CRPE session 2026 (concours L3)

Épreuve orale de mathématiques

Quelques éléments à propos des deux exemples de sujets fournis par le ministère

Introduction

Le nouveau concours externe de recrutement de professeurs des écoles prévoit une épreuve orale d'admission dont les modalités, disponibles sur le site https://www.devenirenseignant.gouv.fr/, sont les suivantes :

Première épreuve d'admission

- **Durée de préparation : 1 heure.**
- **Durée de l'épreuve: 1 heure (exposé: 20 minutes, échange : 40 minutes).**
- **Coefficient : 5.**

L'épreuve consiste en un exposé suivi d'un échange avec le jury.

L'exposé porte sur l'explicitation et la mobilisation d'une notion en français ou en mathématiques, s'appuyant sur un ou plusieurs documents fournis par le jury.

L'échange permet au jury de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles à la suite de l'exposé et peut porter sur les connaissances disciplinaires connexes à la notion objet de l'exposé.

Les candidats choisissent au moment de l'inscription au concours le domaine d'enseignement faisant l'objet de l'exposé et des échanges : français ou mathématiques.

L'épreuve vise à apprécier la capacité du candidat à s'exprimer clairement à l'oral, à construire un raisonnement et à interagir avec le jury.

L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.

En décembre 2025, le ministère de l'éducation nationale a complété ces éléments en mettant en ligne[1] **deux exemples de sujets de mathématiques pour la première épreuve orale d'admission**.

La COPIRELEM, dont l'une des missions est de produire des ressources pour la formation en mathématiques des futurs professeurs des écoles, a étudié ces deux sujets en cherchant à identifier **comment des formateurs pourraient s'emparer de ces deux exemples pour accompagner des étudiants dans la préparation de l'exposé et de l'entretien de cette épreuve orale**.

Il ressort de cette étude que les deux exemples de sujets nous maintiennent dans de grandes incertitudes quant aux attendus réels de cette épreuve, et nous laissent perplexes quant à la manière avec laquelle des candidats et des formateurs pourront la préparer. Nous précisons les éléments qui nous paraissent encore confus dans la première partie du texte suivant. Nous avons cependant souhaité partager l'état de nos réflexions en proposant ensuite, pour chacun des deux sujets, des éléments qui, selon nous, pourraient alimenter un exposé puis des questions du jury. Ils sont présentés dans les deux parties suivantes.

[1] https://www.devenirenseignant.gouv.fr/exemples-de-sujets-des-concours-externes-bac3-de-recrutement-d-enseignants-1405

Une épreuve dont les attendus et les modalités restent flous

Un traitement « strictement académique » d'une notion disciplinaire ?

Chacun des deux exemples de sujet est accompagné d'un texte intitulé « Attendus de l'épreuve », où il est écrit :

> *L'épreuve a pour objectif d'évaluer l'explicitation et la mobilisation, par le candidat, d'une notion disciplinaire. […] Le traitement de cette notion disciplinaire par le candidat doit être strictement académique : il n'est pas attendu, dans l'exposé du candidat (20 minutes), d'éléments relatifs à la didactique de la notion disciplinaire objet du sujet.*

Cependant, dans le premier exemple de sujet :

- la première question porte sur l'analyse d'une réponse d'élève « en termes de réussites et d'erreurs » ;
- la troisième question porte sur l'adéquation entre des problèmes et un objectif d'apprentissage : il est demandé au candidat d'identifier les intérêts respectifs de deux problèmes pour « un enseignant qui souhaite travailler l'objectif « *Résoudre des problèmes algébriques* » avec des élèves de cours moyen. »
- il est indiqué que lors de l'entretien, « le candidat peut être interrogé sur d'autres types de résolution de problèmes (problèmes additifs, problèmes multiplicatifs, problèmes mixtes, problèmes de comparaison multiplicative, problèmes de dénombrement, problèmes d'optimisation, problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes) » ;
- il est enfin précisé que le candidat (désigné alors, de manière surprenante, par « l'enseignant ») doit être « capable de mettre en œuvre différentes modalités de résolution d'un même problème. »

Ces différentes questions nous paraissent indéniablement intéressantes pour un concours de recrutement de professeurs des écoles : nous ne contestons en aucune manière leur présence. Cependant, nous déplorons l'absence de cohérence entre ces questions et la nature « strictement académique » attribuée par ailleurs à cette épreuve.

Il nous parait donc indispensable que ces incohérences soient corrigées au plus vite afin de permettre aux candidats et aux formateurs de préparer sereinement cette épreuve.

Un « exposé » et un entretien fondés sur trois questions ?

Dans chacun des deux sujets, on lit :

> *Il est par ailleurs attendu du candidat l'élaboration d'un exposé : les questions figurant dans le présent sujet zéro sont destinées à guider le candidat dans l'articulation de son propos.*

Quels sont les éléments qui seront attendus d'un candidat en complément de la résolution de l'exercice pour alimenter son exposé ?

Et, de manière associée, les exercices proposés dans ces exemples de sujets peuvent-ils raisonnablement nourrir vingt minutes de présentation devant un jury ? En comparaison avec l'ancienne « épreuve sur dossier » du CAPES de mathématiques, au cours de laquelle les candidats devaient, avec la même durée, non seulement répondre à des questions portant sur un exercice et proposer des éléments de correction rédigés, mais aussi proposer au moins deux autres exercices, la durée dévolue ici à l'exposé autour d'un seul exercice nous parait longue.

Par ailleurs, plus loin, on lit :

> *L'échange (40 minutes) qui suit l'exposé permet au jury :*
>
> - *de faire revenir le candidat sur les éventuelles erreurs ou approximations commises ;*
> - *de demander au candidat de développer ou d'approfondir certaines sections de son exposé ;*
> - *d'interroger le candidat sur des notions connexes à la notion disciplinaire objet du sujet.*

Les jurys pourront-ils réellement identifier suffisamment d'éléments pour poser des questions pendant quarante minutes ? Et, de manière associée, comment les jurys seront-ils composés ?

Dans quelles conditions matérielles ?

D’un point de vue pratique, le candidat pourra-t-il disposer de façon certaine, dans toutes les académies, d’un **tableau** lui permettant d’exposer les résolutions des exercices ? De la même manière, des **outils de géométrie** (papier blanc, règle, équerre, compas…) seront-ils disponibles en cas d’un sujet portant sur la géométrie ? **Est-il raisonnable d’envisager une résolution « académique » d’un problème sans tableau ?**

Une autre question concerne le matériel à disposition pendant le temps de préparation : le candidat pourra-t-il disposer d’une **calculatrice** ? Si oui cela sera-t-il la calculatrice personnelle du candidat avec des modèles soumis aux mêmes conditions que celles de l’écrit ? Ou bien cela sera-t-il une calculatrice mise à disposition des candidats (comme cela avait été proposé à l’oral du Capes de mathématiques à un moment donné) ? Si oui les modèles seront-ils indiqués à l’avance aux candidats ?

Premier exemple de sujet

Le sujet

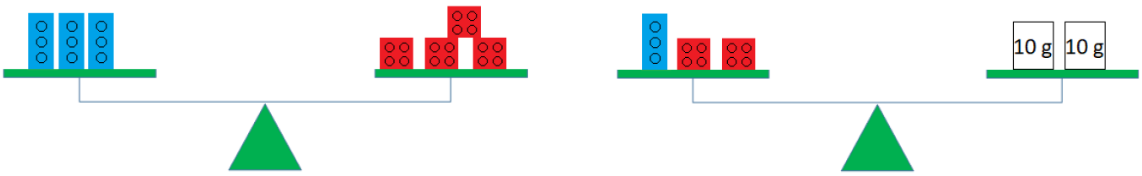
Questions

1. *Un enseignant a proposé le problème ci-dessous (Document A) à des élèves de CM2.*
   Analyser la réponse de l'élève (Document B) en termes de réussites et d'erreurs.
2. *Résoudre le problème présenté dans le document A à l'aide d'une mise en équations. On pourra noter x et y la masse respective, en gramme, des briques rouges et des briques bleues.*
3. *Un enseignant souhaite travailler l'objectif « Résoudre des problèmes algébriques » avec des élèves de cours moyen. À cette fin, il propose les deux problèmes présentés dans le document C.*
   Résoudre ces problèmes et identifier pour chacun d'entre eux l'intérêt qu'il présente pour travailler cet objectif.

Documents fournis aux candidats

Document A

On a effectué deux pesées avec des briques en plastique d'un jeu de construction.
Il y a deux types de briques : des briques bleues et des briques rouges.



Trouve combien pèse une brique bleue et combien pèse une brique rouge.

Document B

Réponse d'un élève

« On multiplie la deuxième balance par 2, ça fait 40 g à droite et 4 briques rouges à gauche que je peux remplacer par 3 briques bleues d'après la première balance. On a donc 4 briques bleues qui pèsent 40 g. On en déduit qu'une brique bleue ça fait 10 g. 1 brique bleue et 2 briques rouges ça pèse 20 g, comme une brique bleue pèse 10 g alors 2 briques rouges ça pèse 10 g. Une brique rouge pèse donc 5 g. »

Document C

Problème 1

Un groupe composé de 24 enfants et de 3 adultes a payé 129 euros pour une séance de cinéma. Sachant que le tarif pour un adulte est de 7 euros, quel est le tarif pour un enfant ?

Problème 2

Un cochon pèse 180 kg de plus qu'un berger allemand. Un mouton pèse 160 kg de moins qu'un cochon. Ensemble, ils pèsent 320 kg. Quel est le poids d'un berger allemand ?

