COPIRELEM

Mathématiques et diversité à l'école

Aider les élèves, accompagner les enseignants



ACTES DU COLLOQUE

Inspé
de l'académie
de Créteil
Site de Bonneuil-sur-Marne

50e COLLOQUE INTERNATIONAL

sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles

4, 5, 6 juin 2024

www.copirelem.fr

COPIRELEM

Mathématiques et diversité à l'école

Aider les élèves, accompagner les enseignants



ACTES DU COLLOQUE

Inspé de l'académie de Créteil
Site de Bonneuil-sur-Marne

50e COLLOQUE INTERNATIONAL

sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles

4, 5, 6 juin 2024

www.copirelem.fr

SOMMAIRE

Bilan du comité scientifique 4

Frédérick TEMPIER, Président du Comité scientifique

Ouverture du colloque 9

Rétrospective à l'occasion du cinquantième colloque de la COPIRELEM

Anne BILGOT, Christophe BILLY et Edith PETITFOUR, Co-responsables COPIRELEM

Les conférences 27

Conférence 1 : 29

Complémentarité d'approches didactique, sociale et psycho-sociale pour étudier et combattre les inégalités de genre en mathématiques

Nadine GRAPIN et Nathalie SAYAC

Conférence 2 : 43

La France face à la diversité de l'enseignement des mathématiques : programmes scolaires, pratiques enseignantes et effets sur les apprentissages

Éric RODITI

Les ateliers (sommaire)..... *55*

Textes 57

Les communications (sommaire) 297

Textes 299

Bilan du Comité Scientifique du 50ème colloque de la COPIRELEM (Bonneuil sur Marne)

Ce texte a été rédigé par Frédérick Tempier, maître de conférences à l'INSPE de l'académie de Versailles, membre du laboratoire LDAR, de l'IREMS de Paris et de la COPIRELEM, président du comité scientifique du colloque.

1. Thème du colloque

Pour la deuxième année consécutive le thème du colloque était : « Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les enseignants. »

2. Cadrage scientifique du colloque

Depuis 10 ans, de nombreuses enquêtes nationales et internationales (rapport CNESCO, 2016) témoignent d'une baisse des résultats en mathématiques ainsi que d'une hausse des inégalités scolaires en France. Face à ces constats, et puisque tous les enfants partagent la capacité d'apprendre et de progresser (comme le reconnaît d'ailleurs la loi de programmation de 2013), l'un des enjeux majeurs de l'École est d'offrir les mêmes chances de réussite à tous, quels que soient leur origine sociale, géographique et culturelle, leur genre, leurs compétences et leurs besoins. Des orientations institutionnelles relatives à l'éducation prioritaire, à l'école inclusive, à la formation, en lien notamment avec le référentiel de compétences des professeurs, témoignent d'une volonté de prendre en compte cette diversité. Dans la classe, les enseignants ont alors à relever de nombreux défis pour gérer l'hétérogénéité des élèves face aux apprentissages et pour s'ajuster à leurs besoins particuliers. Les formateurs sont amenés à prendre en compte ces enjeux en formation initiale et continue, tout en relevant des défis spécifiques à la formation des enseignants et à s'adapter au cursus universitaire de ces derniers, à leur expérience professionnelle, à leur contexte d'exercice…

Le colloque 2023 de la COPIRELEM à Marseille avait ouvert une réflexion sur des questions vives liées à l'école inclusive. Dans la continuité de ces travaux, le colloque 2024 s'est proposé d'approfondir la question des inégalités scolaires liées au milieu social, culturel, économique ou au genre. Il s'est déroulé dans l'académie de Créteil sur le site de l'INSPE de Bonneuil-Sur-Marne (94), académie qui compte le plus grand nombre d'établissements en Réseau d'Education Prioritaire en France, et qui est par ailleurs particulièrement confrontée aux difficultés actuelles de recrutement des enseignants.

