser les quantités données ». Puis C° répond « je pense que non ». Élise apprécie cette réponse comme une information suffisante, alors qu'il pourrait s'agir d'un effet de contrat : C° pourrait se dire que si l'enseignante le réinterroge en lui répétant deux fois les deux données numériques, c'est que ce ne doit pas être « bon ». Élise ne lui demande pas de justification, ni de qualifier le résultat trouvé. Elle semble penser que ce retour partiel à l'énoncé a permis à C° de réaliser que sa réponse n'était pas possible en accédant au sens du problème. Or, ces relectures ne permettent une focalisation que sur une partie de la situation seulement. Ce qui invisibilise les relations de type « parties-tout » qu'entretiennent les quantités en jeu et ne permet pas, entre autres, de montrer l'incohérence de la réponse « 3 » proposée par C°. D'ailleurs, suite à la réponse de C°, Élise lui propose de s'exprimer mais il reste muet 6 secondes. Élise lui signale qu'elle attend de lui qu'il s'engage dans une nouvelle démarche (« Comment tu pourrais faire ? »).

Étude de l'étape 3-Unité 2, production d'un 2e résultat (20) et demande de justification

Élise guide C° de manière plus forte pour qu'il produise un nouveau résultat en utilisant une démarche qu'elle attend pour cette classe de problèmes, et pour qu'il explicite et justifie cette démarche en lien avec le problème. Elle commence par lui demander si « c'est un problème de trousses, de vélos ou d'œufs ». Elle nomme alors les problèmes de référence introduits par la ressource pédagogique (Haut les maths CP) pour désigner les problèmes de composition, de transformation et de groupement. C° répond ce qu'attend Élise (« trousses »). Élise ne donne pas de justification et n'en demande pas non plus : la structure sous-jacente commune avec le problème de référence n'est donc pas mise en évidence. Tout se passe comme si Élise pensait que C° avait effectivement bien compris le problème et pouvait l'identifier comme appartenant à la classe de problèmes symbolisée par un mot (« trousses »). On peut remarquer également que la stratégie de recherche « se demander si le problème correspond à un problème de référence déjà institutionnalisé » est implicite. Élise demande ensuite à C° comment on résout les problèmes de trousses. C° répond par un artefact (« avec des cubes », cubes qui sont à sa disposition depuis le début) et manifeste son besoin de changer de bande numérique (« il faut une plus grande », soit une bande numérique qui a des cases permettant de poser un cube dessus). Élise va chercher cette bande. C° agit sur le matériel en lien avec le travail de « procéduralisation » entrepris par Élise avec lui au cours de l'année (figure 3). On peut penser qu'il utilise une procédure de surcomptage sans lien avec la structure

du problème, mais parce que la démarche précédente a été remise en question ou parce qu'il associe les *problèmes de trousses* à cette démarche (stratégie superficielle).

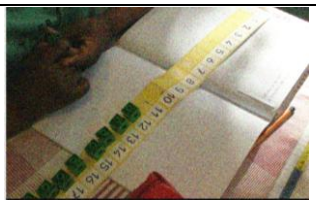
C° se sert de la « grande » bande numérique qui va jusqu'à 20. Il pose un cube vert sur le 12 puis pose d'autres cubes verts (9 en tout) jusqu'au 20. Il recompte alors les 9 cubes verts avant d'annoncer ce qu'il appelle « *la réponse* » (20). C° utilise une procédure de surcomptage (avec aide du matériel).	

Figure 3. Extrait de données à propos des actions de C°

Élise n'interpelle pas C° à propos du résultat erroné mais le questionne successivement à propos du lien entre sa démarche et le sens du problème : « tu m'expliques ce que tu viens de faire ? », « tu as compté mais dans le texte, ça correspond à quoi, tes cubes ? », « et alors c'est quoi ces cubes ? », « comment t'as su qu'il fallait mettre tout ça de cubes ? » alors comment tu as su qu'il fallait 9 cubes ? ». Elle explique d'ailleurs « je suis tendue, mon objectif c'est de trouver des relances les plus neutres possibles pour ne pas influencer. C° a tendance à répondre ce qu'il pense qu'on veut qu'il réponde. Du coup, j'ai des questions très ouvertes, j'évite les mots comme compte, calcul… qui renvoient aux procédures, donc je dis « tout ça de cubes » ; quantité ». Pour autant, par la suite, elle utilise des questions très guidées (« je crois que tes cubes, c'est des merguez, c'est ça ? » ; « alors si on mettait les saucisses ? » ; « attends je vais chercher d'autres couleurs de cubes pour tes saucisses ») et prend ainsi en charge la modification de l'environnement matériel (mise à disposition d'une autre couleur, bleue) et une partie de l'activité de représentation matérielle de la situation.

Étude de l'étape 3 : l'unité 3-Invalidation du résultat (20) et production de la réponse attendue (21)

Élise pose de façon rhétorique la question « *est-ce que je te relis l'énoncé ?* » avant de le relire immédiatement et toujours partiellement. L'attente implicite est que C° complète avec une collection de cubes d'une autre couleur la représentation matérielle pour qu'elle soit plus congruente au problème. C° prend des cubes bleus, compte les cases de la case 11 à la case 0, et place des cubes bleus sur ces cases dans le même ordre que son comptage. Élise invalide l'usage de la case « 0 » pour placer un cube et s'attèle alors à invalider le résultat obtenu (20) en lien avec le positionnement de la collection bleue puis verte. À cet instant, Élise procède avec des gestes de monstration : elle déplace les cubes devant C° en désignant chaque collection par leur signifiant (« parce que à 12… c'est les 12 mergez qui vont arriver à 12 ») et donc corrige, donne à voir comment procéder pour que la configuration matérielle représente le problème (« Donc on a les 12 mergez ici et les 9 saucisses ici »). Ce qui lui permet à la fin d'annoncer le résultat sans toutefois le qualifier ou demander à C° de le faire. Restent implicites que dans ce problème était recherché « le tout » et que « ce tout » correspond aux produits achetés que sont les merguez et les saucisses. La congruence de la représentation matérielle avec le problème n'est pas validée, et sa fonction d'aide pour mettre en évidence et en lien toutes les données n'est pas institutionnalisée.

Lors des quatre dernières minutes de l'étape 3, Élise ne propose pas de faire du lien avec le schéma de référence des trousses et choisit d'engager C° à écrire le nombre 21, à utiliser des groupements par 10 pour retrouver le résultat (U4), puis à écrire l'opération sur la calculatrice (U5) et à laisser une trace écrite de la réponse, en qualifiant elle-même le résultat (U6).

3 Les contours de l'agir évaluatif en RPAV d'Élise

Pour proposer des hypothèses au fondement de l'agir évaluatif en RPAV d'Élise (cf. figure 2), nous nous appuyons sur les analyses précédentes et l'exploitation de données concernant DÉ-m25.

Élise agit **en naviguant entre différentes postures évaluatives** (herméneutiques en début d'interactions, puis de conseil voire de contrôle ensuite) mais aussi **en quittant cette posture évaluative** pour réasseoir des savoirs institutionnalisés, notamment concernant des démarches s'appuyant sur des artefacts et des

registres divers. Ce qui se traduit lors de ses interactions, par **des gestes irrigués par une attention différenciée aux différents sous-processus de RP**.

Tout d'abord, Élise **priorise l'engagement de l'élève dans une démarche de recherche** (« dépatouillez-vous », « t'as pas démarré toi », DÉ-m25) sans aide de sa part en mettant à disposition du matériel varié. Elle veut évaluer le recours ou non à des démarches enseignées auparavant pour produire un résultat numérique et elle devra les réexpliciter. Elle procède par observation silencieuse ou supervision qu'elle stoppe lorsqu'elle pense que l'élève est bloqué. **La production d'un résultat numérique** par l'élève lui sert de tremplin pour revoir une variété de démarches plus ou moins abstraites permettant de trouver le résultat attendu, ou, implicitement, de représenter le problème à partir de différents artefacts : la bande numérique avec cubes déplaçables ou non ; des barquettes et cubes de numération ; de représentations graphiques (mise en commun lors de DÉ-m25). Des procédures travaillées en numération sont repointées à cette occasion. C'est seulement ensuite qu'elle s'intéresse à l'écriture d'une opération en lien avec l'usage de la calculatrice, ou l'écriture d'un calcul en lien avec un schéma (DÉ-m25). Le calcul est donc évoqué dans un second temps, sans faire de tissage avec les apprentissages relatifs au calcul. Enfin, Élise montre dans ses rétroactions une préoccupation à **référer les différentes démarches** en ayant tendance à revenir à une partie de l'énoncé seulement. En fait, la compréhension du texte et de la situation ne semble pas piloter ses rétroactions ; elle n'explicite pas de stratégie de compréhension de l'énoncé afin de favoriser la construction d'un modèle de situation. En revanche, elle y est davantage sensible lors de la conception du dispositif en DÉ-m25 (lecture et présentation du texte écrite et imagée du texte). De même, le travail de « procéduralisation » en lien avec une classe spécifique de problèmes ne porte pas sur la compréhension de la nature des relations entre les différentes données pertinentes. Enfin, notons deux évolutions concernant l'attention à la modélisation du problème entre DÉ-j23 et DÉ-m25 suite aux échanges au sein du groupe IREM : l'explicitation des relations entre les nombres et la présence du nombre recherché sur les représentations matérielles et graphiques (davantage lors de la mise en commun que dans les échanges à la table d'appui) ; une plus grande attention à la qualification des nombres, mais qui relève davantage d'une qualification faible (Houdement, 2014).

La figure 4 (cf. ci-dessous) rappelle les principales préoccupations d'Élise relativement à l'enseignement-apprentissage de la RPAV que nous venons de dégager, et relativement à l'évaluation soutien aux apprentissages au quotidien. En arrière-plan (violet), nous listons les principaux déterminants des gestes et postures évaluatives d'Élise en RPAV, relevant du disciplinaire, de l'évaluation au quotidien (cf. paragraphe III.1) et généraux.

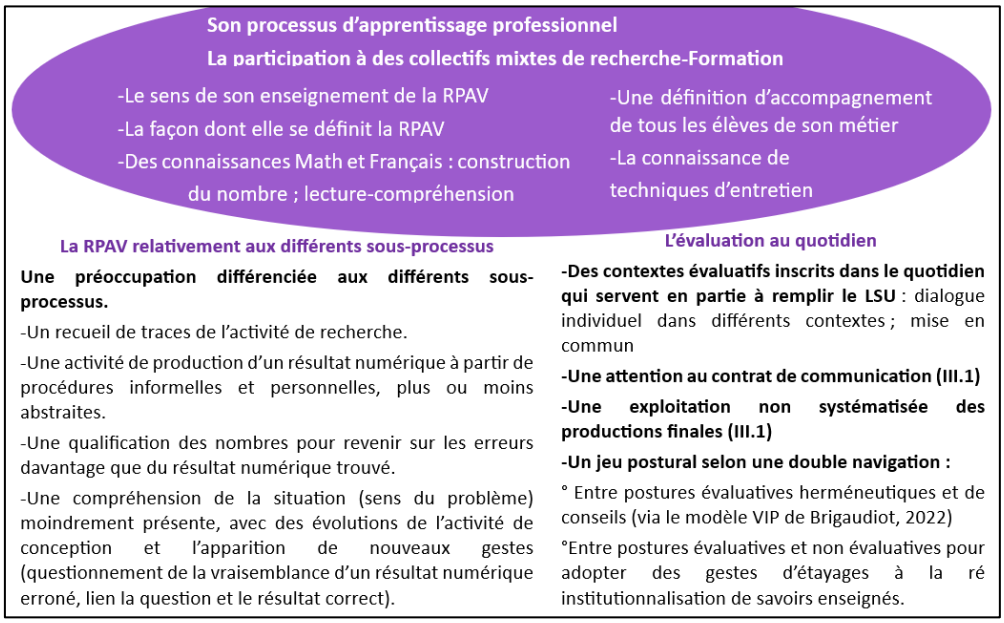


Figure 4. Les fondements de l'agir évaluatif en RPAV d'Élise à partir de la figure 1

À propos de **la dimension disciplinaire de l'agir d'Élise**, nous avons repéré trois principaux facteurs :

- Le sens qu'elle attribue au fait d'enseigner la RPAV. Il s'agit de faire apprendre l'élève à chercher « chercher, (s') essayer, savoir ce qu'est un problème (…) car je préfère que les élèves ne soient pas là comme des courgettes et qu'ils fassent, qu'ils éprouvent » (écrit *fleuve* produit par Élise en 2025), mais aussi à réinvestir des savoirs institutionnalisés procéduraux. Ce qui peut expliquer sa motivation à expérimenter en 2024-2025 la situation des 3 essais en sous-collectif IREM.

- La façon dont elle se définit la RPAV. Initialement, la RPAV c'était l'opportunité d'asseoir avant tout la construction du nombre et le sens des opérations, davantage que d'enseigner l'objet RP. Mais elle n'obtient pas les effets escomptés concernant les apprentissages de ses élèves (dont C°) en appréhendant alors la compréhension de la situation à partir du seul enseignement du schéma de référence du manuel. C'est ainsi qu'en janvier 2023, elle se donne à institutionnaliser une pluralité de démarches de résolution (« chemins ») pour mieux s'ajuster aux ressources de l'élève et déjouer des stratégies superficielles. Le sous-processus de modélisation enrichit progressivement sa définition de la RPAV. D'ailleurs lors d'une réunion en février 2025, elle demande à revenir sur le modèle de Verschaffel et De Corte (2008) pour analyser l'activité d'un élève, alors qu'il lui semblait trop complexe jusqu'alors.

- La mobilisation en RPAV d'autres connaissances professionnelles. C'est le cas des connaissances relatives à la construction du nombre (construites il y a plus de 10 ans) pour rétroagir et aboutir à un résultat numérique, par le fait de jouer sur un gradient de représentations de plus en plus abstraites, ou encore de démontrer de gestes techniques de manipulation du matériel. Plus récemment (2024-2025), c'est le recours à des connaissances en lecture-compréhension (rappel de récit après une lecture ; souffles de coupes lors de l'oralisation d'un texte ; présentation spatiale du texte) pour présenter l'énoncé de problème, sans toutefois signaler et expliciter aux élèves de tels gestes langagiers. Ces transferts trouvent leur source dans les deux cas dans sa participation à des collectifs mixtes de recherche-formation.

Pour terminer, le **propre processus d'apprentissage professionnel d'Élise** nous apparaît participer activement à **la définition de son agir évaluatif en RPAV,** en écho à la primauté qu'elle donne au départ à l'action par rapport à la théorisation ; ce qu'elle met d'ailleurs en lien avec sa façon d'apprendre en général. Ainsi, pour apprendre de son travail, elle expérimente (elle parle de « *crash test* », de « *faire mes petites expérimentations dans mon coin* »), sollicite l'aide d'autrui (pair ou F-Ch) pour « *y voir clair, mieux comprendre comment je fais* » et s'engager dans un second temps dans une formalisation communicable (fiches de préparation ; outils de l'élève, de la classe) et dans des lectures professionnelles ou scientifiques. Élise procède donc à partir de la valuation de ses actions pour comprendre et faire progresser les élèves en difficultés avant tout (éviter aux élèves son expérience de collégienne en échec scolaire). En fonction de l'efficacité perçue relativement aux coûts notamment temporels et matériels de préparation, elle évolue en s'appropriant les idées d'autres collègues, en approfondissant les siennes et en se documentant notamment à propos des processus d'apprentissage, de la didactique, des dispositifs de classe. Ajoutons que la professionnalité d'Élise à cet instant est marquée par un changement de contexte d'exercice (poste à profil dans une nouvelle école en REP+) qui a nourri l'évolution de son agir : un public scolaire en très grande difficulté dans la maîtrise de la langue ; une mission institutionnelle pour insuffler dans l'école des pratiques en RP plus efficaces pour l'apprendre de tous les élèves.

IV - CONCLUSION : RETOMBÉES POUR LA FORMATION

Rappelons que le cadre théorico-méthodologique, présenté pour décrire l'activité évaluative en RPAV, repose sur deux principes : controverser au sein de collectifs et orienter les objets de la controverse vers la régulation de l'enseignement-apprentissage. Deux principes que nous avons mobilisés pour produire les résultats concernent l'agir évaluatif d'Élise en RPAV. En tant que membre de l'IREM et formateur INSPÉ, nous percevons trois intérêts en formation (initiale, continue, de formateurs), à interroger l'activité évaluative des enseignants en s'appuyant sur un référentiel savoir issu de la recherche (en tant que norme

produite dans un contexte situé) : contribuer à accéder au réel de l'activité des enseignants ; développer un autre rapport à l'activité de planification ; coopérer au sein d'un groupe de formation.

Tout d'abord, concernant l'accès au réel de l'activité (pour le F-Ch ou le PE) le recours à un tel cadre d'analyse invite à ne pas caricaturer l'activité de l'enseignant ou à ne pas lui faire de faux procès quant aux motifs avec lesquels il conçoit et met en œuvre effectivement la classe. Par exemple : mieux comprendre ce que signifie le réel de l'activité des enseignant ; analyser les postures d'étayage du PE sans manichéisme en termes de jeu postural (et non de qualification générale, de contrôle, par exemple) plus ou moins ajusté aux gestes d'études des élèves relativement au déroulement temporel et langagier de la séance. De façon concomitante, le cadre peut être mobilisé par les formateurs pour aider les PE à *lire le réel de la classe* en formations de formateurs ou en formations continues inscrites dans la durée (type constellation) lors d'espace-temps réflexifs. Peuvent être interrogés ainsi la définition de l'apprendre en RP pour chacun des élèves, la définition de repères de progressivité, le recours à des démarches d'enseignement (par instruction directe, par situations-problèmes, …) en lien avec les logiques profondes et personnelles (Bucheton, 2021).

Ensuite, cette entrée peut servir à faire évoluer le rapport à l'activité de planification, en l'appréhendant moins comme une injonction institutionnelle que comme une nécessité pour avoir le sentiment du travail bien fait ; soit de parvenir à repérer, interpréter et réguler ce qui se passe en classe afin de résoudre au mieux les difficultés rencontrées par les élèves. C'est ainsi qu'au sein du groupe IREM, les PE lors de l'anticipation de la classe ont adhéré à la méthode de la pensée à voix haute, proposée par les F-Ch, consistant à s'enregistrer oralement (ce qui est moins coûteux qu'un écrit du point de vue temporel et parfois cognitif), au moment qu'il souhaite (selon sa gestion singulière de ses temps personnel et professionnel). Lors de ces oralisations, elles se sont retrouvées à questionner de façon plus précise, et/ou nouvelle, la projection de leur agir en classe pour gagner en efficience. Cela a été notamment le cas à propos de : la formulation des objectifs, des dilemmes à gérer, d'attentes plus spécifiques envers des élèves ciblés, du choix de l'énoncé de problème, des savoirs à enseigner ou encore des indices à prendre pour s'ajuster aux connaissances des élèves en classe.

Enfin, interroger l'écart entre les objets que les PE souhaitent évaluer et ceux qu'ils ont effectivement évalués en classe peut, comme nous le vivons au sein de l'IREM conduire les PE à éprouver le besoin de produire par eux-mêmes des traces (photos ; audio ; capsule vidéo ; écrit) de leur pratique d'enseignement de la RP (préparation, productions des élèves, outils, matériel…) au service de la coopération entre pairs et formateurs (Ch ou non). Ce qui contribue à renouveler les rapports de place et favorise l'articulation entre vécus des PE et ressources (institutionnelles, professionnelles, scientifiques) au service de l'identification de pistes pour que les élèves dits en difficultés de chaque classe puissent plus et mieux apprendre.

V - BIBLIOGRAPHIE

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, *39*(1), 171-184.

Blanchouin, A., Grapin, N. et Mounier, É. (2022). Documenter l'activité évaluative des professeurs des écoles à partir de leurs gestes évaluatifs : étude de cas en mathématiques. *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, *8*(1), 3-28.

Blanchouin, A., Grapin, N. et Prigent, E. (2023). Quand une « problématique métier » entre enseignants et chercheurs-formateurs peut être partagée : interagir avec des élèves de cycle 2 en Résolution de problèmes à des fins de régulations de nos activités professionnelles respectives. *Biennale internationale de l'Education, de la formation et des Pratiques professionnelles « se construire avec et dans le monde : part d'autrui, part de soi ».* Paris 20 au 23 septembre 2023.

Brigaudiot, M. (2022). Langage et école maternelle. Paris : Hatier.

Bucheton, D. (2021). *L'activité enseignante entre routines et imprévus : le jeu des postures professionnelles.* Paris : ESF Sciences humaines.

Charters (2005). The use of think-aloud methods in qualitative research: an introduction to think-aloud methods. *Brock Education*, *12*, 68-82.

Chenevotot, F., Ledan, L., Beylot, D., Blanchouin, A., Mounier, É. et Grapin, N. (2023). Analyser des connaissances en calcul mental additif au début du cycle 2 pour mieux comprendre l'activité de l'élève en résolution de problèmes. *Actes du 48e colloque COPIRELEM.*

Clot, Y. & Faïta, D. (2001). Genres et styles en analyse du travail : concepts et méthodes. *Travailler*, *6*(1), 7-42.

Fagnant, A. (2018). La résolution de problèmes arithmétiques : apports de la recherche et perspectives pour la formation. *Revue française de pédagogie*, *202*(1), 83-102.

Figari, G. (1994). *L'évaluation dans les systèmes éducatifs.* Bruxelles : De Boeck.

Grostephan, V. (2019). La triangulation en sciences de l'éducation : enjeux méthodologiques. *Revue française de pédagogie*, *206*(3), 45-60.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112.

Houdement, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. Cahiers des Sciences de l'Éducation, *36*, 7-34

IGESR (2023). *Appropriation des évaluations nationales de CP, CE1 et de sixième dans le pilotage des circonscriptions du premier degré*. Consultée le 10/09/2025. Url : https://www.education.gouv.fr/appropriation-des-evaluations-nationales-de-cp-ce1-et-sixieme-dans-le-pilotage-des-circonscriptions-344245.

Jorro, A. (2016). Le geste évaluatif : une approche de l'activité professionnelle des enseignants. *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, *2*(2), 53-68.

Magnusson, S., Krajcik, J. et Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge. Dans J. Gess-Newsome et N. Lederman (éds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MENESR (2025). *L'évaluation des acquis des élèves du CP au lycée*. Consultée le 10/09/2025, Url : https://www.education.gouv.fr/l-evaluation-des-acquis-des-eleves-du-cp-au-lycee-12089.

Mottier-Lopez, L. (2015). Évaluer pour apprendre : entre standardisation et contextualisation. *Mesure et évaluation en éducation*, *38*(1), 41-67.

Mounier, É., Beylot, D., Blanchouin, A., Chenevotot-Quentin, F., Grapin, N. et Ledan, L. (2024). Repérer les démarches en résolution de problèmes d'un élève de grade 2 par l'analyse de ses procédures : influence de la taille des nombres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *29*, 121-159.

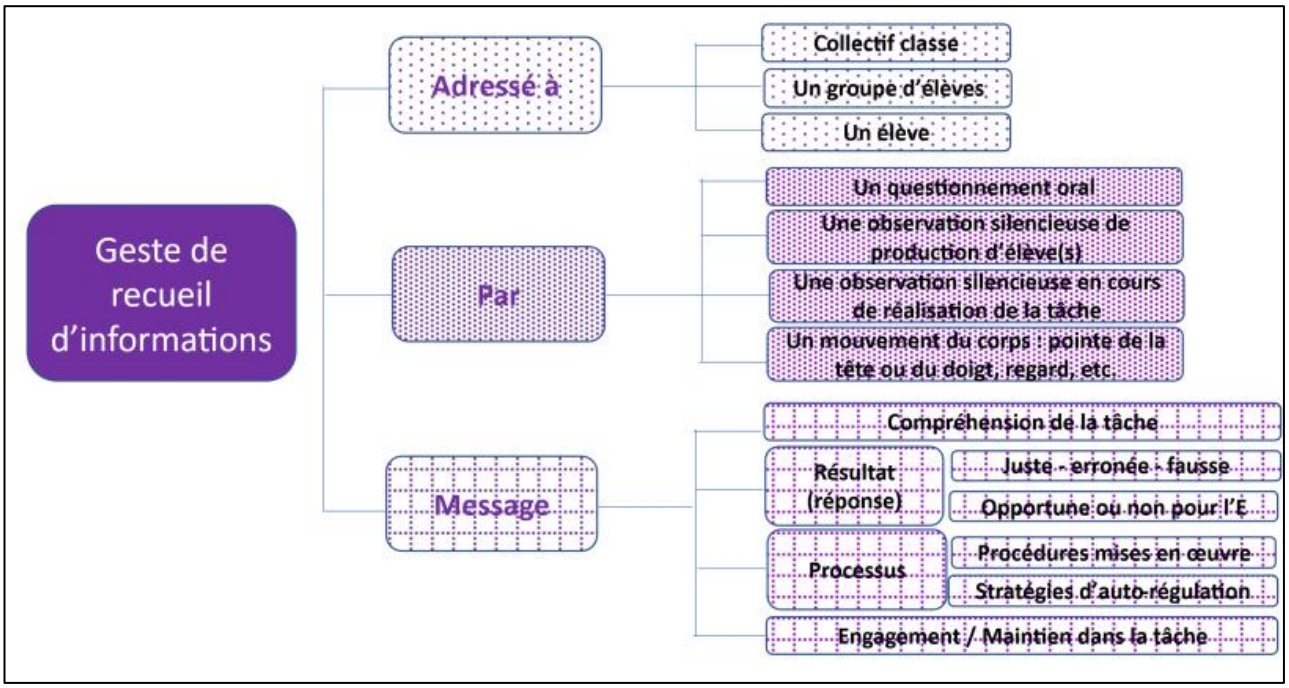
Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie, 96,* 79-86.

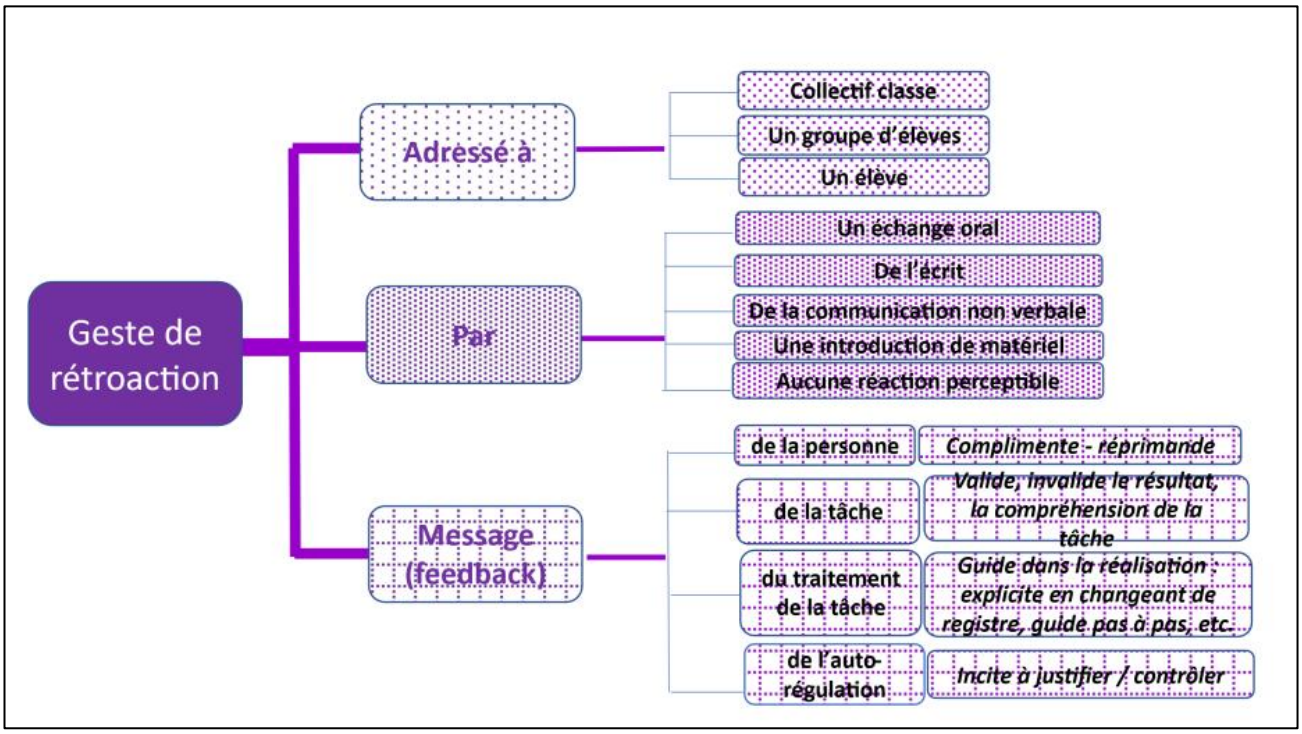
Verschaffel, E. & De Corte, L. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans Marcel Crahay, Lieven Verschaffel, Erik De Corte, Jacques Grégoire (éds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). Bruxelles : De Boeck.

Voyer, D., Beaudoin, M. et Goulet, M. (2012). Apprendre à lire les énoncés de problèmes arithmétiques : étude auprès d'élèves du primaire. *Revue canadienne de l'éducation*, *35*(1), 94-121.

ANNEXE 1 : ARBRES À CHOIX POUR REPÉRER CHACUN DES GESTES

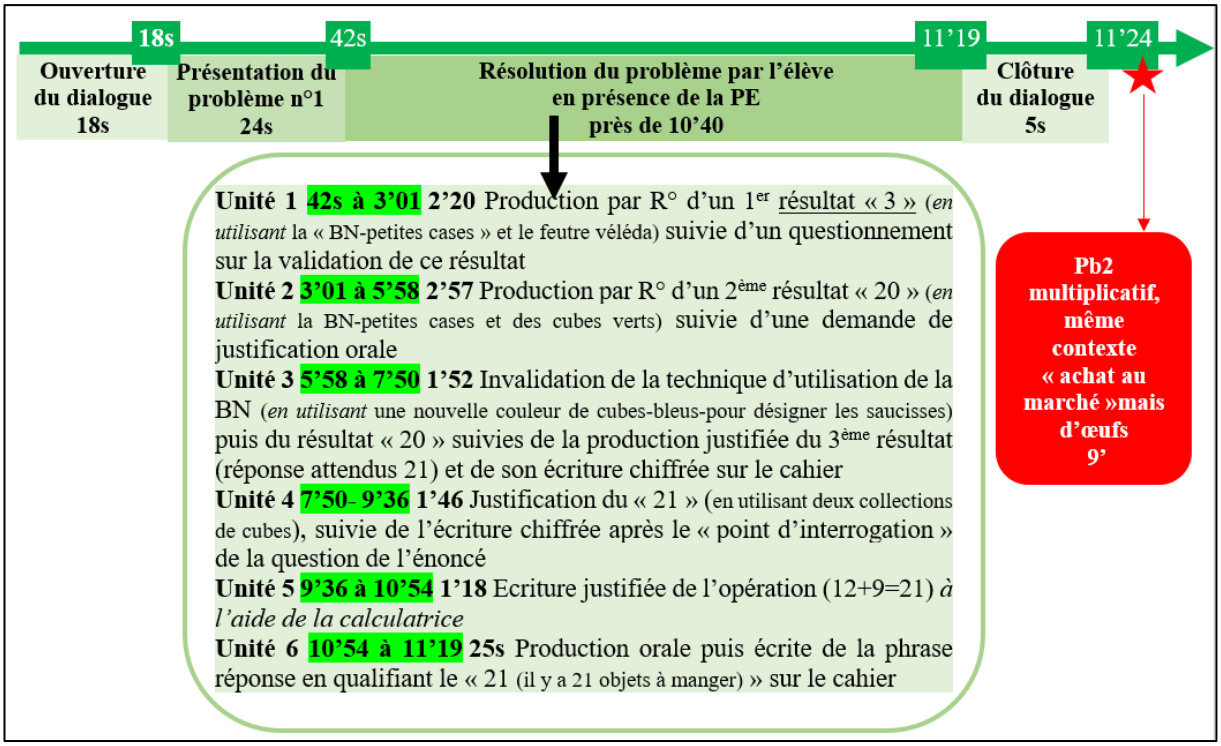
Les deux arbres à choix d'aide au repérage de chacun des deux gestes d'après Blanchouin, Grapin, Mounier 2022.



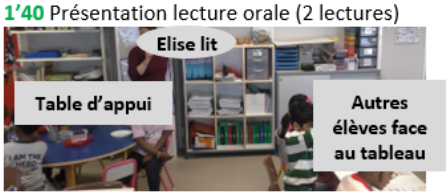


ANNEXE 2 : SYNOPSIS DES SÉANCES POUR LES DEUX DISPOSITIFS

Synopsis de la séance du dispositif de juin 2025 (dialogue lors de la résolution d'un problème, 11'40)



Synopsis de la séance du dispositif de mars 2025 (en groupe classe : situation des 3 essais + mise en commun, 55')

Durée réelle-Etape- Ecart à la durée prévu	Premiers repères des actions et de découpages en unités
5' **Lancement** « *ça fait longtemps qu'on ne l'a pas fait* » +4'	5' Lancement coin R + 1' déplacement 3' Lancement aux tables 1' Distribution du support par 1élève
5' **Essais à son rythme avant théâtralisation** +1'	**1'40** Présentation lecture orale (2 lectures)  **4'** Recherche en arrêtant le timer
x' **Théâtralisation** +3'	-Les élèves qui le souhaitent sont invités. Seuls 3 élèves ne sont pas venus -Scène jouée par Élise avec des objets réels 
10' **Essais à son rythme après théâtralisation**	Au son du timer *« je finis avec Mo° »*. Arrêt effectif, environ 2'30-3' plus tard en ayant accepté « de ne pas avoir été jusqu'au bout…du bout » (Bilan post)
Reprise du groupe	
19'30 **Mise en commun (MC)** +10'	**U1**-Exploration collective de la production projetée de Mo°avec son accord 8' **U2**-Inventaire de réponses et invalidation du 28 (impossible) 2'50 **U3**-Résolution collectiveoExploration collective de la production projetée de Mo°avec son accord 7' **U4**-Ecriture du calcul et institutionnalisation de la réponse « 6 2'
2'25 **Clôture de séance** +2'	Elise pointe les réussites des élèves, rappelle les enjeux de la MC et interpelle Mo° (table de la réussite) puis tous sur ce qui les a marqués lors de la MC.

ANNEXE 3 : SYNOPSIS DE LA MISE EN COMMUN DE DÉ.M25

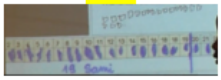
Légende :

-les élèves sont désignés par deux lettes suivie d'un °

-Les initiales d'élèves fluotées indiquent les élèves présents à la table de la réussite

Mise en commun d'environ 20' → **Clôture 2'**

UNITE 1- (8')
Etude du travail de Mo*



Un dessin de 19 carrés, après réalisation d'une collection de 19 avec le matériel puis traces laissées au feutre véléda sur une bande numérique

UNITE 2- (2'50)
Inventaire et étude de l'impossibilité du 28
Changement de Bande Numérique (BN) 30 (40s)

UNITE 3- (7')
Résolution collective
Première étape (2')
Inventaire de ce qu'on fait en premier (pas l'opération
-Di°, le type de pb
Deuxième étape (4'20)
-Sa° complète la BN au tableau

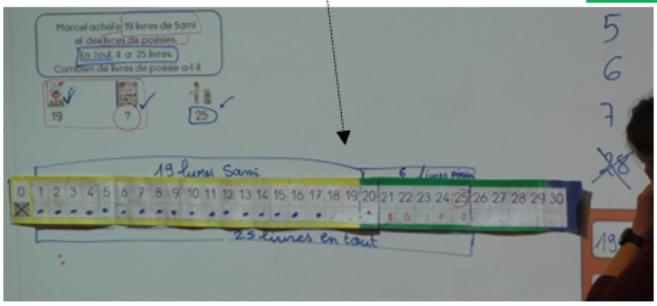


-Elise la légende et fait apparaître le schéma en barre sans le nommer

UNITE 4- (2')
-Ecriture du calcul *à partir de la proposition de Di°*
-Institutionnalisation du 6 *oralement puis en produisant une phrase réponse*

BILAN de séance
-Feed-back à propos des réussites (*« proposer, faire seul ; essayer de comprendre ce qu'a fait* ***Mo****»*)
-Rappel de l'enjeu MC comme *moment pour comprendre,* **adressé aux élèves de la table de la réussite**
-Questionne Ma* puis la classe (sauf à Sa°, Ha°, Di°)
« qu'est-ce qui semble le plus intéressant dans tout ça pour toi ?

Tableau au tout début de l'unité 4



ANNEXE 4 : OBJETS D'ENSEIGNEMENT ÉVALUÉS LORS DE DÉ.J23

Moment de classe	Objets d'enseignement évalués	*Objet non évalué*	Sous-processus (sP) ; contrôles
Étape 2 (2 unités)	Engagement dans une démarche		*s*P modélisation
Étape 3 Unité 1 (U1) (2'20)	Engagement dans une démarche		*s*P modélisation
	Engagement dans une démarche		*s*P modélisation
	Engagement dans une démarche		*s*P modélisation
	Cohérence entre le résultat obtenu et des données du problème		Contrôle : lien entre le *s*P communication de résultat et le *s*P modélisation
Étape 3 Unité 2 (U2) (2'57)	Une (autre) démarche pour résoudre le problème		*s*P modélisation
	Le problème de référence associé au problème		*s*P modélisation
	Une démarche associée à une catégorie de problèmes		*s*P modélisation
	Lien entre une démarche utilisée et le problème		*s*P modélisation
Étape 3 Unité 3 (U3) (1'52)	Lien entre la représentation matérielle avec BN et des données du problème		*s*P modélisation
		Lien entre la représentation matérielle avec BN et des données du problème	Contrôle au niveau du *s*P modélisation
		Procédure de dénombrement d'une collection avec BN	*s*P production du résultat
	Successeur d'un nombre		*s*P production du résultat
	Écriture en chiffres d'un nombre à l'oral		*s*P production du résultat
Étape 3 Unité 4 (U4) (1'46)	Une autre démarche de résolution du problème (pour vérifier)		*s*P modélisation
	Procédures de dénombrement d'une collection		*s*P production du résultat
		Lien entre représentation matérielle et des données du problème	Contrôle au niveau du *s*P modélisation

ANNEXE 5 : DONNÉES CONCERNANT DÉ.J23 : ETAPE3-UNITÉ 1-PRODUCTION D'UN RÉSULTAT INVRAISEMBLABLE PAR C° (3)

Classe	Tapuscrit d'Élise	Auto confrontation
Élise (pointant les mots du texte écrit au fur et à mesure de la lecture de la seconde phrase puis de la question ; ne relit pas le début) *: j'ai acheté 12 saucisses et 9 mergez. Combien de produits as-tu achetés* ? **1'35 (près de 10s)** **C°** semble tapoter avec le haut de son crayon son menton/ses lèvres (mouvement vertical du crayon : de son visage à l'espace feuille en dessous de l'énoncé écrit. **1'44 Élise** : *est-ce que tu as besoin d'aide pour démarrer ?* **C° :** *j'ai une idée.* **Élise :** *tu as une idée ! Je te laisse faire.* **C°** reprend son feutre et entoure 12 sur la frise et compte **C°** dit oralement : *1 2 3 4 5 6 7 8 9* sur la frise (du 9 vers le 0). Il marque un point dans le 1. Puis il entoure 3. **2'30 C° :** On écrit 3, alors.	*« Je suis tendue, mon objectif c'est de trouver des relances les plus neutres possibles pour ne pas influencer.* ***C°** a tendance à répondre ce qu'il pense qu'on veut qu'il réponde. Du coup, je pose des questions très ouvertes, avec des mots très éloignés du contexte du problème. J'évite les mots comme (compte, calcul… qui renvoient aux procédures, donc je dis « tout ça de cubes » ; quantité) ».*	*« Je n'ai pas utilisé un support visuel parce que je vois je l'ai encore testé hier en CP (février 2024) je pense que si j'avais donné une visualisation plus ou moins proche de HLM ils auraient beaucoup moins pédalé dans la semoule que le texte. Et là on est au mois de juin je veux quand même savoir face à un problème, on va dire scolaire avec le texte que tu lis plus ou moins tout seul, voir comment ils s'en sortent parce que c'est la situation de référence en résolution de problème »*

D'UNE FORMATION SPÉCIFIQUE À DESTINATION D'ENSEIGNANTS DE CP À L'ACQUISITION DE CONNAISSANCES ET DE COMPÉTENCES DES ÉLÈVES DANS LE DOMAINE « NOMBRES ET CALCULS »

Jean-Baptiste MAYENSON
Inspecteur de l'éducation nationale, chargé de mission nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Direction générale de l'enseignement scolaire
jean-baptise.mayenson@education.gouv.fr

Catherine GERMAIN
Conseillère pédagogique départementale en Mathématiques, DSDEN Oise
catherine.germain@ac-amiens.fr

Résumé

La communication rend compte du déploiement d'une stratégie pédagogique départementale, articulée autour de quatre temps (identifier, cibler, agir et mesurer), avec l'objectif d'améliorer les compétences des élèves en mathématiques, et plus précisément dans le domaine « nombres et calculs ».