Propositions d'éléments pour l'exposé

Nous proposons pour le traitement de ce premier sujet des éléments de plusieurs types :

- des éléments rédigés de l'exposé ;
- des idées de développements possibles sur des connaissances mathématiques (*en italique*) ;
- des commentaires (*en bleu en italique*) ;
- des interrogations sur ce que pourrait attendre le jury (en bleu).

Introduction

Ce sujet est fondé sur plusieurs énoncés dans le domaine des grandeurs et mesures (des masses et des prix), qui, une unité étant choisie, peuvent se ramener au domaine numérique. Il comporte trois documents : le premier est l'énoncé d'un problème, le deuxième correspond à la production d'un élève ayant résolu ce problème, et le troisième est constitué de deux nouveaux problèmes. Dans chaque énoncé on a des données, des valeurs inconnues et des « contraintes ». Ces énoncés peuvent être considérés comme des problèmes car les solutions ne sont pas évidentes et nécessitent d'élaborer un véritable raisonnement.

Problème du document A

Le problème porte sur des masses. La masse est une grandeur physique, attachée à des objets matériels que l'on peut mesurer avec diverses unités ; ici l'unité choisie est le gramme.

> *Développement possible sur la grandeur masse et les grandeurs en général.*
> *Développement possible sur la mesure d'une grandeur et en particulier sur les unités de masse.*

L'énoncé est donné sous la forme de représentations très schématisées de balances type Roberval. Il y a deux masses inconnues que l'on demande de déterminer, la masse d'une brique rouge et celle d'une brique bleue. Pour chaque pesée, la balance est à l'équilibre, ce qui veut implicitement dire que la masse sur un plateau est égale à la masse sur l'autre plateau.

Dans cet énoncé, il manque une information : les briques bleues, respectivement rouges, ont-elles chacune la même masse ? La réponse est probablement « oui », en décodant implicitement le dessin et en s'appuyant sur la question posée. De plus, si la réponse était « non », le problème ne pourrait pas être résolu. Nous supposerons donc que la masse des briques bleues est proportionnelle à la quantité de briques bleues. Idem pour les briques rouges.

> *Le terme « pèse » présent dans l'énoncé fait référence au poids alors que la réponse attendue concerne une masse. Même si on a accès à la masse par une force qui est le poids, la confusion masse et poids semble inopportune. Dans les programmes de mathématiques (cycles 1 et 2) il est d'ailleurs explicitement écrit que « la masse [est] confondue à tort avec le poids dans le langage courant ». Il aurait donc été préférable de demander de déterminer la masse d'une brique rouge et celle d'une brique bleue.*

Pour construire notre exposé, nous avons choisi de commencer par traiter la deuxième question en résolvant d'abord algébriquement le problème (en mobilisant des connaissances de type cycle 4 sur la résolution d'équations, attendues dans le cadre du programme du CRPE). Cela nous permet d'analyser ensuite la production de l'élève en faisant le lien avec une procédure de type algébrique. Nous envisagerons après d'autres procédures possibles pour résoudre le problème A.

Résolution du problème A à l'aide d'une mise en équations (question 2 du sujet)

On choisit comme inconnues la mesure de la masse d'une brique rouge en gramme, que l'on note x, et la mesure de la masse d'une brique bleue en gramme, que l'on note y.

L'équilibre de la première balance se traduit mathématiquement par : $3 \times y = 4 \times x$ (1)

L'équilibre de la deuxième balance se traduit par : $y + 2 \times x = 20$ (2)

On obtient un système de deux équations à deux inconnues. Il y a plusieurs façons de le résoudre.

Le jury attend-il dans l'exposé plusieurs méthodes de résolution ? La résolution automatisée de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues n'est pas au programme de cycle 4, et n'est pas mentionnée dans les programmes de Seconde.

Des méthodes possibles :

- Par substitution : à partir de (2), expression de y en fonction de x ($y = 20 - 2 \times x$)
  puis substitution dans (1) : $3 \times (20 - 2 \times x) = 4 \times x$;
  puis résolution de l'équation obtenue : $60 = 6 \times x + 4 \times x$ d'où $60 = 10 \times x$, puis $x = 6$.

- Par combinaisons linéaires : transformation de l'équation (1) en $3y - 4x = 0$, puis combinaison de cette nouvelle équation avec (2). Pour cela :
  - soit on multiple chaque membre de l'équation (2) par 3 et on soustrait membre à membre ; ceci permet de ne plus avoir d'inconnue y dans la nouvelle équation ($10 \times x = 60$) ;
  - soit on multiplie chaque membre de l'équation (2) par 2 et on additionne membre à membre ; ceci permet de ne plus avoir d'inconnue x dans la nouvelle équation ($5 \times y = 40$).

- Multiplication de chaque membre de l'équation (2) par 2 ($2y + 4x = 40$) et substitution de l'expression $4x$ par $3y$ en utilisant l'équation (1) ($2y + 3y = 40$). *Cette méthode est proche de la procédure de l'élève.*

Dans tous les cas, on obtient $y = 8$ et $x = 6$.

On obtient ainsi 8 g comme masse pour la brique bleue et 6 g comme masse pour la brique rouge.

On vérifie :

- pour la balance de gauche, $3 \times 8 \text{ g} = 24 \text{ g}$ et $4 \times 6 \text{ g} = 24 \text{ g}$, donc la balance est bien à l'équilibre.
- pour la balance de droite, $8 \text{ g} + 2 \times 6 \text{ g} = 20 \text{ g}$, donc la balance est bien à l'équilibre.

On peut alors conclure : une brique bleue pèse 8 g et une brique rouge pèse 6 g.

Développement possible sur la démarche de résolution d'un problème par mise en équations :
étape 1 : choix d'une ou des inconnues
étape 2 : traduction mathématique de l'énoncé
étape 3 : résolution mathématique
étape 4 : vérification et conclusion dans le contexte de l'énoncé

Développement possible sur la résolution d'équations linéaires du premier degré : comment passer d'une équation à une équation équivalente (par somme, différence, multiplication ou division membre à membre).

Développement possible sur les écritures mathématiques « $4 \times x$ » et « $4\,x$ » : cette dernière simplifie les écritures et évite la confusion entre $\times$ et x, mais elle peut aussi complexifier l'interprétation de l'expression, en masquant le symbole opératoire de la multiplication.

Analyse de la production de l'élève (question 1 du sujet)

L'élève n'utilise pas le formalisme algébrique. On peut supposer que c'est un élève de cycle 3, ou début de cycle 4.

> « On multiplie la deuxième balance par 2, ça fait 40 g à droite et 4 briques rouges à gauche que je peux remplacer par 3 briques bleues d'après la première balance. On a donc 4 briques bleues qui pèsent 40 g. »

Son idée, que nous reformulons en des termes corrects mathématiquement, consiste à démarrer en multipliant par 2 les masses de chacun des deux plateaux de la balance de droite (« On multiplie la deuxième balance par 2, ça fait 40 g à droite et 4 briques rouges à gauche »). Mais il fait une erreur pour le plateau de gauche : il oublie de multiplier par 2 la masse de briques bleues initialement présentes dans le plateau de gauche. On s'en rend compte une fois qu'il a remplacé la masse des 4 briques rouges par celle des 3 briques bleues, en utilisant l'équilibre de la balance de gauche : il parle alors de « 4 briques bleues », alors qu'à cette étape, il devrait avoir 5 briques bleues (2 + 3).

Ce raisonnement consistant à remplacer la masse des 4 briques rouges par celle des 3 briques bleues est cependant très intéressant : on peut qualifier cela de réussite, et d'un point de vue algébrique ce raisonnement revient à faire ce qu'on appelle une substitution. On pourrait dire la même chose de sa première action : multiplier les masses par 2 des deux côtés de la balance se traduit algébriquement par transformer une égalité en une autre en multipliant chaque membre par un même nombre (avec ici l'erreur de multiplier uniquement une partie des termes par 2).

S'il avait correctement doublé le nombre de briques rouges et celui de briques bleues, après substitution, il aurait dû trouver un nombre de briques bleues égal à 5 (on a calculé $2 \times 1 + 3$). On peut penser qu'une simulation (ou la production d'un nouveau dessin de balance à plateaux) de l'action matérielle consistant à doubler le nombre de briques et de masses marquées, sur la représentation de la balance, permettrait à l'élève de rectifier son erreur.

On peut remarquer que c'est forcément une simulation et non une action matérielle puisque trouver des briques en plastique qui fassent la masse de l'énoncé est sûrement difficile.

La suite de son raisonnement est cohérente et ses calculs sont corrects. En suivant les mêmes étapes, en rectifiant le nombre de briques bleues, on obtient que 5 briques bleues pèsent 40 g, et donc une brique bleue pèse 5 fois moins, c'est donc 40 g divisé par 5, et qui donne 8 g. En revenant à la première balance, on a sur le plateau de gauche une masse de 24 g ($3 \times 8\text{ g} = 24\text{ g}$), et sur celui de droite la masse de 4 briques rouges. Une brique rouge pèse 4 fois moins, sa masse est donc égale à : $24\text{ g} \div 4 = 6\text{ g}$.

L'élève a donc utilisé une méthode de résolution ressemblant à la méthode algébrique mais sans utiliser de lettres. À part l'erreur signalée plus haut, son raisonnement et ses calculs sont corrects.