3. Bilan scientifique du colloque

Les **177 participants** venaient de France, mais aussi d'autres pays francophones (Suisse, Belgique, Québec et République Démocratique du Congo) ou non (Mexique). Le colloque a été un lieu de rencontres et d'échanges entre différents acteurs et actrices de la formation des enseignants du premier degré : chercheurs en didactique des mathématiques, formateurs en INSPE, membres des IREM, inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, maîtres formateurs ou encore référents mathématiques. Comme à son habitude, ce colloque de la COPIRELEM a donné lieu à trois types d'interventions. Des *conférences* (1h15) suivies de débats (15 minutes). Des *ateliers* (2h30) concernant une réflexion commune que le (ou les) animateur(s) initialise(nt) à partir, par exemple, d'un exposé de travaux ou d'un

questionnement sur un thème annoncé. Et enfin, des *communications* (1h comprenant un moment de questions - échanges) de deux types : présentations de pratiques de formation des PE (suivies d'échanges) et recherches universitaires, achevées ou en cours, sur un thème lié à la formation des enseignants ou à l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

Des moments forts du colloque ont été les **trois conférences plénières**.

Nadine Grapin, Maîtresse de Conférences (LDAR, Université Paris-Est Créteil) et Nathalie Sayac Professeure des Universités (LDAR, Université Rouen-Normandie) ont inaugurées le colloque avec des questions liées aux inégalités de genre dans l'apprentissage des mathématiques. A partir d'une première étude autour du degré de certitude accordé par les élèves à leurs réponses et d'une seconde, en cours, autour de différences de procédures entre garçons et filles, elles ont montré qu'une complémentarité d'approches didactique, sociale et psycho-sociale permettait d'étudier et de combattre les inégalités de genre en mathématiques.

La conférence d'Éric Roditi, Professeur des Université (EDA, Université Paris-Cité), a porté sur la diversité de l'enseignement des mathématiques, à travers des questions portant sur les programmes scolaires, les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages. En partant du constat de la faiblesse des scores des élèves aux évaluations internationales en mathématiques comme témoin des difficultés que rencontre le système éducatif il a notamment amené les participants au colloque à interroger les liens entre le contenu des programmes scolaires de différents pays sur les fractions, la diversité des exercices d'évaluation proposée par les auteurs des manuels diffusés en France et les performances mathématiques des élèves, à l'évaluation internationale TIMSS 4 (CM1).

Dans une conférence d' « ouverture » à des travaux de didactique du français, Sylvie Cèbe, Maîtresse de Conférences (ACTÉ, Université Clermont-Auvergne), aborde les questions de la mise en œuvre d'une école inclusive en proposant un cadre pour soutenir les enseignants dans la mise en œuvre d'une école inclusive : la Conception Universelle de l'Enseignement (Universal Design of Learning). Après en avoir présenté les grandes lignes et les critiques dont elle fait l'objet au sein de la communauté scientifique, elle a décrit aux participants comment elle utilise ce cadre pour concevoir ses outils didactiques dans le domaine de l'enseignement de la compréhension en lecture, en interrogeant en conclusion leur transposition possible à l'enseignement des mathématiques.

La thématique générale de ce colloque s'est enfin déclinée selon différents points de vue complémentaires et imbriqués dans les **quinze ateliers** et **vingt-deux communications**, organisés dans des sessions en parallèle :

- Du point de vue des inégalités scolaires liées aux contextes économiques, sociaux, culturels, linguistiques ou de genre : quelles sont les spécificités d'enseignement-apprentissage liées aux territoires (éducation prioritaire, ruralité, …) ? Quelle est la place du plurilinguisme dans l'enseignement, en particulier celui des mathématiques ? Comment tenir compte des dimensions culturelles dans les apprentissages mathématiques ? Quels effets des stéréotypes de genres sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques ?
- Du point de vue de la singularité des besoins : comment prendre en charge chaque élève pour qu'il puisse prendre réellement sa place dans la classe de mathématiques ? Quelles situations peuvent être proposées pour qu'il puisse acquérir les savoirs mathématiques indispensables à tout

citoyen ? Comment satisfaire les besoins mathématiques de chacun tout en tenant compte de ceux du groupe-classe ? Comment penser et organiser l'accessibilité des situations d'apprentissage ?