Face aux difficultés identifiées dans le département de l'Oise, un dispositif innovant s'est adressé à soixante enseignants de CP, sur toute l'année scolaire 2023-2024, articulant observations en classe et journées de formation sur la didactique et les gestes professionnels. L'objectif était la montée en compétences des professeurs des écoles sur l'enseignement de la numération et du calcul visant de meilleures appropriations de ces domaines par les élèves.

La progression, les séquences d'apprentissages et le rythme des apprentissages ont systématiquement été questionnés et ajustés. Les apports progressifs, entremêlés d'allers-retours avec la classe, ont favorisé les mises en œuvre des contenus de la formation et ont ainsi conduit à des changements importants de pratiques professionnelles des enseignants et à de meilleures réussites des élèves dans les apprentissages ciblés.

Nous allons présenter chacune des étapes de la stratégie départementale en quatre points même si les quatre temps ne se sont pas déroulés exclusivement et strictement de manière chronologique. En effet, le déroulement de la formation déployée a nécessité des allers-retours permanents. Si l'objectif général est resté le même tout au long de l'année scolaire, le plan d'actions a subi des ajustements et des adaptations en fonction de l'analyse continue des résultats de la formation et des observations en classe.

Nous détaillerons tous ces points et nous évoquerons le pilotage de ce projet (construction, organisation, suivi) que nous avons conduit avec nos missions respectives : adjoint au Directeur Académique des Services de l'Education Nationale (DASEN) de l'Oise en charge du 1er degré et conseillère pédagogique départementale (CPD) en mathématiques.



Figure 1. Les quatre temps de la stratégie départementale

I - IDENTIFIER LES BESOINS

Les données aux évaluations nationales (septembre 2022) et les résultats fournis par la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) montraient que les élèves de CE1 du département de l'Oise avaient des taux de maitrise inférieurs au niveau national en mathématiques (par exemple, on constatait que les pourcentages de réussite, en prenant en compte les Indices de Position Sociale (IPS) moyens des départements, étaient parmi les plus bas pour la compétence « résolution de problèmes »). Cette tendance départementale se retrouvait à une échelle plus réduite puisque les résultats des élèves lus par circonscription du 1er degré indiquaient que tous les territoires avaient des taux de maitrise très insuffisants.

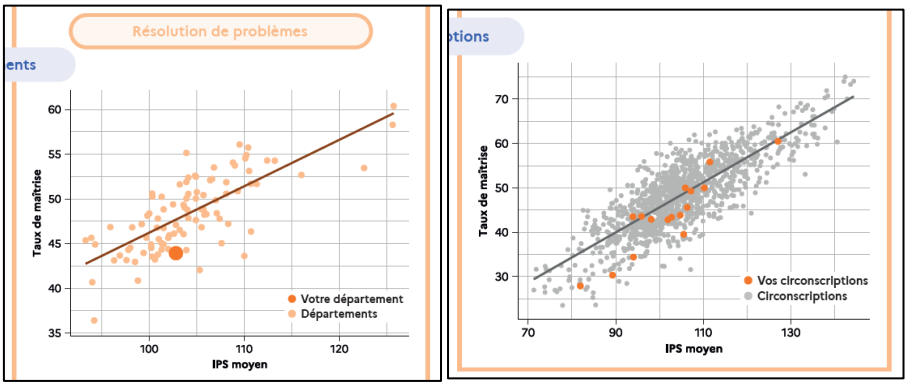


Figure 2. Performances des élèves, focus sur les résultats CE1 en 2022, élèves de l'Oise. DEPP

Face à ce constat, il nous est apparu urgent d'agir et de prendre des décisions volontaristes pour lancer une dynamique et inverser la tendance. Nous souhaitions transformer le constat en actions. C'est ainsi que nous avons décidé de déployer un plan d'actions stratégiques autour des mathématiques, sur l'ensemble du département.

II - CIBLER

1 Un domaine mathématique prioritaire retenu : le calcul.

Si les résultats des élèves étaient fragiles sur l'ensemble des domaines mathématiques présents dans les évaluations nationales, nous avons choisi d'axer la formation autour du calcul. En effet, le calcul est stratégique pour l'apprentissage des mathématiques en général, il permet de travailler les connaissances relatives aux nombres et aux opérations et il s'enseigne sur l'ensemble du parcours de l'élève (depuis l'école maternelle).

Suite au rapport Villani-Torossian (2018), quatre circulaires dans le Bulletin Officiel spécial n°3 du 5 avril 2018 apportent aux enseignants un cadre général sur l'enseignement des fondamentaux dont l'une est

consacrée à l'enseignement du calcul. Ce texte rappelle que le calcul est un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire.

Ce choix clair de travailler sur le calcul se confronte à des observations de classe qui montrent par exemple que les élèves utilisent majoritairement le calcul posé en CM1 pour effectuer $128 \div 4$. Un premier questionnement s'engage alors : pourquoi ce recours au calcul posé ? Des échanges avec les élèves font apparaître une construction du nombre 128 très limitée et qui se résume souvent à $128 = 1C\ 2\ D\ 8U$. Évidemment, avec cette seule décomposition du nombre 128, il est difficile de mettre en œuvre une autre procédure que le calcul posé pour effectuer $128 \div 4$. Un second questionnement est ainsi apparu : pourquoi cette seule représentation de 128 ?

Depuis de nombreuses années, l'apprentissage des nombres entiers à l'école primaire est l'objet d'études en didactique (Chambris, 2014, Tempier, 2013, Mounier, 2010, 2016). Il apparaît notamment que certaines difficultés rencontrées par les élèves auraient pour origine une construction insuffisante des nombres entiers d'usage courant (inférieurs à $10\ 000$). Cette hypothèse est également étayée par Desmet lors de la conférence de consensus du CNESCO de 2015 « nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire » (2015). C'est d'ailleurs aussi ce que Berdonneau (2008) met en avant en énonçant qu'« une représentation insuffisante des nombres et une méconnaissance des relations qui les unissent est l'une des causes aux difficultés rencontrées en calcul mental ».

Ces apports didactiques nous ont amené à élargir le plan calcul initialement défini en choisissant d'engager dans un premier temps la formation autour de la construction des nombres, et plus particulièrement autour des unités de numération. La compréhension de notre numération décimale de position débute dès la première année de l'école élémentaire, raison pour laquelle la formation s'est adressée aux enseignants ayant des classes de CP.

2 Les enseignants et les écoles engagés dans la formation

Nous avons dû identifier les enseignants de CP qui allaient bénéficier de cette formation sur l'enseignement du calcul. Pour les raisons évoquées précédemment, le choix a été fait d'inclure toutes les circonscriptions. Ainsi, l'ensemble du département a été impliqué et engagé dans ces formations, ce qui a permis d'avoir des axes communs de travail, pour tous les acteurs (enseignants, formateurs, inspecteurs). Dès le mois de mars 2023, une première identification des écoles ciblées a été menée, en lien avec les inspecteurs de l'éducation nationale (IEN), avec les données extraites des outils fournis par le service statistique académique. Il s'agissait de repérer, par tranche d'IPS équivalent, les écoles pour lesquelles les résultats étaient inférieurs à ceux des autres écoles, pour les compétences liées au calcul. Pour cela, nous avons utilisé les résultats des évaluations de septembre 2022, en regardant les résultats de CE1 sur les deux domaines : additionner et soustraire. Un ajustement du ciblage a ensuite été réalisé en mai 2023, via les évaluations mi-CP, à partir de la compétence « soustraire ».

Les formations proposées se déroulant sur temps scolaire, les contraintes d'organisation liées au remplacement des stagiaires nous ont conduit à retenir au final soixante enseignants de CP pour le plan calcul. Plus de la moitié d'entre eux travaillent avec des élèves de CP depuis plus de quatre ans et seulement 12% des stagiaires débutent avec ce niveau. Environ un stagiaire sur deux a déjà bénéficié d'une formation inscrite dans le plan national maths (formation en constellation). Les enseignants engagés dans la formation exercent leur métier dans trente-trois écoles du département. Les écoles ciblées ont un IPS moyen pondéré de 98. Les typologies des territoires de ces écoles sont variées. Selon la grille de densité à sept niveaux de l'INSEE, les écoles représentent majoritairement des paysages ruraux et des centres urbains intermédiaires.

Les stagiaires ont été regroupés en trois bassins, ce qui permet de constituer des groupes d'une vingtaine d'enseignants et d'ainsi favoriser les échanges entre pairs et de limiter les déplacements pour se rendre aux lieux de formation.

III - AGIR

Cette formation avait pour objectifs de renforcer la didactique et les gestes professionnels associés pour modifier les pratiques pédagogiques au sein de la classe et au final pour améliorer la réussite des élèves. Une place centrale a également été faite pour les pratiques réflexives, l'auto-positionnement professionnel et l'échange entre pairs, favorisant l'émulation et l'amélioration continue des pratiques.

1 L'organisation de la formation

Les enseignants ont bénéficié de trente-six heures de formation, sur temps scolaire, avec remplacement, soit six jours de formation répartis de la manière suivante : une journée dès le mois de juin 2023 puis un jour par période sur l'année scolaire 2023-2024. Ces temps étaient articulés avec trois visites en classe par un formateur, pour permettre un aller-retour entre la théorie et la pratique. La programmation de la formation est présentée ci-dessous.

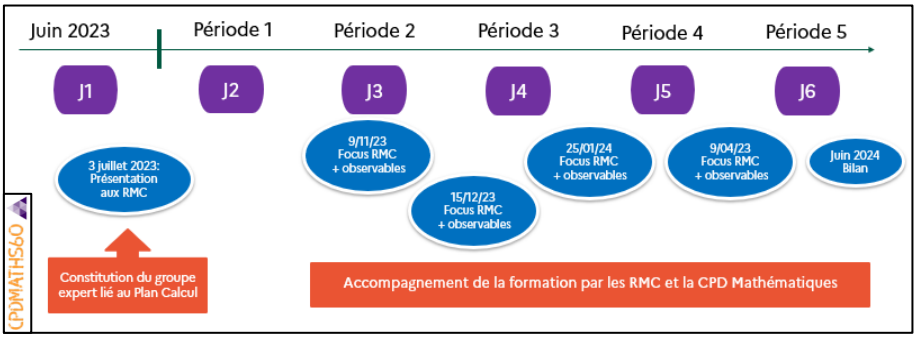


Figure 2. Programmation de la formation

Ce rythme a été retenu pour travailler sur le long terme, pour prendre le temps de s'approprier les contenus et les tester en classe. Cette formation qui s'est installée dans la durée a permis de nombreux ajustements qui prenaient en compte les besoins et les demandes des enseignants, en fonction des apprentissages des élèves. Les journées de formation étaient prises en charge par la CPD mathématiques. Les conseillers pédagogiques de circonscription (CPC) ont effectué deux visites dans les classes des enseignants et la CPD s'est rendue une fois dans toutes les écoles engagées dans la formation. Pour assurer le lien, la cohérence et la continuité entre les formations reçues par les enseignants et les observations de classes réalisées par les CPC, il était nécessaire de penser un accompagnement des formateurs. C'est ainsi qu'une formation de formateurs a été menée par la CPD et qu'un groupe départemental expert lié au plan calcul s'est constitué, sous le pilotage de l'adjoint au DASEN en charge du 1er degré. Tous les IEN et tous les CPC ont pu suivre l'avancée du plan calcul puisqu'une présentation régulière était faite dans les différentes instances : point à l'ordre du jour des conseils d'IEN et temps dédié pour les référents maths lors de toutes les journées nationales de formation « plan maths ». Ces temps ont permis à tous les acteurs d'avoir un discours commun, sur l'ensemble du département.

Un choix fort a été de débuter la formation dès le mois de juin 2023. Il nous a semblé fondamental de proposer très tôt un temps pour présenter le dispositif général aux enseignants et leur donner une mise à jour didactique indispensable, qui permette de modifier certaines pratiques dès le début de l'année scolaire. Cette idée de démarrer la formation avant la rentrée scolaire venait d'une observation partagée avec les formateurs du département, à savoir qu'il existe souvent un décalage entre le contenu des formations et les mises en œuvre dans les classes. En effet, les enseignants éprouvent parfois des difficultés à expérimenter ce qui est proposé dans les formations car ils sont déjà trop engagés dans leurs préparations (progressions, programmations, manuels, etc…). Ainsi, l'objectif était bien de donner tous les éléments de la première période, dès le mois de juin, pour que les enseignants préparent leurs séances en se basant sur la progression proposée.

L'adjoint au DASEN en charge du 1er degré a participé aux formations des trois groupes en juin 2023, pour deux raisons. Tout d'abord, sa présence marquait l'implication de tout le département dans cette action. Ensuite, il est important qu'il puisse parler de didactique et de pédagogique auprès des enseignants.

1.1 Les journées de formation

Ces temps de formation visaient une montée en compétences des enseignants : apports didactiques et pédagogiques théoriques en lien avec des éléments pratiques de mise en œuvre. Ils ont également consisté en une articulation entre plusieurs points à questionner : l'organisation du temps, de l'espace, le matériel didactique, le lien avec les familles, … La réflexion autour de la continuité entre l'école maternelle et l'école élémentaire a été abordée. Il a été rappelé que l'enjeu n'est pas seulement de faire une liaison entre l'école maternelle et l'école élémentaire mais bien de penser et d'envisager le continuum entre les 2 cycles, au regard des apprentissages et de l'enseignement, pour favoriser et faciliter le parcours de l'élève. Chaque journée de formation débutait par un retour d'expériences, en lien avec la journée précédente de formation, pour réfléchir collectivement aux pratiques de classe, se concentrer sur les réussites partagées et analyser les défis à dépasser. Les évaluations nationales ont été un point d'appui central de la formation. Il était important et nécessaire de regarder les évaluations comme un outil pédagogique au service des enseignants. Ainsi, la formation proposait d'analyser les exercices, de regarder et de comprendre les erreurs des élèves, d'envisager des remédiations et des aides possibles. Un autre fil conducteur a été la progression et le rythme des apprentissages. La formation a permis de rappeler l'importance d'un rythme d'apprentissage soutenu, dans une logique spiralaire, en prenant appui sur des éléments théoriques et en tenant compte des acquis et des besoins des élèves. Ces éléments étaient systématiquement questionnés et ajustés à chaque journée de formation. Il s'agissait par exemple de lever un malentendu, à savoir une approche lente de la numération écrite par les enseignants, pour ne pas mettre en difficulté les élèves. D'autres thématiques en parallèle des apports didactiques disciplinaires ont été évoquées : l'enseignement explicite, la manipulation, la place du jeu, la structuration des leçons, les activités ritualisées, la gestion de l'erreur et l'évaluation.

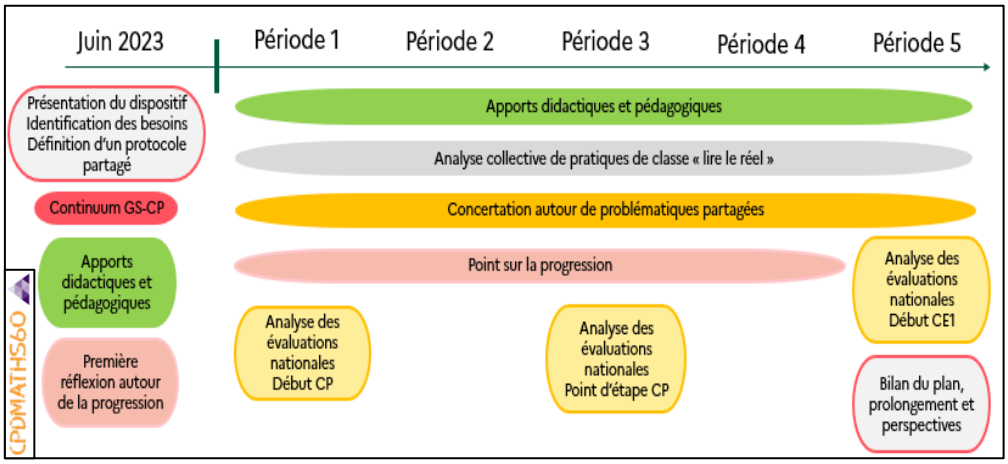


Figure 3. Articulation de la formation

1.2 Les visites d'accompagnement en classe

Ces moments permettent de relever dans la classe et dans les gestes professionnels ce qui fonctionne bien mais également ce qui fonctionne un peu moins bien. Des grilles d'observables étaient proposées aux formateurs et présentées aux enseignants. Elles sont présentées en annexe 1.

2 Les contenus de la formation

Les contenus se sont fondés sur les résultats de la recherche et les recommandations institutionnelles, en cohérence avec le guide Eduscol « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » (MEN, 2021) et la note de service de 2018 sur l'enseignement du calcul (MEN, 2018).

2.1 Une situation d'homologie pour débuter la formation

La brochure de la COPIRELEM « Numération à l'école primaire. Un scénario de formation » (2015) a inspiré la première journée de formation. La situation d'homologie proposée a permis de confronter les participants à l'apprentissage de différentes représentations des nombres dans un nouveau système de numération pour les amener à repérer des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves (notamment lors du passage d'une représentation/désignation à une autre). Vivre l'apprentissage d'une numération par homologie a été un levier important pour faire les premiers apports didactiques et donner des recommandations, notamment sur la progression. Une prise de conscience des enseignants sur le problème lié au rythme d'enseignement de la numération écrite a ainsi pu être faite. C'est ainsi, par exemple, que les enseignants ont compris qu'un travail sur le tableau des nombres (avec tous les nombres de 0 à 99 écrits en chiffres) pouvait et devait avoir lieu au plus tard en période 2. En effet, l'activité proposée en formation, à savoir réaliser un château des nombres à partir d'un puzzle en remarquant les régularités par ligne et par colonne, était réussie par l'ensemble des enseignants sans que ces derniers soient en capacité de lire les nombres écrits (nouvelle notation liée au nouveau système de numération). Cette prise de conscience a permis une acceptation des enseignants sur le scénario de formation et sur les progressions proposées. Ils ont ainsi été d'accord pour « appliquer » la méthode envisagée et mettre en œuvre dans les classes les éléments apportés (figure 4).

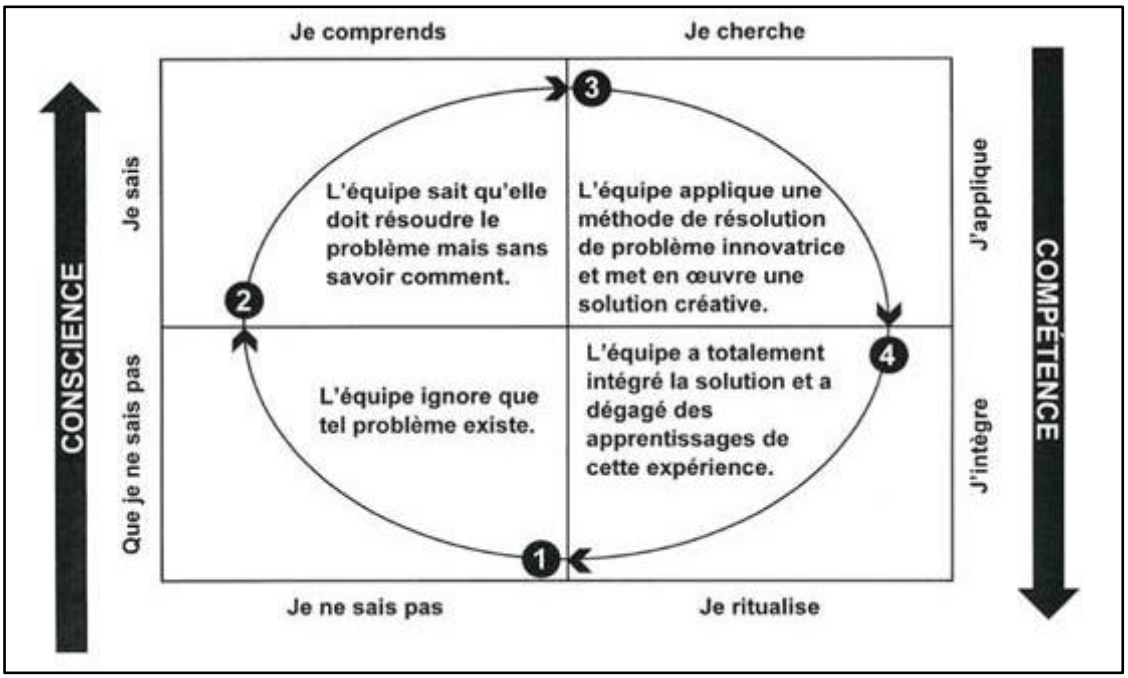


Figure 4. Les quatre étapes du développement de la conscience et de la compétence. Document inspiré des travaux de Senge (1991)

2.2 Les attendus didactiques sur les nombres

Pour construire les attendus didactiques sur les nombres, le « modèle du triple code », développé par Dehaene (1992) pour rendre compte du traitement des nombres et des quantités, a été un principal point d'appui. Ce modèle est utilisé pour expliquer le fonctionnement arithmétique chez l'adulte. On peut néanmoins postuler qu'il aide à analyser les erreurs mathématiques chez les enfants. On considère qu'il s'agit aujourd'hui du modèle théorique de référence. Dans ce modèle, le traitement du nombre mobilise

trois systèmes de représentation, à savoir un code « analogique », un code « oral » et un code « arabe ». Le guide Eduscol « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » (MEN, 2011) où les travaux de Mounier (2010, 2016) sont aussi des ouvrages de référence.

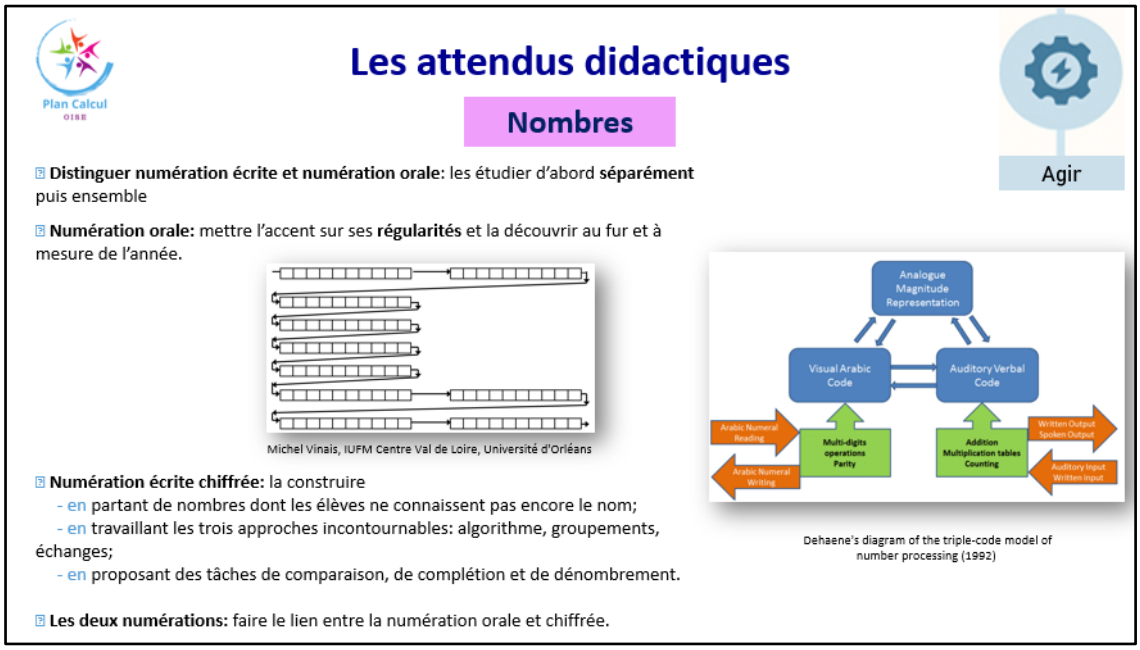


Figure 5. Les principaux objectifs concernant la partie « Nombres » de la formation

En compléments des différents contenus proposés, un outil d'aide à la préparation de séances a été donné, visant un équilibre entre les divers axes.

2.3 Les attendus didactiques sur le calcul

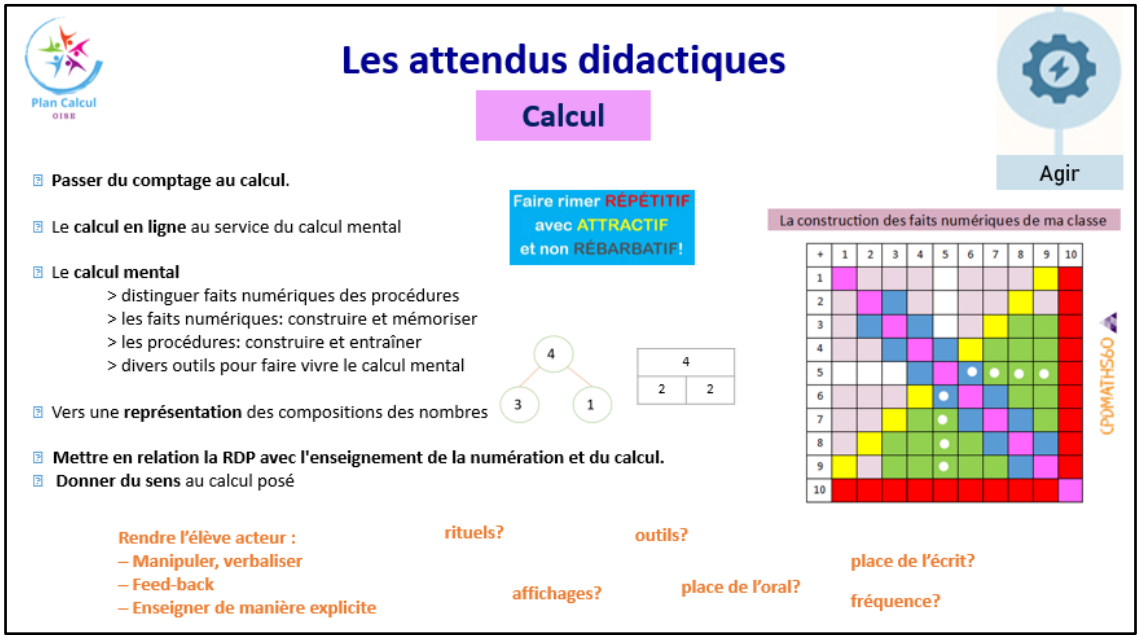


Figure 6. Les principaux objectifs concernant la partie « Calcul » de la formation

Si la partie didactique concernant l'enseignement du calcul a été abordée (passage du comptage au calcul, calcul en ligne comme intermédiaire au mental, distinction faits numériques (construire et mémoriser) et procédures (construire et entraîner), elle a été associée à d'autres éléments (comme les outils, les affichages, ...) en lien avec des gestes pédagogiques (manipulation, verbalisation, feedback, enseignement explicite).

IV - MESURER

Après une année de formation, le bilan est très encourageant puisque l'on observe des progrès significatifs des résultats des élèves lors des évaluations nationales de mi-CP en janvier 2024 et de CE1 en septembre 2024. Nous reviendrons en détail sur ces éléments dans l'un des paragraphes suivants. Si les soixante enseignants désignés et non volontaires ont débuté en juin 2023 avec quelques réserves et interrogations sur leur présence dans cette formation, leur impression finale est très positive, de manière presque unanime. Les enseignants ont exprimé leur satisfaction vis-à-vis de l'accompagnement proposé, soulignant la richesse des apports théoriques et la transposabilité directe des outils en classe. L'alternance entre formation et mise en pratique, la réflexion sur les progressions et l'attention portée aux gestes professionnels efficaces ont été particulièrement appréciées.

1 Un bilan quantitatif qui s'appuie sur les évaluations nationales

1.1 Un schéma répétitif entre 2019 et 2023.

L'échantillon des 33 écoles ayant bénéficié du plan calcul montre une constante, observable depuis 2019, au niveau des résultats des évaluations de septembre et de janvier, comme le montre les graphiques en annexe 2. Sur les compétences mathématiques, lors des évaluations de début CP, les résultats des écoles ciblées en plan mathématiques sont proches des résultats nationaux, mais, lors des évaluations de mi-CP, la dynamique de ces écoles ne suit pas la dynamique nationale dans la mesure où les écarts se creusent avec les résultats nationaux.

1.2 Une nouvelle dynamique observée en 2023 - 2024

En mathématiques, pour les écoles qui ont suivi le plan calcul, les résultats au mois de septembre sont légèrement meilleurs que les années précédentes, mais une nette amélioration est observée sur les évaluations de janvier, se traduisant par un écart proche de 0 point pour trois compétences sur six, celles travaillées en début de formation : comparer des nombres, écrire des nombres et associer des nombres à une position.

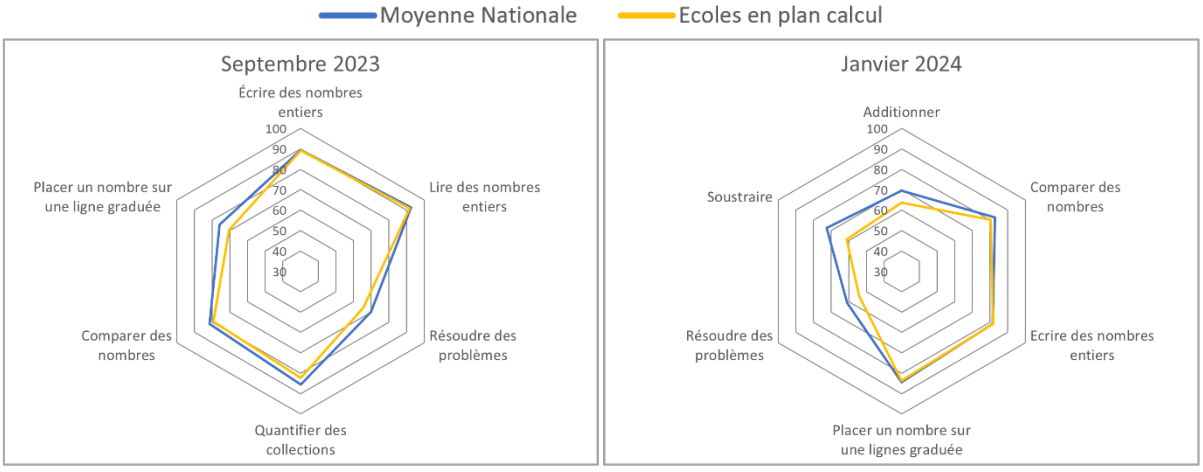


Figure 7. Evolution des résultats des compétences de mathématiques aux évaluations nationales des écoles en plan calcul sur l'année scolaire 2023 -2024

On observe également une réduction importante des écarts pour la compétence additionner. Plus intéressant, l'écart de résultat en résolution de problèmes se réduit à moins de 7 points alors que la compétence n'est pas l'entrée principale de la formation. Enfin, l'écart de 11 points sur la compétence soustraire s'explique par une approche plus tardive dans la progressivité de la formation ne permettant pas d'observer d'amélioration au mois de janvier. Les résultats détaillés par compétences sont donnés en annexe 3.

1.3 Une dynamique confirmée à la rentrée scolaire 2024 - 2025

Un travail d'analyse a été fait sur les données aux évaluations nationales de septembre 2024, pour les élèves de CE1 qui étaient l'an dernier dans les classes de CP avec des enseignants engagés en formation. Pour les compétences « lire et écrire des nombres », les résultats sont identiques en septembre 2022 et en septembre 2023 mais un changement important intervient entre 2023 et 2024 avec une réduction d'environ 8 points par rapport au national et une hausse de presque 10 points pour le pourcentage d'élèves au-dessus du seuil 2.

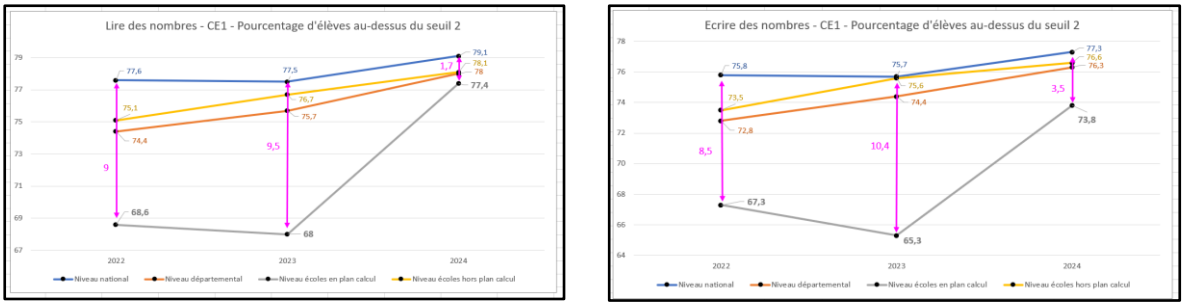


Figure 8. Evolution des résultats pour les compétences « lire des nombres » et « écrire des nombres » aux évaluations nationales entre 2022 et 2024

Pour la compétence « Placer un nombre sur une ligne graduée », on note une amélioration entre septembre 2022 et septembre 2023 (2 points) mais une meilleure amélioration (4 points) est observée entre septembre 2023 et septembre 2024 (la pente d'évolution pour les écoles du plan est plus importante que la pente pour le national)

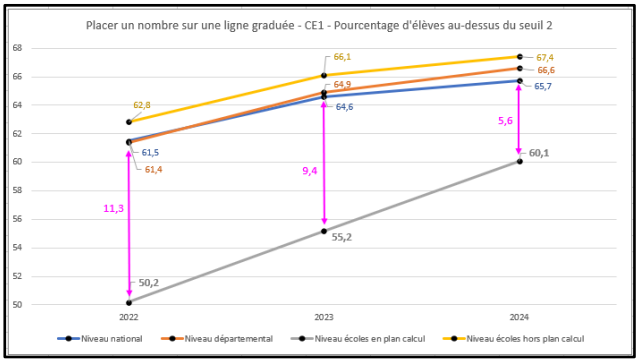


Figure 9. Evolution des résultats pour la compétence « placer un nombre sur une ligne graduée » aux évaluations nationales entre 2022 et 2024

Pour les compétences « additionner » et « soustraire », les résultats sont identiques entre septembre 2022 et septembre 2023 et on note un changement important entre septembre 2023 et septembre 2024 avec une réduction de moitié des écarts par rapport au national et une hausse de presque 10 points pour le pourcentage d'élèves au-dessus du seuil 2.

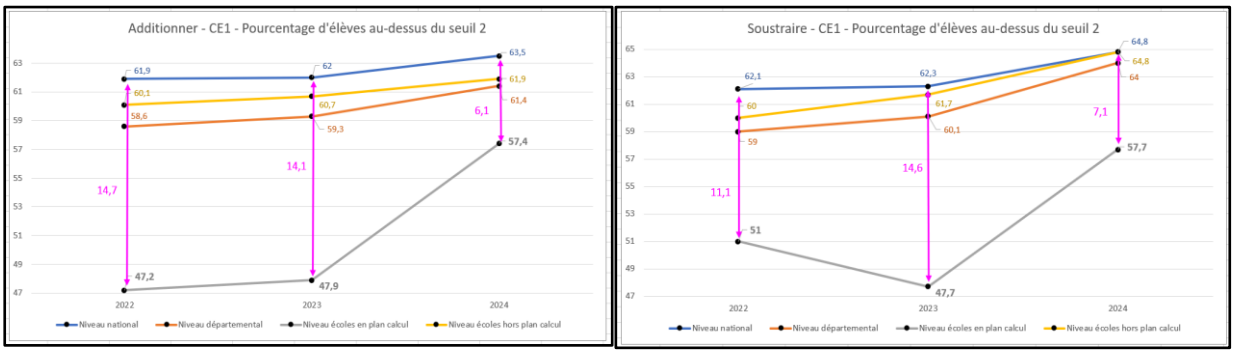


Figure 10. Evolution des résultats pour les compétences « additionner » et « soustraire » aux évaluations nationales entre 2022 et 2024

Enfin, pour la compétence « Calculer mentalement », les résultats sont identiques entre septembre 2022 et septembre 2023 avec changement important entre septembre 2023 et septembre 2024, mais cette fois, avec une chute importante.

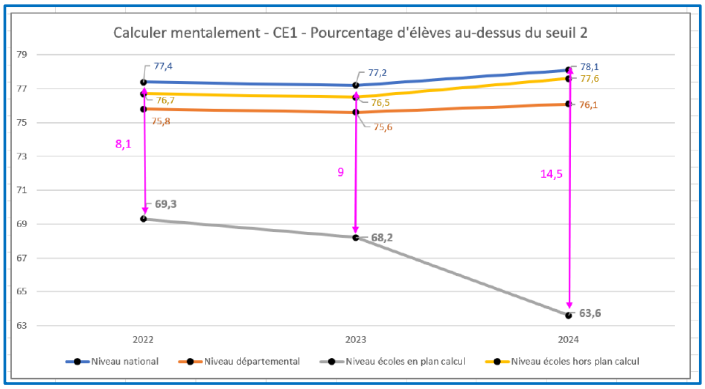


Figure 11. Evolution des résultats pour la compétence « calculer mentalement » aux évaluations nationales entre 2022 et 2024.

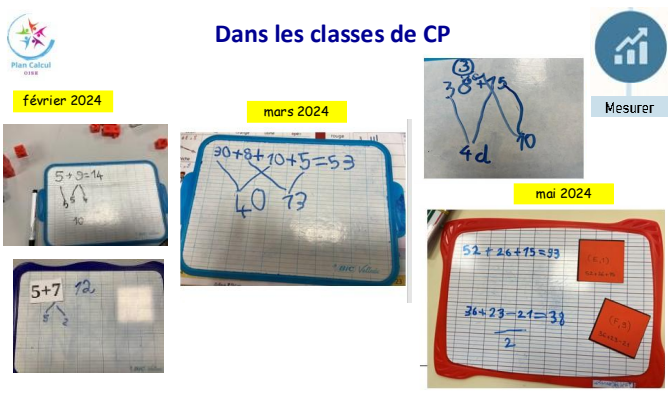
Ces résultats interrogent, surtout lorsque l'on compare aux autres compétences pour lesquelles les résultats sont positifs. Pour essayer de comprendre la raison de cette chute et de formuler une hypothèse, il nous paraît nécessaire de revenir à l'exercice proposé et de bien regarder ce qui est demandé aux élèves. Cet exercice se passe en temps limité et l'énoncé est exclusivement à l'oral. Les élèves n'ont aucun support écrit pour voir les calculs demandés (contrairement aux autres exercices). Si les élèves ont essayé de mettre en œuvre des procédures autres que « compter sur les doigts » (procédure apprise lors de leur année de CP) et s'ils n'avaient pas suffisamment mémorisé ces faits numériques, ils étaient face à une tâche cognitive trop lourde, qui les a mis en échec dans un temps limité. Notre hypothèse et notre interprétation trouveraient leur explication non pas du côté du CP mais plutôt du côté de l'école maternelle, avec un manque de mémorisation de certains faits numériques (apprentissage qui doit débuter dès le début du cycle 1). D'autres hypothèses ne sont pas à exclure, comme le fait d'avoir mis l'accent sur trois compétences, peut-être au détriment des autres.