On peut en complément formuler des remarques sur la rédaction de l'élève :

- On ne peut pas multiplier des balances, on peut multiplier un nombre d'objets ou une masse.
- Une égalité ne peut être placée qu'entre deux termes de même nature (par exemple entre deux nombres, entre deux masses, etc.). Pour le plateau de gauche, l'élève multiplie par 2 le nombre d'objets et pour celui de droite il multiplie les masses, l'élève n'a pas cette rigueur mathématique de l'égalité.

Développement possible dans le registre de la proportionnalité. Les expressions « fois moins » et « fois plus » font partie du langage de la proportionnalité. Le dessin de la balance de gauche donne une règle de proportionnalité entre la masse des briques bleues et celle des briques rouges : 3 briques bleues ont la même masse que 4 briques rouges (3 briques bleues « valent » 4 briques rouges). Le coefficient de proportionnalité entre les mesures des masses est de $\frac{3}{4}$ (pour passer des briques rouges aux briques bleues) ou $\frac{4}{3}$ (pour passer des briques bleues aux briques rouges). On pourrait imaginer remplacer 1 brique bleue par $\frac{4}{3}$ de briques rouges dans la balance de droite. On obtiendrait que $\left(\frac{4}{3} + 2\right)$ briques rouges pèsent 20 g. Ou encore $\frac{10}{3}$ de briques rouges pèsent 20 g. Ce qui redonne la masse d'une brique rouge : 6 g. Cette méthode de résolution peut également faire partie du paragraphe suivant (avec une version plus algébrique possible : $\frac{4}{3}x + 2x = 20$).

Complément : résolution du problème A par d'autres méthodes

On peut se demander s'il y a d'autres méthodes de résolution pour des élèves.

Le jury attend-il d'autres méthodes de résolution, en particulier une méthode par essais et rectifications ? *(la méthode de la fausse position en étant une : c'est une méthode où il n'y a qu'une seule rectification). Comme on va le voir, proposer une méthode de ce type permet par exemple des développements mathématiques sur la notion de multiple, de plus petit multiple commun.*

Exemple d'une méthode par fausse position

On commence par tester des mesures de masses en grammes prenant des valeurs entières ; si aucune solution n'est trouvée, on procédera alors à des essais avec des décimaux.

Si la mesure de la masse d'une brique bleue et celle d'une brique rouge sont des entiers, alors, comme il y a équilibre sur la première balance, la mesure de la masse sur chaque plateau est un multiple de 3 et de 4.

On écrit les premiers multiples de 3 et les premiers multiples de 4 et on prend le premier multiple commun : c'est 12. On peut aussi le trouver directement si on a des connaissances sur le PGCD de deux entiers (*n'est plus au programme de cycle 4 mais dans celui de la licence LPPE*) : ici les deux entiers 3 et 4 sont premiers entre eux, donc leur PGCD est leur produit.

Si la mesure de la masse sur chaque plateau de la première pesée est 12, cela signifie que la mesure de la masse de la brique bleue est 4, et que celle de la brique rouge est 3. On peut alors calculer, sur la deuxième balance, la masse sur le plateau de gauche :$1 \text{ brique bleue} \times 4 \text{ g/brique bleue} + 2 \text{ briques rouges} \times 3 \text{ g/brique rouge} = 10 \text{ g}$.

Ce qui n'est pas égal à la masse sur le plateau de droite (qui vaut 20 g).

Mais 20 g est le double de 10 g. On en déduit qu'en multipliant par 2 la masse de la brique bleue et celle de la brique rouge du premier essai, on aura une masse double sur le plateau de gauche de la 2e pesée, et il y aura équilibre. On a utilisé la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ainsi que l'associativité et la commutativité. En effet :

$2 \times (1 \text{ brique bleue} \times 4 \text{ g/brique bleue} + 2 \text{ briques rouges} \times 3 \text{ g/brique rouge}) = 2 \times 10 \text{ g}$

D'où : $1 \text{ brique bleue} \times (2 \times 4 \text{ g/brique bleue}) + 2 \text{ briques rouges} \times (2 \times 3 \text{ g/brique rouge}) = 20 \text{ g}$

$$1 \text{ brique bleue} \times (8 \text{ g/brique bleue}) + 2 \text{ briques rouges} \times (6 \text{ g/brique rouge}) = 20 \text{ g}$$

Cela va aussi convenir pour garder l'équilibre sur la première balance, et cela fournit une solution au problème.

Remarque : on a gardé les unités dans les calculs pour bien voir sur quelle grandeur on est en train de travailler.

> *Garder les unités dans les calculs est recommandé dans les programmes et documents ressources depuis de nombreuses années, on espère que les membres du jury suivent cette recommandation des programmes.*

Autre méthode : avec plusieurs essais-ajustements successifs

L'équilibre de la 2e pesée indique que 2 briques rouges et 1 brique bleue ont pour masse totale 20 g.

On peut satisfaire cette contrainte en supposant que la masse d'une brique rouge est 5 g et que la masse d'une brique bleue est 10 g.

Mais ceci ne permet pas de l'égalité de la balance de gauche ($3 \times 10 \text{ g} \neq 4 \times 5 \text{ g}$) : les briques bleues sont trop lourdes. Il faut donc diminuer la masse des briques bleues.

On peut essayer 9 g pour la masse d'une brique bleue et 5,5 g pour la masse d'une brique rouge, mais encore une fois l'égalité n'est pas vérifiée sur la balance de gauche ($3 \times 9 \text{ g} \neq 4 \times 4{,}5 \text{ g}$). Les briques bleues sont encore trop lourdes, il faut encore baisser la masse des briques bleues.

On essaie avec 8 g pour la masse d'une brique bleue et 4 g pour la masse d'une brique rouge. Cette fois-ci l'égalité est vérifiée sur la balance de gauche !

Cette méthode fournit une solution (trouvée rapidement ici car les valeurs cherchées sont entières ; on ne peut pas dire s'il y a d'autres solutions possibles à moins d'avoir des connaissances sur le nombre de solutions potentielles d'une équation linéaire du premier degré).

Résolution et analyse des problèmes du document C (question 3 du sujet)

Nous allons répondre à la première partie de la question 3 puis indiquer en quoi ces énoncés répondent à cet objectif ou en partie à cet objectif.

> Comme indiqué dans l'analyse des sujets, la deuxième partie de la question 3 (« identifier pour chacun d'entre eux l'intérêt qu'il présente pour travailler cet objectif [Résoudre des problèmes algébriques] ») semble être en

dehors des attendus de l'épreuve (« Le traitement de cette notion disciplinaire par le candidat doit être strictement académique »).

Problème 1 du document C

Ce problème est un problème impliquant une autre grandeur, le prix, avec une inconnue qui est le prix d'une place au tarif enfant. Les données sont les suivantes : il y a 24 enfants, il y a 3 adultes, le prix total est 129 €, le tarif pour un adulte est 7 €.

Puisqu'il est mentionné « problèmes algébriques », on va proposer dans un premier temps une résolution avec une lettre symbolisant l'inconnue.

On note x € le prix d'une place au tarif enfant.

24 enfants paient 24 fois plus qu'un enfant seul. Donc le prix pour 24 enfants est $24 \times x$ €.

Le prix pour trois adultes est le prix pour un adulte multiplié par 3, soit : 3×7 € $= 21$ €.

Développement possible sur la proportionnalité entre une quantité de personnes d'une certaine catégorie (ici enfants, adultes) et un prix, chaque personne payant le même prix.

Le prix total est le prix pour les enfants additionné au prix pour les adultes, soit, en prenant les mesures en euros : $24 \times x + 21$.

Comme le prix total est égal à 129 €, on obtient comme équation : $24 \times x + 21 = 129$.

Cette équation est équivalente à : $24 \times x = 129 - 21 = 108$.

La division étant l'opération réciproque de la multiplication, le prix s'obtient en divisant 108 par 24.

$$x = 108 \div 24 = \frac{54 \times 2}{8 \times 3} = \frac{9 \times 6 \times 2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{9 \times 3 \times 2}{(4 \times 3)} = \frac{9 \times 2}{(2 \times 2)} = \frac{9}{2} = 4{,}5\,.$$

Se pose ici aussi la question de la disponibilité ou non d'une calculatrice. Même en cas de disponibilité d'une calculatrice le candidat pourrait proposer une technique de calcul en ligne dans l'exposé, comme ci-dessus, ou effectuer une division par une technique posée « en potence ».

Le prix d'une place pour un enfant est 4,5 €.

On peut aussi résoudre le problème par une démarche arithmétique, en procédant par étapes.

- On calcule le prix payé pour les 3 adultes : 3×7 € $= 21$ €.
- On en déduit le prix payé pour les 24 enfants : 129 € $- 21$ € $= 108$ €.
- On peut alors calculer le prix pour un enfant : 108 € $\div 24 = 4{,}50$ €

Ce problème ne nous semble donc pas adapté pour travailler la résolution de problèmes algébriques : on peut le résoudre facilement sans utiliser de lettres, en effectuant trois opérations successives à partir des données de l'énoncé.