- Du point de vue de la variété des dispositifs éducatifs d'aide et d'accompagnement : quels types de dispositifs (de remédiation, préventifs…) existe-t-il ? Qu'y fait-on exactement, avec quels acteurs et en poursuivant quel(s) objectif(s) ? Quelles sont leurs modalités spécifiques ? Quels sont leurs effets sur les apprentissages mathématiques ?
- Du point de vue de la formation des professionnels – enseignants, formateurs, accompagnateurs : quels sont les enjeux et modalités de formation à la prise en compte de la diversité, à la réduction des inégalités scolaires ? Quels sont les effets de telles formations sur les pratiques d'enseignement voire sur les apprentissages mathématiques des élèves ?

Le travail conséquent de l'ensemble des membres du comité scientifique, que je remercie ici vivement pour leur implication, s'achèvera avec la mise à disposition des actes du colloque qui regrouperont l'ensemble des textes des conférences, ateliers et communications et qui pourront, à leur tour, alimenter les travaux ainsi que les réflexions au service de la formation, de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques de tous les élèves.

4. Comité scientifique du colloque

Frédérick TEMPIER, Maître de Conférences, LDAR, INSPE, CY Cergy-Paris Université, IREMS de Paris, Responsable du comité scientifique

Cécile ALLARD, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE, Université Paris-Est Créteil, IREMS de Paris

Valentina CELI, Maîtresse de Conférences, LAB-E3D, INSPE, Université de Bordeaux, COPIRELEM

Frédéric DUPRE, Maître de Conférences, GRAHPES, INSEI, Université Paris-Lumières

Pierre EYSSERIC, Formateur, INSPE, Aix-Marseille Université, IRES d'Aix-Marseille, COPIRELEM

Nadine GRAPIN, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE, Université Paris-Est Créteil, IREM de Paris-Nord

Claire GUILLE-BIEL WINDER, Maîtresse de Conférences, ADEF, INSPE, Aix-Marseille Université, IRES d'Aix-Marseille, COPIRELEM

Christophe HACHE, Maître de Conférences HDR, LDAR, Université Paris-Cité, IREMS de Paris

Julie HOROKS, Professeure des Universités, LDAR, INSPE, Université Paris-Est Créteil, IREMS de Paris

Christine MANGIANTE, Maîtresse de Conférences, INSPE, Université d'Artois, COPIRELEM

Chantal MOUSSY, Formatrice, INSPE, UPEC, IREMS de Paris, COPIRELEM

Florence PETEERS, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE, CY Cergy-Paris Université

Arnaud SIMARD, Maître de Conférences, LMB, INSPE, Université de Franche-Comté, IREM de Franche-Comté, COPIRELEM

Catherine THOMAS, Formatrice, INSPE, Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM

Patrick URRUTY, Formateur, INSPE, Université de Bordeaux

Sonia YVAIN, Maîtresse de Conférences, S2HEP, INSPE, Université de Lyon 1

5. Comité d'organisation du colloque

Cécile ALLARD, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil, IREMS de Paris, Responsable du Comité d'Organisation.

Chantal MOUSSY, formatrice INSPÉ de l'académie de Créteil, IREMS de Paris.

Delphine TEMPIER, formatrice INSPÉ de l'académie de Créteil, IREMS de Paris.

Cécile OUVRIER-BUFFET, Professeure des Universités, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil.

Julie HOROKS, Professeure des Universités, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil.

Julia PILET, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil, IREMS de Paris.

Nadine GRAPIN, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil, IREM de Paris-Nord.

Michella KIWAN, Maîtresse de Conférences, LDAR, INSPE de l'académie de Créteil, Université Paris-Est Créteil.

Céline TOUZAIN, formatrice INSPÉ de l'académie de Créteil.