2 Un bilan qualitatif qui s'appuie sur les observations de classe et les retours d'expériences

2.1 Productions d'élèves

L'évaluation de la formation ne se mesure pas simplement avec données quantitatives. Il est important de la compléter autres d'autres informations directement tirées des observations de classe (productions d'élèves, gestes professionnels des enseignants). Par une présence régulière dans les écoles, nous avons constaté notamment une modification du rythme d'apprentissage concernant la numération écrite et une place beaucoup plus importante au sens donné au concept de dizaine. Les préconisations ont été mises en place, dans la plupart des classes, comme on peut le constater sur les figures ci-dessous.





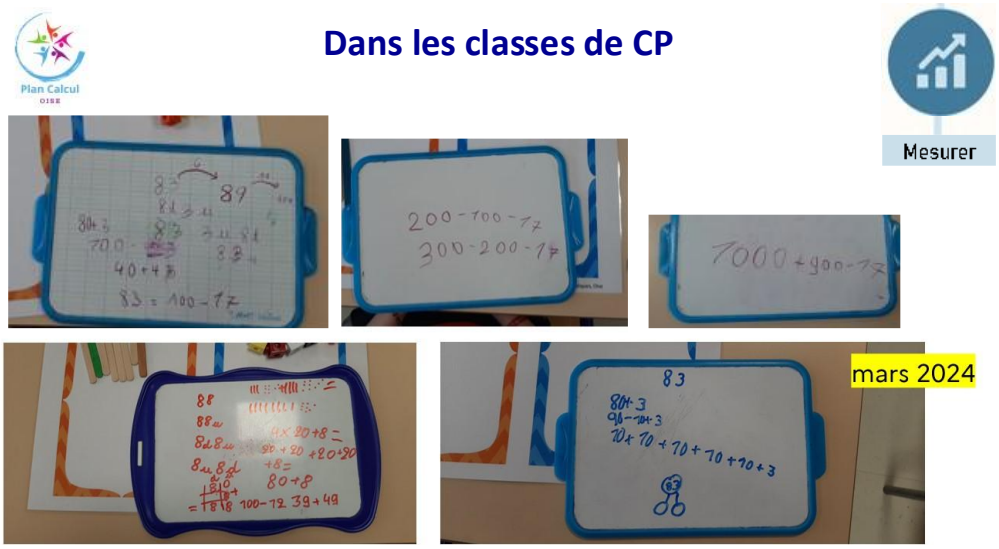


Figure 12. Productions d'élèves dans les classes avec des enseignants engagés dans le plan calcul.

2.2 Paroles d'enseignants

La durée de formation de six jours semble adaptée, au regard des retours des stagiaires. Le format d'un jour de présentiel par période permettant des apports progressifs entremêlés d'allers-retours avec la classe favorise les appropriations et les applications qui conduisent à une montée en compétences des enseignants et une meilleure réussite des élèves dans les apprentissages ciblés. Un quart des stagiaires considère même que la formation était trop courte. Les modalités de la formation ont permis de nombreux apports concrets appréciés des stagiaires et les échanges constructifs entre les stagiaires et la formation sont particulièrement appréciés. Environ 80% des stagiaires considèrent que la formation a apporté des connaissances didactiques suffisantes pour enseigner la numération et le calcul. Et 90% s'accordent à dire que les supports utilisés en formation étaient en corrélation avec les situations abordées. Ainsi, le côté concret de ces apports a permis, pour 98% des stagiaires, d'appliquer dès cette année, les acquis de la formation. On peut s'interroger sur l'écart entre les 80% qui considèrent que les connaissances didactiques ont été suffisantes et les 98% qui ont appliqué les outils de formation. Ont-ils complété eux-mêmes les connaissances didactiques ? Ont-ils utilisé des outils en ayant conscience de ne pas saisir les enjeux ? Les enseignants stagiaires relèvent quelques modifications visibles dans leur pratique pédagogique. Les retours recueillis montrent :

- un rythme soutenu et dense permettant la maîtrise des compétences en numération et en calcul chez les élèves (avec des séances quotidiennes, des progressions accélérées et des ajustements de l'emploi du temps pour rendre les apprentissages plus efficace);
- davantage de manipulation, de sens et de place accordée au calcul mental et en ligne ;
- un engagement actif des élèves et une verbalisation plus importante ;
- une meilleure différenciation et une adaptation plus pertinente des situations pédagogiques en fonction des besoins rencontrés en classe ;
- un regain d'engagement et de motivation des enseignants, dont la quasi-totalité a commencé à transposer les acquis de la formation dans leur pratique quotidienne.

L'élément qui a le plus retenu l'attention des enseignants est la mise en place du dispositif dès juin 2023. En effet, ils ont eu le temps des vacances d'été pour s'approprier les ressources et les mettre en place dès la rentrée, tout en étant accompagné. C'est un point qui nous semble particulièrement pertinent qui a permis cette efficacité. Quelques points de vigilance persistent, notamment sur la construction de traces

écrites collectives, à renforcer à l'avenir. Enfin, les enseignants ont apprécié l'outil proposé (voir annexe 4) qui permettait d'avoir des pratiques réflexives, un auto-positionnement professionnel et des échanges entre pairs, favorisant l'émulation et l'amélioration continue des pratiques.

V - CONCLUSION

Cette formation a permis de construire une dynamique collective et de renforcer la cohérence des pratiques d'enseignement des nombres et du calcul au CP. Elle met en lumière l'importance d'un travail approfondi sur la numération comme levier essentiel pour développer les compétences en calcul et en résolution de problèmes. Le modèle de formation présenté s'impose donc comme une démarche structurante, ancrée dans la recherche didactique, fondée sur l'analyse des besoins réels, l'accompagnement de terrain, la recherche collaborative de solutions et l'ajustement continu des pratiques, dans une dynamique d'amélioration partagée et durable pour l'enseignement des mathématiques en cycle 2. Les retombées positives, tant sur les apprentissages des élèves que sur l'engagement des enseignants, invitent à poursuivre et à élargir ce type de dispositif de formation. Cette expérience pourrait inspirer d'autres départements. Au regard des résultats de CE1 et avec le retour des enseignants ayant un double-niveau GS-CP, il semble qu'un nouveau projet aurait pu être lancé, en inscrivant ce qui a fonctionné et en impulsant une nouvelle dynamique avec une formation en maternelle.

VI - BIBLIOGRAPHIE (TITRE 1)

Berdonneau, C. (2008). *Aider les élèves en difficulté en mathématiques CP-CE1/Tome 1. Numération, résolution de problèmes, géométrie dans l'espace.* Hachette Education.

Chambris, C. (2014). Contribution à propos de la numération décimale. Conseil supérieur des programmes. https://hal.science/hal-03452972

CNESCO (2015). Conférence de consensus. *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. https://www.cnesco.fr/fr/numeration/*

COPIRELEM (2015). *Numération à l'école primaire, Un scénario de formation. Formation initiale, formation continue, formation de formateurs. Paris : ARPEME. https://arpeme.fr/documents/COPIX_4eme_couv.pdf*

Dehaene, S. (1992). *Varieties of Numerical Abilities*. Cognition, 44, 1-42.

MEN (2018). Bulletin officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018

MEN (2018). Note de service n°2018-051 du 25-04-2018. *Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire. https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809042N.htm*

MEN (2021). Un guide fondé sur l'état de la recherche. *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP. https://eduscol.education.fr/document/3738/download*

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes.* Mathématiques. Université Paris-Diderot (Paris VII). https://theses.hal.science/tel-00550721v3

Mounier, E. (2016). *Numération et calcul CP. Comprendre le nombre pour mieux résoudre des problèmes.* Editions Retz.

Observatoire des territoires, ANCT (2025). *Grille communale de densité à 7 niveaux.*

https://www.insee.fr/fr/information/8571524

Senge, P. (1991). *La cinquième discipline. Levier des organisations apprenantes*. Editions Eyrolles**.**

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot (Paris VII). https://theses.hal.science/tel-00921691v1

Villani C., Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* Paris : Ministère de l'Education Nationale.

http://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html

ANNEXE 1 : GRILLES D'OBSERVABLES POUR LES VISITES EN CLASSE

ACADÉMIE D'AMIENS

GRILLE D'OBSERVABLES ACCOMPAGNEMENT PLAN CALCUL

Plan Calcul OISE

ENSEIGNANT(E) : ..... NIVEAU : ..... ÉCOLE : .....

ENSEIGNER LES NUMÉRATIONS : les acquis...	Remarques
Des séances menées quotidiennement.	
Une progression différente : numération orale / écrite.	
Une progression accélérée en numération : 100 en période 4.	
Des activités spécifiques pour enseigner la numération orale.	
La régularité de la numération orale est construite (petite et grande comptine).	
Le principe de position est construit en lien avec les unités de numération.	
Le principe décimal est construit avec les unités de numération (groupements-échanges).	

ENSEIGNER LE CALCUL : les acquis...	Remarques
Des séances menées quotidiennement.	
Une construction des faits numériques par les élèves (manipuler-représenter-abstraire).	
Une mémorisation en classe des faits numériques.	
Les élèves sont passés du comptage au calcul.	
Les procédures sont construites par les élèves (manipuler-verbaliser-abstraire).	
Une verbalisation systématique des procédures.	
Lier la résolution de problèmes pour donner du sens au calcul.	
Une place importante au calcul en ligne.	
Les élèves associent maths et plaisir.	
Des traces écrites collectives : affichage évolutif et construit avec les élèves	

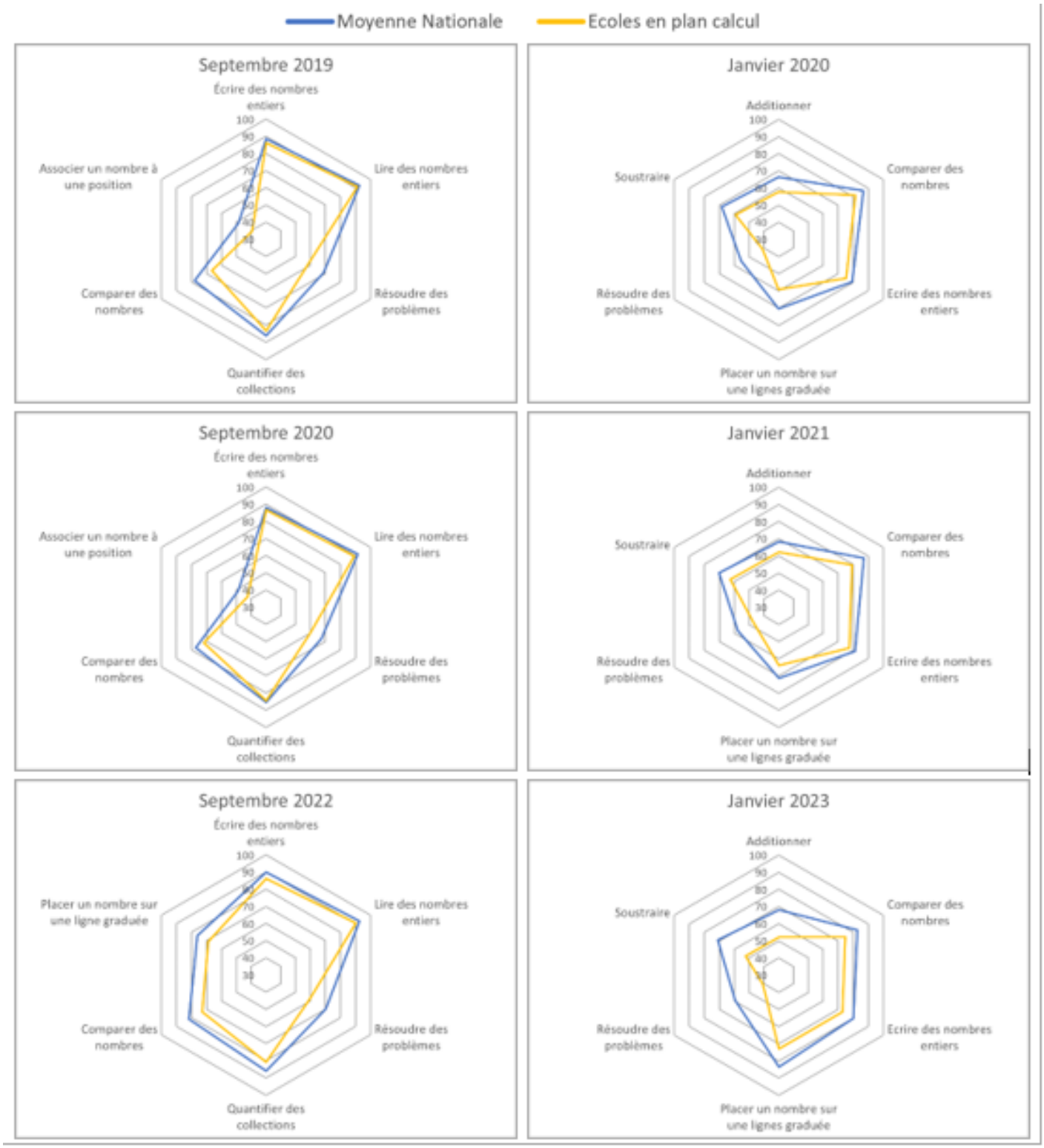
"Le plaisir et le désir sont des moteurs fondamentaux des apprentissages. Mais, sans effort, il n'y a pas non plus de progrès. Il faut développer le sens de l'effort chez l'élève, éviter de sous-estimer son potentiel : lui proposer un contenu ambitieux et accessible, développant ainsi une difficulté désirable mais accessible et l'encourager." Rapport Villani-Torossian "*21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*"

GESTES PROFESSIONNELS	Remarques
La compétence de la séquence est décomposée en plusieurs objectifs. Chacun d'eux sera travaillé sur une seule séance. On trouve les objectifs en se demandant « Qu'est-ce que je veux que mes élèves apprennent dans cette séance ? » Les objectifs seront donc hiérarchisés dans l'ordre des apprentissages (séquence). ➢ L'enseignant connaît le « chemin d'apprentissage » et s'appuie sur le triptyque « Manipuler-Verbaliser-Abstraire »	
La situation d'apprentissage observée correspond aux besoins d'apprentissage. Les élèves ont appris quelque chose.	
La séance observée s'appuie sur une structure explicite qui rend visible le cœur de l'apprentissage.	
Place de la différenciation (soutien, compensation, entrainement renforcé, anticipation sur certains obstacles, étayage, ...) et de la remédiation (feed-back immédiat).	
Relation aux élèves : un regard est posé sur tous les élèves, encouragements, étayages, conseils méthodologiques, prise en compte des erreurs. Gestion de la prise de parole.	
L'enseignant prend du recul et analyse sa pratique : repérage des points d'appuis et des points à faire progresser.	

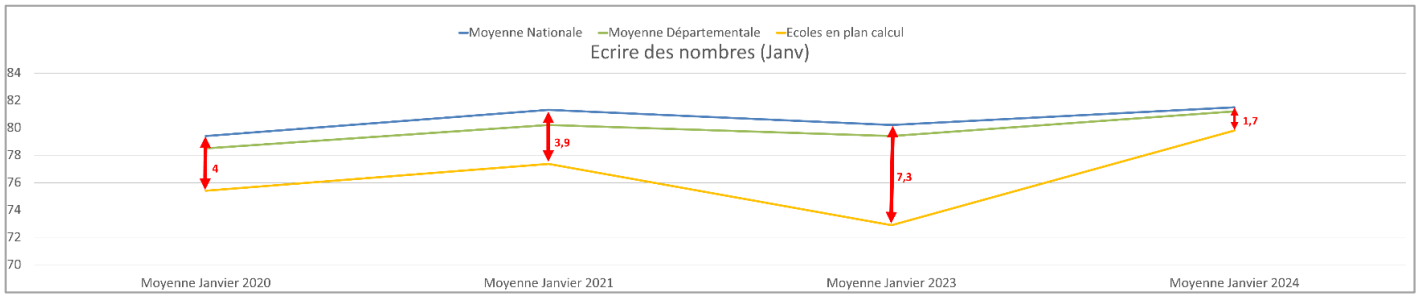
CPDMATHS60

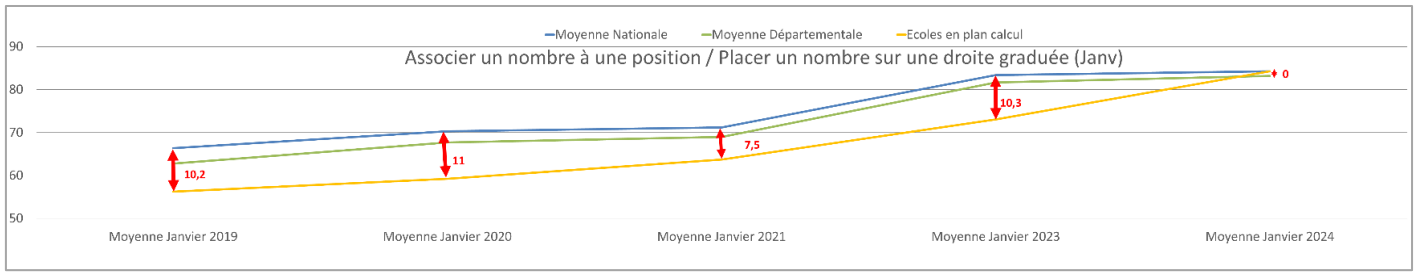
BILAN :

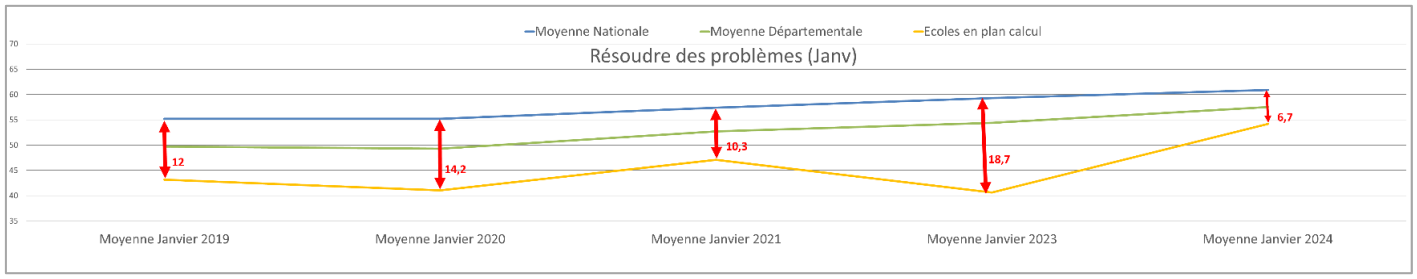
ANNEXE 2 : ÉVOLUTION DES RÉSULTATS DES COMPÉTENCES DE MATHÉMATIQUES AUX ÉVALUATIONS NATIONALES DES ECOLES EN PLAN CALCUL DE 2019 À 2023

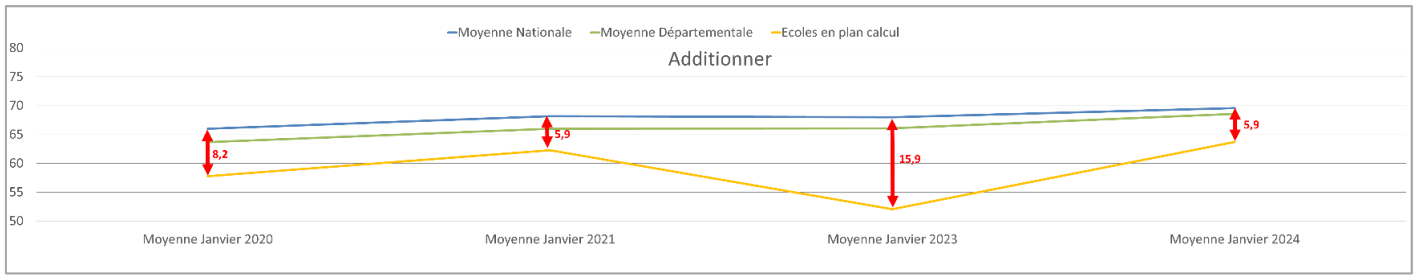


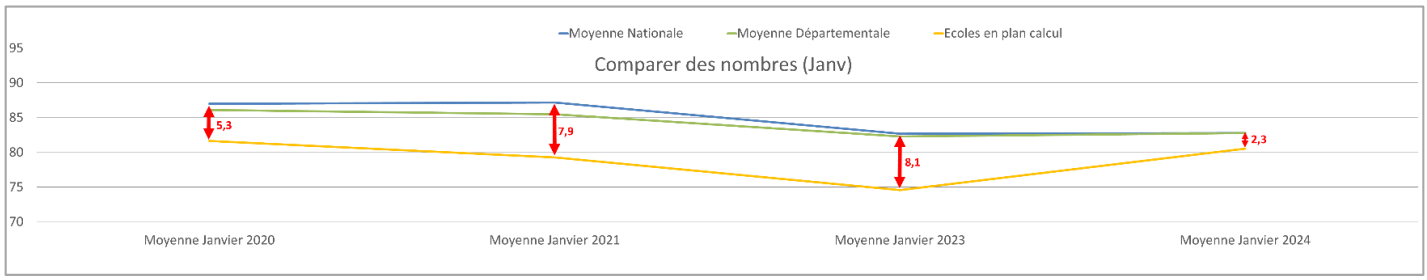
ANNEXE 3 : EVOLUTION DES RÉSULTATS DES COMPÉTENCES DE MATHÉMATIQUES AUX ÉVALUATIONS NATIONALES DES ÉCOLES EN PLAN CALCUL SUR L'ANNÉE SCOLAIRE 2023 - 2024



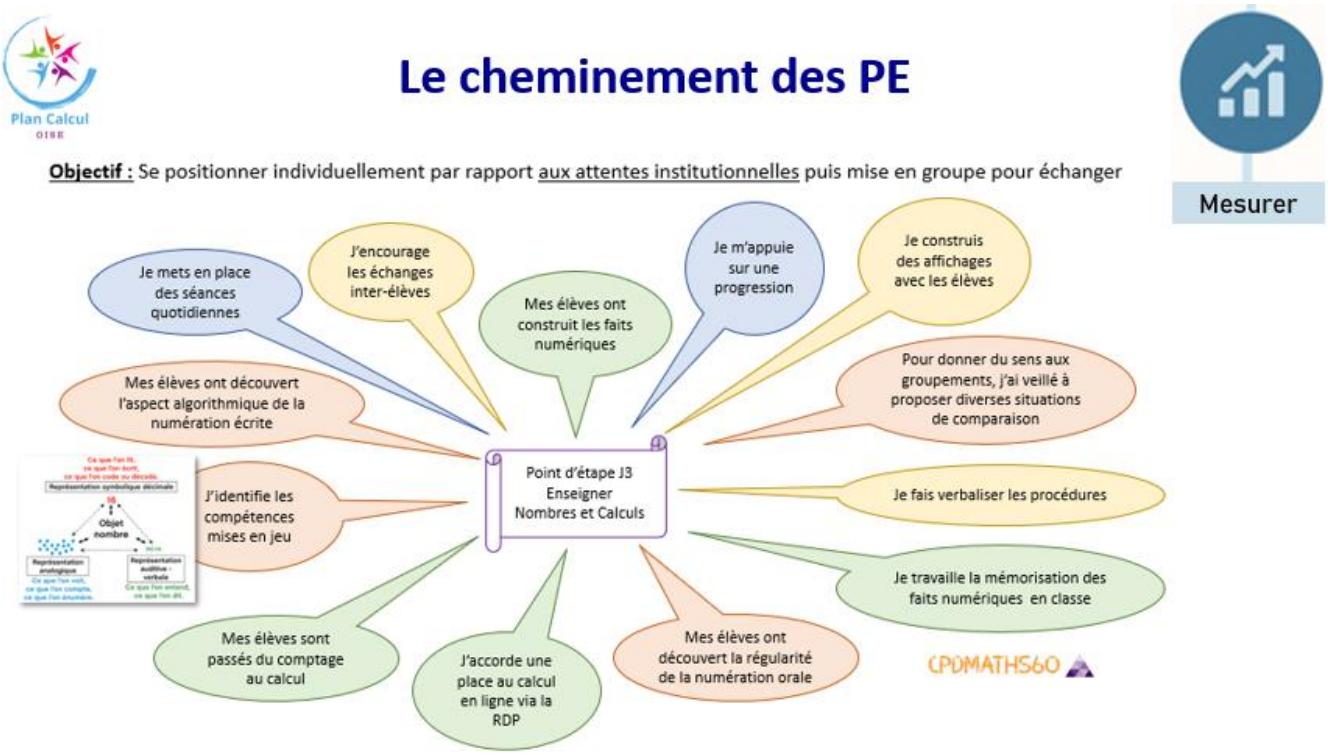








ANNEXE 4 : CHEMINEMENT DES ENSEIGNANTS



DES SYSTÈMES HYPERMÉDIAS DE DOCUMENTATION DE LA PRATIQUE

Catherine Journal
Doctorante, Université Côte d'Azur
LINE
journal.catherine@orange.fr

Jérôme Santini
MCF HDR, Université Côte d'Azur
LINE
jerome.santini@univ-cotedazur.fr

Jean-Noël Blocher
Ingénieur de recherche, Université Côte d'Azur
CREAD
jean-noel.blocher@inspe-bretagne.fr

Résumé
Cette communication en lien avec le projet en cours ANR-DEEC (https://blog.inspe-bretagne.fr/anr-deec-ace/) décrit et analyse un dispositif d'accompagnement pour des enseignants mettant en œuvre une séquence de création d'énoncés et de résolution de problèmes arithmétiques dans des classes de CE1 et CE2. Cette séquence a été développée au sein d'une ingénierie coopérative par un collectif de professeurs et chercheurs réunis en un LéA (Lieu d'Éducation Associé à l'IFE, ENS Lyon). Ce même collectif a développé un ensemble de systèmes hypermédias de documentation de la pratique, des Systèmes Hybrides Textes-Images-Son, SHTIS. Ces systèmes doivent permettre à la fois l'étude de la séquence, son amélioration et sa transmission. Ils cherchent notamment à rendre compte d'un ensemble de pratiques « efficaces » des professeurs du LéA, en désignant ainsi les gestes qui mobilisent explicitement des éléments en rapport avec le savoir en jeu, nécessaires pour faire fonctionner les dispositifs mis en œuvre dans la séquence. Ils répondent à la nécessité de documenter ces gestes et les jargons liés.
Nous allons nous intéresser à la conception et la construction d'un SHTIS à partir d'exemples ainsi qu'à sa place précise dans le dispositif d'accompagnement destiné aux professeurs qui mettent en place la recherche.

I - LE PROJET ANR DEEC

Cette communication s'appuie le travail de recherche effectué durant les deux premières années de la recherche ANR-DEEC, ANR pour Agence Nationale de la Recherche et DEEC pour Détermination d'Efficacité des Expérimentations Contrôlées en enseignement-apprentissage (DEEC-ANR-22-CE41-0020).

1 La recherche DEEC

La recherche DEEC fait suite à la recherche ACE (Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire) qui a produit une progression en arithmétique pour les classes de cycle 2 de l'école élémentaire (Vilette et al., 2017). Elle est soutenue par la DGESCO (Direction Générale des Enseignements Scolaires). Les

membres de cette recherche coopèrent au sein d'un Lieu d'Éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation (LéA-IFÉ ; (Monod-Ansaldi et al., 2022)), nommé Détermination d'efficacité d'un dispositif d'enseignement[1] (Académies de Aix-Marseille, Rennes, depuis 2024). Ce LéA poursuit le travail produit dans le LéA Armorique-Méditerranée et auparavant le LéA Réseau école Bretagne. Cette recherche répond à deux groupes d'objectifs comme le montre la figure ci-dessous.

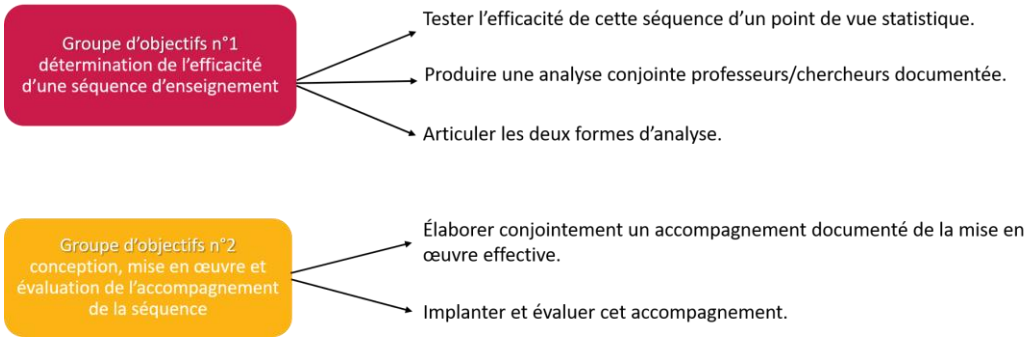


Figure 1. Objectifs de la recherche ANR-DEEC

Elle cherche à caractériser les conditions nécessaires pour une diffusion efficace, à grande échelle, d'une séquence de création-résolution de problème au CE1 (7-8 ans) et au CE2 (8-9 ans).

Nous constatons régulièrement que les recherches peuvent montrer expérimentalement l'efficacité d'une pratique d'enseignement-apprentissage dans un environnement contrôlé, sans que cette efficacité ne perdure lorsque cette pratique est testée expérimentalement à plus grande échelle, c'est-à-dire dans un grand nombre de classes. Réussir la diffusion d'une pratique d'enseignement-apprentissage à grande échelle suppose de faire en sorte que les professeurs qui mettront en œuvre la séquence de classe aient compris et intégré les raisons explicatives de l'efficacité de la séquence, telles qu'elles auront été déterminées par l'équipe de recherche.

Pour cela, un des objectifs consiste dans l'élaboration d'un accompagnement multimédia pour cette mise en œuvre, conçu conjointement par les membres du LéA. Les raisons d'efficacité des mises en œuvre sont identifiées à partir de films de classe, de films de la pratique, puis elles sont concrètement documentées au sein d'un dispositif de systèmes hypermédias centrés sur les éléments cruciaux et les moments critiques de la séquence. Ces systèmes hypermédias de documentation de la pratique que nous appelons des Systèmes Hybrides Texte-Image-Son (SHTIS ; (Blocher, 2018, 2024)), sont mis à disposition des professeurs qui veulent expérimenter via une plateforme Moodle et mettre en place la séquence.

2 La séquence de création-résolution de problèmes

La séquence produite, les livrets de tests (pré et post- tests) ainsi que les systèmes hypermédias de documentation de la pratique sont améliorés collectivement d'une année sur l'autre. Le projet DEEC fonctionne comme une structure itérative d'amélioration de la pratique. Ce sont les résultats aux tests pratiqués selon des essais randomisés contrôlés combinés à l'analyse conjointe de la pratique documentée qui permettent cette amélioration pour l'année suivante. Nous proposons dans la figure 2 une représentation de cette structure itérative.

[1] LéA-IFÉ, Détermination d'efficacité d'un dispositif d'enseignement : https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/determination-defficacite-dun-dispositif-denseignement

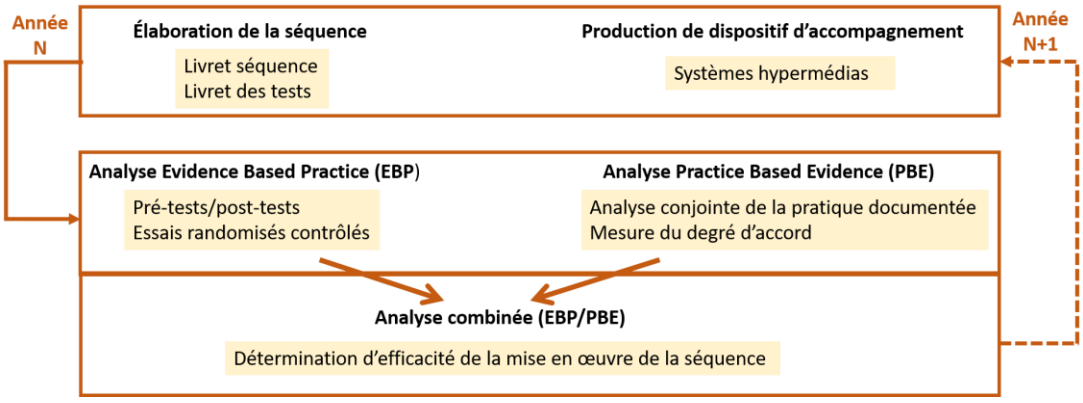
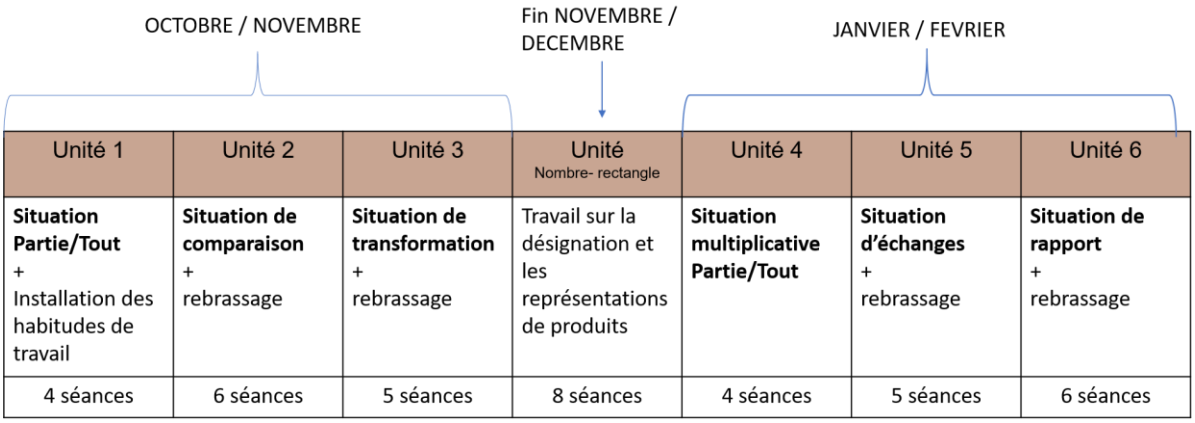


Figure 2. Une structure itérative d'amélioration de la pratique

C'est donc avec ce fonctionnement que notre séquence initiale de dix-huit séances mises en place de manière densifiée sur six semaines la première année s'est transformée en une séquence de trente-huit séances la deuxième année. La dernière version de la séquence DEEC est une séquence de création-résolution de problèmes qui se compose de six unités, trois dans le champ additif et trois dans le champ multiplicatif. Une unité nombre-rectangle, issue de la recherche ACE s'intercale entre ces deux groupes pour répondre à un besoin mis en évidence par le collectif de travailler cette représentation mathématique en amont des unités du champ multiplicatif. Les unités sont de longueurs différentes comme le montre la figure 3.



Unité 1	Unité 2	Unité 3	Unité Nombre- rectangle	Unité 4	Unité 5	Unité 6
Situation Partie/Tout + Installation des habitudes de travail	**Situation de comparaison** + rebrassage	**Situation de transformation** + rebrassage	Travail sur la désignation et les représentations de produits	**Situation multiplicative Partie/Tout**	**Situation d'échanges** + rebrassage	**Situation de rapport** + rebrassage
4 séances	6 séances	5 séances	8 séances	4 séances	5 séances	6 séances

Figure 3. Programmation de la séquence DEEC

Cette séquence repose sur des principes que le groupe de recherche se donne et met à l'épreuve, (i) la création de problème pour améliorer les compétences des élèves en résolution de problème (Cai, 2022), (ii) une acculturation progressive des élèves à la catégorisation de problèmes (Vicente et al., 2022) en appui sur des systèmes de représentation, (iii) l'usage simultané de plusieurs systèmes de représentation des situations mathématiques étudiées.

Une des caractéristiques de cette séquence réside dans le fait que les unités suivent quasiment toujours la même structure. Pour la décrire, nous allons prendre l'exemple de la première unité, unité qui est documentée en partie par le SHTIS que nous présenterons dans la deuxième partie de ce texte. L'unité 1 dont la structure est représentée dans la figure 4 se déroule sur quatre séances de quarante-cinq minutes.

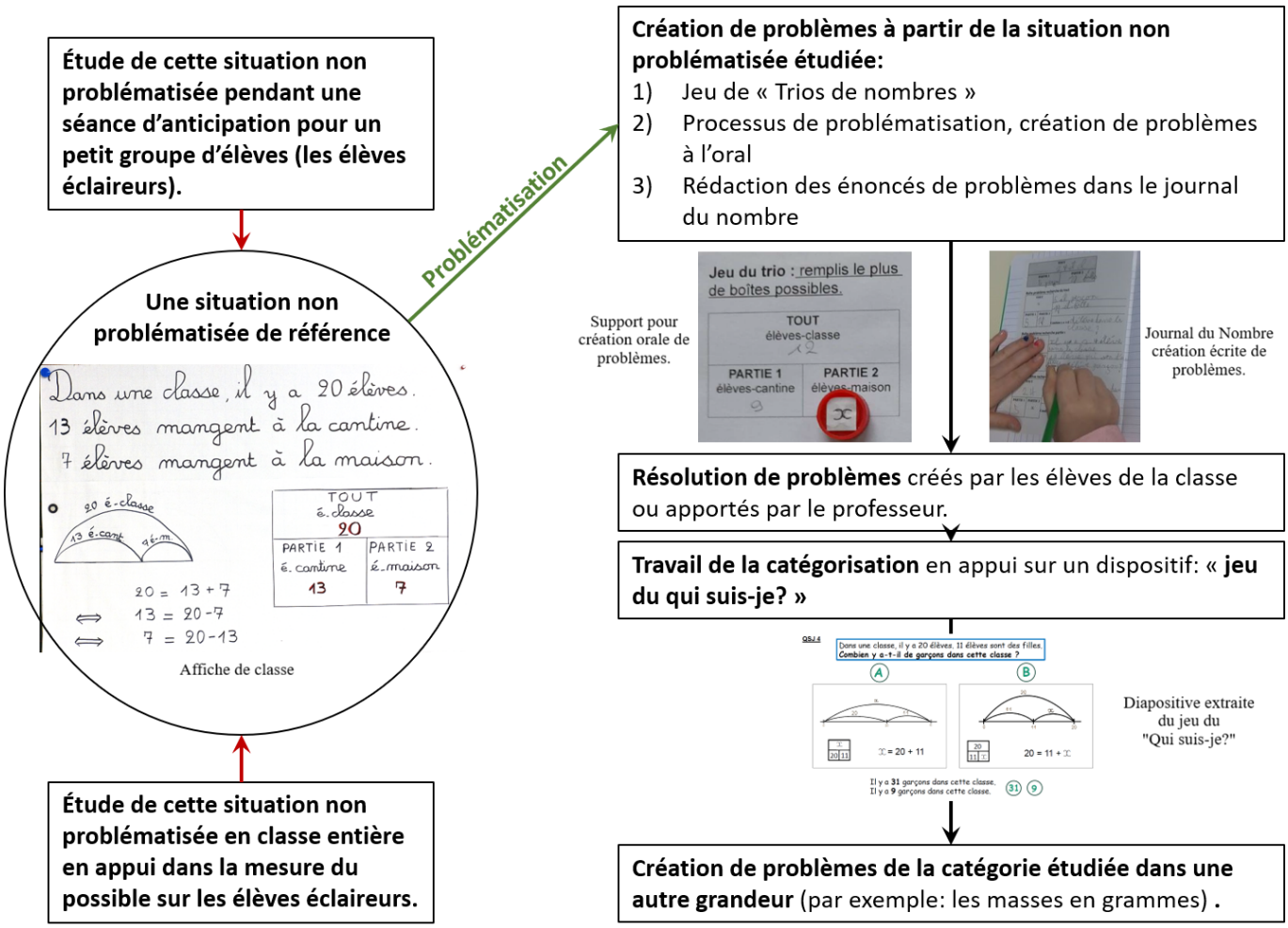


Figure 4. Structure de l'unité 1, une structure qui se répète

L'unité 1 de la séquence commence par l'étude de la situation de référence, une situation familière de la classe qui concerne les élèves qui mangent, ou ne mangent pas, à la cantine. D'abord dans le groupe d'anticipation, puis en classe entière, la situation non problématisée est travaillée et représentée sous plusieurs formes comme le montre la photo de l'affiche de classe dans le cercle de la figure 4. Par la suite, les élèves apprennent à créer trois problèmes à partir de cette situation non problématisée, dans un premier temps à l'oral, puis dans un second temps à l'écrit dans leur cahier dédié à la recherche mathématique, nommé Journal du nombre (Sensevy, 2025). Pour continuer, les élèves résolvent les problèmes de leurs pairs ou du professeur et travaillent la catégorisation de problèmes. Enfin, de manière à éviter que les élèves associent une catégorie de problème à une grandeur, l'étude d'une situation de la même catégorie mais dans une grandeur différente est proposée aux élèves. À la fin de l'unité, la situation que nous avions dite précédemment de référence devient la situation emblématique de la catégorie pour la classe.