Cette question sur les objectifs relève selon nous de la didactique. Pour formule notre réponse, nous avons pris appui sur l'extrait suivant du document ressources 2008 « Du numérique au littéral » auquel pensaient peut-être les concepteurs du sujet (mais est-ce dans le champ des attendus de l'épreuve ?) :

« Trop souvent, les exemples proposés pour introduire la mise en équation se ramènent à une équation de la forme $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$ et peuvent être résolus par l'arithmétique. Montrer le fonctionnement de la démarche algébrique sur ce type de problèmes ne permet pas à l'élève d'en percevoir la puissance et l'intérêt. Pour aider les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. »

Autre questionnement : le candidat est-il censé proposer dès l'exposé une résolution avec un schéma en barres ? Nous avons fait le choix de le proposer dans les questions. Est-il censé connaître cet extrait du *programme 2025 de cycle 3, dans le paragraphe « Principes », sous–paragraphe « L'initiation à la pensée algébrique et à la pensée informatique » :*

« Jusqu'au CE2, les problèmes mathématiques proposés sont essentiellement de nature arithmétique, dans le sens où ils mettent en jeu des nombres ou des grandeurs. Dans les raisonnements que l'élève met en œuvre pour les résoudre, il progresse du connu vers l'inconnu. À partir du cycle 3, l'introduction de la pensée algébrique marque un changement de paradigme : il s'agit de raisonner sur des nombres inconnus, qui seront représentés au cycle 4 par des lettres. Le passage progressif de l'arithmétique à l'algèbre nécessite du temps et une approche adaptée. Pour accompagner cette transition, le programme du cycle 3 introduit quelques modèles pré-algébriques (schémas en barre, balances, motifs évolutifs). Ces outils permettent de manipuler des nombres inconnus représentés par des symboles ou par des mots, facilitant l'accès à ce nouveau mode de raisonnement. »

Problème 2 du document C

Ce problème est un problème de masses. Il y a trois inconnues, la masse du cochon, du berger allemand, du mouton, ces inconnues sont reliées par des comparaisons additives.

Puisqu'il est mentionné « problèmes algébriques » on va proposer dans un premier temps une résolution avec une lettre symbolisant chacune des trois inconnues.

On note c la mesure de la masse du cochon, b celle du berger allemand et m celle du mouton, toutes trois en kg. Les relations telles qu'elles apparaissent avec les mots de l'énoncé sont :

$c = b + 180$ (équation 1) ; $m = c - 160$ (équation 2) ; $m + c + b = 320$ (équation T comme total).

On cherche à se ramener à une équation avec une seule inconnue. Pour cela, on exprime deux des masses inconnues en fonction de la troisième. Comme c est la mesure qui apparait dans les deux premières équations, cela peut être une bonne idée d'exprimer b et m en fonction de c.

On sait déjà que $m = c - 160$ (équation 2). Pour b, une équation équivalente à l'équation 1 est : $b = c - 180$.

On « réinjecte » dans l'équation T ces expressions de b et de m en fonction de c :

$$(c - 160) + c + (c - 180) = 320$$

Ceci équivaut à : $3c - 340 = 320$, soit $3c = 660$, qui équivaut à $c = 660 \div 3 = 220$.

On a alors : $b = c - 180 = 220 - 180 = 40$ et $m = c - 160 = 220 - 60 = 60$.

Ceci correspond à 40 kg pour le berger allemand, 220 kg pour le cochon et 60 kg pour le mouton.

On s'assure que les trois contraintes de l'énoncé sont bien vérifiées :

$220 \text{ kg} + 40 \text{ kg} + 60 \text{ kg} = 220 \text{ kg} + 100 \text{ kg} = 320 \text{ kg}$; $40\text{kg} + 180\text{kg} = 220\text{kg}$; $220 \text{ kg} - 160 \text{ kg} = 60 \text{ kg}$.

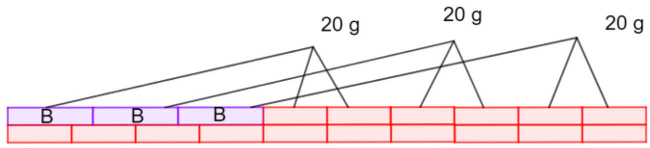
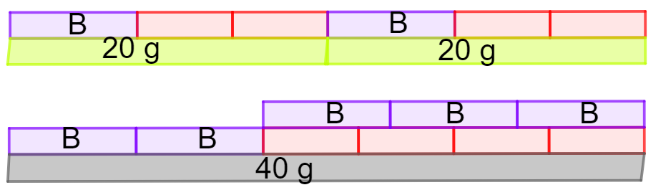
On conclut : les masses du berger allemand, du cochon et du mouton sont respectivement 40 kg, 220 kg et 60 kg.

Ces trois masses ne peuvent pas être obtenues directement à partir des données de l'énoncé en effectuant uniquement des opérations portant sur ces données. Par contraste avec le problème B, le problème C parait donc pertinent pour valoriser des raisonnements de nature algébrique.

En tant que formateurs nous voyons qu'il y a d'autres techniques que la technique purement algébrique, par exemple une méthode pré-algébrique s'appuyant sur les schémas en barres, une méthode avec des essais et rectifications, la méthode dite de la fausse position (un essai avec une seule rectification). Mais pour un candidat n'ayant pas utilisé de schémas en barres au collège ou pour lequel une technique par essai successifs et plusieurs rectifications était dévalorisée au collège et lycée, la seule réponse envisageable sera la technique algébrique. Nous proposons comme questions potentielles ci-dessous des questions demandant une schématisation en barres, puisque le programme du concours porte sur les programmes en vigueur actuellement jusqu'au cycle 4.

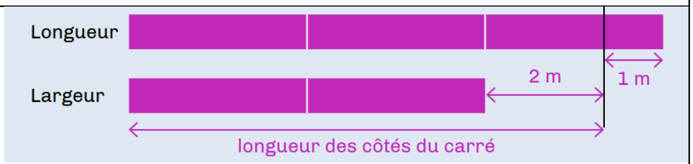
Propositions de questions pour l’entretien

Domaine nombres, calculs et résolution de problèmes

Algèbre	
Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l’on cherche à évaluer**
Dans le document B, si le candidat n’a pas analysé suffisamment l’erreur revenir sur cette erreur. S’il l’a repérée, demander de nommer la propriété associée à l’identité : $2 \times (a+b) = 2a + 2b$.	L’élève a doublé les valeurs du plateau de droite dans la balance mais partiellement doublé les valeurs du plateau de gauche, il a multiplié par 2 uniquement le nombre de briques rouges.
Dans la procédure de l’élève du document B, il indique qu’il remplace 4 briques rouges par 3 briques bleues. Qu’est-ce qui permet de justifier cet échange ? Quelle notion mathématique se cache derrière cet équilibre ? Peut-on l’utiliser pour résoudre le problème ?	L’équilibre de la balance représenté par des plateaux à un même niveau modélise la relation d’égalité entre deux masses. Or quand il y a égalité entre deux valeurs d’une même grandeur associée à des objets (ici des masses), on peut remplacer la valeur d’un côté de l’égalité par celle de l’autre côté (ici masse de trois briques bleues par masse de quatre briques rouges) sans changer la valeur de vérité de l’égalité. La notion mathématique sous-jacente est la proportionnalité « 3 briques bleues « valent » 4 briques rouges au niveau de la masse ». On peut utiliser cette relation pour résoudre le problème (voir plus haut).
Proposer un schéma en barres pour représenter le problème du document A et indiquer comment l’utiliser pour résoudre le problème. *Étant donné les recommandations institutionnelles à propos des schémas en barre, nous supposons que le jury demandera ce type de schémas.* *Il nous semble cependant intéressant de demander aussi un schéma sans préciser le type de schéma (exemple : modifier le dessin de la balance de droite pour faire apparaître les objets en double sur chaque plateau et faire la transformation des 4 briques rouges en 3 briques bleues).*	Plusieurs représentations sont possibles <u>Représentation 1</u> Une brique bleue et deux briques rouges ont pour masse 20 g, et 3 briques bleues ont la même masse que 4 briques rouges. Ces deux relations peuvent être représentées par les schémas suivants :  correspond à équilibre balance 1 10 fois la masse d’une brique rouge est égale à 3 fois 20 g, donc la masse d’une brique rouge est égale à 6 g. <u>Représentation 2</u> : Une brique bleue et deux briques rouges ont pour masse 20 g, et 3 briques bleues ont la même masse que 4 briques rouges. Ces deux relations permettent de construire les schémas suivants :  On en déduit que 5 fois la masse d’une brique bleue est égale à 40 g, et donc la masse d’une brique bleue est égale à 8 g.

Algèbre	
Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Vous avez proposé une résolution algébrique du problème 1 du document C. Proposez une résolution arithmétique.	Pour le groupe on a payé 129 euros, la place de chacun des 3 adultes coûte 7 euros, donc pour les 3 adultes les places ont coûté 3 fois 7 euros, c'est-à-dire 21 euros. Le prix des places des enfants est donc égal à 129 euros auquel on enlève 21 euros, soit 108 euros. 108 euros est égal au prix de 24 places enfant. Le prix d'une place enfant s'obtient donc en divisant 108 euros par 24. *Commentaires : on utilise le fait que la soustraction est l'opération réciproque de l'addition et que la division est l'opération réciproque de la multiplication.* *Extrait du programme du cycle 3* *Jusqu'au CE2, les problèmes mathématiques proposés sont essentiellement de nature arithmétique, dans le sens où ils mettent en jeu des nombres ou des grandeurs. Dans les raisonnements que l'élève met en œuvre pour les résoudre, il progresse du connu vers l'inconnu. À partir du cycle 3, l'introduction de la pensée algébrique marque un changement de paradigme : il s'agit de raisonner sur des nombres inconnus, qui seront représentés au cycle 4 par des lettres.*
Proposer un schéma pour représenter le problème 2 du document C qui pourrait aider à la résolution du problème.	
Proposer un schéma en barres pour représenter le problème 1 du document C et indiquer comment l'utiliser pour résoudre le problème.	
(*en cas de réponse à la question précédente autre que le schéma en barres*) Proposer un schéma en barres pour représenter le problème 2 du document C et indiquer comment l'utiliser pour résoudre le problème.	
Pour le problème 2 du document C vous avez utilisé comme inconnue la mesure de la masse en kg du cochon (respectivement du mouton, du berger allemand). Si vous aviez proposé une autre inconnue, qu'est-ce que cela aurait changé ?	
En quoi la mise en équation permet-elle une modélisation d'un énoncé de problème comportant des données et des informations à rechercher ?	La mise en équation consiste à traduire un énoncé de problème en relations mathématiques entre des grandeurs inconnues. Elle permet de modéliser l'énoncé du problème en focalisant sur les relations entre les données et la ou les inconnues. On part de relations comportant des inconnues pour arriver à déterminer leurs valeurs.
Quelles sont les étapes essentielles de la résolution algébrique d'un problème ?	Identifier les grandeurs en jeu, choisir de nommer des inconnues, traduire les relations entre les données et les informations cherchées du problème par des égalités, puis résoudre les équations obtenues et interpréter la solution dans le contexte et vérifier si la solution proposée convient.