Isabelle VIVIER, formatrice INSPÉ de l'académie de Créteil.

Séverine LAPEYRE, formatrice INSPÉ de l'académie de Créteil.

Maria AZZARONE, responsable MR de l'UPEC

RÉTROSPECTIVE À L'OCCASION DU CINQUANTIÈME COLLOQUE DE LA COPIRELEM

Édith PETITFOUR
Co-responsable de la COPIRELEM
MCF, INSPE de Normandie Rouen-Le Havre
Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil,
CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Anne BILGOT
Co-responsable de la COPIRELEM
PRAG, INSPE de Paris, Sorbonne Université
anne.bilgot@inspe-paris.fr

Christophe BILLY
Co-responsable de la COPIRELEM
PRAG, INSPE Toulouse Occitanie Pyrénées
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Résumé
À l'occasion du 50e anniversaire des colloques de la COPIRELEM, les co-responsables de la commission se sont replongés dans les actes des colloques des 50 dernières années afin de rappeler les principales missions de la COPIRELEM et de montrer comment ces contributions passées, riches d'enseignement, peuvent éclairer bon nombre de questionnements actuels. Ce texte reprend les éléments présentés lors de l'ouverture du colloque de Bonneuil-sur-Marne en 2024, organisés en trois parties : les colloques comme moments d'échanges et de réflexion au sein de la communauté des formateurs sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs des écoles ; les colloques comme moments de diffusion de ressources pour l'enseignement et la formation ; les colloques comme moments de débats sur des questions d'actualité.
Le colloque 2024 était aussi le premier colloque depuis la disparition de Guy Brousseau, qui fut l'un des fondateurs de la commission. Au fil des actes des colloques, on retrouve de nombreux travaux de Guy Brousseau : ce texte retrace ces différentes interventions puis présente un témoignage de Joël Briand, qui travailla longtemps avec Guy Brousseau à l'IREM de Bordeaux.

2023 a été une année particulière pour la COmmission Permanente des IRem pour l'école ÉLEMentaire (COPIRELEM) puisqu'elle a marqué les 50 ans de la Commission que nous avons fêtés l'an passé au colloque de Marseille (Bilgot, Petitfour et Tempier, 2024).

L'année 2024 l'est tout autant, car, en raison d'un malin virus ayant empêché la tenue du colloque en 2020, elle marque le cinquantenaire des colloques annuels de la COPIRELEM. À l'occasion de cet anniversaire, nous nous sommes replongés dans les actes des colloques de ces 50 dernières années, afin de rappeler les principales missions de la commission et de montrer comment ces contributions passées, riches d'enseignement, peuvent éclairer bon nombre de questionnements actuels.

Pour dresser cette rétrospective, nous avons effectué des choix, aussi bien pour les thèmes abordés que pour les extraits d'actes que nous avons retenus. Cette sélection n'est naturellement pas exhaustive et nous profitons de l'occasion pour remercier ici tous les auteurs qui, au fil de ces 50 années, ont contribué aux actes des colloques de la COPIRELEM. Nous espérons que ces quelques extraits donneront envie au

lecteur de se replonger, à son tour, dans les actes de ces 50 années de colloques[1]. La Figure 1 donne un aperçu des 50 lieux qui ont accueilli les colloques et la figure 2 montre 50 ans d'affiches ou premières de couvertures. L'annexe 1 permettra au lecteur de retrouver des références plus précises.