Cette séquence est le résultat du travail d'ingénierie de notre collectif que nous allons caractériser.

3 L'ingénierie coopérative et son dispositif numérique de fonctionnement

Les ingénieries coopératives sont une forme de recherche orientée par la conception (design-based research ; (Sensevy et al., 2013)) tel que le collectif didactique pour enseigner le décrit dans son livre un *Art de faire ensemble* paru en 2024.

> *« Une ingénierie coopérative renvoie à tout collectif, établi en tant que collectif de pensée (Fleck, 2005), qui se donne à lui-même, par la coopération, des fins communes pour l'amélioration de la pratique, et qui expérimente conjointement la pertinence de ces fins au sein de dispositifs concrets, selon un processus itératif [...]Le collectif Didactique pour Enseigner, en Théorie de l'Action Conjointe en Didactique fait l'hypothèse que le développement d'ingénieries coopératives appellera progressivement à l'élaboration d'une nouvelle épistémologie des sciences de la culture, une épistémologie de l'ascension de l'abstrait au concret. (Lefeuvre, 2018) » (Didactique pour enseigner (collectif), 2024, p. 457).*

Concrètement, notre ingénierie coopérative est un collectif d'une trentaine de membres, des professeurs-chercheurs, des chercheurs, des ingénieurs de recherche hypermédias, des membres de la communauté éducative des académies de Rennes et d'Aix-Marseille. Nous sommes réunis dans le but de produire une œuvre commune : une séquence de création-résolution de problème au CE1-CE2 et dans l'objectif commun de documenter nos pratiques que nous étudions pour mieux les comprendre et les améliorer. C'est un dispositif qui se construit progressivement dans un long travail d'enquête collectif qui pour une grande majorité de ses membres travaillent ensemble depuis 2011. Nous nous réunissons en séminaire de travail dix fois dans l'année dont une fois au moins en séminaire de trois jours. Travailler sur deux académies aussi éloignées l'une de l'autre, nous oblige à utiliser un système de visioconférence, celui de BigBlueButton, ce système permettant aussi l'enregistrement vidéo de nos journées de travail. De plus, pour ce travail coopératif, dans leur travail quotidien, l'ensemble des membres de l'ingénierie est amené à (i) communiquer, (ii) échanger des documents, (iii) échanger des vidéos de pratiques de classe, (iv) commenter ces vidéos. Dans le même temps, le plan de gestion du projet ANR DEEC a amené les ingénieurs du projet à concevoir une procédure de récolte, de diffusion et d'archivage pérenne des données de la recherche (notamment le RGPD). Ce dispositif numérique de fonctionnement coopératif déployé pour servir le fonctionnement de notre ingénierie coopérative s'articule autour de deux trios d'outils comme le montre la figure 5.



Figure 5. Le dispositif numérique de fonctionnement coopératif

Un premier trio concerne l'ensemble des échanges, de la communication et de l'inscription, au sens de (Latour & Woolgar, 2013), de ce que l'on pourrait appeler le dialogue d'ingénierie. Cet ensemble d'outils bureautiques s'organise autour d'une plateforme Moodle, de la suite Onlyoffice et de l'outil de partage de document Owncloud.

Un second trio d'outils concerne plus précisément les activités de partage, d'archivage et d'analyse conjointe des données vidéos recueillies en classe. ViSA archive de façon pérenne et sécurisée les données. Le couple Peertube-Celluloïd, déployé sur l'instance locale de L'INSPE de Bretagne, permet l'exploitation collective de ces données, notre corpus audiovisuel.

Cet ensemble d'outils de gestion de corpus audiovisuels permet de fabriquer les éléments du système hypermédia de documentation, les SHTIS, les Systèmes Hybrides Texte-Image-Son que nous allons présenter.

II - LES SYSTÈMES HYBRIDES TEXTE-IMAGE-SON (SHTIS)

1 Un SHTIS : C'est quoi ?

Un SHTIS est un système hypermédia de représentation, un document numérique qui combine plusieurs contenus multimédias tels que textes, images, vidéos, audios. Il est dit « de représentation », dans sa fonction essentielle de donner à voir et à comprendre une pratique (Blocher & Lefeuvre, 2017, p. 102), de la documenter. Pour ce faire, un SHTIS donne à voir des relations entre la pratique filmée, sa retranscription, des commentaires, un texte en voix-off, etc., d'où le nom de Système Hybride Texte-Image-Son (SHTIS). La figure 6 fournit une première description de ce que peut être un SHTIS.

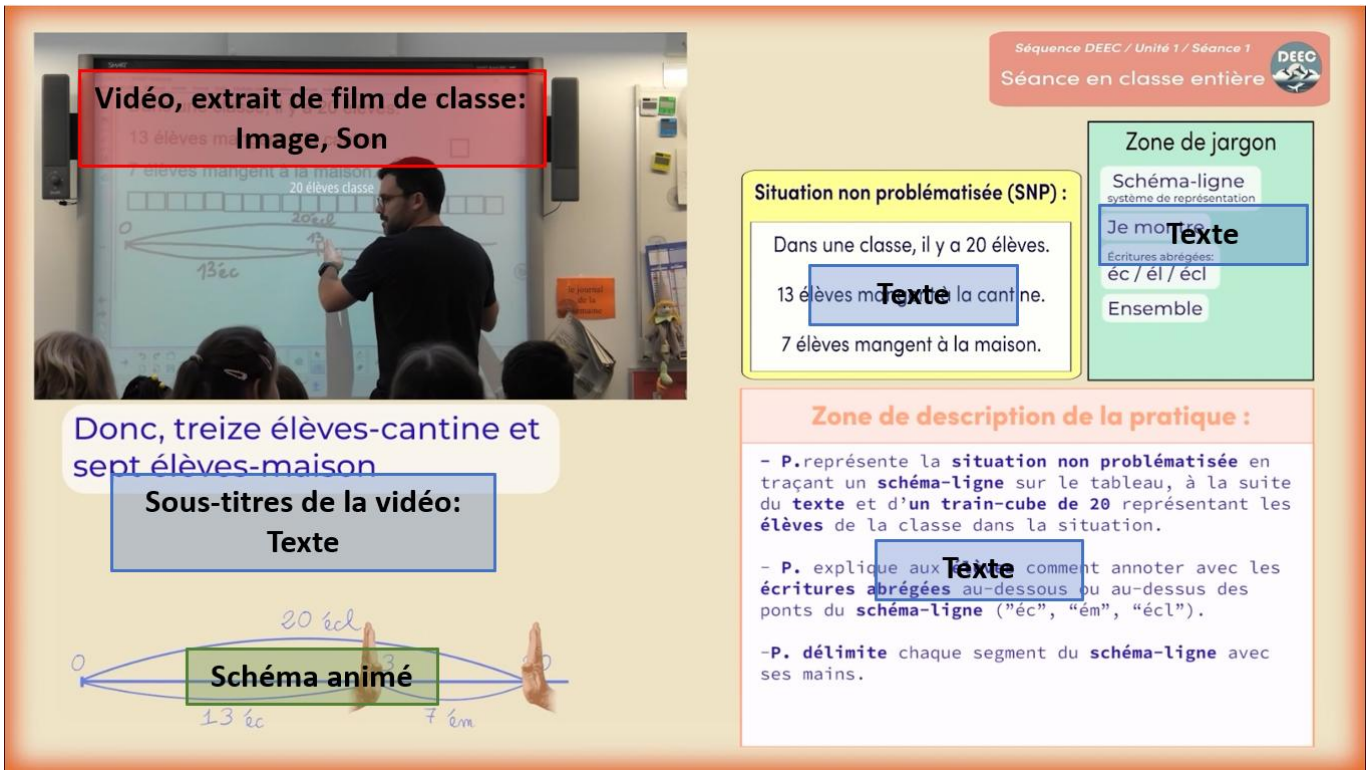


Figure 6. Un système hypermédia : Texte-Image-Son

La cohabitation des éléments de nature analogiques, digitales et analogiques-digitales en un seul espace permet de construire une première forme de documentation (Sensevy et al., 2022) de ce que l'on cherche à comprendre. Nous donnons une représentation de cette cohabitation dans la figure 7.

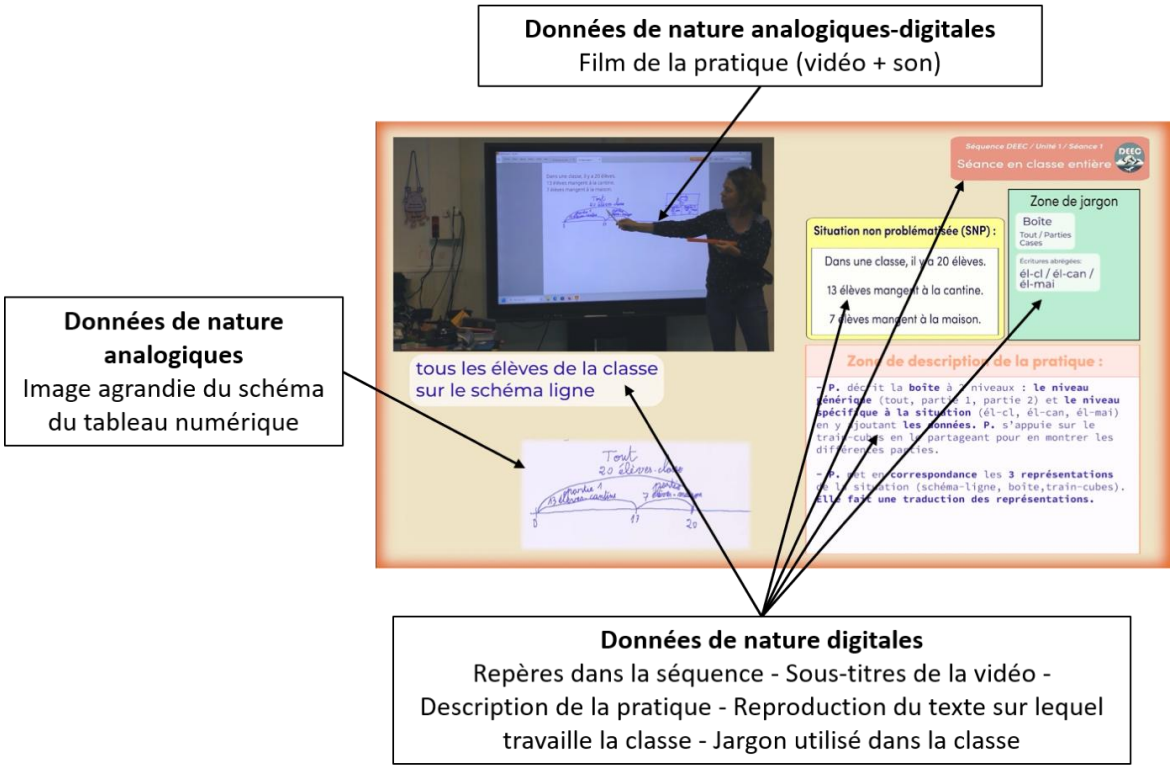


Figure 7. Un SHTIS, espace où cohabitent des données de différentes natures

Un SHTIS est donc une *forme-représentation*[2], un système de signes, dont le noyau est un film de la pratique, un film d'étude (Sensevy et al., 2022). Ce film est annoté, il est mis en réseau avec d'autres documents. Dans l'exemple ci-dessus, par exemple, ces éléments sont le synopsis et la transcription du film, ainsi que des expressions du « jargon », c'est-à-dire du langage spécifique à la pratique de la classe (Sensevy et al., 2019). Les annotations peuvent aussi être des commentaires textuels ou audios, faits par des acteurs de cette pratique, des chercheurs ou d'autres personnes. Elles peuvent être aussi une autre vidéo, une image, un lien hypertexte. Ce sont aussi, dans certains cas, des « effets techniques », comme parfois l'effet de « zoom » afin d'en signaler l'intérêt. Ces annotations viennent enrichir la compréhension générale de la situation. Chaque annotation peut être mise en relation avec toute autre annotation de manière réciproque. Ainsi la notion d'annotations réciproques joue un rôle essentiel dans l'appréhension et dans l'usage des SHTIS. Elle signifie que tout élément d'un SHTIS peut annoter un autre : par exemple, on peut dire non seulement qu'un commentaire C annote telle partie d'un film P, et permet de le voir différemment, mais encore que cette partie d'un film P annote le commentaire C et amène ainsi à le voir différemment.

> *« L'ensemble du film et des annotations s'enrichissant réciproquement aboutissent à ce qu'on appelle en TACD une mise à disposition de la pratique. Elle doit permettre à celui qui étudie ce film de faire les connexions entre des événements, d'y référer autant que nécessaire, de voir et comprendre l'intrigue didactique proposée, de l'annoter autant que de besoin. » (Didactique pour enseigner (collectif), 2024).*

[2] Le terme *représentation* est souvent utilisé dans le sens de *forme-représentation*. Cette conception ne renvoie pas à une vision mentaliste mais à une conception publique de la représentation. Les formes-représentations sont un système de signes qui permettent d'enseigner, d'apprendre, d'enquêter et d'imiter, en particulier d'imiter la culture d'une pratique qui est ainsi représentée. Elles peuvent être matérielles ou symboliques (verbales, graphiques, gestuelles). (Didactique pour enseigner (collectif), 2024)

L'épisode de la pratique filmée, est un épisode que le collectif s'est accordé pour trouver remarquable, en fonction des critères qui ont organisé la co-conception de la séquence, en particulier une action suffisamment conjointe et l'usage de représentations adéquates. Il est alors considéré comme emblème, comme exemple emblématique d'une pratique suffisamment efficace. Il devient exemple exemplaire[3] dans la mesure où il est reconnu et légitimé par les membres du collectif.

Les SHTIS sont des instruments qui favorisent et développent le dialogue d'ingénierie. *Dans un tel dialogue, chaque membre partage son point de vue avec les autres en donnant à voir et à comprendre ses arguments à partir de son expérience et de sa pratique* (Morellato, 2017). Ils ont à la fois des fonctions de diffusion, de discussion et de transformation des pratiques qu'ils documentent.

Prenons un exemple, le SHTIS#3 « système de représentations » dont on voit une capture d'écran annotée sur la figure 8.

2 Un exemple : le SHTIS#3 « système de représentations »

Le SHTIS#3 est associé à la première partie de la première séance de la séquence, une partie de la séance où élèves et professeur vont découvrir les premiers dispositifs essentiels à la mise en œuvre de la séquence DEEC. Nous appelons ici « dispositifs » (Agamben, 2007) « tout ce qui peut façonner des comportements, des dispositions » CDpE, 2024). La séquence DEEC s'appuie ainsi sur un système de dispositifs dont chacun répond à une finalité particulière élaborée par le collectif d'ingénierie. La *situation non-problématisée* est censée permettre aux élèves de comprendre, en actes, ce qui caractérise les problèmes à énoncé qu'ils doivent créer et résoudre. *L'exemple travaillé* désigne la manière dont le travail conjoint du professeur et des élèves doit rendre familier les élèves des manières d'agir nécessaires à la création et à la résolution de problèmes. La production de représentations et la traduction de représentations renvoient à une instrumentation du travail de cette création et de cette résolution.

Ce SHTIS se présente sous la forme d'une vidéo au format MP4 d'une durée de 13 minutes 30. Le choix de ce format relativement court est à la fois pragmatique et conceptuel, pragmatique, car cette durée rend favorable son visionnage en entier, et conceptuel car le SHTIS doit rendre compte de l'essentiel d'une analyse de la pratique.

Il est représenté dans la figure ci-dessous sur la table de montage du logiciel DaVinci Resolve ce qui permet de montrer sa composition. Il est constitué de trois extraits de film de la pratique tournés dans trois classes différentes, les zones bleues. Chaque extrait de film est entouré d'une voix off, les zones orangées. La voix off qui précède introduit l'extrait et celle qui suit le commente et l'analyse. Le SHTIS démarre par une introduction qui est là pour donner des explications sur des points essentiels, utiles à connaitre avant d'aborder la séance et le SHTIS. Il est composé en tout de 11 éléments de durée plus ou moins importante comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessous.

[3] Un exemple exemplaire est un exemple emblématique qui peut être utilisé de manière routinière, sans que les membres d'un collectif de pensée ressentent le besoin d'explicitation ni de justification, pour transmettre une connaissance, une pratique, voire une attitude adéquate, qui fera autorité dans la communauté concernée. (Didactique pour enseigner (collectif), 2024)

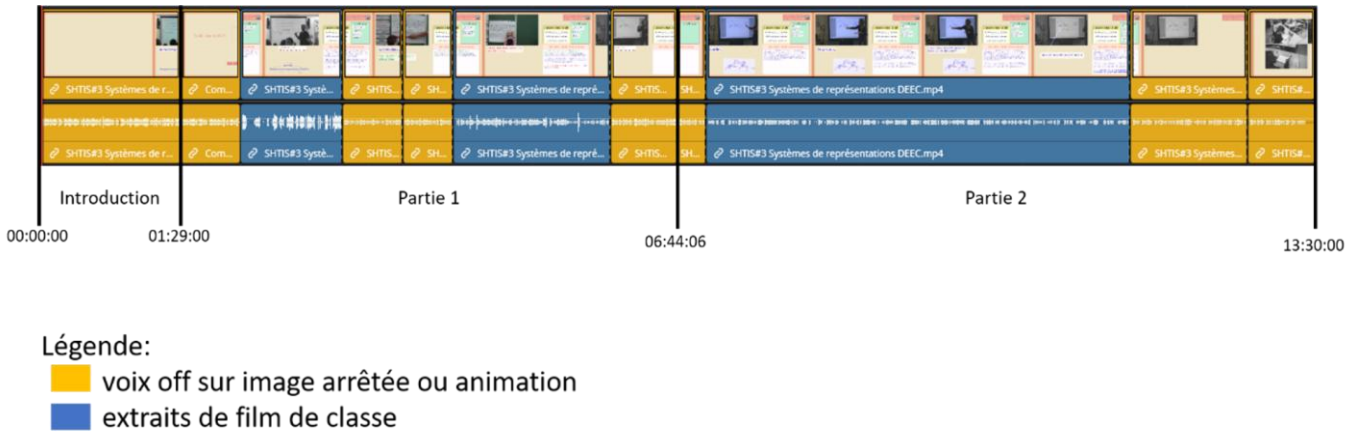


Figure 8. Le SHTIS#3, alternance de film et de voix off

Une autre manière de présenter un SHTIS est celle d'un synopsis, comme tout film, un film d'étude ou un film documentaire (figure 9).

Deux extraits de film sur un même moment de la séquence.

Temps	Trois parties	11 éléments	Documenter la pratique
00:00:00 01:29:00	**Introduction**	Où l'on présente les systèmes de représentations qui modélisent une situation non problématisée de Partie-Tout.	Donner des explications sur des points essentiels utiles à connaitre avant d'aborder la séance et le SHTIS (cf. p.13).
01:29:00 02:06:18	Partie 1 **Retour en classe entière**	Commentaires sur la situation et les représentations. Présentation de l'extrait qui suit.	Mettre l'extrait de film de classe à venir dans son contexte.
02:06:18 03:11:22		Le professeur montre sous forme d'exemple travaillé comment il représente la situation non problématisée sur un schéma-ligne.	Attirer l'attention sur le tracé, les gestes et le jargon autour du schéma-ligne (cf. p.19).
03:11:22 03:50:06		Commentaires sur le schéma-ligne	Partager un arrière-plan avec le lecteur.
03:50:06 04:22:02		Présentation de l'extrait qui suit.	Proposer une deuxième version du même moment de la séance.
04:22:02 06:02:00		La professeure invite des élèves à se joindre à elle pour présenter leur travail réalisé lors de la séance d'anticipation.	Engager une réflexion sur l'expression utilisée très régulièrement dans le document de la séquence : *travailler sous forme d'exemple travaillé* et la place des *élèves éclaireurs*.
06:02:00 06:44:06		Commentaires sur les élèves éclaireurs et la nécessité d'un jargon commun à la classe.	Montrer différents éléments de langage pour parler de la situation, vers un langage spécifique, commun à la classe.

Figure 9. Extrait du synopsis du SHTIS#3

Dans la partie 1 du SHTIS qui concerne le début de la séance, « le retour classe entière », deux extraits de film sont montrés. L'idée de montrer dans un SHTIS plusieurs pratiques d'un même moment est cruciale, d'une part pour éviter l'écueil de prendre ces films comme des « modèles de bonnes pratiques » à répliquer, et d'autre part pour faire saisir des variations importantes de la pratique à partir de la même matrice qu'est le document-séquence. C'est une idée que nous nous étions fixée dès le départ.

Chaque extrait de film de classe est introduit par une voix-off qui situe l'extrait dans son contexte. Pour visionner le premier extrait et son introduction dans le SHTIS, on peut flasher les QR codes dans la figure ci-dessous.

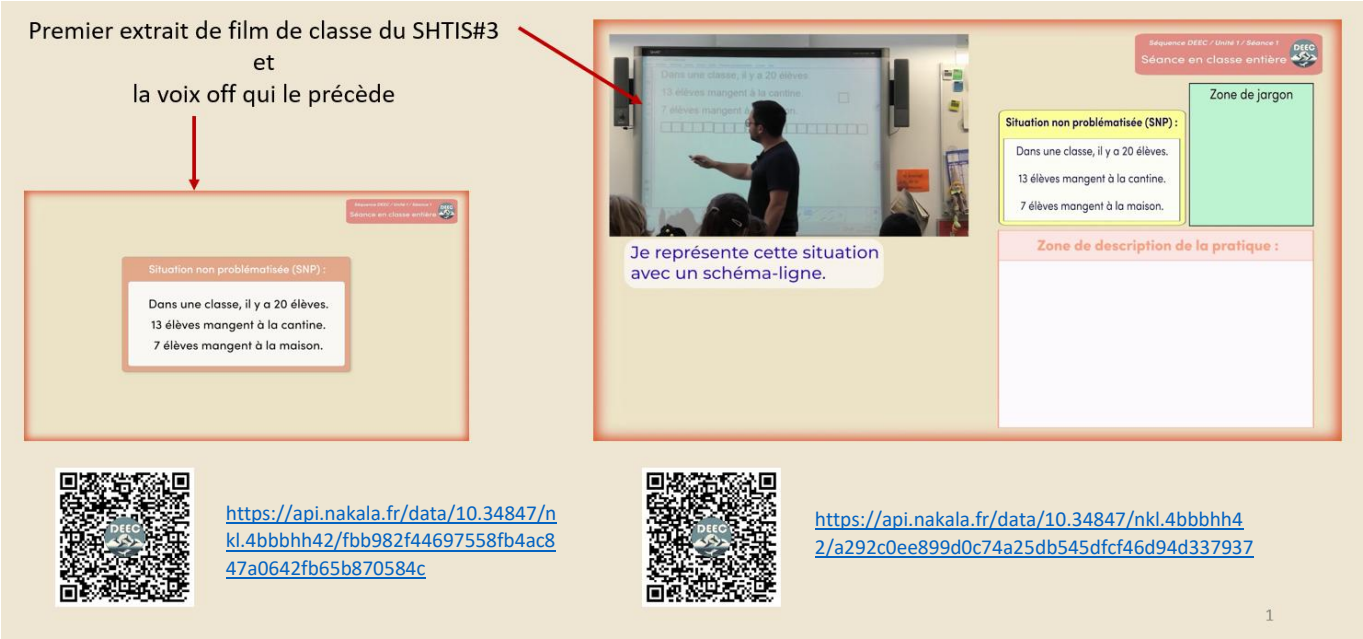


Figure 10. Visionnage possible d'un extrait de SHTIS

La capture d'écran du SHTIS#3, à droite sur la figure 10 permet d'envisager la complexité de sa lecture. Il existe en effet plusieurs zones qui s'animent en même temps. Dans les SHTIS réalisés pour la documentation de la séquence DEEC, le choix d'une certaine homogénéité des SHTIS a été fait pour en faciliter la lecture. Cinq zones se retrouvent dans chacun d'eux dédiées à la même chose, ce sont les zones repérées par un titre sur fond bleu dans la figure 11. Deux zones, quant à elles, ici en vert sur la même figure, sont utilisées à des fins qui peuvent être différentes selon les cas.

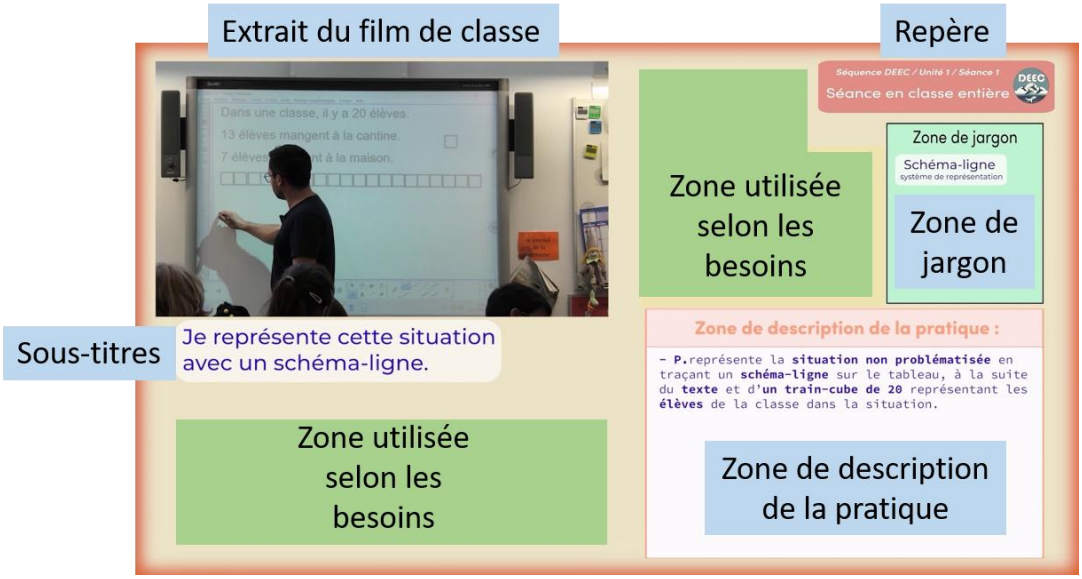


Figure 11. Une certaine homogénéité dans les SHTIS de DEEC

Le lecteur ne voit pas tout à la première lecture, mais le format relativement court des SHTIS permet plusieurs lectures. Des arrêts sur image permettent, par exemple, la lecture de la zone de description de la pratique, qui se remplit paragraphe par paragraphe.

Dans le SHTIS#3, les zones non fixées à l'avance servent à mettre en avant ce que nous appelons *la traduction de représentations* c'est-à-dire le passage d'une représentation à une autre d'une même

situation. C'est un des principes sur lesquels la séquence DEEC a été construite et que nous souhaitons partager avec le lecteur et lui donner à comprendre. Dans une des zones, s'affiche le texte de la situation, déjà présent sur le tableau de la classe et dans l'autre une reproduction du schéma-ligne représentant cette situation.

Dans l'extrait du SHTIS évoqué à la figure 10, le professeur montre sous forme d'*exemple travaillé* comment il représente la situation non problématisée sur un schéma-ligne. Dans la documentation par ce SHTIS, nous avons voulu attirer l'attention sur le tracé, les gestes et le jargon autour du schéma-ligne. Ainsi dans les dernières secondes de l'extrait, des mains apparaissent sur le schéma-ligne, réplique du schéma que le professeur trace au tableau. Ces mains reprennent le déplacement des mains du professeur sur le schéma-ligne pendant qu'il en parle, qu'il le fait parler. Au même moment ou presque, la zone de description se complète d'un nouveau paragraphe, « P (pour le professeur) délimite chaque segment du schéma-ligne avec ses mains ». C'est ce que nous voulons montrer dans la figure 12.

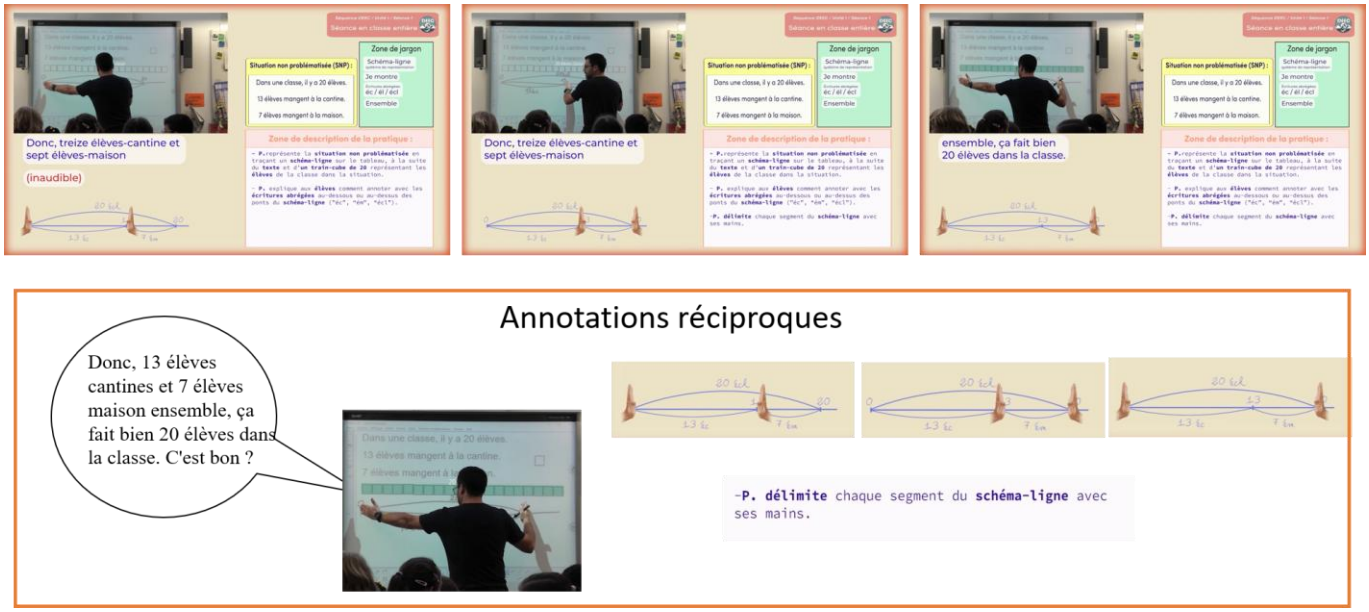


Figure 12. Le SHTIS, un système d'annotations réciproques

Il s'agit du principe d'annotations réciproques qui existe dans les SHTIS : les schémas reproduits annotent la vidéo comme la vidéo annote ces schémas, et il en est de même pour le texte de la zone de description de la pratique. Ce passage veut attirer l'attention du lecteur sur un *dispositif-geste* emblématique de la séquence DEEC, une manière de raconter la situation sur le schéma en y associant des gestes et le jargon adéquats. Ce *dispositif-geste* est un exemple emblématique de comment parler la situation en s'appuyant sur le schéma-ligne.

Nous retrouvons, là, le rôle du SHTIS dans l'accompagnement des professeurs qui expérimentent la séquence, c'est-à-dire ses fonctions de diffusion, de discussion et de transformation des pratiques qu'ils documentent. Il est important de se rappeler que ce SHTIS, comme tous les autres SHTIS dans DEEC, fait partie d'un système de documentation de la pratique. Il accompagne et est accompagné du document de la séquence et d'autres SHTIS.

3 La place du SHTIS dans le système d'accompagnement

Les SHTIS sont mis à disposition des professeurs des classes expérimentales sur une plateforme Moodle, une plateforme d'apprentissage en ligne sur laquelle les professeurs peuvent, entre autres, retrouver toute la documentation nécessaire pour mettre en place la séquence.

À chaque début d'unité, on retrouve comme le montre la figure 13, les différents SHTIS qui s'y rapportent ainsi que pour chacun d'eux une courte description de ce qu'ils contiennent, un synopsis large.

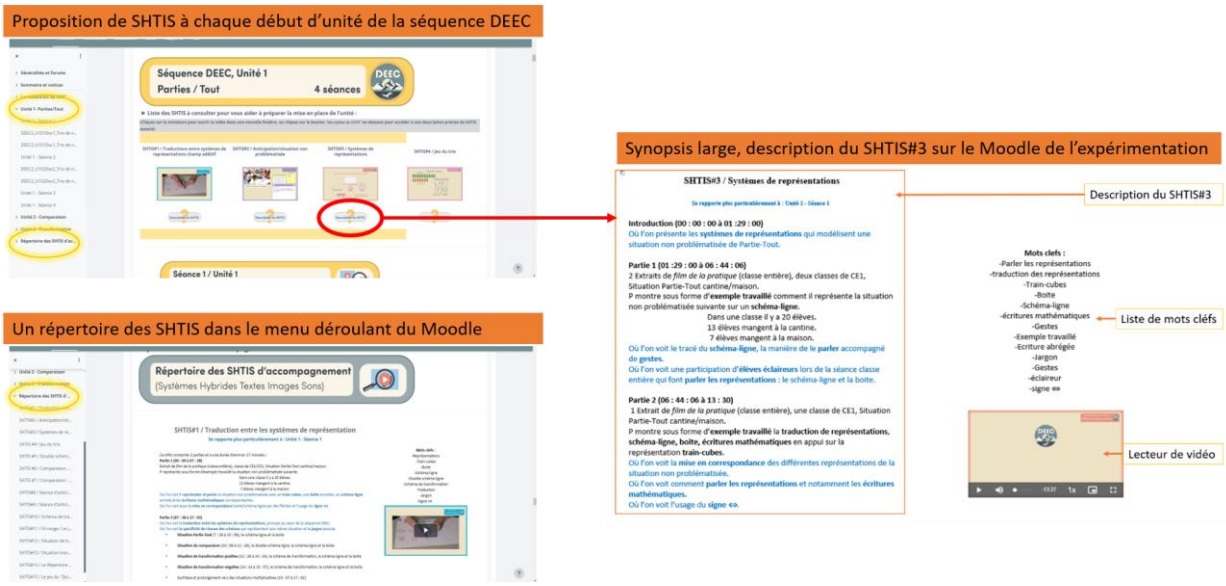


Figure 13. Un dispositif de la recherche : le Moodle de l'expérimentation

Ainsi avant de visionner le SHTIS, le lecteur peut, en un coup d'œil, se faire une idée de ce qu'il contient, des sujets qu'il aborde. Tous les SHTIS sont aussi stockés dans un répertoire sur ce même Moodle.

Comme nous l'avons dit précédemment, la lecture d'un SHTIS peut être complexe. C'est donc lors des réunions d'accompagnement, en présentiel, que nous avons permis aux professeurs qui expérimentent et mettent en œuvre la séquence dans leur classe de faire connaissance avec les SHTIS. Les SHTIS sont utilisés comme *instrument d'augmentation du dialogue* d'ingénierie, au sens où Blocher (2018, 2024) le propose. Au sein de différents collectifs, Blocher (Ibid) montre que les SHTIS constituent des supports de la discussion de l'ingénierie. Leur caractère instrumental, qui repose sur l'annotation réciproque des données les unes avec les autres, permet à chaque acteur de (i) mieux comprendre la situation étudiée et de (ii) participer activement aux discussions visant à améliorer ladite situation. Ainsi, les SHTIS augmentent le dialogue d'ingénierie et concourent à l'évolution du style de pensée du collectif. Nous considérons en effet que les professeurs du groupe expérimental participent à l'ingénierie. Dans ces réunions les SHTIS ou des extraits de SHTIS sont visionnés, commentés, discutés collectivement, parfois après les retours sur la mise en œuvre de la séquence et parfois avant la mise en œuvre des séances qu'ils documentent. C'est ce que montre l'extrait d'un diaporama utilisé pendant une de ces réunions sur la figure 14.

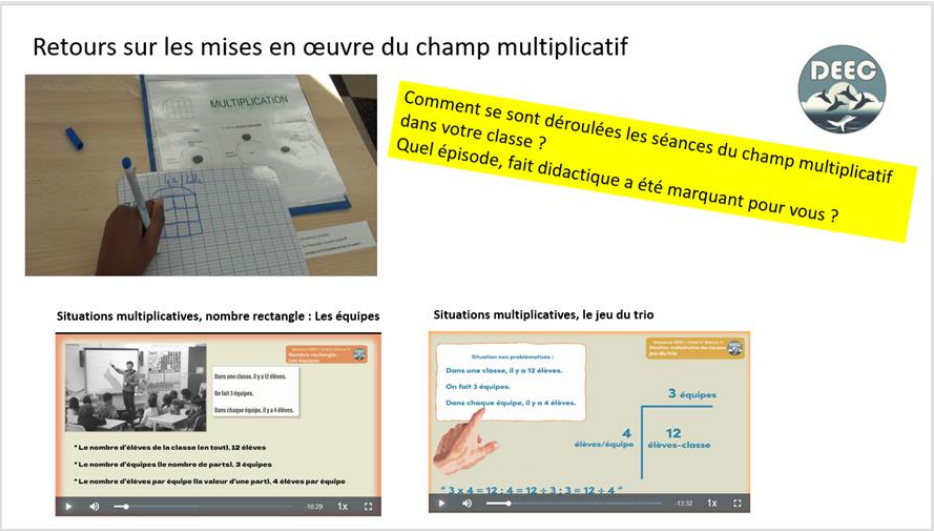


Figure 14. Les SHTIS en réunion d'accompagnement

Il s'agit de parler sur du concret, de parler de la même chose, de ne pas se retrouver dans une situation *des mots sans les choses* dont parle le livre d'Éric Chauvier (2014).