Algèbre

Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Quelle étape de la résolution d'un problème l'élève omet-il dans le document B ? Quelle est l'importance de cette étape ?	On peut considérer que le problème étudié est un problème à deux contraintes, déterminées ici à partir des deux balances. L'élève oublie de vérifier que les solutions trouvées vérifient les deux contraintes. Cette étape est fondamentale pour développer un regard critique vis-à-vis de sa réponse.
Que signifie l'expression « résoudre une équation » ?	
Une équation d'inconnue x du type $ax + b = cx + d$ a-t-elle toujours des solutions ?	
Dans le problème 2 du document C, un élève propose d'essayer avec une masse de 20 kg pour le berger allemand. Comment pouvez-vous poursuivre sa démarche ?	
Dans les attendus il est mentionné d'autres types de problèmes : problèmes additifs, problèmes multiplicatifs, problèmes mixtes, problèmes de comparaison multiplicative, problèmes de dénombrement, problèmes d'optimisation, problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes. Proposer un exemple pour certains de ces problèmes.	
Résoudre un problème de dénombrement : menus 3 entrées, 4 plats, 5 desserts.	
Exemple extrait p. 96 guide CM (*duquel est extrait l'énoncé du problème 2 du document C*) « Un rectangle a une longueur et une largeur dans le ratio 3 : 2. Si je diminue la longueur de 1 m et si j'augmente la largeur de 2 m, j'obtiens un carré. Quelle est son aire ? »	
Énoncé construit à partir de celui du problème 1 : « trouver toutes les solutions de l'équation d'inconnues x et y avec x et y entiers naturels de l'équation $24x + 3y = 129$	$8x + y = 43$; $8x = 43 - y$ $43 - y$ doit être multiple de 8 et être positif.
Dans la résolution du problème A, quand on écrit « en notant x et y les mesures respectives en grammes des deux masses », quel est le statut des lettres x et y ? De façon plus générale, quels statuts, usages des lettres connaissez-vous en mathématiques ?	Inconnue, variable, indéterminée.
Dans l'expression $15 \times 4 = 60$, quel est le sens du signe « égal » ? Dans l'expression $60 = 15 \times 4 = 30 \times 2$, quel est le sens du signe « égal » ? Dans l'expression $24x + 3y = 129$, quel est le sens du signe « égal » ?	Le sens que pourrait donner un élève à la première égalité est celui de « résultat », le sens de la seconde est de « même valeur », pour l'équation l'égalité peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de x, résoudre une équation signifie que l'on cherche les valeurs de l'inconnue x telles que l'égalité est vraie (en mathématiques on dit que l'égalité est un opérateur binaire pouvant avoir la valeur « vraie » ou « faux », réponse que l'on n'attend pas du candidat). *De nombreuses erreurs sur l'utilisation du signe « = » sont signalées dans les documents ressources et programmes (voir ci-dessous), il semble nécessaire de construire le sens « même valeur » le plus tôt possible.* *Le programme de cycle 3 mentionne :*

Algèbre	
Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
	Le travail mené conduit à étendre le sens du signe « = » : il n'est pas simplement un symbole placé entre une opération et son résultat. Il peut être placé entre deux expressions qui sont égales, ce qui conduit notamment à faire poindre la notion d'équation, comme dans l'égalité à compléter suivante : « $178 - \ldots = 6 \times 8$ ». *Le programme de cycle 3 parle d'étendre le sens à autre chose que le sens « résultat » alors que le programme 2025 de CP donne comme exemple de réussite :* *« L'élève sait que le symbole « = » ne peut être placé qu'entre deux termes égaux. Ainsi, il comprend que, pour calculer 47 + 8 en décomposant 8 en 3 + 5, l'écriture « 47 + 3 = 50 + 5 = 55 » est incorrecte. »* *Ceci renvoie au sens « même valeur ». On peut regretter que le programme 2025 n'ait pas repris la formulation des programmes 2020 de cycle 2 où dès le cycle 2 il était écrit explicitement : « Égalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre ».*
Opérations	
Dans le document B, à partir de l'assertion « 4 briques bleues pèsent 40 g » l'élève déduit qu'une brique bleue pèse 10 g. Quelle opération a-t-il utilisée ?	
Quel est le lien entre la multiplication et la division ?	
Calcul	
Comment faire en calcul mental (avec un support de l'écrit éventuel, sans que cela ne soit du calcul posé) pour calculer $256 \div 4$? Donner les propriétés utilisées. Même question pour $108 \div 24$ (avec un support de l'écrit éventuel, sans que cela ne soit du calcul posé). Même question pour 24×25 (avec un support de l'écrit éventuel, sans que cela ne soit du calcul posé) : proposez plusieurs façons d'obtenir le résultat et donnant les propriétés des nombres et de opérations.	Pour le premier : tester si le candidat sait que diviser par 4 revient à diviser par 2 puis par 2, ou encore à prendre la moitié de la moitié. Pour le second : voir si le candidat pense à passer de l'écriture sous forme d'un quotient à une écriture sous forme d'une fraction et à utiliser les décompositions multiplicatives des nombres pour simplifier la fraction jusqu'à obtenir un calcul que l'on peut effectuer mentalement. Voir correction dans la proposition d'exposé.
Ensembles de nombres et arithmétique	
Quelle est la nature du résultat du prix du billet « ticket de cinéma pour les enfants » ?	
Quelle est la nature du nombre résultat de $110 \div 24$? À quelles conditions le nombre résultat de $n \div 24$ avec n entier est un nombre décimal ? Qu'est-ce qu'un nombre décimal ? Connaissez-vous d'autres types de nombres ?	
Donner la définition d'un nombre divisible par 24.	

Domaine proportionnalité

Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Dans le document B, l'élève énonce que « 4 briques bleues pèsent 40 g, donc une brique bleue cela fait 10 g ». Quelles sont les grandeurs en jeu dans cette assertion ? Quel modèle lie ces grandeurs ?	Ici les grandeurs sont la quantité de briques bleues (toutes identiques) et la masse. Utiliser la proportionnalité entre deux grandeurs suppose de se questionner pour établir si le lien entre les deux grandeurs peut être modélisé par une fonction linéaire. Il y a souvent des implicites, ici le fait que les briques bleues sont identiques et pèsent la même masse.
Énoncé : « 4 briques bleues pèsent 40 g. Combien pèsent 28 briques bleues ? » Donner une technique de résolution. Autre question avec mêmes données : « Combien pèsent 32 briques bleues ? » Donner deux techniques de résolution.	On attend l'utilisation et l'énonciation des propriétés de linéarité.

Domaine grandeurs et mesures

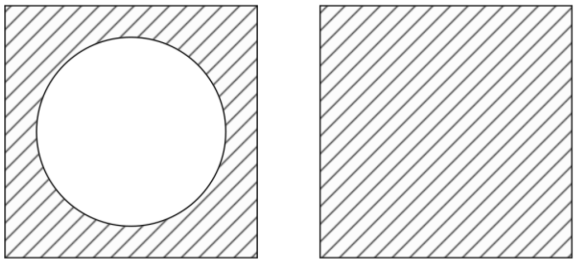
Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Question : comment convertir 450 g en kilogramme ? Comment convertir 220 kg en tonnes ? Donner la signification des préfixes « centi / déci / déca / hecto / kilo »…	Il existe différentes techniques de conversion d'une mesure d'une grandeur dans une unité donnée en une mesure dans une autre unité. La technique utilisant le tableau de conversion pose de nombreuses difficultés, elle est déconseillée dans les programmes de l'école élémentaire. Ici pour la conversion de g en kg, le tableau nécessite de passer par des unités de masse peu utilisées, il est préférable d'utiliser la relation : 100 g = 1 kg. Pour la conversion de kg en tonnes, l'utilisation d'un tableau nécessite de déterminer combien de colonnes créer sans nom spécifique d'unité entre la colonne de l'unité kilogramme et celle de l'unité tonne. Là encore utiliser les relations entre unités de masse est plus efficace. Il s'agira de déterminer quelle technique le candidat utilise et s'il sait la mettre en œuvre.
La mesure d'une masse dépend-elle de l'unité choisie ?	
Voyez-vous un ou des intérêts à garder les unités dans les calculs ?	
L'énoncé du document A comporte le terme poids, grandeur du langage courant. Proposer une autre grandeur qui serait davantage appropriée.	
Connaissez-vous d'autres grandeurs ? Donnez des exemples et donnez des unités de mesure associées.	