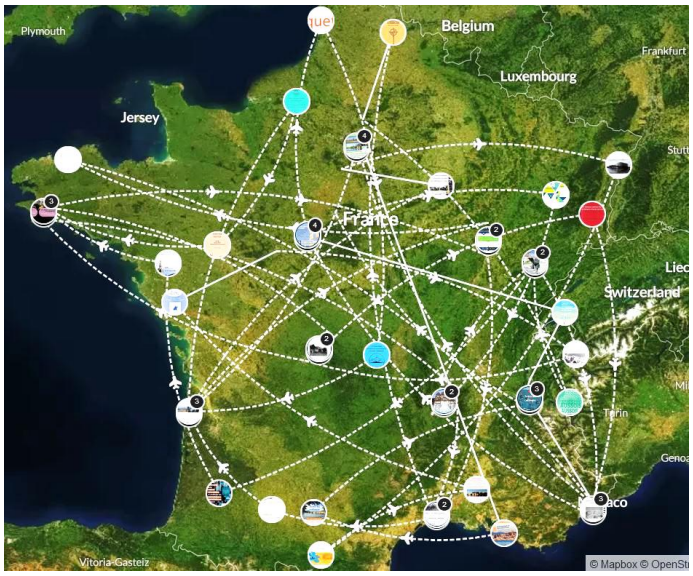


Figure 1. Carte des villes d'accueil des 50 colloques



Figure 2. Miniatures des affiches ou premières de couverture des actes

Enfin, la COPIRELEM n'oublie pas ce qu'elle doit à l'un de ses fondateurs, Guy Brousseau, disparu en février 2024. Nous y revenons après cette rétrospective en même temps que nous livrons le témoignage de Joël Briand sur Guy Brousseau et la COPIRELEM.

[1] Disponibles à l'adresse suivante : https://www.copirelem.fr/colloques/actes/

I - CONTRIBUER À L'ANIMATION DE LA COMMUNAUTÉ DES FORMATEURS

L'une des missions de la COPIRELEM est de permettre des échanges et réflexions au sein de la communauté des formateurs sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs des écoles. Les colloques annuels sont des moments importants dans la diffusion des recherches, des expériences et des pratiques de formation. Pour cette présentation, nous avons retenu quelques exemples de thèmes récurrents au fil de cinquante années de colloques qui font écho à l'actualité récente et aux mesures annoncées dans le dossier de presse « Choc des savoirs, élever le niveau de notre école » du 5 décembre 2023 (MENJ, 2023) : l'enseignement des décimaux, la place de la manipulation dans l'enseignement des mathématiques, l'usage de la calculatrice, les manuels scolaires. Nous avons également retenu un dernier thème, celui des élèves en difficulté, en lien direct avec le thème de ce 50e colloque de la COPIRELEM : mathématiques et diversité à l'école.

1 L'enseignement des décimaux

Dans la lettre d'intention publiée par le Conseil Supérieur des Programmes concernant le projet de révision des programmes des cycles 1 et 2 (MENJ, 2024), un changement par rapport aux programmes actuellement en vigueur à l'école concerne le moment dans la scolarité et la manière avec laquelle les nombres décimaux seraient introduits.

> ***Les nombres décimaux sont également[2] introduits dès le CE1****, dans le cadre de la monnaie, comme c'est le cas dans de nombreux pays. L'objectif est de manipuler l'écriture à virgule pendant deux années afin de permettre aux élèves d'être mieux préparés à l'introduction plus générale et abstraite des nombres décimaux qui sera menée au cycle 3. (MENJ, 2024, p. 3)*

Des questions telles que « Comment introduire les nombres décimaux dans l'enseignement élémentaire ? Comment surmonter les difficultés que les élèves rencontrent avec les décimaux ? Quel mode d'écriture convient-il d'enseigner en premier ? Nombres à virgules ou fractions décimales ? » ne sont pas nouvelles : elles ont par exemple été au cœur des trois ateliers suivants, qui ont jalonné les 40 dernières années, en 1977, 1998 et 2018 :

Le groupe de travail « Les décimaux au CM » animé par François Colmez lors du 4e colloque en 1977 à Plestin-les-Grèves (Colmez, 1978) explore les pratiques d'alors et les problèmes rencontrés dans l'enseignement des décimaux, puis s'intéresse à la recherche de l'IREM de Bordeaux conduite par Guy Brousseau avec comme la situation de départ l'« épaisseur de feuilles de papier ».