Ces SHTIS sont livrés en complément du texte de la séquence, dans un système documentaire plus grand. Ce système documentaire sous forme de Moodle donne une place aux échanges grâce à un forum, une possibilité de partage de documents par tous les participants à cette recherche. Les professeurs expérimentaux par leur retour sur l'expérimentation participent à la recherche et par là à l'amélioration des SHTIS et de la séquence. Nous l'avons d'ailleurs expérimenté au cours de la deuxième année de notre recherche en proposant aux professeurs du groupe expérimental d'annoter des extraits de films de classe. Ces extraits, déposés dans des projets de Celluloïd, une application d'annotation vidéo de façon collaborative développée par le consortium Canevas, peuvent devenir des éléments de SHTIS. Cette application Celluloïd est simple d'utilisation, relativement intuitive et permet à chacun d'apporter sa contribution aux travaux de notre ingénierie coopérative. Chacun peut annoter, commenter ou analyser le document audiovisuel numérique ainsi partagé comme le montre la figure 15.

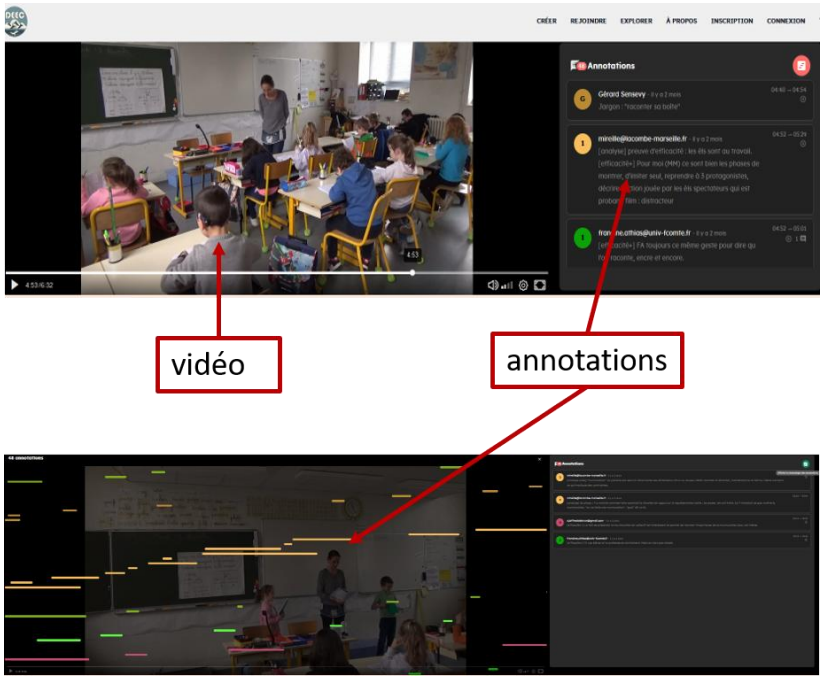


Figure 15. Utilisation de Celluloïd pour annoter les vidéos

Les annotations sont corrélées à un segment du film de la vidéo. Nous avons aussi la possibilité de les récupérer toutes dans un fichier et donc les utiliser pour améliorer les SHTIS. Le collectif de l'ingénierie s'agrandit des professeurs qui expérimentent la séquence.

III - CONCLUSION : SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

Dans les recherches précédentes de notre collectif comme la recherche ACE, les SHTIS avaient pour fonction première de documenter la pratique en donnant à voir l'action conjointe professeur-élèves et l'avancée dans les savoirs. Lors de la conception des SHTIS dans DEEC, nous nous sommes appuyés essentiellement sur une deuxième fonction, celle d'accompagner les professeurs du groupe expérimental qui mettent en place la séquence dans leur classe. Mais il ne s'agit pas de donner à ces professeurs une « méthode » et de leur montrer par les SHTIS comment l'appliquer. Avec les SHTIS nous souhaitons partager notre arrière-plan, le *style de pensée* produit de notre *collectif de pensée*.

> *« Un groupe d'individus menant une étude partagée et collective des problèmes qui se posent à lui, produit, dans la durée et dans la continuité de son travail, des façons de penser et d'agir qui le caractérisent. Progressivement il donne jour à un style de pensée qui oriente mais aussi contraint son travail selon cette orientation. Un tel groupe est un collectif de pensée. » (CDpE ,2024)*
>
> *« Pour la TACD, le style de pensée se concrétise dans les représentations publiques, les jargons et les instruments que construit et intègre le collectif au cours de son travail. Il constitue un arrière-plan évolutif, partagé, par les membres de ce collectif. » (CDpE ,2024)*

Nous faisions l'hypothèse dans la recherche DEEC que l'accompagnement des professeurs expérimentaux avec les SHTIS, permettrait à ces professeurs une meilleure compréhension de la séquence et que, de ce fait, les élèves de ces professeurs auraient plus progressé que les élèves des professeurs non accompagnés. Pour vérifier cette hypothèse nous avions, au cours de la première année 2023-2024, organisé les classes expérimentales en deux groupes. Le premier groupe a bénéficié d'un accompagnement à raison de six demi-journées par an et de l'accès aux SHTIS. Le deuxième groupe a eu

le droit à une réunion de présentation du projet et avait uniquement accès au document papier de la séquence. Chaque groupe possédait son propre Moodle, muni d'un forum. Les élèves du groupe accompagné ont progressé significativement plus que les élèves du groupe non accompagné : l'effet moyen est relativement petit (un point de différence en moyenne si l'on ramène les résultats à une notation sur 20) mais très solide (significatif).

La recherche étant toujours en cours, il est pour l'instant encore difficile d'en dire plus sur les résultats. À la fin de la première année d'expérimentation, nous avons proposé aux professeurs du groupe expérimental ayant profité de l'accompagnement de donner leur regard sur les SHTIS à travers un questionnaire. Leur regard est vraiment positif par rapport aux SHTIS, comme montre la figure 16.

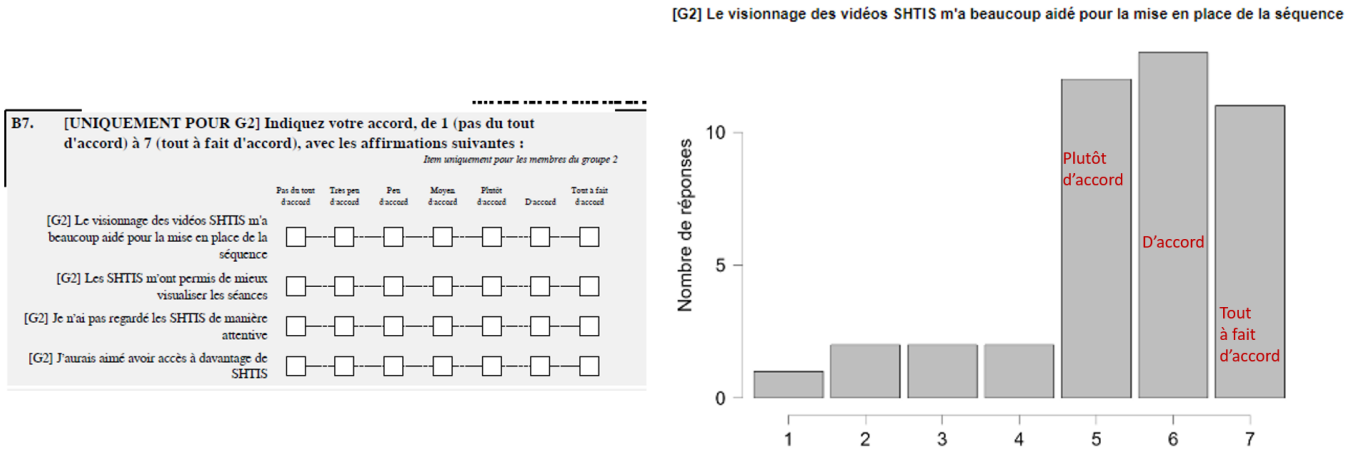


Figure 16. Premiers résultats de l'enquête post-expérimentation 2023-2024

La majorité de ces professeurs disent dans le questionnaire d'enquête et lors des réunions d'accompagnement que les visionnages des SHTIS les ont beaucoup aidés pour la mise en place de la séquence. Ils parlent d'aide pour démarrer la mise en œuvre de la séquence, comprendre les différents systèmes de représentations, s'approprier le vocabulaire, le langage, par exemple. Ils témoignent souvent de l'intérêt des SHTIS pour entrer dans la séquence, de comprendre les différents systèmes de représentation et de mieux s'approprier le vocabulaire, le langage, les gestes professionnels.

Aujourd'hui, nous avons plus de 20 SHTIS réalisés qui, d'après les premiers résultats et le retour des professeurs expérimentaux, ont un impact positif sur une mise en place de la séquence respectant au plus près notre style de pensée.

La séquence ayant évolué, se pose alors la question de la mise à jour de ces SHTIS, et donc la création d'un système hypermédia de documentation qui permette d'annoter ces SHTIS par d'autres SHTIS, des documents textes, des témoignages, des apports théoriques. De même, nous réfléchissons sur une documentation des élèves au travail, par exemple lorsqu'ils travaillent seuls sur leur cahier.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Agamben, G. (2007). *Qu'est-ce qu'un dispositif ?* Éd. Payot & Rivages.

Blocher, J.-N. (2018). *Comprendre et montrer la transmission du savoir. Les systèmes hybrides comme lieu de production et d'écriture de phénomènes. Illustration en théorie de l'action conjointe en didactique*. Thèses de sciences de l'éducation, Université de Bretagne Occidentale.

Blocher, J.-N. (2024). Des Systèmes Hybrides Texte-Image-Son (SHTIS) comme instruments du dialogue d'ingénierie. *Éducation et didactique*, 18(1), 53-66. https://doi.org/10.4000/11nxz

Blocher, J.-N., & Lefeuvre, L. (2017). Le système hybride textes-images-sons : Une exploration. *Recherches en didactiques*, 23, 99-132. https://doi.org/10.3917/rdid.023.0099

Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation et Didactique*, 16(3), 31-50. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642

Chauvier, E. (2014). *Les mots sans les choses*. Allia.

Collectif Didactique pour Enseigner (CDpE), (2024). *Un art de faire ensemble. Les ingénieries coopératives*. Presses Universitaires de Rennes.

Fleck, L. (2005). *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Les Belles Lettres.

Latour, B., & Woolgar, S. (2013). *La vie de laboratoire : La production des faits scientifiques*. La Découverte.

Lefeuvre, L. (2018). *Didactique de l'enquête pour une lecture interprétative d'une fable de Jean de La Fontaine, selon une épistémologie de l'élévation de l'abstrait au concret. Etude de cas au sein d'une ingénierie coopérative.* [Thèses de sciences de l'éducation]. Université de Bretagne Occidentale.

Monod-Ansaldi, R., Loisy, C., & Gruson, B. (2022). *Le réseau des lieux d'éducation associés : Un instrument pour la recherche en éducation*. Presses Universitaires de Rennes.

Morellato, M. (2017). *Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : Conditions de la constitution de l'expérience collective*. Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education, Université de Bretagne Occidentale.

Sensevy, G. (2025). Towards an Epistemic Kinship Between School Mathematical Practices and the Practice of Mathematicians : The Journal of Number. In X. Kitty Yan, A. Mamolo, & I. Kontorovich (Éds.), *Where is the Mathematics in Your Math Education Research ? Personal Accounts of Leading Educators* (p. 221-248). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-83907-8_15

Sensevy, G., Blocher, J.-N., Goujon, C., & Forest, D. (2022). Films d'étude et systèmes hypermédias : Le cas des systèmes hybrides texte-image-son (SHTIS). In B. Albero & J. Thievenaz (Éds.), *Enquêter dans les métiers de l'humain : Traité de méthodologie de la recherche en science de l'éducation et de la formation* (Vol. 2, p. 637-651). Éditions Raisons et Passions.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM*, 45(7), 1031-1043. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4

Sensevy, G., Gruson, B., & Le Hénaff, C. (2019). Sur la notion de jargon. Quelques réflexions sur le langage et les langues. In C. Chaplier & A.-M. O'Conell (Éds.), *Épistémologie à usage didactique. Langue de spécialité* (secteur LANSAD). (p. 35-52). L'Harmattan.

Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., & Múñez, D. (2022). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 111(3), 375-397. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x

Vilette, B., Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201(4), 105-120. https://doi.org/10.4000/rfp.7296

MULTIPLICATION ET MUSIQUE : UNE APPROCHE SÉMIOTIQUE DES APPRENTISSAGES

Paula JOUANNET
Postdoctorante, Université Paris-Cité
Laboratoire LDAR
paulajouannet@gmail.com

Résumé
Cet article explore le potentiel des activités musicales pour soutenir l'apprentissage de la multiplication en CE1. Il s'inscrit dans la théorie de l'objectivation, selon laquelle apprendre correspond à une rencontre collective et corporelle avec des formes historico-culturelles de pensée. La recherche s'appuie sur la séquence *La caravane dans le désert*, où les élèves sont confrontés à des tâches multiplicatives à travers des déplacements corporels rythmiques synchronisés sur une pulsation musicale. Ces tâches permettent d'explorer des rapports multiplicatifs entre nombre de pas et durées définies par la pulsation. L'analyse sémiotique révèle que les élèves utilisent diverses ressources, telles que les gestes, le rythme, l'intonation et les références spatiales, pour stabiliser les propriétés mathématiques impliquées dans le concept de double. Les activités offrent ainsi un cadre permettant de s'appuyer sur des expériences sensorielles et corporelles qui permettent aux élèves de découvrir progressivement des connaissances mathématiques.

I - INTRODUCTION

Les relations entre mathématiques et musique constituent un champ ancien et fécond de réflexion. Dès l'Antiquité, les expériences attribuées à Pythagore mettent en évidence que certains phénomènes sensibles, tels que les hauteurs musicales, peuvent être organisés à partir de rapports numériques simples, et témoignent d'une articulation précoce entre perception, mesure et nombre. Selon une légende transmise par des auteurs médiévaux, Pythagore aurait observé des forgerons au travail et remarqué que certains sons, perçus comme plus harmonieux, correspondaient à des rapports simples entre les masses des marteaux. Cette intuition aurait ensuite été approfondie à l'aide du monocorde : une corde unique tendue sur une caisse de résonance, que l'on divise à l'aide d'un chevalet mobile.

Lorsque le chevalet est placé à mi-longueur, la corde produit l'octave ; aux deux tiers, elle donne la quinte (voir Figure 1). Ces hauteurs musicales sont alors obtenues à partir de rapports numériques simples, notamment 1 : 2 pour l'octave et 2 : 3 pour la quinte, puis organisées à l'intérieur de l'octave par divisions successives. Cette organisation engendre ce que l'on nomme aujourd'hui la gamme pythagoricienne, fondée sur des divisions proportionnelles de la corde vibrante.

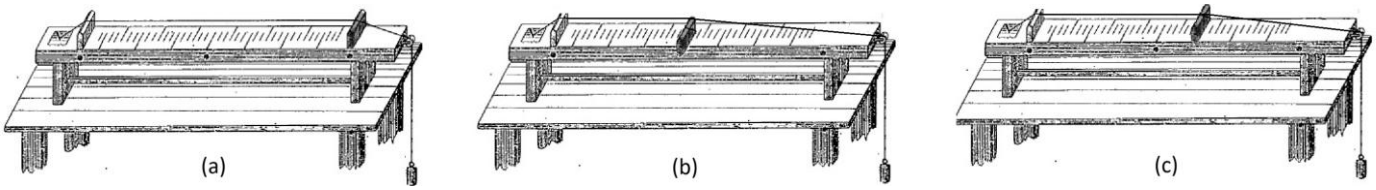


Figure 1. Monocorde et rapports numériques.
Respectivement, la note (1) en (a), l'octave (1/2) en (b) et la quinte (2/3) en (c).

Au fil de l'histoire occidentale, ce dialogue entre musique et mathématiques s'est renouvelé sous des formes multiples : études acoustiques et combinatoires chez Mersenne, agencements mathématiques d'une grande complexité dans l'œuvre de Bach, recours explicite à certaines proportions chez Debussy, ou encore mise en évidence, par Toussaint, de structures algorithmiques sous-jacentes à de nombreux rythmes traditionnels. Ces travaux montrent que la musique peut constituer un lieu privilégié

d'élaboration et de mise à l'épreuve de concepts mathématiques fondamentaux, en particulier ceux relatifs à la mesure, aux rapports et à la régularité.

Les approches mathématiques mobilisées dans ces différents cadres ont contribué à façonner, de manière historico-culturelle[1], certains phénomènes de la perception musicale, tels que l'harmonie, en mettant en évidence les rapports qui organisent l'expérience sonore dans des contextes donnés. Le recours à des relations numériques ou géométriques en musique n'a pas seulement conduit à expliquer ces phénomènes, mais a également permis de rendre perceptibles, sur les plans sensoriel, esthétique et corporel, les relations mathématiques qui les traversent.

Dans le champ de l'éducation, cette proximité historique et conceptuelle entre musique et mathématiques invite à interroger le potentiel de la pratique musicale pour soutenir les apprentissages mathématiques. Le présent article s'inscrit dans cette perspective et se concentre plus particulièrement sur l'apprentissage de la multiplication à l'école primaire. Il vise à examiner dans quelle mesure des activités musicales, conçues comme des expériences collectives, corporelles et rythmiques, peuvent soutenir l'entrée d'élèves de CE1 dans des formes de raisonnement multiplicatif.

II - ÉTAT DES RECHERCHES

De nombreuses recherches, issues notamment de la psychologie cognitive et des sciences de l'éducation, ont mis en évidence des corrélations entre formation musicale, réussite scolaire et performances en mathématiques (An et al., 2008 ; An et al., 2013 ; Mato-Vázquez et al., 2019 ; Pérez et al., 2021 ; Raja et Bhalla, 2021 ; Strickland, 2002 ; Jonides, 2008). Parmi ces travaux, ceux relatifs à l'« effet Mozart » (Rauscher et al., 1997 ; Hetland, 2000a, 2000b) ont largement contribué à populariser l'idée d'un lien entre musique et performances cognitives. Ces résultats ont toutefois suscité d'importantes controverses, en particulier quant à la significativité des effets observés et aux conditions de leur généralisation (Pietschnig et al., 2010 ; Steele et al., 1999).

En éducation mathématique, plusieurs travaux se sont intéressés à l'usage pédagogique de formes musicales, qu'il s'agisse de chansons ou l'expression esthétique (Da Silva, 2020; An et al., 2014), de représentations géométriques du rythme ou de dispositifs articulant musique et mathématiques, tels que ceux développés dans le cadre de projets portés par des IREM. Dans ce contexte, le récemment créé Groupe IREM Strasbourg *Mathémusique* explore des représentations géométriques du rythme, par exemple à travers des diagrammes circulaires ou des réseaux tonaux comme le Tonnetz pour concevoir des activités pédagogiques centrés en secondaire et en supérieur. Ces dernières démarches ont notamment été développées dans le cadre du projet de recherche *Mathémusique* (Mathémusique, s.d.)

Cependant, les recherches qui mobilisent explicitement des structures musicales pour aborder des notions centrales du curriculum de l'école primaire demeurent relativement rares. En particulier, peu de travaux se sont intéressés à l'enseignement de la multiplication à partir de situations musicales. Les recherches portant sur l'enseignement des fractions à partir des valeurs rythmiques (Courey et al., 2012 ; Azaryahu et al., 2020) constituent l'une des principales exceptions : elles montrent comment le découpage temporel peut soutenir l'appréhension de relations fractionnaires, en explorant notamment des correspondances symboliques entre éléments musicaux et notions mathématiques.

Par ailleurs, les approches qui envisagent la musique comme une expérience sensible, collective et située, susceptible de soutenir l'entrée des élèves dans des formes de pensée mathématique, demeurent encore peu développées. La plupart des études existantes se concentrent soit sur des effets globaux de la musique, sans prise en compte fine des spécificités des concepts mathématiques en jeu, soit sur des

[1] Il convient de souligner que la perception de l'harmonie ne saurait être réduite à une donnée universelle : elle s'inscrit dans des traditions culturelles et historiques spécifiques, comme en témoignent l'existence et la diversité de systèmes harmoniques développés dans d'autres contextes culturels, notamment dans les musiques indiennes.

correspondances générales entre objets musicaux et l'enseignement, laissant largement inexplorées les potentialités d'apprentissage qui émergent de l'articulation entre aspects musicaux et relations mathématiques. C'est précisément dans l'espace laissé par ces travaux que se situe la présente étude, qui se propose d'explorer l'apprentissage de la multiplication en cycle 2 à partir d'activités musicales centrées sur les rapports de durées, en mettant l'accent sur l'activité corporelle, rythmique et collective des élèves.

III - CADRE CONCEPTUEL

1 Théorie de l'objectivation

Cette étude s'inscrit dans la théorie de l'objectivation (Radford, 2011, 2015, 2019, 2020), qui conçoit l'apprentissage comme un processus fondamentalement sémiotique, corporel et social. Dans cette perspective, apprendre ne consiste pas en une activité individuelle d'appropriation de connaissances, mais correspond à une rencontre collective avec des formes historico-culturelles de penser et d'agir, rendues sensibles au sein de l'activité partagée en classe.

Dans la perspective de la théorie de l'objectivation, l'objectivation de ces rapports multiplicatifs s'opère au moyen d'un tissage de ressources sémiotiques hétérogènes — gestes, paroles, rythmes, déplacements, configurations spatiales — qui ne sont pas envisagées comme de simples outils de médiation, mais comme des composantes constitutives de l'activité cognitive. Les signes sont ainsi analysés du point de vue de leur co-expressivité avec l'ensemble des autres ressources sémiotiques mobilisées dans la situation. Ce n'est pas une ressource isolée qui rend compte de l'apprentissage, mais l'interconnexion dynamique de ces ressources, à travers laquelle se déploient les processus de signification au sein de la classe.

La théorie de l'objectivation accorde par ailleurs une place centrale à la dimension éthique de l'activité collective. Le processus d'objectivation est indissociable d'un processus de subjectivation, par lequel se transforment les relations des élèves aux autres, au monde et aux savoirs. Cette éthique communautaire, fondée sur la responsabilité mutuelle, l'écoute et la participation, conduit à interroger la contribution spécifique de la musique à l'instauration de conditions favorables à une activité mathématique partagée, dans laquelle les élèves sont engagés corporellement, rythmiquement et collectivement.

2 Multiplication par la mesure

Dans ce cadre, nous nous intéressons plus particulièrement aux processus par lesquels les élèves en viennent à reconnaître et à mobiliser des manières dites multiplicatives de penser, entendues non comme des procédures opératoires isolées, mais comme un mode spécifique de mise en relation de grandeurs. Ces manières de penser reposent sur des rapports entre unités, quantités et mesures, et s'inscrivent dans des formes de penser et d'agir historiquement et culturellement constituées autour des relations quantitatives.

En contexte occidental, la multiplication s'inscrit dans une longue tradition de conceptualisation des rapports entre grandeurs. On en trouve des traces précoces dans les pratiques mathématiques mésopotamiennes, puis dans des élaborations théoriques ultérieures, notamment chez Euclide dans *les Éléments*, ainsi que dans certains traités classiques d'arithmétique et d'analyse, comme celui de Lebesgue (1932). Ces travaux mettent en jeu des relations entre quantités dans lesquelles l'une peut être pensée comme multiple de l'autre, ou encore comme servant de mesure à l'autre. De telles relations constituent, à nos yeux, le noyau des raisonnements multiplicatifs, en ce qu'elles articulent mathématiquement le nombre, l'unité et la grandeur considérée.

Dans le champ de la didactique des mathématiques, de nombreuses recherches, tant à l'international (Cortina et al., 2014 ; Polotskaia et Savard, 2021) qu'en France (Chambris, 2022 ; Chambris et al., 2021), plaident en faveur d'approches du nombre et des opérations arithmétiques fondées sur les quantités et leurs relations. Dans ce contexte, reconnaître la multiplication comme un savoir mathématique implique

alors de prendre conscience des propriétés spécifiques des quantités, en particulier celles qui régissent les relations entre unités et grandeurs.

Parmi ces propriétés figure ce que Chambris (2022) désigne comme *la propriété M*, formulée de la manière suivante : si l'unité est plus grande, alors, pour un même nombre d'unités, la quantité obtenue est plus grande. Cette propriété d'accroissement peut être exprimée à travers une comparaison quantifiée du type : « pour prendre b unités de taille $a \cdot u$ (ou pour considérer a unités de taille u multipliées par un nombre b), on peut prendre le même nombre d'unités, mais des unités b fois plus grandes » (Chambris, 2022, p. 114). Autrement dit, si l'unité u est b fois plus grande, alors, pour un même nombre a d'unités, la quantité totale est b fois plus grande.

Or, ces propriétés, bien que centrales dans la production des raisonnements multiplicatifs, demeurent très souvent peu visibles dans les pratiques scolaires ordinaires, car absentes des ressources pédagogiques (Chambris et al., 2021). Plusieurs travaux suggèrent pourtant que l'accès progressif à ces relations entre unités et quantités constitue un levier fondamental pour les apprentissages des élèves, en particulier lorsqu'il s'agit de donner sens aux situations de mesure et de comparaison de grandeurs (Chambris, 2022 ; Chambris et Visnovska, 2022).

C'est dans cette perspective que nous inscrivons notre démarche, en cherchant à rendre visibles les conditions dans lesquelles de telles propriétés peuvent émerger et se stabiliser au sein de l'activité collective de la classe, notamment à travers des situations où les relations de mesure, de durée et de rythme jouent un rôle structurant dans l'organisation des raisonnements.

3 Multiplication par la musique

Dans cette recherche, nous nous appuyons sur des travaux relatifs à l'enseignement des fractions et à leur articulation avec les valeurs temporelles des notes musicales (Courey et al., 2012 ; Azaryahu et al., 2020). Les approches pédagogiques développées dans ce cadre visent généralement à faire reconnaître, au sein des figures rythmiques, des relations d'équivalence de type fractionnaire, tout en familiarisant les élèves avec leurs écritures symboliques. Ces démarches s'inscrivent dans une perspective où le découpage du temps musical constitue un support privilégié pour l'appréhension de rapports partiels à l'unité, en mettant en correspondance des durées sonores et des fractions de référence.

À titre d'exemple, certaines ressources pédagogiques anglophones interactives exploitent explicitement ces correspondances. La plateforme Math Engaged (s.d.) propose ainsi des activités permettant de produire et de superposer des figures rythmiques afin de faire émerger des additions de fractions exprimées symboliquement, à partir de durées audibles et notées en écriture musicale (voir Figure 2). Dans ce type de dispositifs, le temps musical est mobilisé comme une grandeur mesurable.

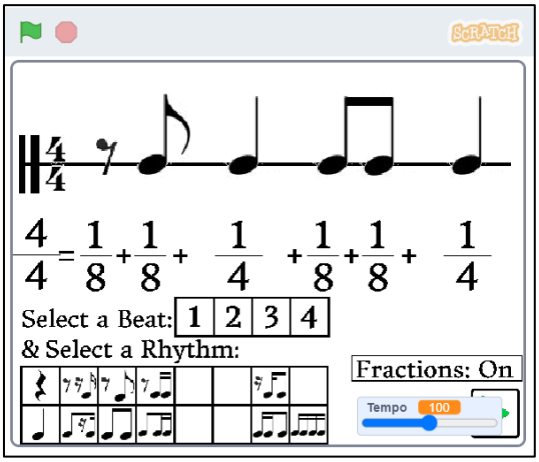


Figure 2. Capture d'écran d'interface du site Math Engaged (s.d.) mettant en relation l'addition de fractions, son et diagrammes de rythmes musicales.

En contexte francophone, de telles ressources demeurent plus rares. On peut néanmoins citer certaines initiatives ponctuelles, comme une fiche de travail proposée par une enseignante de l'académie de Versailles (Chédotal, 2019, voir Figure 3), qui met en œuvre une progression didactique fondée sur des équivalences temporelles explicites (par exemple : la ronde vaut quatre temps, la noire un temps, la double croche un quart de temps). Ces propositions reposent sur une stabilisation d'unités temporelles discrètes et sur leur mise en relation par des rapports de division.

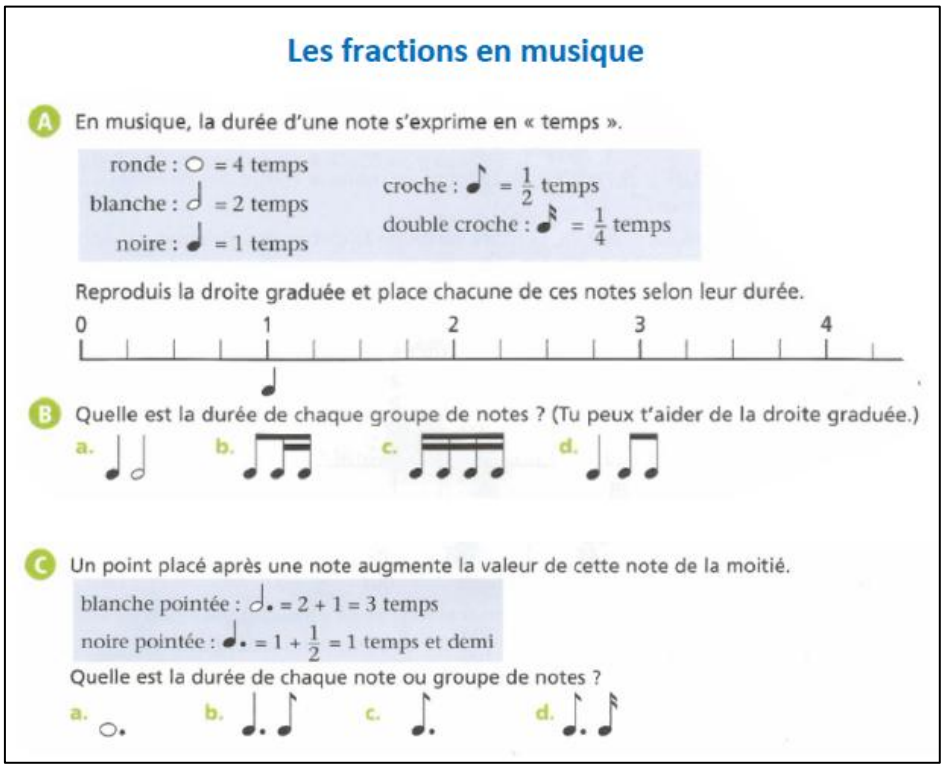


Figure 3. Ressource pédagogique sur les fractions basées sur la valeur temporelle de notes (Chédotal, 2019).

À partir de ces éléments, nous déplaçons l'attention vers la mise en relation multiplicative de durées, envisagée sous la forme de rapports du type « k fois plus » (par exemple : une ronde dure deux fois plus qu'une blanche, ou quatre fois plus qu'une noire). Dans cette perspective, le découpage régulier du temps musical par la pulsation — entendue comme une suite régulière de battements organisant l'écoulement temporel — fournit un cadre structurant au sein duquel peuvent être éprouvés et élaborés des rapports de répétition, de proportion et de régularité. Ce cadre ouvre ainsi la voie à l'émergence de raisonnements multiplicatifs ancrés dans une expérience rythmique corporelle et collective, où les relations entre durées sont vécues avant d'être formalisées.

IV - MÉTHODOLOGIE ET DISPOSITIF DE RECHERCHE

La recherche présentée s'inscrit dans une démarche de recherche-intervention à visée exploratoire, relevant d'une approche de type design-based research, menée entre 2023 et 2025. Elle a été conduite dans le cadre d'un post-doctorat au laboratoire LDAR (Université Paris Cité), avec le soutien de l'agence nationale chilienne ANID.

Deux classes de cycle 2 ont participé à l'expérimentation : une classe de CE1-CE2 en milieu semi-rural (année scolaire 2023–2024) et une classe de CE1 en milieu urbain (année scolaire 2024–2025). Les séances ont été conçues en collaboration étroite avec les enseignantes et mises en œuvre à un rythme hebdomadaire. L'ensemble des séances a fait l'objet de captations vidéo et audio, constituant un corpus permettant une analyse sémiotique multimodale (Radford, 2015) de l'interconnexion de signes produits lors de l'activité mathématique.

Le dispositif pédagogique visait à créer les conditions d'une rencontre sensible, expressive et collective avec des notions liées à la mesure et à la multiplication, tout en demeurant accessible à des enseignants et des enseignantes non spécialistes de musique. Dans cette perspective, les séances ont été conçues pour explorer des relations multiplicatives à partir de comparaisons entre durées multiples d'autres durées, à travers des situations engageant le corps, le rythme et la coordination collective.

1 Séquence « Caravane dans le désert »

L'analyse faisant l'objet de cet article se concentre sur une séquence de deux séances intitulée « La caravane dans le désert » mise en œuvre en classe de CE1. Cette séquence mobilise un imaginaire narratif associé à un rythme musical d'inspiration moyen-orientale, couplé à l'image d'un voyage collectif dans le désert. Elle vise l'exploration de relations multiplicatives, en particulier celles liées au double, à partir de comparaisons de durées et de vitesses.

Lors de la première séance, un travail de contextualisation est mené autour du terme *caravane*, compris comme un mode de déplacement collectif impliquant une coordination des actions dans le temps. Ce cadre narratif permet d'ancrer l'activité rythmique et corporelle dans une situation signifiante pour les élèves.

Les tâches proposées articulent étroitement des dimensions rythmiques et mathématiques : stabilisation d'une pulsation commune par la marche, comparaison de durées associées à un même nombre de pas, exploration de compensations entre nombre de pas et vitesse, puis mise en relation explicite du double comme rapport multiplicatif.

La séquence introduit trois personnages se déplaçant à deux pattes[2] à des vitesses distinctes :

- un humain, pris comme vitesse de référence (un pas par temps),
- un dromadaire (un pas tous les deux temps),
- un éléphant (un pas tous les quatre temps).

Pour permettre aux élèves de suivre les trois rythmes au fil de la chanson, trois percussions aux timbres distincts ont été intégrées à l'aide d'un logiciel de production musicale, découpant la pièce en sections modulées selon les rythmes associés à chacun des personnages. Les tâches proposées articulent étroitement dimensions rythmiques et mathématiques : stabilisation de la pulsation par la marche, comparaison des durées, exploration des compensations entre nombre de pas et vitesse, et établissement du double comme rapport multiplicatif. Lors de la marche, ces vitesses sont incarnées par des gestes corporels différenciés, renforçant l'expérience sensorielle et la compréhension des rapports multiplicatifs.

V - ANALYSE *A PRIORI*

L'analyse *a priori* de la séquence « La caravane dans le désert » vise à expliciter les relations mathématiques et rythmiques susceptibles d'être mises en jeu par les tâches proposées, ainsi que les principales variables didactiques susceptibles d'influencer l'activité des élèves. Comme signalé dans la section du cadre conceptuel, elle s'inscrit dans une perspective où les relations multiplicatives sont appréhendées comme des rapports entre quantités.

1. [2] Lors de la mise en œuvre en CE1, une difficulté spécifique est apparue, absente lors de la première expérimentation : certains élèves ont interprété la vitesse des animaux à partir du nombre de leurs pattes (par exemple : « le dromadaire a quatre pattes, donc il peut aller aussi vite »). Afin de neutraliser cet effet, le récit a été ajusté en précisant que les personnages étaient des humains se déplaçant, par enchantement, à la vitesse de ces animaux. Il convient toutefois de noter que ces interprétations ouvrent des pistes de discussion potentiellement riches, notamment autour des modes de locomotion animale et des compensations entre fréquence des appuis et vitesse de déplacement.

1 Tâches rythmiques

1.1 Tâche 1 : marcher sur la pulsation de la chanson

La première tâche, introduite dès la première séance, consiste à « suivre les différentes percussions de la chanson en marchant ». Elle a pour objectif principal la stabilisation d'une unité temporelle commune, destinée à servir de référence pour l'ensemble des tâches ultérieures, tant sur le plan rythmique que mathématique.

Variables didactiques

La conception de cette tâche repose sur plusieurs variables didactiques déterminantes.

- Tout d'abord, le **tempo** de la chanson, fixé à 97 battements par minute, se rapproche de la cadence naturelle de la marche humaine. Cette proximité favorise une appropriation corporelle plus facile de la pulsation, limitant les ajustements moteurs nécessaires et facilitant la coordination collective.
- Ensuite, la **structure rythmique** de la chanson privilégie des rapports binaires simples, tels que le double ou le quadruple, qui sont généralement plus aisément perceptibles que des configurations ternaires ou irrégulières. Ces rapports constituent un terrain favorable à l'émergence ultérieure de relations multiplicatives élémentaires.

Les **marques sonores** produites par les différentes percussions jouent également un rôle central. Elles fonctionnent comme des signes déictiques, en ce qu'elles pointent vers des instants temporels spécifiques et organisent l'expérience perceptive et motrice des élèves. Ces repères sonores soutiennent la synchronisation des déplacements des élèves.

- Par ailleurs, l'**explicitation des vitesses** des personnages en nombre de temps — en particulier pour les pulsations lentes associées à l'éléphant — constitue une variable importante. Le dénombrement des temps lors de pulsations espacées permet aux élèves de mieux s'orienter dans la durée s'ajustant plus aisément au rythme.
- Enfin, l'**environnement spatial** influence également la réalisation de la tâche. Un espace dégagé favorise l'engagement corporel, l'amplitude des déplacements et la coordination collective, tandis qu'un espace contraint peut complexifier la tâche en introduisant des contraintes spatiales supplémentaires.

En complément de cette tâche, d'autres activités rythmiques ou corporelles peuvent être proposées indépendamment de la musique, telles que produire un nombre donné de pas sur une durée déterminée, ou se synchroniser pour réaliser simultanément les pas de deux personnages. Ces variations permettent de déplacer l'attention vers des aspects spécifiques des rapports entre durée, nombre et vitesse.

2 Les tâches mathématiques

2.1 Tâche 1 : Comparer la durée d'un même nombre de pas

Un premier type de tâche de comparaison multiplicative non quantifiée consiste à comparer la durée nécessaire pour effectuer un même nombre de pas à des vitesses différentes. Par exemple : « Qu'est-ce qui prend le moins de temps : 5 pas d'humain ou 5 pas de dromadaire ? ».

La réponse attendue — 5 pas d'humain — repose sur la mobilisation de la propriété M telle que formalisée par Chambris (2024) : puisqu'un pas d'humain prend moins de temps qu'un pas de dromadaire, un même nombre de pas d'humain prendra nécessairement moins de temps qu'un nombre identique de pas de dromadaire. Cette tâche engage ainsi une mise en relation directe entre deux quantités de même nature (des pas), différenciées par une troisième grandeur implicite (la durée).

Une autre tâche de comparaison non quantifiée porte sur le nombre de pas réalisés dans une même durée. Par exemple : « Si l'humain et le dromadaire ont marché pendant le même temps, qui a fait le plus de pas ? ». La réponse — l'humain — mobilise également la propriété M, mais engage en outre des

raisonnements de compensation additive : si, pour un même nombre de pas, l'humain met moins de temps, alors, pour atteindre une durée équivalente à celle du dromadaire, il devra nécessairement effectuer davantage de pas.

Ces tâches permettent d'explorer des relations multiplicatives sans recourir à des calculs numériques, en s'appuyant sur des comparaisons de la taille de quantités et des propriétés mathématiques et multiplicatives fondamentales.

3 Tâche 2 : Explorer le double comme relation multiplicative

Au centre de la deuxième séance se trouve la tâche suivante : « Lorsque le dromadaire fait 4 pas, combien de pas fait l'humain ? ». Cette question suppose que le rapport de vitesse ait été préalablement stabilisé, soit sous la forme « un pas de dromadaire équivaut à deux pas d'humain », soit sous la forme « un pas de dromadaire dure deux temps ».

3.1 Stratégies de dénombrement de pas

Les élèves peuvent mobiliser différentes stratégies fondées sur le dénombrement des temps et des pas, lors ou juste après une réalisation effective. Ils peuvent, par exemple, exécuter simultanément les pas du dromadaire et de l'humain en maintenant la pulsation commune, ou encore déterminer d'abord la durée totale correspondant aux pas du dromadaire (8 temps), puis en déduire le nombre de pas de l'humain. La tâche peut également être résolue en réalisant uniquement les 4 pas du dromadaire afin d'établir la durée correspondante, sachant que l'humain fait 1 pas par temps.