Deuxième exemple de sujet

Le sujet

Un professeur des écoles souhaite faire construire aux 25 élèves de sa classe un cadre photo pour une photographie qu'ils apporteront. Le cadre sera constitué de deux carrés en papier cartonné de côté 15 cm : un pour la partie avant, dans laquelle une découpe permettra de voir la photo ; un pour la partie arrière. La photo sera collée entre ces deux parties.

Partie avant du cadre | Partie arrière du cadre



1. *Les élèves devront découper dans la face avant un disque de diamètre 9 cm qui correspondra à la partie visible de la photo.*
   a. *Quelle est l'aire de la partie cartonnée de la face avant du cadre ? Donner la valeur exacte en* cm^2 *puis une valeur approchée au dixième de* cm^2 *près.*
   b. *Un élève apporte une photo de dimensions* $10\ cm \times 15\ cm$ *qui sera découpée avant de la coller dans le cadre. Par rapport à la photo avant découpe, quelle proportion de l'aire de la photo sera visible ? Donner une valeur approchée au centième de cette proportion.*

2. *Pour décorer le cadre et cacher les bords des feuilles cartonnées, le professeur propose aux élèves de coller un fin ruban autour du cadre et autour de la partie circulaire découpée dans la face avant. Le professeur dispose d'un rouleau de 20 m de ruban. Cela sera-t-il suffisant pour décorer l'ensemble des 25 cadres des élèves ?*

3. *Combien de feuilles de carton au format A1* ($59{,}4\ \mathrm{cm}\ \times\ 84{,}1\ \mathrm{cm}$) *l'enseignant doit-il commander pour réaliser les 25 cadres ?*

Propositions d'éléments pour l'exposé

Pour ce deuxième exemple, nous avons choisi de restituer un discours oral comportant à la fois une résolution mathématique et des compléments, éléments « connexes » permettant de mettre en évidence des connaissances mathématiques mais aussi de culture mathématique du candidat. Ce texte est issu d'une mise en situation de type « jeu de rôle », au cours de laquelle un formateur a joué le rôle d'un candidat, après une préparation de 30 minutes sans document (au lieu d'une heure), avec un exposé de 20 minutes suivi de 40 minutes de questions.

« Mon exposé suivra l'ordre des questions du problème proposé.

Je me permettrai des digressions sur les notions abordées question par question ainsi que des propositions de différentes procédures pour obtenir les résultats.

L'énoncé du problème contextualise la situation et fait référence aux figures géométriques de base que sont le carré et le disque, aux grandeurs aire et périmètre avec des mesures associées, ainsi qu'à la notion de proportionnalité.

1. *Les élèves devront découper dans la face avant un disque de diamètre 9 cm qui correspondra à la partie visible de la photo.*
   a. *Quelle est l'aire de la partie cartonnée de la face avant du cadre ? Donner la valeur exacte en* cm^2 *puis une valeur approchée au dixième de* cm^2 *près.*

L'aire cherchée est obtenue par la différence de l'aire du carré avec l'aire du disque. Cette façon intuitive d'obtenir la réponse repose sur une propriété importante des grandeurs mesurables : l'additivité (l'aire obtenue par recollement sans chevauchement de deux surfaces est égale à la somme des aires de chacune des surfaces).

Il s'agit dans un premier temps de calculer l'aire du carré de carton. Pour cela je m'appuie sur la formule « $A = c^2$ » donnée sous forme algébrique où « c » désigne la longueur du côté du carré et « A » son aire.

$15 \times 15 = 225$ (je n'ai pas eu besoin de la calculatrice pour ce calcul et nous pourrons détailler plusieurs procédures de calcul en ligne basées sur des propriétés des opérations, sur la connaissance des nombres, sur des faits numériques et sur des décompositions des nombres).
$15 \times 15 = 225$ est la mesure en cm^2 de l'aire. Donc **l'aire du carré est égale à $\mathbf{225\ cm}^2$.** J'aurais pu faire intervenir les unités « cm » dans le corps du calcul $15\ \mathrm{cm} \times 15\ \mathrm{cm} = 225\ \mathrm{cm}^2$.

Par digression, je me permets de noter que l'expression orale « 15 au carré » est une façon de dire « 15 exposant 2 » ou « 15 à la puissance 2 » (comme « 15 au cube » est une autre expression orale de « 15 exposant 3 » ou «15 à la puissance 3 ») et ce n'est pas anodin. En effet, on dit « 15 au carré » car il s'agit de la mesure de l'aire d'un « carré » de côté 15, tout comme « 15 au cube » est la mesure du volume d'un cube d'arête 15. À partir de l'exposant 4, il n'y plus que deux façons d'exprimer les puissances : « 15 à la puissance 4 » ou « 15 exposant 4 ».

Dans un second temps, on doit calculer l'aire du disque. Attention à bien différencier les notions de disque et de cercle. Le cercle est la frontière, le contour du disque ; d'un point de vue mathématique c'est une courbe fermée. On notera de manière anecdotique que la distinction dénominative entre la courbe fermée délimitant une surface et la surface elle-même n'existe que pour le cercle et disque ; en effet, le terme « carré » (polygone en général) désigne aussi bien la frontière que la surface.

Le calcul de l'aire du disque est basé sur une formule à retenir par cœur mais qui peut s'exprimer de différentes manières selon les données de l'énoncé. En effet, l'aire du disque dépend du rayon du disque, or dans cet énoncé on donne le diamètre. Il s'agit de savoir que le diamètre (en tant que longueur et non en tant que segment) est le double du rayon. Si on note « r » le rayon et « d » le diamètre dans une unité de longueur donnée, les formules peuvent s'exprimer sous la forme πr^2 ou $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ ou $\frac{\pi d^2}{4}$. Dans notre cas, $d = 9$ cm, donc $r = 4{,}5\ \mathrm{cm}$.

Ainsi **l'aire du disque est $\boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{4{,}5\ cm})^{\mathbf{2}}$**. On peut transformer cette expression :

$$\pi \times (4{,}5\ \mathrm{cm})^2 = \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \mathrm{cm}^2 = \frac{81\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2.$$

Je ne donne pas tout de suite de valeur approchée du résultat, je préfère donner la valeur exacte de l'aire cherchée avant d'en donner une valeur approchée.

L'aire de la face avant du cadre est $\mathbf{225\ cm^2} - \boldsymbol{\pi} \times (\mathbf{4{,}5})^2\mathbf{cm}^2$, dont une valeur approchée à la calculatrice est $161{,}3827487\ldots\ \mathrm{cm}^2$. Si je n'avais pas eu de calculatrice, j'aurais utilisé la dernière expression de la mesure en cm^2 de l'aire du disque :

$$\pi \times (4{,}5\,)^2 = \frac{81\pi}{4} = \left(\frac{81}{4}\right) \times \pi = \left(\frac{80}{4} + \frac{1}{4}\right) \times \pi = 20{,}25 \times \pi \approx 20{,}25 \times 3{,}1.$$

Je pourrai détailler dans l'entretien la suite de ce calcul.

Une autre façon d'approcher π serait d'utiliser la valeur approchée par une fraction (puisqu'on a utilisé une écriture fractionnaire pour 4,5), on pourrait prendre comme valeur approchée de π par exemple $\frac{22}{7}$ qu'Archimède avait proposée. Je pourrai détailler dans l'entretien le calcul utilisant le produit de deux fractions.

L'énoncé demande une valeur approchée au dixième de cm^2 près. Pour cela je regarde le nombre réel dont j'ai obtenu le début de l'écriture décimale illimitée 161,3827… Je vais donner une valeur qui s'éloigne au maximum de 1 dixième de cette valeur. De manière habituelle, on choisit deux types de valeurs approchées. La première est ce qu'on appelle *la valeur approchée décimale au dixième par défaut* (on donne un nombre décimal écrit avec un chiffre après la virgule directement inférieur avec une distance d'au plus un dixième), ou encore la valeur tronquée, on « efface » les décimales après le dixième, ici $161{,}3\ \mathrm{cm}^2$. La seconde est *la valeur approchée décimale au dixième par excès* (on donne un nombre décimal écrit avec un chiffre après la virgule directement inférieur avec une distance d'au plus un dixième) ici **161,4 $\mathbf{cm}^2$.**

On notera l'utilisation de trois notions mathématiques pour accéder à une valeur numérique « plus parlante » que la valeur exacte : l'arrondi à une précision donnée, la valeur approchée décimale à une précision donnée (par défaut ou par excès) et la valeur tronquée. Comme on l'a vu pour le nombre π, on pourrait aussi donner une valeur approchée qui ne soit pas un nombre décimal.

> *1. b. Un élève apporte une photo de dimensions* $10\ \mathrm{cm} \times 15\ \mathrm{cm}$ *qui sera découpée avant de la coller dans le cadre. Par rapport à la photo avant découpe, quelle proportion de l'aire de la photo sera visible ? Donner une valeur approchée au centième de cette proportion.*

Je vais faire une hypothèse et estimer que l'on souhaite maximiser la visibilité de la photo, c'est-à-dire que l'on souhaite que le disque laisse apparaitre le plus possible de la photo (autrement dit que la photo n'est pas décalée par rapport au trou).

D'un point de vue pratique, je m'étonne de la découpe de la photo indiquée dans cet énoncé… Est-ce pour recadrer la photo par rapport au trou ? (et d'ailleurs d'un point de vue pratique, il vaudrait mieux ne pas découper la photo, elle serait plus facile à cadrer… De plus, on ne parle plus jamais de cette découpe dans la suite de l'énoncé, donc pourquoi la mentionner ?)

On nous demande ici de déterminer une proportion qui est le rapport entre l'aire visible de la photo et l'aire de la photo initiale. L'aire de la partie visible de la photo est l'aire du disque calculée précédemment : $\pi \times (4{,}5)^2\mathrm{cm}^2$.

L'aire de la photo initiale est l'aire d'un rectangle de $10\ \mathrm{cm} \times 15\ \mathrm{cm}$. La formule qui donne l'aire d'un rectangle généralise la formule de l'aire d'un carré. Si on note ℓ la largeur du rectangle et L sa longueur alors son aire est donnée par la formule $\ell \times L$. Lorsqu'on a affaire à un carré $\ell = L = c$, on retombe bien sur la formule de l'aire du carré.

Ici, l'aire de la photo est donc $10\ \mathrm{cm} \times 15\ \mathrm{cm} = 150\ \mathrm{cm}^2$.

La proportion de l'aire de la photo visible par rapport à l'aire de la photo avant découpe est le rapport $\boldsymbol{\frac{\pi\times(4{,}5)^2\mathrm{cm}^2}{150\ \mathrm{cm}^2}}$. Ce rapport de deux aires est un nombre : $\frac{\pi\times(4{,}5)^2}{150} = \frac{\pi\times\left(\frac{9}{2}\right)^2}{150} = \frac{\pi\times 9^2}{4\times150}$.
Une valeur approchée de ce rapport à la calculatrice est 0,424115…. De même que précédemment je pourrai détailler une façon de procéder sans calculatrice. L'énoncé nous demande une valeur approchée au centième de cette valeur, on peut donner **0,42**. C'est un nombre sans unité. Généralement on peut exprimer une proportion sous forme d'un pourcentage ; ici on obtient 42,4115…% dont une valeur approchée au centième peut être **42,41 %**. J'ai préféré donner ces deux résultats qui ne donnent pas la même précision au niveau des arrondis.

> 2. *Pour décorer le cadre et cacher les bords des feuilles cartonnées, le professeur propose aux élèves de coller un fin ruban autour du cadre et autour de la partie circulaire découpée dans la face avant. Le professeur dispose d'un rouleau de 20 m de ruban. Cela sera-t-il suffisant pour décorer l'ensemble des 25 cadres des élèves ?*

Avant toute chose, je me permets de signaler que d'un point de vue strictement pratique, je ne vois pas comment on peut coller un ruban qui est un rectangle dans une texture souple autour d'un cercle…mais là n'est pas la question, restons dans le domaine mathématique…

Il s'agit ici de s'intéresser à la notion de périmètre du carré et du disque (ou du cercle). Attention, les notions d'aire et de périmètre ne sont pas liées même si elles permettent de donner des précisions de grandeurs sur des mêmes formes géométriques (on peut avoir des rectangles de même périmètre mais d'aires différentes, nous pourrons en discuter lors des questions).

Le périmètre du carré est donné par une formule « $P = 4c$ » ou P désigne le périmètre (qui est une longueur) et « c » le côté (qui est considéré ici comme une longueur). Le périmètre étant la longueur du tour de la forme géométrique envisagée, elle est « facile » à retrouver pour un carré ou pour un rectangle.

Dans notre cas, le carré a un périmètre de $4 \times 15\ \mathrm{cm} = 60\ \mathrm{cm}$. Il faut donc déjà 60 cm de ruban par élève.

On ajoute le périmètre du disque. La formule qui donne le périmètre d'un disque (ou la longueur d'un cercle) est « $2\pi r$ » ou « $2\pi \times \frac{d}{2}$ » ou encore « πd » (où « r » désigne le rayon et « d » le diamètre). Ici, on obtient 9π cm.

Ainsi, chaque élève devra avoir « $60\text{ cm} + 9\pi\text{ cm}$ » de ruban, soit environ 88,27 cm de ruban (valeur approchée au centième de cm par défaut, mais il serait plus réaliste de prendre une valeur approchée au millimètre près, c'est-à-dire au dixième de centimètres près, ici par prudence, on va prendre une valeur approchée par excès : 88,3 cm).

Il y a 25 élèves donc, il faudra, *a minima*, $88{,}3 \times 25\text{ cm} = 2207{,}5\text{ cm}$, ce qui est très largement supérieur à 20 m. En effet 20 m = 2000 cm, donc $2207{,}5\text{ cm} > 22\text{ m}$. **20 m de ruban ne seront donc pas suffisants pour les 25 cadres.**

3. *Combien de feuilles de carton au format A1 ($59{,}4\ cm \times 84{,}1\ cm$) l'enseignant doit-il commander pour réaliser les 25 cadres ?*

Pour ma part, je vais répondre à cette question en me plaçant dans le cadre pseudo-réel décrit par l'énoncé… Je suis professeur des écoles et j'ai peur que mes élèves se trompent en découpant…donc je vais jouer la sécurité et prendre une grande feuille de carton par élève. Sur chaque feuille on peut découper sans problème deux carrés de 15 cm de côté. Donc je vais prendre 25 grandes feuilles de carton.

Bien entendu, cette façon de répondre à la question est un peu provocatrice…mais elle respecte l'énoncé.

À mon avis, comme nous sommes dans un cadre mathématique (mais dans le cadre aussi du non gaspillage de papier, et il est important de sensibiliser les élèves à cela), on s'attend certainement à un problème d'optimisation, et donc à une question du type : quel est le nombre minimal de feuilles de carton ?

Pour répondre à cette question d'optimisation, il nous faut réfléchir à maximiser le nombre de carrés de 15 cm de côté par feuille. Dans le sens de la largeur, on peut coller 3 carrés (45 cm) mais pas 4 carrés (60 cm) car la largeur est 59,4 cm. Dans le sens de la longueur on peut coller 5 carrés (75 cm) mais pas 6 carrés (90 cm). Ainsi, on peut découper 3×5 carrés, soit 15 carrés au maximum par feuille.

Chaque élève doit avoir deux carrés. Ils sont 25, donc il faut 50 carrés. Avec 3 feuilles et 15 carrés par feuille, on peut découper 45 carrés (car $3 \times 15 = 45$). Avec 4 feuilles, on peut en avoir 60 (car $4 \times 15 = 60$). Il faudra donc au minimum 4 grandes feuilles de carton.

En conclusion, ce problème permet de voir que les mathématiques sont un outil qui permet de modéliser des problèmes du monde réel, de répondre dans ce modèle mathématique avant de revenir au problème pratique.

Propositions de questions pour l'entretien

Ce document ne propose que certains éléments de réponse. Quelques questions reprennent des points abordés dans la proposition d'exposé qui précède ; elles pourraient selon nous être posées à un candidat qui n'en aurait pas parlé lors de l'exposé.

Domaine nombres, calculs et résolution de problèmes

Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Valeur approchée	
Quels types de valeurs approchées connaissez-vous ?	Arrondi, valeur approchée par excès (la valeur approchée est supérieure au nombre), par défaut (la valeur approchée est inférieure au nombre), troncature. Une valeur approchée n'est pas forcément un nombre décimal alors qu'un arrondi et une troncature sont des nombres décimaux.
Pourquoi conserver une valeur exacte avec π avant de donner une valeur approchée ?	Il est intéressant d'avoir une valeur exacte qui pourra être reprise lorsqu'on utilise la valeur dans d'autres calculs.

Questions	**Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer**
Quelle serait la conséquence d'arrondir trop tôt dans les calculs ?	Arrondir trop tôt pourrait conduire à amplifier l'erreur (la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée choisie), par exemple si on a une erreur dont l'ordre de grandeur est un dixième, si on multiple ensuite la valeur par 1000, on aura une erreur d'ordre de grandeur 100.
Que veut dire une valeur approchée au centième près d'un nombre ?	Une valeur approchée au centième signifie que la différence entre la valeur exacte et cette valeur approchée est égale à au plus $\frac{1}{100}$. La définition mathématique n'indique pas qu'une valeur approchée est un nombre décimal. En général, on recherche une valeur approchée décimale ou rationnelle, nombres plus « simples » que π ou $\sqrt{2}$ dont la valeur exacte s'exprime à l'aide de symboles.
Donner plusieurs valeurs approchées du nombre π.	3 est une valeur approchée à l'unité, 3,1 au dixième, 3,14 au centième, 3,141 au millième. Le jury pourrait aussi attendre la réponse $\frac{22}{7}$ qui est une valeur approchée rationnelle, non décimale.
La fraction $\frac{22}{7}$ est-elle une valeur approchée du nombre π ?	Le jury pourrait tester si le candidat considère qu'une valeur approchée est nécessairement un nombre décimal, ce qui n'est pas le cas. Cela serait aussi un moyen de déterminer une connaissance culturelle de l'approximation de π par la méthode d'Archimède consistant à approcher le périmètre d'un disque de diamètre 1 par le périmètre d'un polygone régulier inscrit dans le cercle.
Que veut dire la troncature d'un nombre à 10^{-3} près par exemple ?	Tout nombre peut s'écrire avec une écriture décimale illimitée. La troncature à 10^{-3} près est la valeur approchée décimale par défaut à 10^{-3} près, le nombre décimal étant écrit avec trois chiffres après la virgule.
Ensemble de nombres	
Quels ensembles de nombres connaissez-vous ?	
Quelle est la définition d'un nombre décimal ?	Cette question est une question classique déjà posée dans des sujets d'écrit. Elle vise à déterminer si le candidat ne confond pas « nombre décimal » et « nombre qui s'écrit avec une virgule » et s'il donne la définition faisant appel à une fraction décimale (et non celle à partir de l'écriture décimale « finie » qui va poser problème pour des nombres comme 0,9999…)
À quel ensemble de nombres (sous-entendu le plus « petit » auquel il appartient, sachant que les ensembles sont inclus les uns dans les autres) appartient : - le nombre π ? - le nombre $\frac{2}{3}$? - le nombre $\frac{2\pi}{\pi}$? - le nombre $\frac{51}{6}$?	Question 1 : culture mathématique du candidat. Question 2 : question portant sur un rationnel non décimal, donné sous la forme d'une fraction irréductible. Question 3 : un nombre donné sous forme d'une écriture fractionnaire, qui est un entier. Question 4 : un nombre donné sous forme d'une écriture fractionnaire (avec une fraction qui n'est pas sous forme irréductible), qui est un décimal.
Pavage du rectangle	
Comment préciseriez-vous l'énoncé pour ne pas avoir de gâchis de papier ?	On recherche le nombre maximal de carrés que l'on peut découper dans une feuille de format A1.