3.2 Traitements par calcul

Parmi les traitements mathématiques possibles, on identifie tout d'abord des raisonnements fondés sur l'addition répétée ou le dénombrement :

- le dromadaire effectue 4 pas, chacun durant 2 temps, soit un total de 8 temps, durant lesquels l'humain réalise 8 pas. Cette relation additive d'itération d'une quantité (2 temps) peut être exprimée par une multiplication ($4 \times 2 = 8$), une addition répétée ($2 + 2 + 2 + 2$) ou un comptage direct ;
- une approche plus élaborée du point de vue multiplicatif mobilise la propriété M sous sa forme quantifiée : si un pas de dromadaire est deux fois plus long qu'un pas d'humain, alors la durée de 4 pas de dromadaire est également deux fois plus longue que la durée de 4 pas d'humain. Cette relation peut s'exprimer par l'égalité ($4 \times (2 \times 1) = 2 \times 4 = 8$). Dans ce contexte, le raisonnement ne se réduit pas à l'itération d'une quantité, mais engage une comparaison multiplicative quantifiée.

Des raisonnements analogues peuvent être développés sans passer explicitement par la durée, en s'appuyant directement sur l'équivalence entre pas : un pas de dromadaire correspondant à deux pas d'humain.

4 Variables didactiques

Plusieurs variables didactiques influencent la complexité des tâches proposées ainsi que la nature des raisonnements susceptibles d'être mobilisés par les élèves.

- Le **rapport de vitesse** entre les personnages (1 : 2, 1 : 4, etc.) conditionne directement la structure multiplicative en jeu. Des rapports simples, tels que le double, favorisent l'identification de relations multiplicatives élémentaires, tandis que des rapports plus complexes rendent ces relations moins immédiatement perceptibles.

- Le **nombre total de pas demandé** constitue une autre variable centrale. Lorsque ce nombre augmente, les stratégies fondées sur le dénombrement deviennent plus coûteuses sur le plan cognitif, ce qui peut favoriser l'émergence de traitements par calcul ou de raisonnements multiplicatifs plus complexes.
- La **manière dont les vitesses sont mises en référence** oriente également l'activité mathématique. Une référence en termes de pas (« le dromadaire fait un pas quand l'humain en fait deux ») tend, il nous semble, à soutenir des raisonnements fondés sur la comparaison directe de quantités, tandis qu'une référence en termes de durée (« le pas du dromadaire dure deux temps ») introduit explicitement une seconde grandeur. Cette dernière modalité peut, dans une certaine mesure, favoriser une mise à distance des comparaisons immédiates entre personnages, en isolant les raisonnements portant sur les quantités relatives à chacun d'eux par leur articulation à une unité temporelle commune.
- La **nature de la quantité demandée** — nombre de pas ou nombre de temps — influe également sur la complexité cognitive de la tâche. En principe, les questions portant sur le temps apparaissent plus directement accessibles dans ce dispositif, en continuité avec cette possibilité d'isoler les raisonnements à partir d'une référence temporelle commune.
- Enfin, **l'environnement matériel** joue un rôle non négligeable. La présence de repères au sol (bandes, cerceaux) peut soutenir des stratégies fondées sur la réalisation effective des pas, lesquelles demeurent pertinentes non seulement pour l'élaboration, mais aussi pour la validation collective des raisonnements engagés.

5 Extensions possibles

Cette séquence ouvre la voie à d'autres explorations, notamment autour de la moitié ou d'autres rapports multiplicatifs, par exemple : « Si le dromadaire met 10 temps pour parcourir une distance, combien de temps met l'humain ? ». Elle permet également d'envisager des raisonnements compensatoires fondés sur des caractéristiques physiques évoquées spontanément par les élèves, telles que la taille ou le poids (« le dromadaire est plus lourd, alors il est plus lent »).

Ces pistes n'ont pas été approfondies dans le cadre de cette recherche, mais elles apparaissent prometteuses pour enrichir la diversité et la complexité des rapports multiplicatifs susceptibles d'être explorés à partir des dimensions corporelles et rythmiques introduites par cette séquence.

VI - ANALYSE A POSTERIORI

La séance observée, animée par l'intervenante — autrice de cet article — le 5 juin 2025, s'inscrivait dans le prolongement direct des expérimentations menées lors de la séance précédente. Celles-ci portaient sur les rapports de durée entre un humain et un dromadaire effectuant un même nombre de pas, sans que les durées respectives de ces pas ne soient explicitement quantifiées. La tâche initiale visait le réinvestissement d'une situation déjà travaillée par le collectif : « Si le dromadaire fait 5 pas et si l'humain fait 5 pas, qui mettra le moins de temps pour les faire ? »

La majorité des élèves répond sans hésitation que l'humain mettra moins de temps. Cette réponse peut être comprise comme l'activation partagée d'une propriété déjà stabilisée au sein du collectif (propriété M1). Une réponse initialement divergente — un élève affirmant que le dromadaire mettrait moins de temps — est rapidement rectifiée par les échanges collectifs. Deux élèves sont alors invitées au tableau afin de produire, de manière synchronique, les cinq pas de l'humain et du dromadaire, contribuant à une validation incarnée de cette propriété par la coordination gestuelle et temporelle des déplacements.

La tâche suivante vise à éprouver les limites de cette propriété lorsqu'elle est mobilisée à des fins de comparaison, en introduisant une dissymétrie numérique : « Si l'humain fait 9 pas et le dromadaire 5 pas, peut-on savoir qui mettra le moins de temps ? » Une majorité d'élèves répond rapidement que c'est l'humain, en invoquant sa plus grande rapidité. Toutefois, l'introduction d'un cas plus contrasté — « Et si l'humain fait 30 pas et le dromadaire 5 ? » — conduit à un renversement des réponses. Cette oscillation invite à formuler l'hypothèse que les élèves s'appuient sur des estimations approximatives et non quantifiées, relevant davantage d'un ordre de grandeur intuitif que d'un raisonnement explicitement articulé, sans envisager que la question puisse être indéterminée.

C'est dans ce contexte qu'un élève, disons Luca (les prénoms sont modifiés afin de préserver l'anonymat) propose de recourir au rythme musical afin de mettre en relation les vitesses des personnages. Se plaçant devant la classe, il suggère : « Pour le dromadaire, on fait un, deux, un, deux », en réalisant deux pas synchronisés avec la pulsation et le geste iconique des bosses, puis ajoute : « Pour l'éléphant, on fait un, deux, trois, un, deux, trois », en exécutant à nouveau deux pas accompagnés du geste de la trompe. Sur le plan sémiotique, l'élève coordonne une comptine verbale, des gestes iconiques et un déplacement corporel rythmé. En articulant mouvement, parole et pulsation, il esquisse une manière opératoire de mettre en relation les vitesses, suggérant que la comparaison des durées peut être rendue possible par une mise en correspondance rythmique.

Bien que cette proposition ne corresponde pas à la relation de durée attendue pour l'éléphant, l'intervenante s'en saisit comme point d'appui pour engager la classe dans une activité collective de synchronisation corporelle avec la chanson et les percussions. Elle invite les élèves à suivre les rythmes de la musique en comptant les temps afin de mettre à l'épreuve la validité de la proposition (voir Figure 4). Les rythmes associés à l'humain et au dromadaire sont rapidement stabilisés. Lorsque la classe aborde le rythme de l'éléphant, l'intervenante interrompt le comptage proposé — « Un, deux, trois ? » — suscitant une correction immédiate de Luca : « C'est quatre ! ». La classe reprend alors collectivement la pulsation en comptant jusqu'à quatre, ajustant gestes et déplacements.

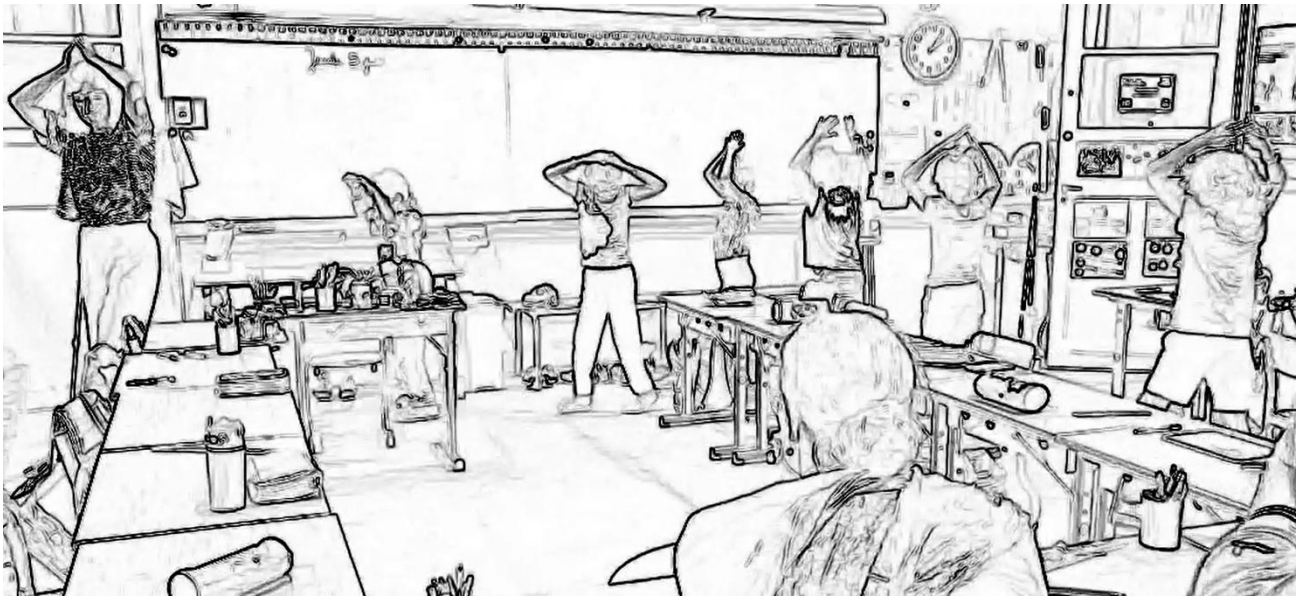


Figure 4. Capture d'écran d'exploration rythmique des relations entre vitesses des personnages.

Sur le plan sensori-moteur, cette phase se caractérise par une grande diversité de modalités de synchronisation : battements de tête, flexions des jambes, balancements latéraux, légères tensions corporelles, ainsi qu'une verbalisation rythmée du comptage. Nous faisons l'hypothèse — qui mériterait d'être approfondie — que ces coordinations corporelles ne relèvent pas d'un simple accompagnement périphérique de l'activité, mais constituent une base sensorimotrice à partir de laquelle peuvent se déployer ultérieurement des raisonnements multiplicatifs plus explicitement formulés.

Une fois les rapports de vitesse établis, la tâche suivante introduit une situation fondée sur le double : « Quand le dromadaire fait 4 pas, combien de pas fait l'humain ? ». En l'absence de réponse immédiate, l'intervenante mobilise différents registres sémiotiques afin de réactiver l'expérience rythmique partagée : intonation marquée, déplacements rythmiques sur les traits tracés au sol, flexions corporelles accentuant les pas, comptine verbale (« un, deux, un, deux… ») accompagnée de gestes digitaux.

Une fois les rapports de vitesse établis, la tâche suivante introduit une situation fondée sur le double : « Quand le dromadaire fait 4 pas, combien de pas fait l'humain ? ». En l'absence de réponse immédiate, l'intervenante mobilise différents registres sémiotiques afin de réactiver l'expérience rythmique partagée : intonation marquée, déplacements rythmés sur des traits tracés au sol (cf. Figure 5), flexions corporelles accentuant les pas, comptine verbale (« un, deux, un, deux… ») accompagnée de gestes digitaux.

Juliette affirme alors : « Ça fait 8 pas ! », qu'elle justifie en articulant comptine orale et gestes digitaux « Un, deux, ça fait deux. Après ça fait quatre, six, huit », en modulant rythmiquement son intonation. Plusieurs élèves reprennent cette démarche, articulant comptine orale et gestes digitaux. Cette production marque l'émergence d'une stratégie multiplicative encore adossée à l'addition itérée, mais significative par l'articulation explicite entre durée et régularité rythmique.

Invitée à proposer une autre modalité d'explicitation à l'aide des repères au sol, Juliette énonce : « Un, deux, ça fait deux », en avançant d'un pas et en montrant deux doigts, puis poursuit : « Un, deux, quatre ; un, deux, six ; un, deux, huit », en réalisant simultanément trois pas (voir Figure 5). Elle mobilise ainsi conjointement déplacement corporel, comptine verbale, gestes digitaux et marques spatiales. Les lignes cessent alors d'être de simples repères de déplacement pour devenir des signes mathématiques à part entière. L'élève interconnecte de manière sensorielle la répétition de la séquence « un, deux », son intonation, son déplacement rythmé, les gestes digitaux et les marques spatiales pour produire une quantité mise en relation multiplicative, à chaque itération, avec le total accumulé.

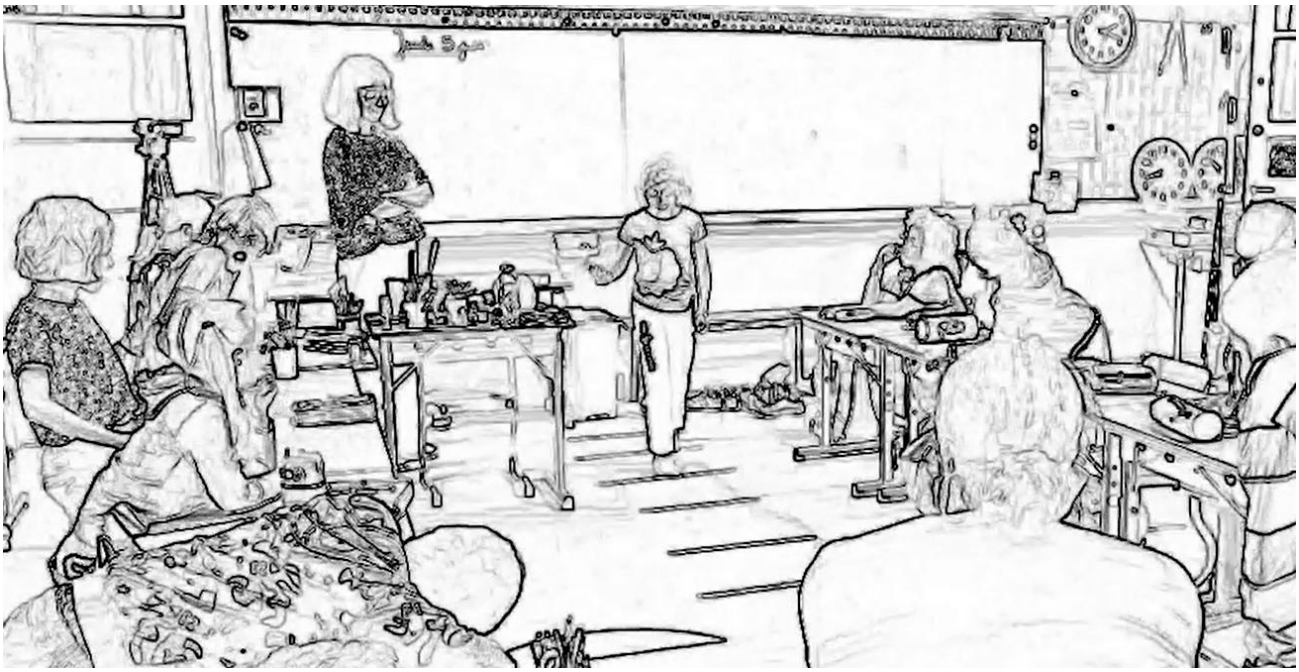


Figure 5. Juliette explique son raisonnement devant la classe.

Malgré ces avancées, des instabilités persistent, comme en témoignent des réponses divergentes (8 pas, 8 temps, 4 pas) lorsque la question est reformulée. Ces hésitations révèlent des difficultés à articuler les grandeurs en jeu — nombre de pas, durée, vitesse — et interrogent la formulation même de la tâche. Une mise en acte simultanée des pas des deux personnages est alors proposée afin d'éclairer les doutes. Cette

situation met en évidence des problèmes de synchronisation rythmique : l'élève incarnant le dromadaire produit cinq pas au lieu de quatre, ce qui suggère une coordination temporelle encore instable, notamment lorsque le démarrage précède le comptage du premier temps.

Dans ce contexte, Jean, habituellement peu participatif, remarque l'erreur et signale que le dromadaire a effectué cinq pas. Lorsqu'il se rend au tableau, il semble s'appuyer principalement sur une mémoire visuelle du déplacement de sa camarade, en désignant les traits au sol du doigt. Son raisonnement repose sur le comptage de marques perceptives associées au mouvement, les traits fonctionnant ici comme des traces du déplacement plutôt que comme des signes mathématiques. Cette utilisation contraste avec celle de Juliette, où les traits sont intégrés à une organisation rythmique et quantitative plus structurée.

Dans la continuité de cette exploration collective, qui contribue à stabiliser progressivement la quantité 8 pas comme réponse attendue, l'intervenante réinvestit la tâche en variant le nombre de pas. Elle réalise alors trois pas du dromadaire en s'appuyant uniquement sur le rythme corporel pour en marquer la durée, sans produire la comptine verbale « un, deux ». Plusieurs élèves répondent que l'humain en fait six. Juliette justifie de nouveau par une addition itérée — « deux à chaque pas » — soutenue par une comptine rythmée. Une autre formulation, plus condensée, apparaît : « deux, quatre, six, c'est trois ».

Bien que ces raisonnements demeurent encore instables, Samara oriente la discussion collective vers une formulation plus généralisante, comme l'illustre l'échange suivant :

> Samara : — C'est toujours trois plus trois, ça fait six, c'est toujours le…
> Intervenante : — Le… ?
> Léa : — Le double !
> Intervenante : — C'est toujours le double, très bien, c'est le double. Donc là vous allez pouvoir le faire très vite
> Jean : — En fait, quand le dromadaire il a fait 4 pas (en signalant les traits avec le doigt) bah l'humain il a fait 8 pas (en signalant les traits avec les doigts et puis parcourant le déplacement avec le doigt) donc ça fait quatre plus quatre ça fait 8
> Intervenante: — Voilà, ça fait le double! Donc là vous allez me répondre très vite, quand le dromadaire fait 8 pas, combien de pas fait l'humain. Plusieurs mains se lèvent.
> Rachel : — Seize!
> Intervenante : — Quand le dromadaire fait 9 pas?
> Juliette : — Dix-huit

Cette propriété est ainsi rencontrée par les élèves dans un degré de généralisation croissante lors de la discussion. Lorsque Jean intervient à nouveau, il continue de s'appuyer sur les lignes au sol et les déplacements, mais en les réinterprétant désormais à la lumière du rapport de double. Cette évolution suggère une reconfiguration progressive de son rapport aux signes mobilisés, ceux-ci cessant d'être de simples indices perceptifs pour être intégrés à une relation quantitative plus sophistiquée.

VII - CONCLUSIONS

L'analyse met en évidence la complexité de l'apprentissage de la multiplication et les potentialités d'un dispositif fondé sur l'exploration collective de rapports de durée à travers une activité musicale et incarnée. Les élèves rencontrent progressivement des formes d'action et de réflexion propres à une pensée multiplicative au sein d'une activité expressive, rythmée et intersubjective, dans laquelle les rapports multiplicatifs se donnent à éprouver comme rapports de durée, le temps étant mobilisé comme unité de mesure.

La pluralité des modalités sémiotiques engagées — langage oral, gestes, rythmes, marques au sol — offre des voies d'entrée différenciées dans l'activité, favorisant une participation inclusive et soutenant la stabilisation progressive de propriétés multiplicatives. Enfin, les instabilités observées, notamment en

matière de synchronisation rythmique et de confusion entre unités de grandeur, soulignent l'importance de phases préparatoires de stabilisation et invitent à une réflexion approfondie sur les variables didactiques du dispositif.

L'objectif de ce travail n'est ni de démontrer un effet causal de la musique sur la réussite en mathématiques, ni d'instrumentaliser la musique comme simple support d'un apprentissage cognitif. Il s'agit plutôt de créer les conditions pour que les élèves rencontrent les rapports multiplicatifs au sein d'une activité expressive, incarnée et collective, dans laquelle le corps, le rythme et la relation à autrui jouent un rôle constitutif.

VIII - REMERCIEMENTS

Cet article a été rédigé dans le cadre du post-doctorat 74220065 financé par l'Agence nationale de recherche et développement du Chili ANID.

IX - BIBLIOGRAPHIE

An, S. A., Kulm, G. O. et Ma, T. (2008). The effects of a music composition activity on Chinese students' attitudes and beliefs towards mathematics: An exploratory study. *Journal of Mathematics Education, 1*(1), 96-118.

An, S., Capraro, M. M. et Tillman, D. A. (2013). Elementary teachers integrate music activities into regular mathematics lessons: Effects on students' mathematical abilities. *Journal for Learning through the Arts, 9*(1).

An, S. A., Tillman, D., Shaheen, A. et Boren, R. (2014). Preservice Teachers' Perceptions about Teaching Mathematics through Music. *Interdisciplinary Journal of Teaching and Learning, 4*(3), 150-171.

Azaryahu, L., Courey, S. J., Elkoshi, R. et Adi-Japha, E. (2020). 'MusiMath'and 'Academic Music'–Two music-based intervention programs for fractions learning in fourth grade students. *Developmental science, 23*(4) : e12882.

Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités*. Thèse HDR. CY Cergy Paris Université.

Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A. M. et Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux-potentialités. *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure, 2*, 373-395.

Chambris, C. et Visnovska, J. (2022). On the history of units in French elementary school arithmetic: The case of proportionality. *Historia Mathematica, 59*, 99–118.

Chédotal, N., (2019). *Fractions en musique*. Académie de Versailles. En ligne : https://pedagogie92.ac-versailles.fr/2020/01/07/maths-et-arts-les-fractions-en-musique/

Cortina, J. L., Visnovska, J. et Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 79–99.

Courey, S. J., Balogh, E., Siker, J. R. et Paik, J. (2012). Academic music: Music instruction to engage third-grade students in learn ing basic fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 251–278.

Da Silva, R. S. R. (2020). On music production in mathematics teacher education as an aesthetic experience. *ZDM, 52*(5), 973-987.

Hetland, L. (2000a). Listening to music enhances spatial-temporal reasoning: Evidence for the "Mozart Effect." *Journal of Aesthetic Education, 34* (3-4), 105-148.

Hetland, L. (2000b). *Learning to make music enhances spatial reasoning. Journal of Aesthetic Education, 34* (3-4), 179-238.

Holmes, S. *(2017). The impact of participation in music on learning mathematics*. Thèse doctorale. London : UCL.

Jonides, J. (2008). Musical skill and cognition. *Learning, arts, and the brain*, 11.

Lebesgue H. (1932) Sur la mesure des grandeurs. (Partie 1) *L'enseignement mathématique.* 31, 173-206.

Mato-Vázquez, D., Chao-Fernández, R., et Chao-Fernández, A. (2019). Efectos de enseñar matemáticas a través de actividades musicales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 22*(2), 163-184.

Math Engaged (s.d.). Rhythms & fractions. http://mathengaged.org/resources/activities/music/rhythms-fractions/

Mathémusique. (s.d.). Projet de recherche Mathémusique. https://www.mathemusique.fr/

Pérez, R. P., Capdevila, R et Prat, M. (2021). Impacto de la enseñanza musical en las competencias lingüísticas y matemáticas. Estudio comparativo en una escuela de Educación Primaria. Dedica. *Revista de Educação e Humanidades,* 19, 431-451.

Pietschnig, J., Voracek, M. et Formann, A. K. (2010). Mozart effect–Shmozart effect: A meta-analysis. *Intelligence, 38* (3), 314-323.

Polotskaia, E. et Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: A view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 447-469.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments, 1,* 1 – 27.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8* (18), 547-567.

Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. In J. Pilet et C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (314-332). Paris : IREM de Paris – Université Paris Diderot.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. In M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, et L. Vivier (Eds.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°21* (19-41). Paris : IREM de Paris.

Raja, V. et Bhalla, D. O. (2021). Impact of Carnatic music training on the mathematical ability of children. *Early Child Development and Care, 191*(12), 1911-1921.

Rauscher, F.H., Shaw, G.L., Levine, L.J. Wright, E.L., Dennis, W.R. et Newcomb, R.L. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reason ing. *Neurological Research , 19*(1), 1-8.

Steele, K. M., Bella, S. D., Peretz, I., Dunlop, T., Dawe, L. A., Humphrey, G. K. et Olmstead, C. G. (1999). Prelude or requiem for the 'Mozart effect'? *Nature, 400*(6747), 827-827.

Strickland, S. (2002). Music and the brain in childhood development. *Childhood Education 78*(2), 100-104.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES : PREMIERS RÉSULTATS D'UN SUIVI DE COHORTE

Zeina FARES
Doctorante, UPEC & UNIVERSITÉ PARIS CITÉ
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)
zeina.fares@etu.u-paris.fr

Résumé :
La recherche présentée ici se déroule au sein de l'académie de Créteil, une académie reconnue pour ses résultats relativement faibles en mathématiques, selon les indicateurs issus des évaluations nationales externes. L'un des enjeux majeurs de cette recherche consiste à mieux comprendre et documenter les facteurs expliquant ces faibles performances. Pour ce faire, un suivi de cohorte a été initié auprès de 14 classes de CM2, 6ème et 5ème (élèves âgés de 10, 11 et 12 ans) et de leurs enseignants. L'étude se focalise sur la transition école-collège, une période où les écarts de performance s'accentuent. Un test diagnostique, élaboré à partir des typologies de Vergnaud (1990) et de la classification de Houdement (2017), a été administré en janvier 2025 afin d'identifier les obstacles rencontrés par les élèves et d'analyser l'évolution de leurs compétences. Cet article présente les premiers résultats issus de ce test, ainsi que les questions méthodologiques soulevées par une telle étude. Les premiers résultats mettent en évidence les difficultés persistantes des élèves, l'influence du contrat didactique, et révèlent un besoin d'accompagnement personnalisé exprimé par les enseignants.

I - INTRODUCTION

1. La résolution de problèmes : une priorité institutionnelle et un objet didactique central.

Un consensus institutionnel s'est établi autour de la place centrale que doit occuper la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques, tant à l'école primaire qu'au collège. Le programme de cycle 3 en vigueur au moment de l'étude (BOENJS, 2018) précise que « la résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens » (p. 75). Par ailleurs, le rapport Villani-Torossian (2018) élève les mathématiques au rang de priorité nationale, encourage le travail collaboratif entre enseignants, et soutient la mise en place d'un portail de ressources. Il critique également la tendance des manuels à limiter l'activité mathématique à des exercices de découverte ou d'application directe, appauvrissant ainsi la réflexion des élèves.

En didactique des mathématiques, la résolution de problèmes est depuis plusieurs décennies considérée comme la source et le critère de la connaissance mathématique (Vergnaud, 1990 ; Houdement, 1999). Différents travaux dans la littérature internationale s'accordent sur les apports de celle-ci en classe, tout en pointant les difficultés persistantes, tant du côté des élèves que du côté des enseignants. Cette même littérature permet ainsi d'envisager différents questionnements, cadres théoriques et méthodologie (Feyfant 2015 ; Houdement 2011 ; Roditi 2011 ; Vergnaud 1997).

Parallèlement, des études nationales et internationales (DEPP, CEDRE, TIMSS, PISA) alertent sur le niveau en mathématiques des élèves en France. D'après les notes d'information de la DEPP (2015) traitant des résultats de TIMSS, « les élèves français obtiennent un score moyen de 488 en mathématiques et de 487 en sciences. Ces scores sont significativement inférieurs aux moyennes internationales des deux échelles TIMSS, fixées à 500 ». Parallèlement, le nombre d'élèves très performants reste faible. Plus récemment, les résultats du MEN-DEPP (2021) indiquent que 33 % des élèves de sixième dans l'Académie de Créteil présentent une « maîtrise fragile » ou « insuffisante » en mathématiques, un chiffre supérieur à la

moyenne nationale de 27 %. En résolution de problèmes, seuls 61 % des élèves de Créteil présentent une « maîtrise satisfaisante » ou « très bonne », contre 66 % au niveau national. Ces tendances se confirment avec les premiers résultats de l'évaluation standardisée de la DEPP (2024), réalisée en septembre pour les CM2. Cette évaluation montre que la compétence « résoudre des problèmes » est moins bien maîtrisée à Créteil, avec 45,4 % des élèves ayant une maîtrise satisfaisante ou très bonne, contre 50,2 % au niveau national.

2. Un dispositif de recherche en mathématiques

Notre recherche prend place au sein d'un projet[1] financé par le PIA4 (4e Programme d'investissements d'avenir), qui vise à développer un « écosystème innovant d'accompagnement et de transformation pédagogique » dans l'Académie de Créteil.

La genèse de cette étude repose sur deux constats : d'une part, l'absence de données longitudinales permettant de suivre l'évolution des apprentissages des élèves en matière de résolution de problèmes lors de la transition école-collège ; d'autre part, le manque d'outils diagnostiques et de dispositifs d'accompagnement à destination des enseignants sur cette thématique spécifique.

Plus particulièrement, ce travail s'inscrit dans l'initiation d'un suivi de cohorte mené dans l'Académie de Créteil, dans le cadre d'une recherche sur la transition école-collège en mathématiques, centrée plus spécifiquement sur la résolution de problèmes arithmétiques. Ce suivi implique quatorze classes de CM2, 6ème et 5ème (élèves âgés de 10 à 12 ans), ainsi que treize enseignants.

Dans ce contexte, un test diagnostique a été administré en janvier 2025, conçu à partir de la typologie de Vergnaud (1990) et de la classification de Houdement (2017). Ce test a pour objectifs d'évaluer la capacité des élèves à résoudre différents types de problèmes arithmétiques, de repérer les premières tendances dans les cheminements cognitifs adoptés par les élèves. L'analyse de ces résultats vise à mettre en évidence les éléments sur lesquels les élèves progressent ou rencontrent des obstacles au cours de cette période de transition.

Cet article se focalise sur la présentation des premiers résultats issus de ce test diagnostique, en soulignant les choix, notamment en ce qui concerne le codage des réponses, la construction d'indicateurs d'évolution et l'analyse des trajectoires d'apprentissage.

II - POSITIONNEMENT THÉORIQUE ET FINALITÉ DU TEST

Afin de concevoir un test diagnostique pertinent dans le cadre de la transition entre l'école élémentaire et le collège, il est apparu essentiel de s'appuyer sur des outils conceptuels et méthodologiques issus de la didactique des mathématiques. Ces outils ne se limitent pas à des supports instrumentaux ou à des grilles d'analyse standardisées, mais s'ancrent dans des cadres théoriques qui permettent de structurer la conception des énoncés, de catégoriser les tâches proposées, d'anticiper les obstacles conceptuels et de modéliser les raisonnements chez les élèves.

1. Cadres théoriques mobilisés

Trois références majeures de la didactique française des mathématiques ont été mobilisées.

1.1 La théorie des champs conceptuels.

Cette théorie identifie les situations dans lesquelles un concept est effectivement mobilisé et de repérer les schèmes opératoires activés par les élèves (Vergnaud, 1990). Dans le cadre du test, la typologie des situations arithmétiques proposée par Vergnaud a constitué un point d'ancrage. Cette classification

[1] Projet intitulé : « Vers une nouvelle équation académique : Un nouvel écosystème de travail et d'apprentissage pour améliorer les résultats des élèves en mathématiques. » Pour plus de détails, voir https://www.ac-creteil.fr/le-projet-vers-une-nouvelle-equation-academique-123278

permet de concevoir des problèmes sollicitant des raisonnements variés et de mettre en évidence des obstacles conceptuels potentiels.

1.2 La catégorisation des problèmes arithmétiques.

Houdement analyse en profondeur le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques, elle distingue parmi les problèmes arithmétiques trois grandes catégories :

- Les problèmes basiques ou élémentaires, qui, sauf dans le cas particulier de la proportionnalité, sont « des problèmes à deux données, où il s'agit de déterminer une troisième valeur, à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue (les « one step problems » objet d'étude de Vergnaud) »
- Les problèmes complexes sont ceux auxquels nous nous intéressons en particulier. Ils sont décrits comme étant des agrégats de problèmes basiques qui ne sont pas uniquement juxtaposés, mais qui nécessitent la construction de sous-problèmes basiques sous-jacents calculables qui font avancer vers la réponse (Houdement, 2017). La complexité de ce type de problèmes peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse, mais aussi de l'identification de sous-problèmes calculables, ce qui nécessite d'avoir mémorisé antérieurement des problèmes basiques résolus.
- Les problèmes atypiques définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes. (Houdement, 2018).

Dans le cadre de notre étude, cette catégorisation a servi de référence pour construire un test intégrant des problèmes basiques, complexes et atypiques. Les données des problèmes sont claires, les calculs reposent sur des opérations élémentaires, avec des nombres facilement manipulables afin de réduire l'obstacle technique, et certaines tâches invitent à vérifier la cohérence du résultat, prolongeant ainsi la démarche recommandée par Houdement (1997).

1.3 La théorie des situations didactiques

Certains éléments de cette théorie, notamment la notion de contrat didactique, ont été pris en compte pour anticiper l'impact des attentes implicites sur les stratégies de résolution adoptées par les élèves (Brousseau, 1997). En intégrant cette dimension, la conception des énoncés vise à limiter les effets de sur-adaptation aux habitudes scolaires.

2. Apports complémentaires à la conception du test

Les recherches de Butlen (2007) sur les cheminements cognitifs et l'analyse des productions d'élèves, menées dans une perspective de collaboration chercheurs–enseignants, ont également nourri la réflexion.

3. Finalité du test diagnostique

L'objectif est de concevoir un outil permettant de révéler quelques raisonnements mobilisés par les élèves, de relever les acquis, d'identifier les difficultés rencontrées, et de repérer les types de problèmes les plus discriminants sur le plan des apprentissages.

Ce cadrage théorique assure que le test diagnostique ne se limite pas à mesurer des performances, mais constitue aussi un outil d'analyse fine des processus d'apprentissage et des obstacles rencontrés.

III - MÉTHODOLOGIE GÉNÉRALE ET CONTEXTE DE LA RECHERCHE

1. Question de recherche et méthodologie générale

À partir du contexte institutionnel et scientifique décrit précédemment, et en réponse aux besoins identifiés sur le terrain dans l'Académie de Créteil, cette étude vise à répondre aux questions suivantes :

- Dans quelle mesure le test diagnostique peut-il être utilisé non seulement comme outil de collecte, mais aussi comme support d'analyse pour identifier les erreurs, stratégies et profils d'élèves en résolution de problèmes arithmétiques ?
- En quoi un suivi de cohorte d'élèves sur deux années scolaires CM2 et 6ème (élèves âgés de 10 ans, et 11 ans) permet-il de mieux comprendre les trajectoires d'apprentissage, les continuités ou ruptures dans les pratiques d'enseignement, ainsi que l'évolution des profils d'élèves en résolution de problèmes ?

Ces questions visent à répondre à un besoin identifié au sein de l'Académie de Créteil, où il n'existe à ce jour ni données longitudinales sur la résolution de problèmes à la transition école-collège, ni dispositifs systématiques de suivi et d'accompagnement des enseignants ou des élèves sur ce thème.

Le présent article se concentre sur la première de ces questions, à travers la présentation et l'analyse des résultats initiaux du test diagnostique.

Pour y répondre, une méthodologie mixte a été mise en place, articulant des approches :

- Quantitatif : un suivi initial d'un large échantillon d'élèves de plus de 350 élèves de CM2, 6e et 5e (élèves âgés de 10, 11 et 12 ans) dans un même établissement, à travers un test diagnostique. L'objectif est d'évaluer ce que les élèves maîtrisent ou non, en se concentrant sur leurs connaissances actuelles. Cette phase permet d'identifier des groupes d'élèves présentant différents profils.
- Qualitatif : des analyses complémentaires sont menées à partir des copies d'élèves, d'entretiens semi-directifs[2]avec les enseignants et d'observations de séances de classe. Ces données permettent de repérer des éléments du contrat didactique implicite (attentes, formes de réponses attendues, types de guidage) et orientent le choix des indicateurs en vue d'analyses statistiques approfondies.

La suite du texte décrit et illustre la méthodologie adoptée pour rendre compte de chacun de ces aspects, après une précision sur le contexte de recherche et le type des données analysées.

2. Contexte et besoins identifiés sur le terrain

Depuis septembre 2024, des réunions régulières ont été organisées avec les enseignants par les chercheures.[3] Ces premiers échanges ont permis de dégager les difficultés exprimées par les enseignants concernant l'enseignement de la résolution de problèmes arithmétiques, de mieux comprendre les pratiques existantes, les obstacles rencontrés, ainsi que les attentes des enseignants. Ce qui suit constitue une synthèse des éléments principaux issus de ces rencontres.

Les enseignants ont accueilli le projet avec enthousiasme et exprimé leur volonté de s'impliquer dans le travail engagé autour de la résolution de problèmes arithmétiques.

Malgré l'utilisation de plusieurs aides à la représentation promue par l'institution (comme les schémas en barres), ou de manuels (comme le dispositif « Un jour, un problème »), de nombreuses difficultés ont été soulevées. Les enseignants observent notamment que les élèves peinent à résoudre correctement un

[2] L'entretien semi-directif, technique d'enquête qualitative, consiste en une interaction verbale sollicitée par l'enquêteur/-trice auprès d'un-e enquêté-e, à partir d'une grille de questions utilisée de façon très souple.

[3] Cécile Ouvrier-Buffet, Cécile Allard, Zeina Fares.

problème, en raison de leur incapacité à mobiliser efficacement leurs connaissances et à transférer leurs apprentissages dans des contextes nouveaux. Cette difficulté centrale dans la résolution de problèmes engendre chez certains enseignants un sentiment de frustration. Ils expriment une crainte face à cet enseignement jugé complexe. En l'absence de résultats significatifs, une tendance à se recentrer sur des activités mathématiques perçues comme plus « accessibles » a été mentionnée.

Face à ces constats, les enseignants ont exprimé leur besoin concernant la formation en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques : classification des types de problèmes, étapes d'une démarche de résolution, outils d'accompagnement des élèves, etc.

Enfin, plusieurs enseignants ont souligné les difficultés rencontrées par les élèves lors du passage en 6ème (élèves âgés de 11 ans). Selon eux, cette transition s'accompagne fréquemment d'un recul sur certaines compétences attendues, par exemple certains élèves perdent progressivement la maîtrise des tables de multiplication, soulignant la nécessité d'un renforcement de l'articulation pédagogique entre l'école élémentaire et le collège.

IV - TEST DIAGNOSTIQUE DANS LE CADRE DU SUIVI DE COHORTE

1. Test diagnostique : objectifs et mise en œuvre

Afin de mieux cerner les difficultés des élèves en résolution de problèmes arithmétiques et d'éclairer les choix didactiques à venir, un test diagnostique, comprenant six problèmes, allant de situations basiques à des problèmes plus complexes, selon la typologie de Vergnaud (1990) et la classification de Houdement (2017), a été conçu et administré en janvier 2025[4]. Il a été administré dans 14 classes issues de deux écoles et deux collèges de l'Académie de Créteil : 5 classes de CM2 (10 ans), 8 classes de 6ème (11 ans) et 1 classe de 5ème (12 ans).

Ce test vise plusieurs objectifs :

- Identifier les connaissances effectives et les lacunes des élèves ;
- Repérer les cheminements cognitifs mobilisés, selon la typologie de Butlen (2004), notamment les éléments sur lesquels les élèves progressent — ou non ;
- Analyser la capacité à résoudre différents types de problèmes, classés selon la typologie de Vergnaud (1990) ;
- Établir des profils d'élèves et suivre leur évolution dans le cadre d'un suivi de cohorte sur deux années ;
- Mettre en évidence les obstacles récurrents à l'apprentissage ;
- Constituer un point de comparaison dans le cadre du suivi longitudinal.