Questions	Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer
Lors de la recherche du nombre maximal de carrés qui peuvent être découpés dans la feuille rectangulaire, à quelle relation entre 15 et les mesures des longueurs de la feuille cartonnée au format A1 s'intéresse-t-on?	On recherche pour chacune des mesures des longueurs des côtés du rectangle le plus grand multiple de 15 inférieur ou égal à cette mesure. Les mesures des côtés étant des décimaux non entiers on ne peut pas utiliser la division euclidienne pour obtenir directement la réponse.
Que pensez-vous du raisonnement suivant pour déterminer le nombre de feuilles à acheter ? 1. Je calcule l'aire d'une feuille A1. 2. Je calcule l'aire d'un cadre. 3. Je calcule l'aire totale pour 25 cadres. 4. Le nombre de feuilles est égal au nombre entier le plus grand inférieur au quotient de l'aire d'une feuille A1 par l'aire totale pour 25 cadres.	Ce raisonnement est erroné car il ne prend pas en considération la disposition géométrique des rectangles sur la feuille A1.
Le nombre π	
Comment définissez-vous le nombre π ?	Rapport de la longueur et le diamètre d'un cercle (lien avec la longueur de ruban enroulée autour du disque et le diamètre de ce disque)
Quel est le rapport de l'aire d'un disque de rayon R et l'aire d'un carré de côté R ?	
Opérations	
Dans la résolution de la question 2, vous avez multiplié la longueur de ruban pour un élève par 25 pour trouver la longueur de ruban pour 25 élèves puis vous avez comparé à la longueur de 20 m. Une autre possibilité serait de partir de la longueur totale de 20 m et de chercher quelle longueur est disponible pour chaque élève. Continuez la résolution.	Évaluation du candidat sur le lien entre multiplication et division, ainsi que l'interprétation du résultat pour répondre au problème.
Quel est le lien entre la multiplication et la division ?	La division est l'opération réciproque de la multiplication.
Vous avez parlé de division décimale. Le quotient d'une division décimale est-il un nombre décimal ?	Le quotient de la division décimale de a par b est le nombre qui multiplié par b donne a. Ce quotient n'est pas toujours un nombre décimal, par exemple le quotient de 1 par 3 est égal à $0{,}333\underline{3}$…
Comment calculer mentalement 15×6 ? Donner plusieurs procédures possibles et déterminer les propriétés utilisées.	Cette question vise à évaluer les compétences en calcul mental du candidat et le fait qu'il sache justifier la procédure employée par des propriétés des opérations.
Comment peut-on retenir par une image mentale le résultat de 4×15 ?	Le lien entre $\frac{1}{4}\mathrm{h}$ et 15 min est une image mentale forte à développer.

Domaine proportionnalité

Questions	Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer
Proportionnalité	
Si on connait la longueur de ruban pour un cadre, par quelle propriété mathématique en déduisez-vous la longueur de ruban pour 25 cadres ? Comment pourrait-on en déduire la longueur de ruban pour 50 cadres ?	

Questions	Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer
Comment détermineriez-vous alors la longueur de ruban pour 75 cadres ? Proposez deux procédures en citant à chaque fois la propriété utilisée.	
Agrandissement ou réduction (format)	
Si on multiplie les dimensions du rectangle par 3, par combien est multipliée son aire ?	Un agrandissement ou réduction de rapport k sur les longueurs correspond à un agrandissement ou réduction de rapport de k^2 sur les aires.
Connaissez-vous d'autres formats de feuille que le format A1 ?	Une feuille au format A0 est obtenue en juxtaposant sans perte deux feuilles au format A1, quatre feuilles au format A2 et ainsi de suite...
Quel est le rapport de réduction entre l'aire d'une feuille au format A2 et celle d'une feuille au format A1 ? (*en rappelant éventuellement au candidat les relations entre les feuilles de ces divers formats*). Quelles sont les dimensions d'une feuille au format A2 par rapport à celles d'une feuille au format A1 ?	Un agrandissement ou réduction de rapport t sur les aires correspond à un agrandissement ou réduction de rapport $\sqrt{t}$ sur les longueurs.

Domaine grandeurs et mesures

Questions	Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer
Formules d'aire	
Formules de l'aire d'un rectangle, d'un triangle. Lien entre les deux.	
Calculer l'aire d'un rectangle de $1\ \mathrm{m} \times 80\ \mathrm{cm}$	Convertir les longueurs avec une même unité et appliquer la formule
Comment peut-on déterminer l'aire d'une figure complexe ?	Décomposition en figures simples
Formules de volume	
Cylindre, prisme droit (dont pavé). Pyramide et cône. En quoi est-il pertinent de regrouper ces solides selon ces deux familles du point de vue du calcul des volumes ?	
Périmètre d'un disque (longueur d'un cercle)	
Relation entre le périmètre d'un disque et son diamètre : comment pourrait-on l'approcher expérimentalement ?	Enrouler une ficelle autour d'un objet présentant un contour circulaire (assiette, tasse, boîte de conserve, ...) ; relever les mesures des longueurs de ficelle enroulée en fonction du diamètre des cercles considérés. Faire observer la proximité des rapports avec le nombre π
Conversions	
Comment convertir $225\ \mathrm{cm}^2$ en dm^2 ?	Il existe différentes techniques de conversion d'une mesure d'une grandeur dans une unité donnée en une mesure dans une autre unité. La technique utilisant le tableau de conversion pose de nombreuses difficultés en

Questions	Éléments de réponse et/ou commentaires et/ou ce que l'on cherche à évaluer
	particulier pour les aires, elle est déconseillée au cycle 3 (cf. programmes). Il s'agira de déterminer quelle technique le candidat utilise et s'il sait la mettre en œuvre.
Comment faire pour retenir le lien entre $1\ \mathrm{dm}^2$ et la même aire exprimée en cm^2 ?	$1\ \mathrm{dm}^2$ est l'aire d'un carré de côté 1 dm, c'est-à-dire 10 cm. On peut construire matériellement un tel carré et se demander combien de carrés de côté 1 cm peuvent recouvrir celui de côté 1 dm. On peut disposer 10 carrés de côté 1 cm côte à côte sur l'un des côtés du carré de côté 10 cm et avoir 10 « rangées » constituées de 10 carrés. On a donc en tout 10×10 carrés de côté 10 cm recouvrant le carré de côté de côté 1 dm. On a donc : $1\ \mathrm{dm}^2 = (10 \times 10)\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$
Convertir $1\ \mathrm{dm}^3$ en litres. Comment faire pour retenir cette relation ?	
Aire et périmètre	
Si l'on augmente l'aire d'une figure augmente-t-on le périmètre de cette figure ? Autre formulation : peut-on trouver une figure d'aire plus grande que le carré de côté 15 cm et de périmètre plus petit ?	On cherche à évaluer si le candidat a une conception erronée sur le lien entre le périmètre et l'aire : « les variations des deux grandeurs sont liées, si l'aire d'une figure d'une figure A est plus grande que l'aire d'une figure B alors le périmètre de la figure A est plus grand que celui de la figure B. Cette conception est erronée.
Grandeurs et mesure	
Pour trouver le périmètre du carré de côté 15 cm, vous avez dit que « 4 fois 15 est égal à 60 cm ? » Quelle est la nature du résultat de 4 fois 15 ? 60 cm est-il une longueur ? Une mesure de longueur ?	On cherche à évaluer si le candidat arrive à détecter qu'une égalité doit être « homogène »
La mesure d'une longueur dépend-elle de l'unité choisie ?	
Voyez-vous un ou des intérêts à garder les unités dans les calculs ?	Garder les unités dans les calculs est recommandé dans les programmes depuis plusieurs années. Pour des arguments, voir par exemple le document ressource de 2016 sur les grandeurs au cycle 2, page 5 : https://eduscol.education.fr/document/15406/download
Le terme « diamètre » peut désigner deux « objets » mathématiques, donner ces deux objets et déterminer lequel est utilisé dans la formule $\pi \times \frac{d^2}{4}$ (un « objet mathématique » peut être un nombre, une droite, une figure géométrique, une grandeur, etc.). Donner la définition de l'autre « objet ».	Dans la formule $\pi \times \frac{d^2}{4}$ le diamètre est une longueur (si on garde les unités dans les calculs). Pour le second c'est un segment.