2. Modalités de passation du test diagnostic

La durée totale de l'épreuve était de 40 à 45 minutes.

Les enseignants ont présenté le test en insistant sur son caractère non évaluatif. Ils ont précisé qu'il ne s'agissait ni d'un test noté ni d'un devoir surveillé, mais d'un outil destiné à mieux comprendre les acquis et les difficultés des élèves. Ceux-ci ont été encouragés à répondre individuellement et sincèrement, sans aide extérieure, en s'appuyant uniquement sur leurs connaissances personnelles. Ce cadre visait à instaurer un climat rassurant, favorable à une expression exacte des savoirs des élèves.

Le déroulement de l'épreuve a été uniformisé dans toutes les classes afin de garantir une rigueur méthodologique. Chaque problème était lu à voix haute par l'enseignant, puis les élèves disposaient de cinq à six minutes pour le résoudre. L'enseignant veillait à ce que tous aient terminé avant de passer au

[4] Pour le moment, les auteurs ne souhaitent pas diffuser l'intégralité des énoncés de ce texte car des expérimentations sont encore en cours.

problème suivant. À la fin de l'épreuve, quelques minutes supplémentaires étaient accordées pour revenir sur leurs réponses ou les modifier.

Les conditions de passation étaient les suivantes : travail en autonomie, en classe entière, avec six problèmes à résoudre, une seule feuille distribuée, et aucune question autorisée durant l'épreuve.

3. Exemples de problèmes

3.1 Exemple 1 : Problème « Âge »

Énoncé :

Paola a 54 ans. Elle a 17 ans de moins que son frère. Quel est l'âge de son frère ?

Ce problème de comparaison additive, avec recherche de l'un des deux états, nécessite une interprétation numérique et arithmétique, puisqu'il s'agit d'identifier les quantités en jeu, d'établir la relation additive qui les relie, puis d'effectuer le calcul permettant de déterminer la valeur manquante. L'énoncé propose une relation entre deux grandeurs et demande de trouver une valeur inconnue à partir de cette relation. Il s'agit ainsi d'un problème élémentaire de comparaison additive, ne nécessitant qu'une seule opération. La situation est réaliste et facile à comprendre en apparence, mais la capacité des élèves à relier les données et à interpréter les relations équivalentes mobilise des connaissances spécifiques, notamment dans la dimension discursive où le langage joue un rôle central. Les élèves doivent comprendre des expressions comme « de plus que » ou « de moins que », et passer d'une formulation verbale à une opération mathématique, s'appuyant sur des connaissances fondamentales comme l'addition, la soustraction et les relations inverses.

Ce problème peut être résolu par diverses stratégies : techniques arithmétiques (54 + 17 = 71), introduction de l'algèbre (x – 17 = 54, avec x l'âge du frère), raisonnement logique par essais et ajustements (si le frère a 70 ans, alors Paola aurait 53, ce qui est trop petit, on ajuste à 71…) ou représentations graphiques (voir figures 1 et 2).

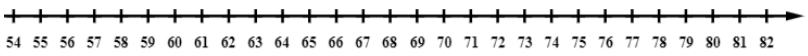


Figure 1. Droite graduée comme outil de résolution

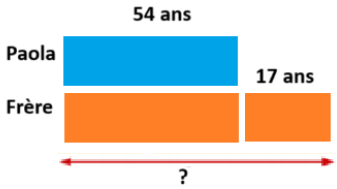


Figure 2. Schéma en barres comme outil de résolution

3.2 Exemple 2 : Problème « Oiseaux »

Énoncé :

Des oiseaux sont sur un fil électrique. Laurent ouvre la fenêtre : 17 oiseaux s'envolent. Plus tard, 12 oiseaux rejoignent ceux qui sont encore sur le fil. Laurent compte alors les oiseaux sur le fil : il en trouve 36. Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent n'ouvre la fenêtre ?

Ce problème illustre une situation de transformation d'état où la résolution implique la recherche de l'état initial à partir de l'état final et de deux transformations successives. Sa résolution implique un raisonnement inverse et une compréhension des relations fonctionnelles entre états et transformations. Les élèves doivent distinguer clairement les états et les transformations, en particulier dans un contexte où la chronologie narrative ne coïncide pas avec l'ordre des opérations à effectuer.

La difficulté majeure réside dans la structure temporelle inversée, qui oblige les élèves à raisonner « à rebours » des événements décrits. Ce type de problème mobilise également la dimension discursive : la compréhension d'expressions comme « s'envolent », « reviennent », ou « il en reste » est essentielle à la

modélisation mathématique. Pour la résolution, plusieurs procédures peuvent être envisagées : raisonnement arithmétique avec opérations inverses (36 – 12 = 24, puis 24 + 17 = 41) ; regroupement réfléchi : 36 + (17 – 12) = 41 ; représentation graphique (voir figure 3).

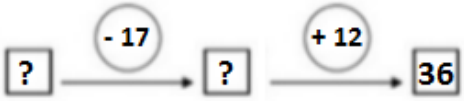


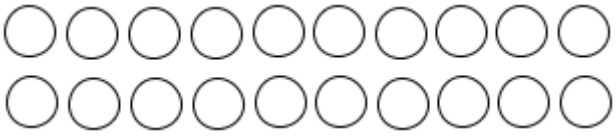
Figure 3. Schéma de raisonnement inverse

3.3 Exemple 3 : Problème « Boules »

Énoncé :

Voici 20 boules.

Il y a 3 fois plus de boules blanches que de boules noires. Colorie les boules noires.



Ce problème s'inscrit dans le champ de la comparaison multiplicative : l'élève doit identifier une partie d'un tout et raisonner à partir de la structure de proportionnalité implicite dans l'énoncé : « 3 fois plus de boules blanches que de boules noires » suppose un rapport de 3 pour 1, ce qui implique que le tout est divisé en quatre parts égales.

D'un point de vue didactique, ce problème combine un support visuel et une consigne textuelle, permettant aux élèves de mobiliser à la fois le registre langagier et le registre sémiotique et favorisant ainsi le passage du concret à l'abstrait.

Il a été intentionnellement intégré dans le test afin de permettre une comparaison entre deux situations proches. Parmi les six problèmes proposés, deux portaient sur la comparaison multiplicative avec identification d'une partie d'un tout : l'un formulé uniquement sous forme textuelle, l'autre – le problème des boules – présenté avec un texte accompagné d'un support graphique. L'objectif était d'observer si la présence d'une représentation graphique facilite ou, au contraire, freine la compréhension de la situation proportionnelle, et d'identifier dans quelle version les élèves rencontrent le plus de difficultés.

Ce double encodage favorise l'activation de stratégies variées : essais et ajustements visuels (groupement par 4) ; équation simple ($x + 3x = 20$, soit $4x = 20$ donc $x = 5$) ; représentation proportionnelle intuitive (les boules noires représentent le quart de l'ensemble, donc 5 boules) etc. Lors de la passation, il a été observé que certains élèves confondent le rapport direct et son inverse, ce qui les conduit à appliquer une opération erronée. Par exemple, ils peuvent raisonner sur « 3 fois moins » ou appliquer une soustraction erronée (20 – 3 = 17 boules blanches).

La difficulté principale réside dans passage du rapport verbal à la structure mathématique sous-jacente, nécessitant de distinguer clairement les deux composantes du tout pour reconstituer la décomposition correcte. Le choix des valeurs numériques (20 boules, rapport de 3 pour 1) a été réfléchi pour éviter des calculs complexes tout en maintenant une exigence de raisonnement. Il a également permis d'observer si les élèves vérifiaient la cohérence de leur réponse : par exemple, diviser 20 par 3 donne un résultat non entier, incompatible avec la situation. L'objectif était donc de voir si les élèves invalident cette réponse, et s'ils adaptaient leur raisonnement en conséquence.

3.4 Exemples de copies d'élèves

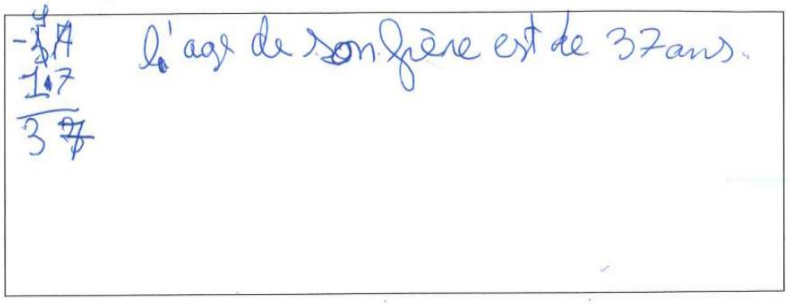
Quelques exemples de copies d'élèves sont présentés ci-dessous pour illustrer certaines des stratégies les plus fréquemment rencontrées, ainsi que des résultats corrects ou des difficultés identifiées. Ces extraits

ne couvrent pas l'ensemble des approches observées, mais mettent en lumière des cas représentatifs parmi ceux analysés.

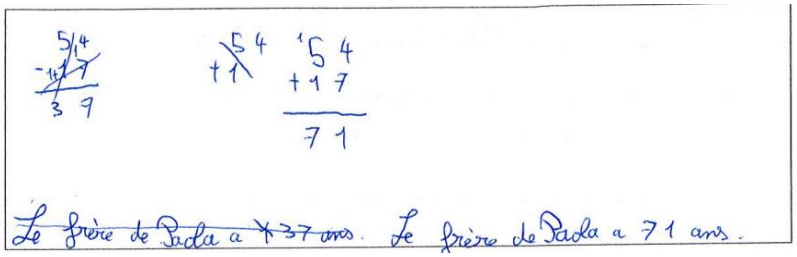
Exemple 1 : Problème « Âge »

Énoncé :

Paola a 54 ans. Elle a 17 ans de moins que son frère. Quel est l'âge de son frère ?



(5ème)



(CM2)

Figure 4. Exemples de réponses d'élèves pour le problème « Âge »

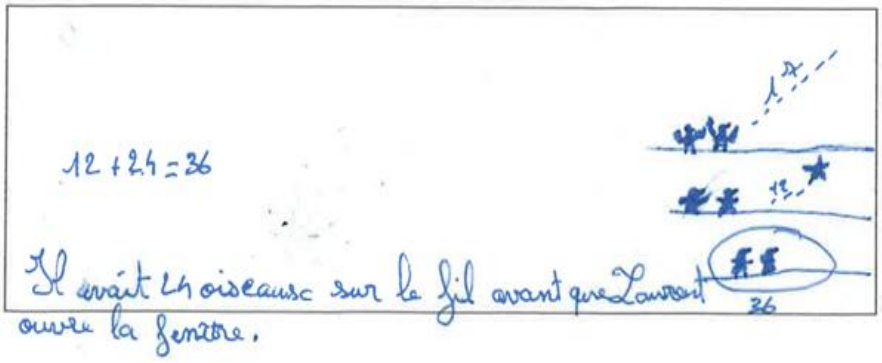
118 élèves ont effectué une soustraction au lieu d'une addition, probablement parce que l'expression « de moins que » a été interprétée comme un signal de soustraction. De plus, plusieurs élèves semblaient effectuer différents calculs avant de retenir, à la fin, le résultat qui leur paraissait le plus approprié pour répondre au problème (voir figure 4).

Exemple 2 : Problème « Oiseaux »

Énoncé :

Des oiseaux sont sur un fil électrique. Laurent ouvre la fenêtre : 17 oiseaux s'envolent. Plus tard, 12 oiseaux rejoignent ceux qui sont encore sur le fil. Laurent compte alors les oiseaux sur le fil : il en trouve 36.

Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent n'ouvre la fenêtre ?



(CM2)

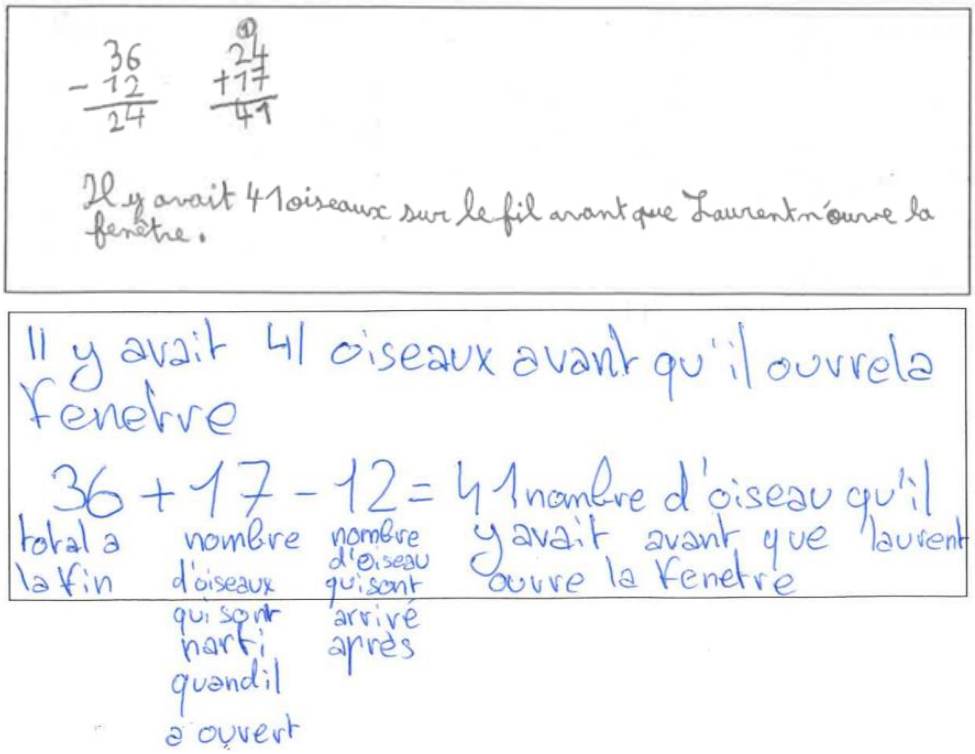


Figure 5. Exemples de réponses d'élèves pour le problème « Oiseaux »

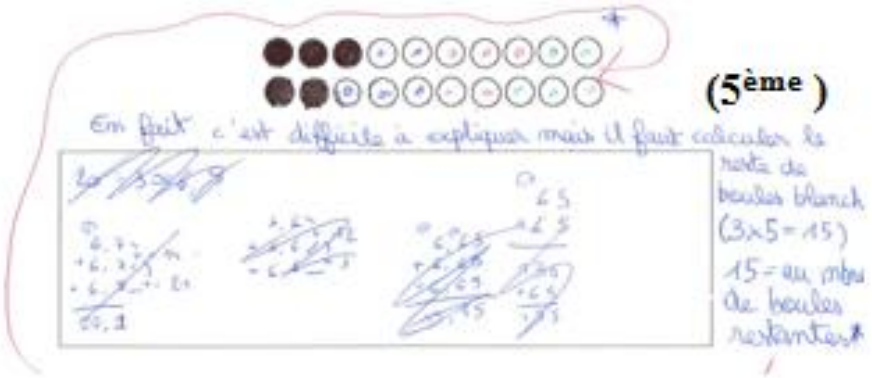
64 élèves s'arrêtent après le premier calcul, ce qui peut indiquer une compréhension partielle de la tâche, ou une tendance à considérer une réponse partielle comme suffisante. D'autres ont tenté des représentations graphiques pour illustrer la situation. 65 élèves ont mobilisé un raisonnement inverse pour trouver la solution. Par ailleurs, des élèves de 5ème (12 ans) ont rédigé une suite d'opérations sur une même ligne, en lien avec des notions abordées en cours etc… (voir figure 5).

Exemple 3 : Problème « Boules »

Énoncé :

Voici 20 boules.

Il y a 3 fois plus de boules blanches que de boules noires. Colorie les boules noires.



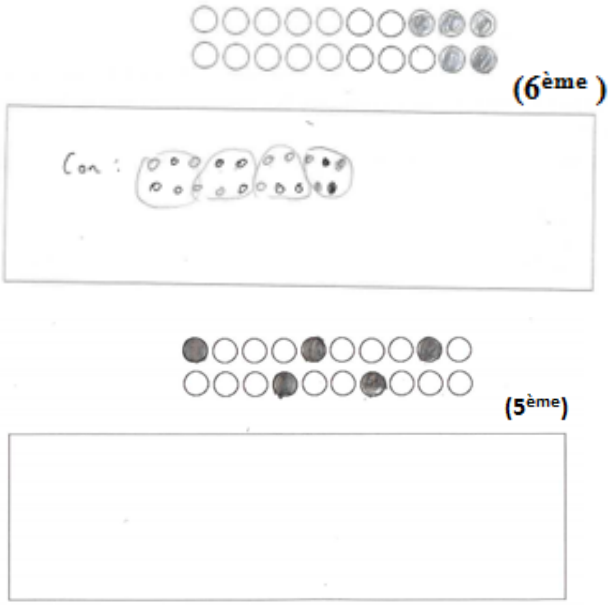


Figure 6. Exemples de réponses d'élèves pour le problème « Boules »

Les différentes approches observées témoignent de la richesse et de la diversité des raisonnements mobilisés par les élèves. Certains ont utilisé un partage visuel, d'autres ont correctement identifié le rapport de proportionnalité ou mobilisé les tables de multiplication. 70 élèves ont effectué le calcul 20 : 3, interprétant à tort le rapport donné. D'autres encore ont eu recours à des représentations graphiques. De nombreuses autres stratégies ont également été relevées dans les copies (voir figure 6).

V - ANALYSE DES DONNÉES

Après le recueil des tests réalisés par les élèves, une première analyse globale a été conduite afin d'évaluer les taux de réussite et d'échec pour chaque problème, dans les différentes classes et niveaux. Cette analyse préliminaire a permis de dresser un état des lieux des difficultés rencontrées chez les élèves.

Voici un aperçu des taux de réussite (en pourcentages) pour chaque problème, d'abord analysés par classe au sein de chaque niveau : CM2, 6ème, puis 5ème (10, 11 et 12 ans), avant une comparaison globale entre les niveaux.

Les résultats sont illustrés dans le tableau et les graphiques qui suivent.

Classe	Âge	Billes	Oiseaux	Coquillages	Ballons	Boules
CM2 (10 ans)	63.7%	7.37%	23%%	37.6%	59%	25.7%
6ème (11 ans)	59.6%	19.6%	29.3%	53.1%	56.9%	28%
5ème (12 ans)	37.0%	20.00%	33.3%	80.8%	81.5%	74.1%

Figure 7. Taux de réussite (%) par problème et par niveau

Le graphique suivant illustre plus en détail les taux de réussite pour chaque problème, en mettant l'accent sur les résultats par classe au sein du niveau CM2 (10 ans).

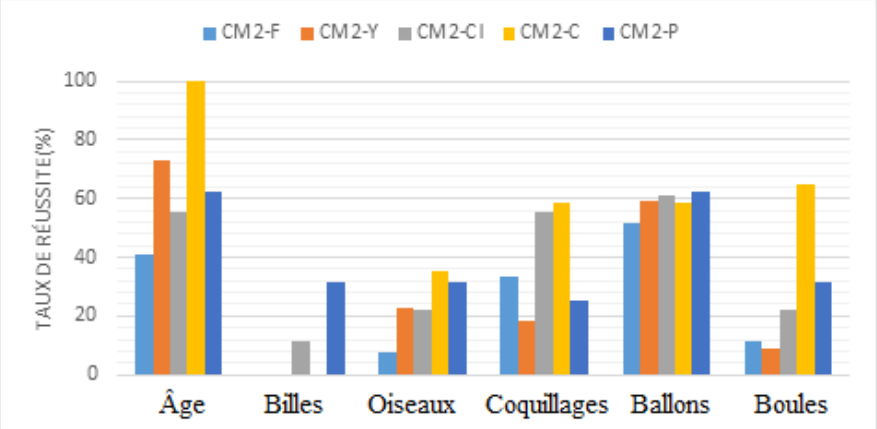


Figure 8. Taux de réussite (%) par problème pour chaque classe de CM2 (10 ans)

Les abréviations CM2-F, CM2-Y, CM2-CI, CM2-C et CM2-P correspondent aux différentes sections de CM2.

Le taux de réussite des élèves de CM2 (10 ans) au problème « Âge » est de 63,7 %, révélant qu'une large part d'entre eux rencontre des difficultés à le résoudre. Il s'agit d'un énoncé simple avec une tâche mathématique explicite, permettant aux élèves de mobiliser les techniques de calcul connues. En revanche, le problème « Billes » a un taux de réussite très faible (7,37 %), indiquant qu'il n'est quasiment pas résolu ; la consigne moins directe et le contexte peu familier semblent avoir déstabilisé de nombreux élèves. Le problème « Oiseaux », légèrement mieux réussi que le problème « Billes », reste peu abouti pour la majorité des élèves avec un taux de réussite de 23 % : il s'agit d'un problème complexe. Le problème « Coquillage », basé sur une comparaison multiplicative en une étape, présente un taux de réussite de 37.6% : de nombreux élèves ne parviennent pas à identifier ou formuler le rapport attendu. Le problème « Ballons », dont la résolution repose sur l'utilisation implicite de la proportionnalité, suggère que ce type de raisonnement n'est pas encore bien consolidé à ce niveau. Enfin, le problème « Boules », affiche un taux de réussite de 25.7 %, indiquant qu'il est peu maîtrisé par la majorité des élèves.
Nous remarquons aussi que les résultats (voir figure 7) sont variables selon les classes de CM2 (10 ans). Il est aussi intéressant de noter que cette variabilité des résultats entre problèmes et entre classes met en lumière la diversité des profils d'apprentissage et des besoins pédagogiques. (voir figures 7 et 8).
Après cette première analyse au niveau CM2, les résultats ont été examinés de la même manière pour les classes de 6ème (11 ans)

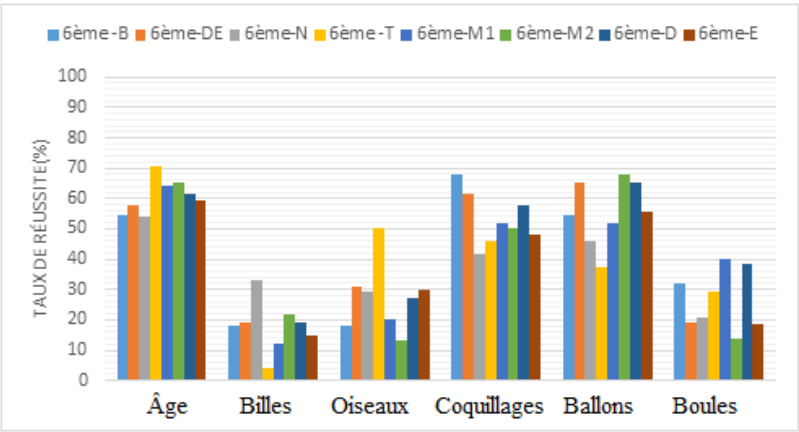


Figure 9. Taux de réussite (%) par problème pour chaque classe de 6ème (11 ans)

Les abréviations 6ème- B, 6ème-DE, 6ème-N, 6ème-T, 6ème-M1, 6ème-M2, 6ème-D, 6ème-E correspondent aux différentes sections de 6ème de l'établissement

En 6ème (11 ans), le problème « Âge » affiche un taux de réussite relativement proche de celui observé en CM2 (10 ans). Le problème « Billes » reste particulièrement problématique, avec un taux de réussite de 19,6 %, ce qui suggère qu'une situation inhabituelle freine fortement la mobilisation des connaissances. Quant au problème « Oiseaux », il continue de poser d'importantes difficultés. Il met en lumière des lacunes dans la planification de la résolution, les élèves effectuant parfois un calcul qu'ils jugent suffisant pour répondre, sans poursuivre leur raisonnement pour réaliser les étapes suivantes. Pour le problème « Coquillages », si certains parviennent à trouver la solution attendue – que ce soit par le biais d'une division ou d'une multiplication à trou – d'autres se limitent à une simple soustraction, ce qui témoigne d'une confusion dans la nature de la comparaison à effectuer. Le problème « Ballons » affiche un taux de réussite similaire à celui du problème « Coquillages ». Le problème « Boules » demeure très peu réussi : rares sont les élèves qui parviennent à mobiliser les éléments nécessaires à sa résolution (voir figures 7 et 9).

L'analyse se poursuit enfin avec les élèves de 5ème (12 ans), afin d'observer les performances à un niveau plus avancé du collège.

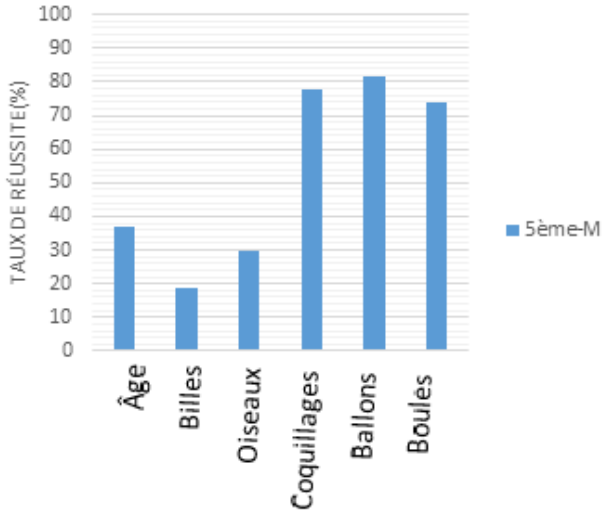


Figure 10. Taux de réussite (%) par problème pour la classe de 5ème (12 ans)

Le problème « Âge » présente un taux de réussite de 37 %, alors même qu'il s'agit d'un problème à une seule étape mobilisant des notions les élèves sont censés maîtriser à ce niveau. Le problème « Billes » reste très peu réussi, avec un taux de 20%, confirmant sa complexité pour tous les niveaux. Le problème « Oiseaux », bien qu'un peu mieux réussi que le problème « Billes », continue de poser d'importantes difficultés aux élèves. En revanche, les problèmes « Coquillage », « Ballons » et « Boules » centrés sur la comparaison multiplicative, enregistre des taux de réussite supérieurs à 75% (voir figures 7 et 10).

Après l'analyse détaillée des résultats par classe et par niveau, une comparaison transversale des performances selon l'âge a été réalisée.

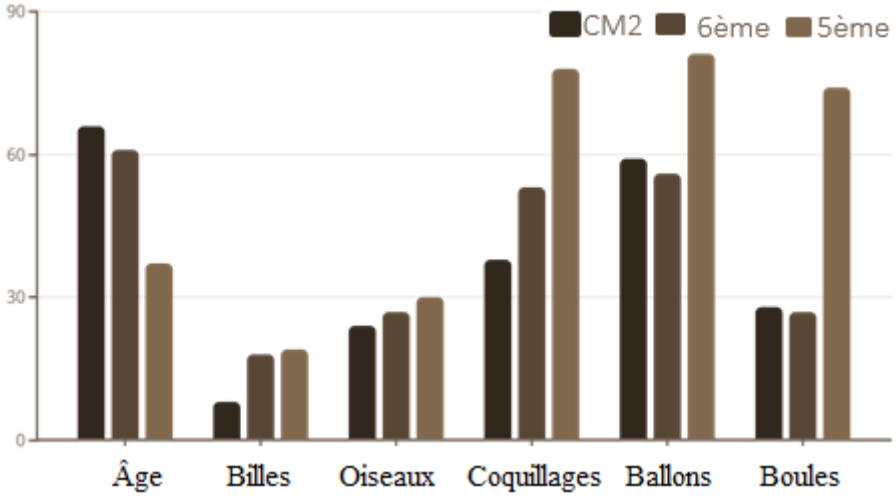


Figure 11. Taux de réussite (%) par problème et par niveau

Fait notable, en 5ème (12 ans), le problème « Âge » est moins bien réussi que chez les CM2 (10 ans) et les 6ème (11 ans). Ce recul interroge, car il s'agit d'un énoncé de base mobilisant une comparaison additive. L'analyse des premiers résultats révèle également que les problèmes « Billes » et « Oiseaux », impliquant des transformations d'état, restent problématiques à tous les niveaux. Pour le problème « Oiseaux » en particulier, peu d'élèves parviennent à articuler les deux étapes de calcul. Plusieurs copies montrent un abandon du second calcul, ce qui suggère une gestion défaillante de la résolution complète. Toutefois, certaines copies témoignent de stratégies intéressantes (voir figure 5).

En revanche les problèmes « Coquillage », « Ballons » et « Boules », portant sur la comparaison multiplicative, montrent un taux de réussite plus élevé en 5ème. La comparaison multiplicative, souvent plus abstraite que la comparaison additive, demande une bonne compréhension des rapports et proportions, ainsi qu'une capacité à manipuler des opérations multiplicatives dans des contextes variés.

Pour le problème « Boules », le support graphique semble ne pas avoir facilité la résolution. Au contraire, il a pu déstabiliser certains élèves, ce qui suggère qu'ils n'ont pas été confrontés à une variété suffisante d'énoncés. Cette observation met en évidence la complexité que peut représenter un support visuel pour certains élèves encore en construction de leurs connaissances sur les situations de comparaison multiplicative (voir figures 7 et 11).

VI - CONCLUSION

Les premiers analyses de ce test diagnostique, encore à confirmer, semblent indiquer une diversité des difficultés rencontrées par les élèves en résolution de problèmes arithmétiques. Certaines observations suggèrent que certaines compétences pourraient se stabiliser d'une année sur l'autre, notamment pour les tâches de base, tandis que d'autres aspects, comme les problèmes impliquant des transformations d'état, apparaissent plus difficiles à maîtriser. Ces éléments laissent penser que la progression des élèves n'est pas strictement linéaire et que des obstacles persistent mais ces tendances devront être confirmées par un suivi longitudinal des mêmes élèves sur plusieurs années.

Cette analyse préliminaire a permis de dresser un état des lieux des compétences et des stratégies mobilisées au sein de l'échantillon d'élèves choisi pour l'étude. Les observations de classe, les entretiens avec les enseignants et les réponses de 74 élèves de l'étude pilote ont d'abord été analysés. Associés à une analyse didactique, ces éléments ont permis de construire une grille d'analyse utilisée pour coder les productions des élèves au test diagnostique. Une partie de la grille est consacrée à des critères qualitatifs

(modalités, erreurs, calculs, opérations, vérification, représentations graphiques, raisonnement) et associée à des listes de réponses textuelles attendues (analyse a priori). Pour la suite de l'étude, les réponses des élèves seront codées à l'aide de cette grille afin de permettre une analyse plus fine. Sur cette base, des banques de problèmes ont été élaborées et mises en œuvre en classe, tandis que les expérimentations se poursuivent afin de compléter le suivi longitudinal et d'affiner les interventions pédagogiques.

BIBLIOGRAPHIE

Butlen, D. (2004). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire : Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles*. Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches, Université de Paris 8 – Saint-Denis. Département des Sciences de l'éducation.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté. https://doi.org/10.4000/books.pufc.9823

Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP). (2015). *TIMSS 2015. Mathématiques et sciences : évaluation internationale des élèves de CM1*. Ministère de l'Éducation nationale.

Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP). (2021). *Évaluations de début de sixième en 2021*. Ministère de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/evaluations-de-debut-de-sixieme-en-2021-des-performances-en-legere-hausse-en-francais-et-des-progres-327197

Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP). (2024). *Évaluations 2024 – Repères CM2 : premiers résultats.* Ministère de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/evaluations-2024-reperes-cm2-premiers-resultats-415582

Feyfant, A. (2015). *La résolution de problèmes de mathématiques au primaire*. *Dossier de veille de l'IFÉ*, (105).

Houdement, C. (1997). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N, 63*, 59-77.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 16*, 67-96.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Houdement, C. (2018). Problèmes arithmétiques basiques : Le cœur du problème ? Dans J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* – 2018 (p. 114). IREM de Paris – Université Paris Diderot. LDAR (EA 4434), Université de Rouen Normandie.

Roditi, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives* Thèse de doctorat, Université René Descartes – Paris V.

Ministère de l'Éducation nationale. (2018). *Bulletin officiel de l'Éducation nationale.* https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/documents/BO_MEN_30_986300.pdf

Vergnaud, G. (1997). *Le moniteur de mathématiques : résolution de problèmes, cycle 3*. Nathan.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* https://www2.animath.fr/wp-content/uploads/2018/08/Rapport_Villani_Torossian-1.pdf

COMMUNICATIONS POSTERS

P1 Page 811	Logique et pensée algorithmique au cycle 1 : une approche interdisciplinaire pour l'apprentissage et la formation	Dominique LAVAL
P2 Page 818	Soutenir le développement de la pensée mathématique des enfants de 4 à 6 ans en contexte de jeu de faire semblant	Raymond NOLIN

LOGIQUE ET PENSEE ALGORITHMIQUE AU CYCLE 1 : UNE APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE POUR L'APPRENTISSAGE ET LA FORMATION

Dominique LAVAL Professeur agrégé de mathématiques, Docteur en didactique des mathématiques CY Cergy Paris Université - INSPE de l'académie de Versailles
dominique.laval@cyu.fr

Résumé
L'apprentissage du raisonnement logique au cycle 1 interroge ses fondements : repose-t-il sur l'expérience seule ou sur des cadres structurants comme l'algorithmique ? Dans une approche interdisciplinaire croisant mathématiques, philosophie et littérature de jeunesse, nous explorons la complémentarité entre pensée logique et pensée algorithmique en Grande Section. Une ingénierie didactique a été menée avec des élèves de 5 ans, en s'appuyant sur les cadres des Espaces de Travail Algorithmique et Connectés. Le conte *Le Petit Prince* a servi de support à une modélisation algorithmique du récit avec Scratch Junior. Les élèves identifient les séquences narratives, les traduisent en instructions et produisent des animations. Les premiers résultats montrent que cette démarche favorise la structuration du raisonnement logique, tout en stimulant créativité et interprétation. L'algorithmique apparaît comme un objet d'apprentissage à part entière, ouvrant des perspectives nouvelles pour la formation des enseignants au cycle 1.

I - INTRODUCTION

L'apprentissage du raisonnement logique dès le cycle 1 constitue une question centrale pour la didactique des mathématiques, dans la mesure où il concerne la structuration précoce de la pensée, la mise en relation d'objets, d'actions et de situations, ainsi que l'émergence de formes élémentaires de justification et d'anticipation. Ces enjeux sont largement documentés par les travaux en didactique portant sur le développement des premiers raisonnements et sur la place des cadres structurants dès l'école maternelle.

Dans ce contexte, plusieurs recherches récentes interrogent le rôle de l'algorithmique comme médiation possible entre expérience vécue et structuration logique. Le protocole PRISME, actuellement en cours d'expérimentation dans le cadre d'une recherche-action pluriannuelle associant l'ISFEC Île-de-France (ICP), des écoles de l'enseignement privé sous contrat de Seine-Saint-Denis et l'Université de Giessen (Allemagne), ainsi que des travaux antérieurs (Laval & Peuch-Lestrade, 2024a, 2024b), s'inscrivent dans cette dynamique en explorant les conditions dans lesquelles des situations interdisciplinaires peuvent soutenir la construction du raisonnement logique chez de jeunes élèves.

La logique se construit-elle uniquement à partir de l'expérience sensible de l'enfant ou requiert-elle des cadres structurants ? Cette interrogation traverse l'histoire de la philosophie et des sciences, notamment dans la tension entre empirisme et rationalisme, dont Kant (1781/1975) a proposé une formulation fondatrice. Elle trouve aujourd'hui une résonance particulière dans le champ de l'enseignement, en particulier au cycle 1. Depuis l'introduction explicite de la « pensée algorithmique » dans les programmes français en 2015, l'école maternelle est appelée à initier les élèves non seulement au langage et au nombre, mais aussi à des formes premières de raisonnement et de structuration de la pensée.

Dans ce contexte, nous proposons une approche interdisciplinaire qui croise mathématiques,

philosophie et littérature de jeunesse. Notre objectif est d'explorer la complémentarité entre pensée logique et pensée algorithmique et d'analyser comment cette articulation peut favoriser l'émergence d'une structuration du raisonnement chez des élèves de Grande Section (5 ans).

Pour ce faire, une ingénierie didactique (Artigue, 2002) est mise en place, mobilisant les cadres des *Espaces de Travail Algorithmique* (Laval, 2018) et *Connectés* (Lagrange & Laval, 2019). Le choix du conte *Le Petit Prince* (Saint-Exupéry, 1946) comme support vise à inscrire la démarche dans un univers littéraire familier et porteur de significations pour les enfants. L'environnement Scratch Junior constitue un outil privilégié pour la modélisation algorithmique du récit : les élèves identifient des séquences narratives, les traduisent en instructions, puis produisent des animations.

Les premiers résultats indiquent que cette transposition algorithmique favorise à la fois la structuration du raisonnement logique et le développement de la créativité narrative. L'algorithmique apparaît ainsi non seulement comme un outil, mais comme un véritable objet d'apprentissage au cycle 1, ouvrant de nouvelles perspectives pour la formation initiale et continue des enseignants et pour la conception de pratiques pédagogiques intégrant la pensée logique dès la maternelle.

II - LE CADRE THEORIQUE

1 Pensée logique et fondements philosophiques

Nous partons de l'hypothèse que la pensée logique est définie comme la capacité à établir des relations cohérentes entre idées, concepts ou faits, en respectant des règles de validité. Par ailleurs, elle constitue un objet d'étude ancien, au croisement de la philosophie et des mathématiques.

Dans la tradition philosophique, la logique est considérée comme l'art du raisonnement valide. Ainsi, Aristote, dans les *Analytiques*, formalise le syllogisme comme modèle de déduction. Par ailleurs, Locke (1690) insiste sur le rôle fondateur de l'expérience sensible dans l'acquisition de connaissances, tandis que Descartes (1637) et Kant (1781) soulignent l'importance de structures rationnelles a priori pour garantir la certitude. Ces débats montrent que la pensée logique se construit entre deux pôles : l'expérience vécue de l'enfant et des cadres formels qui dépassent l'immédiateté du sensible.

Dans le champ des mathématiques, la logique est un langage rigoureux qui fonde la démonstration et assure la cohérence des savoirs. Elle est plus qu'une simple technique d'argumentation. En effet, elle structure la pensée et sert de médiateur entre intuition et formalisation (Durand-Guerrier, 2005).

2 Pensée algorithmique et complémentarité avec la logique

La pensée algorithmique désigne la capacité à décomposer un problème en étapes ordonnées, à concevoir un plan d'action séquentiel et à l'exécuter pour parvenir à une solution au problème. Par cela, elle peut constituer une forme particulière de mise en œuvre de la logique, tournée vers l'action et la résolution de problèmes. Dans Laval (2018, 2024), nous définissons la pensée algorithmique comme une application pragmatique de la logique. Celle-ci définit les critères de validité d'un raisonnement, tandis que l'algorithmique conçoit des procédures exécutables pour atteindre un objectif. Bien que les deux démarches soient distinctes, elles sont complémentaires. En effet, leur articulation offre une perspective riche pour penser l'apprentissage du raisonnement dès le cycle 1 : la logique soutient la compréhension et la justification, l'algorithmique soutient l'organisation et la réalisation.

3 Cadres théoriques mobilisés

Afin d'analyser l'articulation évoquée précédemment, et nous situant dans un contexte scolaire, nous nous appuyons sur plusieurs cadres théoriques en lien avec la didactique de l'algorithmique et de la didactique de la littérature de jeunesse.

3.1 Les Espaces de Travail Algorithmique (ETA)

Nous situant dans la continuité des travaux de Kuzniak et Richard (2014) sur les *Espaces de Travail Mathématique*, nous utilisons les ETA (Laval, 2018). En effet, ces ETA (Annexe 1) permettent de décrire les relations entre tâches, techniques, technologies et théories dans les activités de codage. Ils offrent un cadre pour comprendre comment l'algorithmique devient non seulement un outil, mais aussi un objet d'apprentissage.

3.2 Les Espaces de travail connectés (ETC)

A travers les ETC, dans Lagrange et Laval (2019), il est proposé d'articuler différents domaines de savoirs dans une même activité. Dans notre cas, il s'agit de connecter littérature de jeunesse et algorithmique pour créer un espace de travail hybride où se construisent à la fois raisonnement logique et interprétation narrative.

3.3 Les modèles structuraux du récit

De tels modèles apportent une grille de lecture des logiques profondes qui organisent les récits, en particulier, les contes. Nous faisons le choix de retenir trois modèles : la morphologie du conte de Propp (1970) qui met en évidence une séquence de fonctions récurrentes qui peuvent être traduites en étapes algorithmiques ; le schéma actantiel de Greimas (1966) qui formalise les relations entre actants (sujet, objet, adjuvant, opposant, destinateur, destinataire), introduisant une logique relationnelle qui peut être représentée en structures de données ou en graphes, sur le principe de la théorie des graphes ; le schéma quinaire de Larivaille (1974) qui décompose le récit en cinq phases (situation initiale, perturbation, action, résolution, situation finale), correspondant à une logique séquentielle aisément transposable dans Scratch Junior. Ces modèles partagent une orientation commune qui consiste à rendre visible la logique narrative sous-jacente et fournir un cadre pour la transposer en structures programmables. Ils jouent ainsi un rôle de médiateurs entre l'univers littéraire de l'enfant et la formalisation opérée dans l'environnement algorithmique.

III - LA METHODOLOGIE DE RECHERCHE

1 Le public et le contexte

L'expérimentation a mobilisé deux formateurs de l'INSPE (un chercheur en didactique des mathématiques auteur de ce texte, et un chercheur en philosophie), deux enseignantes d'écoles privées sous contrat, ainsi que des professeurs stagiaires en maternelle et étudiants à l'INSPE. Les écoles privées sont situées à Argenteuil pour l'une et à Nanterre pour l'autre. Par ailleurs, les deux enseignantes du privé ont des niveaux de classe distincts : celle d'Argenteuil un triple niveau PS/MS/GS et celle de Nanterre un CE2. Nous présentons ici uniquement le cas des élèves de la Grande Section (élèves de 5 ans). Le choix de ce niveau se justifie par le fait qu'il constitue une étape charnière dans le développement de la pensée logique : les enfants quittent progressivement la pensée préopératoire pour entrer dans une logique plus structurée, au sens piagétien.

2 Le dispositif expérimental

Notre protocole repose sur une ingénierie didactique (Artigue, 2002), conçue en plusieurs étapes, et mobilisant les cadres des ETA et ETC. Notre objectif est d'explorer la manière dont la modélisation algorithmique d'un récit littéraire peut favoriser la construction de la pensée logique. Le support choisi est le conte *Le Petit Prince* (Saint-Exupéry, 1946), dont la richesse narrative et symbolique favorise l'identification de séquences logiques et leur traduction en instructions. Le récit est d'abord travaillé sous une forme allégée et adaptée, afin d'être accessible à de jeunes enfants. Le dispositif se déroule en plusieurs étapes successives. Au coin regroupement, la lecture d'un extrait adapté du *Petit Prince* permet aux élèves d'identifier collectivement les protagonistes, les lieux et les objets symboliques du récit. Cette première phase est suivie par la construction d'un modèle narratif simplifié. Guidés par

l'enseignante, les élèves organisent les événements selon une logique séquentielle (situation initiale, actions, rencontres, dénouement), en mobilisant des modèles d'analyse structurale tels que ceux de Propp, Greimas et Larivaille. Ensuite, la transcription algorithmique est engagée dans l'environnement Scratch Junior. Chaque élève dispose d'une tablette pour sélectionner ou créer les personnages et décors, puis traduire les interactions narratives en séquences d'instructions (déplacements, dialogues dictés à l'adulte, changements de scène). La programmation et l'exécution donnent lieu à des ajustements collectifs, selon un processus itératif proche du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005) (Annexe 2). Enfin, certaines animations validées conduisent à des variantes narratives, avec l'ajout de scènes ou la création de fins alternatives, renforçant ainsi l'articulation entre récit, logique et algorithmique. Concrètement, les élèves de Grande Section manipulent les tablettes pour déplacer *Le Petit Prince* vers une planète, associer des dialogues dictés à l'adulte et créer des transitions de scène. Ils testent les programmes, observent les effets des instructions et proposent des ajustements collectifs lorsque le comportement de l'animation ne correspond pas à leurs intentions narratives. Certains élèves ajoutent des personnages secondaires ou inventent une nouvelle fin, montrant ainsi comment la transposition algorithmique du récit devient un support de créativité tout en mobilisant des raisonnements logiques élémentaires.

3 Les données recueillies

Les données recueillies combinent les productions numériques des élèves (les animations réalisées dans Scratch Junior), les traces verbales et écrites (dialogues dictés à l'adulte, schémas de scénarisation, notes de l'enseignante) ainsi que des observations issues d'enregistrements vidéo et audio. Leur analyse qualitative, en cours, s'attache à repérer les manifestations de la pensée logique, comme la formulation de relations de cause à effet, justification des choix, anticipation des actions, ainsi que les premières formes de pensée algorithmique, notamment la décomposition en étapes, la structuration séquentielle et la validation par l'exécution des programmes. Des schémas complémentaires figurent en annexes (1, 2 et 3) afin d'illustrer les cadres théoriques mobilisés (ETA, cycle de modélisation) ainsi que des extraits de productions d'élèves.

IV - RESULTATS ET DISCUSSION

Les premières analyses montrent que les élèves de GS mobilisent des éléments de pensée logique en établissant des relations de cause à effet, en anticipant les conséquences d'une action ou en justifiant leurs choix de programmation. La mise en correspondance entre récit et animation favorise cette structuration du raisonnement. Parallèlement, des indices de pensée algorithmique apparaissent dans la décomposition du récit en étapes successives, l'organisation des actions en séquences et la validation par l'exécution. L'environnement Scratch Junior rend visibles les instructions et leurs effets, facilitant les ajustements collectifs et renforçant la compréhension du lien entre consignes, comportements attendus et résultats observés (Annexe 3).

Au-delà de ces apprentissages, le dispositif stimule la créativité narrative : plusieurs élèves proposent des variantes du récit, ajoutent des personnages ou modifient la fin de l'histoire. Ces initiatives confirment que l'algorithmique, loin de se limiter à un outil technique, peut devenir un objet d'apprentissage contribuant à l'enrichissement du rapport au récit et à la structuration de la logique. Ainsi, ces résultats illustrent la complémentarité entre logique et algorithmique. En effet, la première définit les objectifs et les critères de validité, tandis que la seconde fournit un cadre opératoire pour organiser et réaliser les actions. L'ancrage dans la littérature de jeunesse, éclairé par les modèles de Propp, Greimas et Larivaille, déplace l'enseignement de la logique hors de ses champs disciplinaires traditionnels et donne sens aux apprentissages des élèves. Enfin, cette ingénierie didactique ouvre des perspectives pour la formation des enseignants, en les invitant à concevoir des pratiques interdisciplinaires articulant logique, algorithmique et littérature dès la maternelle.

V - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre expérimentation conduite en GS met en évidence la pertinence d'une approche interdisciplinaire croisant logique, algorithmique et littérature de jeunesse. La modélisation algorithmique d'un récit avec Scratch Junior favorise chez les élèves la mise en œuvre de raisonnements logiques élémentaires tout en les engageant dans des démarches de décomposition et de séquençage caractéristiques de la pensée algorithmique. Les observations montrent également que cette articulation soutient la créativité narrative et renforce la capacité des enfants à interpréter et transformer une histoire. Sur le plan didactique, cette recherche contribue à déplacer l'enseignement de la logique au cycle 1 vers de nouveaux supports, au-delà des activités numériques et spatiales, en exploitant le potentiel formatif de la littérature. Sur le plan épistémologique, elle illustre la productivité d'un dialogue entre empirisme et rationalisme, en donnant à l'expérience sensible un cadre structurant par l'algorithmique. Par ailleurs, pour la formation des enseignants, elle souligne l'importance de concevoir des situations interdisciplinaires intégrant la pensée algorithmique comme objet d'apprentissage à part entière dès le cycle 1. Des prolongements sont envisagés, notamment l'élargissement du dispositif à d'autres récits et l'analyse comparative de sa mise en œuvre dans différents contextes scolaires. Ces perspectives visent à mieux comprendre comment la complémentarité entre logique et algorithmique peut contribuer à la construction précoce du raisonnement et à la formation d'une culture scolaire commune.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? Les dossiers des sciences de l'éducation. *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes*, N° 8, pp. 281-308.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18–21.

Descartes, R. (1637/1825). *Méditations métaphysiques*. Paris : A.-A. Renouard. (Edition consultée : 1825).

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* (Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les recherches, Université Lyon 1, Lyon, France).

Greimas, A. J. (1966/1986). *Sémantique structurale*, Paris, P.U.F. (Edition consultée : 1986).

Kant, E. (1781/1975). *Critique de la raison pure*, PUF, coll. « Bibliothèque de Philosophie contemporaine », 8e éd. (Trad. Tremesaygues et Pacaud). (Edition consultée : 1975).

Kuzniak, A., & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Points de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4), 5-40.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Larivaille, P. (1974). L'Analyse (morpho)logique du récit. *Poétique*, n° 19, pp. 368-388.

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Thèse). Université Sorbonne Paris Cité.

Laval, D. (2024). *De la page au code : Comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative*. Communication orale – Symposium ETM8, thème 2.

Laval, D. & Peuch-Lestrade, D. (2024a). *Lire, coder, créer : Le codage narratif avec Scratch Junior – Une exploration sémiotico-instrumentale sur l'interprétation du récit chez l'élève du cycle 2*. Actes du colloque de

la COPIRELEM 2024.

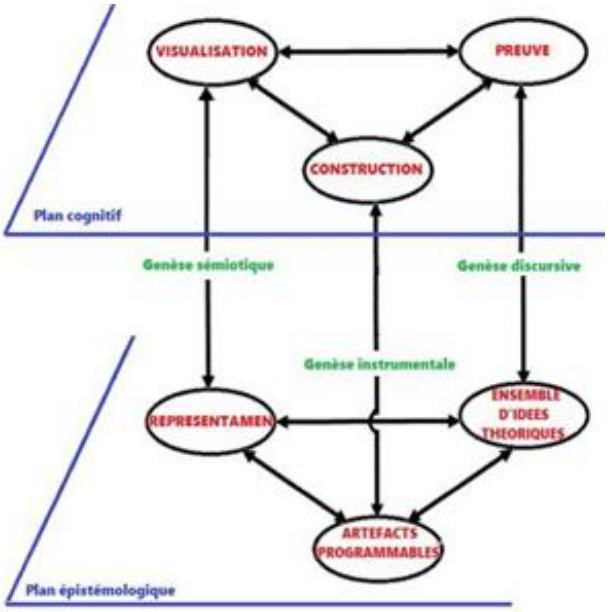
Laval, D. & Peuch-Lestrade, D. (2024b). *De la page au code : Comment explorer les récits de la littérature de jeunesse à travers les lentilles algorithmique et littéraire - Une nouvelle représentation mentale au service de la « compréhension » du récit à l'école primaire*. Actes des Journées du Printemps de la Recherche UNISFEC, pp. 83-94.

Locke, J. (1690/1775). *Essai philosophique concernant l'entendement humain*. Amsterdam & Leipzig : Schreuder et Mortier. (Edition consultée : 1775).

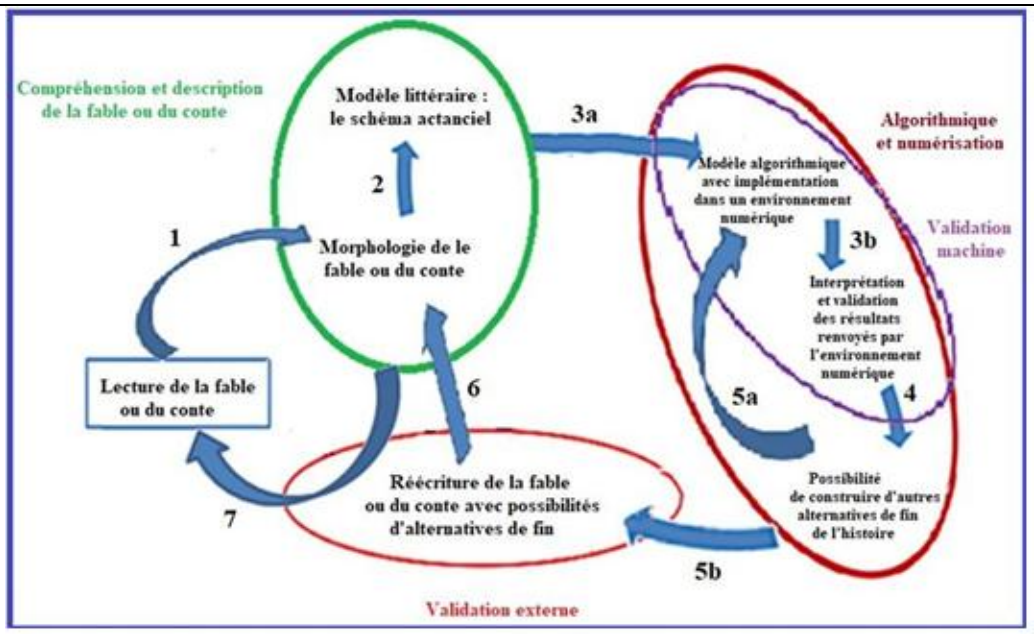
Propp, V. (1970). *Morphologie du conte*. Paris : Seuil.

Saint-Exupéry, A. de (1946). *Le Petit Prince*. Paris : Gallimard.

ANNEXE 1 : REPRESENTATION DES ETA (LAVAL, 2018, 2024)



ANNEXE 2 : LE CYCLE DE MODELISATION DANS LE CHAMP DE L'INTERPRETATION DU RECIT (LAVAL ET PEUCH-LESTRADE, 2024 A ; 2024B)



ANNEXE 3 : EXTRAITS DE TRAVAUX D'ELEVES DE GS



SOUTENIR LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉÉ MATHÉMATIQUE DES ENFANTS DE 4 A 6 ANS EN CONTEXTE DE JEU DE FAIRE SEMBLANT

Raymond NOLIN
Professeur de didactique des mathématiques,
Université du Québec à Trois-Rivières
raymond.nolin@uqtr.ca

Résumé
La communication par affiche a permis de présenter une recherche menée sur les pratiques enseignantes mises en œuvre en contexte de jeu de faire semblant auprès d'enfants de 4 à 6 ans au Québec. Ancrée dans la théorie historico-culturelle de Vygotsky, elle adopte un devis qualitatif/interprétatif, exploratoire à visée descriptive auprès de six personnes enseignantes. Les données, recueillies par entrevues semi-dirigées, observations filmées et entretiens d'autoconfrontation, ont fait l'objet d'une analyse de contenu. Les résultats révèlent une diversité de pratiques enseignantes mises en œuvre avant, pendant et après le jeu, soutenant à la fois le développement global des enfants et celui de leur pensée mathématique.

I - INTRODUCTION

La petite enfance (0-8 ans) constitue une période déterminante pour l'éducation en raison du développement cérébral majeur des enfants qui la caractérise (UNESCO, 2021). Pour soutenir les enfants, chaque pays met en place des services éducatifs appropriés à leurs besoins.

En France, depuis 2019, la scolarisation est obligatoire à partir de 3 ans. L'école maternelle accueille les enfants dans un cycle qui comprend trois niveaux (petite, moyenne et grande sections), fréquentés successivement avant l'entrée au cours préparatoire (CP), première année de l'école élémentaire, vers l'âge de 6 ans (MENESR, 2024).

Au Québec, depuis 2018, l'éducation préscolaire, aussi appelée maternelle, est offerte aux enfants de 4 et 5 ans. Bien qu'elle ne soit pas obligatoire, une majorité d'enfants la fréquentent (ISQ, 2023). Elle constitue un cycle de 2 ans qui précède l'entrée des enfants au primaire, vers l'âge de 6 ans.

Malgré certaines similarités structurelles, ces systèmes éducatifs se distinguent par les orientations pédagogiques mises en avant, en particulier dans la manière d'aborder les premiers apprentissages en mathématiques. En France, les programmes de l'école maternelle prévoient que ces apprentissages soient abordés de manière explicite et structurée, par l'entremise de situations dont les objectifs sont clairement définis par la personne enseignante (MENESR, 2024). L'enseignement repose sur diverses modalités, parmi lesquelles figure le jeu, considéré comme un appui à l'acquisition des premiers outils mathématiques (MENESR, 2024). Toutefois, les programmes ne précisent pas les pratiques enseignantes qui peuvent être mises en œuvre dans ce contexte pour soutenir spécifiquement le développement de la pensée mathématique (DPM).

Au Québec, le Programme-cycle de l'éducation préscolaire (MEQ, 2023) met en avant une approche développementale centrée sur le développement global de l'enfant, où les apprentissages émergent de situations initiées par les enfants, notamment en contexte de jeu de faire semblant[1] (JFS). Les pratiques

[1] Le jeu de faire semblant, aussi appelé jeu symbolique ou jeu de rôle, est une activité initiée par les enfants dans laquelle ils reproduisent une situation imaginaire les amenant à jouer des rôles qu'ils choisissent par eux-mêmes et appliquent des règles qui découlent naturellement de ces rôles (Vygotsky, 1933/2021). Par exemple : le jeu de la marchande.

mises en œuvre par la personne enseignante visent alors à soutenir à la fois le développement global et les apprentissages associés aux différents domaines d'apprentissage, dont les mathématiques. Or, si le JFS est reconnu pour son apport au développement global, son potentiel comme contexte d'apprentissage et de DPM demeure encore peu documenté.

La présente étude, menée dans le contexte québécois de l'éducation préscolaire (4 à 6 ans), vise à décrire des pratiques enseignantes mises en œuvre en contexte de JFS, afin de mieux comprendre comment des personnes enseignantes soutiennent le DPM et d'offrir des repères empiriques utiles à la réflexion en contexte français.

II - PROBLÉMATIQUE

Le JFS, reconnu pour favoriser le développement global de l'enfant (Bouchard et al., 2021), présente aussi un potentiel pour soutenir le DPM, notamment en raison des interactions symboliques et des scénarios complexes qu'il génère (Björklund et al., 2018). Pourtant, les recherches tendent encore à opposer le jeu libre aux activités d'enseignement dirigées, associant souvent les apprentissages mathématiques à une approche scolarisante (Marinova et Drainville, 2019). Dans ce contexte, l'adoption d'une approche développementale soulève des tensions chez les personnes enseignantes appelées à soutenir les premiers apprentissages tout en respectant le rythme et les intérêts de chaque enfant (Lévesque, 2021). Il s'avère donc pertinent de mieux comprendre comment des personnes enseignantes à l'éducation préscolaire peuvent recourir au JFS comme contexte d'apprentissage et de DPM.

III - CADRE THÉORIQUE

L'approche développementale mise en avant dans le cadre de cette recherche s'inscrit en cohérence avec la théorie historico-culturelle de Vygotsky (1934/2011), selon laquelle le développement psychique de l'enfant est ancré dans les interactions sociales et culturelles.

1 Le jeu de faire semblant

Dans cette perspective, le JFS est reconnu comme l'activité maîtresse de l'âge préscolaire (Leont'ev, 1981/2009). Il est essentiel au développement de la fonction symbolique, de l'autorégulation, de l'imagination et prépare l'enfant à l'appropriation de concepts plus abstraits. Le JFS se définit comme une activité initiée par les enfants, dans laquelle ils s'engagent dans des scénarios imaginaires, adoptent des rôles sociaux et appliquent des règles implicites qui découlent de ces rôles (Vygotsky, 1933/2021).

Le JFS, en tant que contexte riche en interactions, constitue un terreau fertile pour soutenir le DPM. Plusieurs travaux ont mis en lumière les occasions mathématiques qui émergent spontanément du JFS, qu'il s'agisse de manipuler des quantités fictives, de négocier des échanges, de structurer l'espace ou de suivre une séquence logique d'actions (Seo et Ginsburg, 2011). Toutefois, plusieurs travaux montrent que le jeu ne suffit pas à lui seul à soutenir les apprentissages mathématiques ; un accompagnement plus intentionnel de la part de la personne enseignante s'avère nécessaire (Fisher et al., 2013 ; van Oers, 1996).

2 Les pratiques enseignantes

Les pratiques enseignantes, telles que définies par Altet (2003), regroupent l'ensemble des actions, observables ou non, qui traduisent les choix et les décisions prises en situation. Elles incluent à la fois des dimensions individuelles (propres à chaque PE) et collectives (liées à l'application des programmes ou aux valeurs partagées au sein d'une équipe) (Benjamin, 2016).

En contexte de JFS, la personne enseignante joue un rôle essentiel pour soutenir le développement de l'enfant, mais aussi pour saisir les occasions d'apprentissage qui émergent du JFS et qui permettent de soutenir le DPM (Amrar et Clerc-Georgy, 2024 ; van Oers, 1996). Pour cela, Johnson et al. (2005) distinguent quatre rôles pédagogiques à privilégier (observateur, metteur en scène, cojoueur et leader de

jeu) ainsi que des rôles à éviter (désengagé et directeur/redirecteur de jeu). Ces rôles constituent un cadre d'analyse pertinent pour examiner comment les pratiques enseignantes soutiennent à la fois le JFS et le DPM.

3 Le développement de la pensée mathématique

Le DPM est un « processus dynamique qui amène l'enfant à former des concepts, à les transformer et à les comprendre. Ces concepts, construits au fil des expériences vécues, sont issus de savoirs mathématiques ancrés dans la pensée culturelle » (Nolin, soumis, p. 57). Les savoirs issus de la pensée culturelle qui sont susceptibles d'être accessibles aux enfants de 0 à 8 ans sont décrits dans le modèle d'*Éveil aux mathématiques*, adapté au contexte québécois par St-Jean, Dupuis Brouillette et Boyer (2023). De plus, le modèle précise les habiletés associées à chacun de ces savoirs mathématiques, selon une progression développementale qui respecte le rythme de chaque enfant. Le modèle d'Éveil aux mathématiques, qui a servi d'appui à l'analyse des situations de JFS dans le cadre de la recherche doctorale de Nolin (soumis) est présenté à l'annexe 1.

En somme, le JFS constitue un contexte d'apprentissage et de développement riche et signifiant pour soutenir celui de la pensée mathématique, à condition que la personne enseignante adopte des pratiques enseignantes sensibles au rythme, aux intérêts et à la zone proximale de développement de chaque enfant (Björklund et al., 2018). C'est dans cette optique que cette recherche identifie des pratiques enseignantes mises en œuvre en contexte de JFS afin de soutenir le DPM des enfants à l'éducation préscolaire.

IV - MÉTHODOLOGIE

Cette recherche adopte un devis qualitatif/interprétatif, exploratoire et descriptif (Savoie-Zajc, 2018). La recherche a été menée auprès de six personnes enseignantes de quatre régions administratives du Québec et qui interviennent dans des milieux socioéconomiques diversifiés. Leur expérience varie de 2 à 30 ans et leurs parcours de formation sont variables (de la formation initiale de premier cycle universitaire à un doctorat en éducation). Les critères d'inclusion étaient : (1) être une personne enseignante à l'éducation préscolaire (4 ou 5 ans) et (2) mettre en place un environnement propice au JFS dans lequel des pratiques enseignantes étaient mises en œuvre afin de soutenir le DPM des enfants.

La collecte de données a reposé sur trois méthodes complémentaires : (1) Des entrevues semi-dirigées (Savoie-Zajc, 2018) afin de documenter des pratiques déclarées ; (2) Des observations filmées (Savoie-Zajc, 2018) afin de saisir des pratiques effectives ; (3) Des entretiens d'autoconfrontation (Mollo et Falzon, 2004) afin d'avoir accès aux choix et aux prises de décisions qu'il n'est pas possible d'observer.

Les données ont été traitées par une analyse de contenu (Bardin, 2013) en trois étapes (préanalyse, exploitation, interprétation). Elles ont été codées en combinant deux approches : une basée sur le cadre théorique (déductive) et une autre basée sur une première analyse des observations (inductive), en utilisant le logiciel NVivo. Grâce à la triangulation des méthodes de collecte de données (Thouin, 2014), les pratiques déclarées, observées et commentées par les personnes enseignantes ont été mises en relation, ce qui a permis de décrire la mise en œuvre des pratiques enseignantes en contexte de JFS.

V - RÉSULTATS

Les résultats montrent que les personnes enseignantes mettent en œuvre plusieurs pratiques avant, pendant et après le jeu de faire semblant (JFS). Ces pratiques, déployées à différents moments du déroulement du JFS, contribuent chacune à leur manière au développement de la pensée mathématique des enfants. Les sections qui suivent présentent divers exemples de situations de JFS au cours desquelles les enfants ont mobilisé des savoirs mathématiques et ont été soutenus par la mise en œuvre de pratiques

enseignantes ciblées. Dans chaque exemple, les savoirs mathématiques mobilisés sont indiqués en italique.

1 Avant le jeu de faire semblant

Avant le JFS, les personnes enseignantes réfléchissent à différents aspects du jeu, tels qu'organiser l'environnement et mettre à la disposition des enfants du matériel en lien avec la thématique, ce qui les encourage à intégrer des savoirs mathématiques à leurs scénarios de JFS. Par exemple, certaines personnes enseignantes ont mis des menus dans l'espace restaurant, permettant ainsi aux enfants de lire les *nombres* et même de réaliser de petits calculs (*sens du nombre*) cohérents avec le contexte de jeu.

Certaines personnes enseignantes mettent également en place des activités pour alimenter le jeu, telles que l'animation d'une discussion, le visionnement de photos ou de vidéos, la lecture d'albums narratifs ou documentaires, ou encore la présentation, l'explication et l'expérimentation du matériel mis à la disposition des enfants. À titre d'exemple, lorsque la thématique de JFS portait sur l'espace, une personne enseignante a pris un moment avant le jeu pour présenter aux enfants les géoplans et les élastiques qu'elle avait mis à leur disposition pour les amener à créer des constellations semblables à celles observées dans le ciel. Cette présentation a favorisé l'appropriation du matériel, a contribué au développement de l'*orientation spatiale* et a suscité des idées que les enfants ont ensuite intégrées à leurs scénarios de jeu.

2 Pendant le jeu de faire semblant

Pendant le JFS, les personnes enseignantes adoptent différents rôles pédagogiques qui les amènent à mettre en œuvre des pratiques qui peuvent être associées à un seul ou à plusieurs de ces rôles. Par exemple, prendre des notes, des photos ou des vidéos correspond au rôle pédagogique d'observateur. En revanche, encourager les enfants à s'engager dans une activité mathématique peut relever du rôle pédagogique de metteur en scène, de cojoueur ou de leader de jeu. Les pratiques enseignantes mises en œuvre pendant le JFS sont diversifiées, allant d'un soutien ponctuel (p. ex. faire du renforcement positif) à un soutien constant (p. ex. faire du modelage). Le choix des pratiques enseignantes repose sur la connaissance des caractéristiques individuelles de chaque enfant et de sa zone du développement le plus proche.

Par exemple, lorsque la thématique du JFS porte sur le supermarché, la personne enseignante adopte le rôle pédagogique d'observateur. Elle constate qu'un enfant, jouant le rôle du client, dépose des articles sur le comptoir, tandis qu'un autre, jouant le rôle du caissier, saisit le prix de chaque article sur la boite faisant office de caisse enregistreuse. Ensuite, le caissier annonce un total de trois dollars pour la facture. Le client lui remet alors une poignée de jetons avant de s'éloigner avec ses achats. La personne enseignante intervient à ce moment pour questionner l'enfant et s'assurer qu'il a payé le bon montant. S'ensuit un échange au cours duquel l'enfant explique qu'il a bien payé trois dollars en déposant trois jetons sur le comptoir. Dans cette situation, la personne enseignante adopte un rôle extérieur au JFS et met en œuvre une pratique enseignante de questionnement visant à amener l'enfant à expliciter son raisonnement. Ce dernier est lié à la *quantité* et l'explication donnée par l'enfant mobilise des habiletés liées au *dénombrement*.

3 Après le jeu de faire semblant

Après le JFS, d'autres pratiques enseignantes visent à soutenir le DPM des enfants. Parmi celles-ci, certaines personnes enseignantes animent des discussions collectives afin que les enfants racontent le scénario de leur jeu. Une telle discussion permet à la personne enseignante d'attirer l'attention des enfants sur certains savoirs mathématiques mobilisés ou développés pendant le jeu.

Par exemple, après avoir construit de grandes tours dans l'espace construction, la personne enseignante anime une discussion avec les enfants à partir de photos des tours prises pendant le JFS. Durant cette

discussion, elle attire l'attention des enfants sur la hauteur de certaines tours, les amène à réaliser le *dénombrement* des blocs pour déterminer la hauteur de la tour et questionne les enfants à propos des *figures planes* (triangle, carré, rectangle) observables dans la structure des tours.

Par la mise en œuvre de cette pratique, la personne enseignante favorise une appropriation progressive de ces savoirs par chacun des enfants, tout en respectant le niveau de développement de chacun. La discussion nourrit également l'imaginaire collectif en vue de la prochaine période de JFS, au cours de laquelle ces savoirs mathématiques pourront être intégrés aux futurs scénarios de jeu.

VI - DISCUSSION

Nos résultats suggèrent que plusieurs pratiques enseignantes mises en œuvre pour soutenir le DPM des enfants pourraient également avoir des retombées positives sur leur développement global. Par exemple, faire du renforcement positif peut contribuer au développement affectif, tandis qu'encourager l'enfant à demander de l'aide à un ami favorise son développement social. De même, introduire du vocabulaire mathématique stimule le développement langagier, ajouter du matériel, permettant à l'enfant de dénombrer des objets réels, participe au développement physique et moteur, et proposer des stratégies pour résoudre un problème, comme des stratégies de dénombrement ou de comparaison, renforce le développement cognitif puisque ce dernier implique le développement de la pensée et celui d'un ensemble de stratégies cognitives. Ainsi, même si l'intention de la personne enseignante est de soutenir le DPM, nos résultats montrent que ses pratiques contribuent aussi au développement global des enfants, ce qui s'inscrit dans une approche développementale. Ce constat rejoint la perspective d'interdomainarité proposée par St-Jean, Larouche et April (2023), qui soulignent l'influence mutuelle entre les domaines de développement.

VII - CONCLUSION

Cette recherche a permis de décrire des pratiques enseignantes mises en œuvre en contexte de JFS afin de soutenir le DPM des enfants à l'éducation préscolaire. Bien que la recherche possède certaines limites, liées notamment à un nombre limité de PE, à des observations réalisées à des moments précis de l'année scolaire (février à mai 2024) et à l'influence possible de la désirabilité sociale (Daunais, 1993), les résultats mettent en évidence une diversité de pratiques enseignantes mises en œuvre avant, pendant et après le jeu. Ils montrent aussi que celles-ci, bien que centrées sur le DPM, contribuent également au développement global de l'enfant. Sur le plan scientifique, ces constats enrichissent la littérature en documentant un contexte encore peu étudié et confirment que le JFS constitue un levier pertinent pour articuler intention pédagogique et respect du jeu initié et dirigé par l'enfant. Sur le plan pratique, ils offrent des pistes concrètes aux personnes enseignantes qui souhaitent soutenir les premiers apprentissages ainsi que le DPM dans une approche développementale. Enfin, cette recherche souligne la nécessité de poursuivre les travaux sur le JFS en tant que contexte d'apprentissage et de développement durant toute la petite enfance, soit de 3 à 7 ans. Une attention particulière devrait être accordée au premier cycle du primaire québécois, afin d'explorer comment ce contexte pourrait soutenir la transition scolaire et favoriser la continuité des apprentissages.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

Altet, M. (2003). Caractériser, expliquer et comprendre les pratiques enseignantes pour aussi contribuer à leur évaluation. *De l'efficacité des pratiques enseignantes, 10*, 31-43. https ://doi.org/10.3406/dsedu.2003.1027

Amrar, L. et Clerc-Georgy, A. (2024). Saisir des opportunités d'enseignement-apprentissage mathématiques en lien avec un jeu de faire semblant : le cas des réunions. *Revue internationale de communication et socialisation*, *11*(2), 274-295.

Bardin, L. (2013). *L'analyse de contenu* (2e éd.). Presses universitaires de France.

Benjamin, F. (2016). *Pratiques enseignantes favorisant une entrée dans l'écrit réussie auprès d'élèves issus de milieux défavorisés au primaire* [Mémoire de maitrise, UQAM]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/11078/1/M14765.pdf

Björklund, C., Magnusson, M. et Palmér, H. (2018). Teachers' involvement in children's mathematizing – beyond dichotomization between play and teaching. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 469-480. https://doi.org/10.1080/1350293x.2018.1487162

Bouchard, C., Robert-Mazaye, C., Mélançon, J., Deneault, J., Laurent, A., Pulido, L. et Niyubahwe, A. (2021). Le développement global des enfants à l'éducation préscolaire. Dans A. Charron, J. Lehrer, M. Boudreau et E. Jacob (dir.), *L'éducation préscolaire au Québec : fondements théoriques et pédagogiques* (p. 57-77). Presses de l'Université du Québec

Daunais, J.-P. (1993). L'entretien non directif. Dans B. Gauthier (dir.), *Recherche sociale*. Presses de l'Université du Québec.

Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. et Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child Development*, *84*(6), 1872-1878. https://doi.org/10.1111/cdev.12091

ISQ [Institut de la statistique du Québec] (2023). *Enquête québécoise sur le parcours préscolaire des enfants de maternelle (EQPPEM) 2022*. Gouvernement du Québec.

Johnson, J. E., Christie, J. F. et Wardle, F. (2005). *Play, Development, and Early Education*. Pearson Education/Allyn and Bacon.

Leont'ev, A.N. (1981/2009). *The development of mind : Problems in the development of mind*. Erythrós Press and Media.

Lévesque, J.-Y. (2021). Le programme-cycle de l'éducation préscolaire : un mélange de possibilités de développement, de confusion et de nouvelles obligations. *Revue Préscolaire, 59*(3), 17-18.

Marinova, K. et Drainville, R. (2019). La pression ressentie par les enseignantes à adopter des pratiques scolarisantes pour les apprentissages du langage écrit à l'éducation préscolaire. *Revue canadienne de l'éducation, 42*(3), 605-634.

MENESR [Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche] (2024). *Programmes d'enseignement pour l'acquisition des premiers outils mathématiques de l'école maternelle (cycle 1)* : Arrêté du 22-10-2024 – J.O. du 25-10-2024. https ://www.education.gouv.fr/bo/2024/Hebdo41/MENE2415135A

MEQ [Ministère de l'Éducation du Québec] (2023). *Programme-cycle de l'éducation préscolaire*. Gouvernement du Québec. http ://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/Programme-cycle-prescolaire.pdf

Mollo, V. et Falzon, P. (2004). Auto- and Allo-Confrontation as Tools for Reflective Activites. *Applied Ergonomics*, *35*(6), 531-540.

Nolin, R. (soumis). *Des pratiques enseignantes mises en œuvre en contexte de jeu de faire semblant afin de soutenir le développement de la pensée mathématique d'enfants à l'éducation préscolaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue].

UNESCO [Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture] (2021, 7 novembre). *Éducation et protection de la petite enfance*. *https://fr.unesco.org/themes/education-protection-petite-enfance*

Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *La recherche en éducation : Étapes et approches (*4e éd., p. 192-217), Les Presses de l'Université de Montréal.

Seo, K. et Ginsburg, H. P. (2011). What is developmentally appropriate in Early Childhood Mathematics education? Lessons from new research. Dans D.H. Clements, J. Sarama, A. DiBiase (dir.), *Engaging young children in mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (p. 91-104). Erlbaum.

St-Jean, C., Larouche, H. et April, J. (2023). Comprendre comment l'enfant apprend : quelques fondements. Dans C. St-Jean, M. Dupuis Brouillette et J.-C. Boyer (dir.), *L'éveil aux mathématiques à l'éducation préscolaire et au premier cycle du primaire : l'enfant et l'exploration au cœur des progressions développementales* (p. 17-25). Éditions JFD.

St-Jean, C., Dupuis Brouillette, M. et Boyer, J.-C. (2023). *L'éveil aux mathématiques à l'éducation préscolaire et au premier cycle du primaire : l'enfant et l'exploration au cœur des progressions développementales*. Éditions JFD.

Thouin, M. (2014). *Réaliser une recherche en didactique*. Éditions Multimondes.

van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play, *European Early Childhood Education Research Journal*, *4*(1), 71-87. http://dx.doi.org/10.1080/13502939685207851

Vygotsky, L. S. (1933/2021). Le jeu et son rôle dans le développement psychologique de l'enfant (I. Leopoldoff Martin, Trans.). Dans B. Schneuwly, I. Leopoldoff Martin et D. N. Henrique Silva (dir.), *L.S. Vygotskij : Imagination (textes choisis)* (p. 41-55).

Vygotsky, L. S. (1934/2011). La périodisation du développement de l'enfant (1934). Dans F. Yvon et Y. Zinchenko (dir.), *Vygotsky, une théorie du développement et de l'éducation : Recueil de textes et commentaires* (p. 111-134). Faculté de psychologie de l'Université d'État de Moscou Lomonossov.

ANNEXE 1

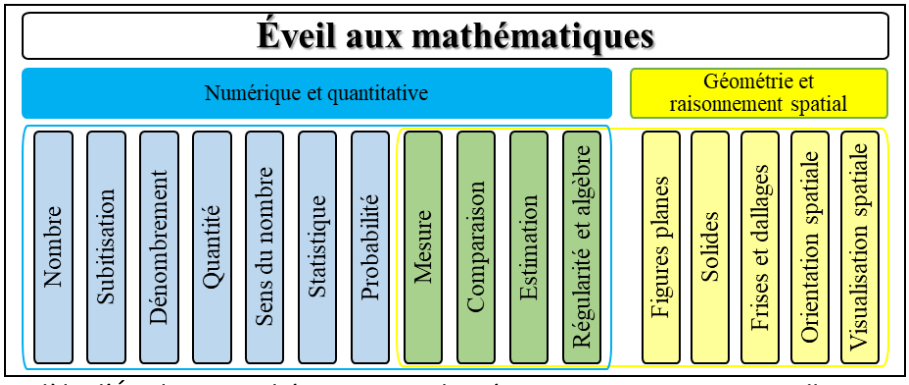


Figure 1 Le modèle d'Éveil aux mathématiques adapté par St-Jean, Dupuis Brouillette et Boyer (2023)

Titre : Actes du 51e Colloque de la COPIRELEM
Strasbourg les 11, 12 et 13 juin 2025

Les savoirs mathématiques de l'école : de la formation des enseignants aux acquis des élèves

Auteurs : Conférencier-e-s, orateur-trice-s de communication et animateur-trice-s d'atelier du Colloque, COPIRELEM

Mots-Clefs : Formation des enseignants, didactique des mathématiques, dispositif de formation

Dépôt légal : Juin 2026

Nombre de pages : 824 pages A4

Editeur : ARPEME

ISBN : 978-2-917294-52-9

EAN : 9782917294529

Public Concerné : Formateurs de mathématiques chargés de la formation des professeurs des écoles

Résumé : Cette brochure contient les textes complets des conférences de Claire GUILLE-BIEL WINDER et de Sebastian KUNTZE, les contributions de Sylvie GRAU et Jean-Michel ZAKHARTCHOUK à la table ronde sur l'éducation au changement climatique, ainsi que l'intégralité des textes des ateliers, communications et posters du colloque.

Prix : 15 euros