L'atelier « Les fractions et les décimaux au CM1 » examine l'intérêt d'« une nouvelle approche », proposée par Rémi Brissiaud lors du XXVe colloque en 1998 à Loctudy (Brissiaud, 1999), pour permettre aux élèves une meilleure compréhension des nombres décimaux : il s'agit de donner comme signification première à la notation $\frac{a}{b}$ la partition de la pluralité plutôt que le fractionnement de l'unité, et donc d'introduire une « division avec partage et reste ».

L'atelier « Des entiers aux décimaux : manipuler pour comprendre les opérations au cycle 3 ? Cas de la multiplication » du groupe Collège de l'IREM de Lyon propose, lors du 45e colloque en 2018 à Blois (Anselmo, Dessertine et Zucchetta, 2019), une progression sur la construction des fractions et décimaux avec des situations tout au long du cycle 3 articulée autour des fractions décimales.

2 La place de la manipulation dans l'enseignement des mathématiques

Dans le dossier de presse « Choc des savoirs » (MENJ, 2023), la manipulation est mentionnée au sein des mesures pour « élever le niveau de tous les élèves » : « La manipulation et l'approche concrète et imagée des notions mathématiques avant d'aborder l'abstraction, ainsi que la résolution de problèmes seront

[2] Parmi les nouveautés, les fractions sont aussi introduites dès le CE1.

renforcées. » (MENJ, 2023, p. 21). Il est également rappelé les recommandations du rapport Villani et Torossian (2018) concernant la manipulation :

> *Dès 2018, le rapport de Cédric Villani et Charles Torossian pour l'enseignement des mathématiques a souligné ces bons résultats [des élèves singapouriens] et formulé des recommandations pour mettre en œuvre un apprentissage fondé sur la manipulation et l'expérimentation, la verbalisation, puis l'abstraction. Les auteurs préconisaient de mettre l'accent sur la résolution de problèmes dès l'école élémentaire et d'adopter une approche concrète, imagée, abstraite basée sur les recherches scientifiques qui soulignent la succession de phases énactives, iconiques et symboliques dans l'apprentissage. Cette méthode permet également aux élèves en difficulté, pour saisir des concepts mathématiques abstraits, d'utiliser la représentation visuelle de ces concepts afin de mieux les assimiler. (MENJ, 2024, p. 21)*

Lors du 10e colloque à Antibes en 1983, Dominique Valentin et Geneviève Zimmerman (Valentin et Zimmerman, 1985) animent un atelier avec les questions suivantes comme trame de travail : qu'est-ce que « manipuler » ? Quelles manipulations ? Quand « faut-il » manipuler ? Quelles transpositions peut-on trouver pour les normaliens par rapport aux manipulations destinées aux élèves de l'école maternelle ou élémentaire ? Qu'est-ce qui différencie matériel pédagogique ou didactique et jeu ?

Autant de questions revisitées à Épinal et à Blois lors des 44e et 45e colloques portant sur la thématique « Manipuler, représenter, communiquer » avec une réflexion sur la place de la sémiotique pour le premier colloque en 2017 et celle des artefacts pour le second en 2018 dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La première année, les questions suivantes ont piloté les trois conférences et quinze ateliers proposés : quels liens entre action, représentation et conceptualisation ? Quelles ressources sémiotiques (langage verbal, représentations écrites, actions avec du matériel, gestes, etc.) à disposition de l'enseignant dans des activités d'enseignement et d'apprentissage dans différents domaines des mathématiques ? Comment ces ressources sont-elles ou peuvent-elles être articulées ? Quel rôle les ressources sémiotiques ont-elles dans des stratégies d'enseignement, dans l'enrichissement des connaissances des élèves, en particulier de ceux qui rencontrent des difficultés d'apprentissage ?

La seconde année, les questions suivantes ont piloté les trois conférences et quinze ateliers proposés : « Faire des mathématiques », est-ce apprendre à se passer de la manipulation ? Quels sont les intérêts des artefacts en termes d'engagement dans les tâches données aux élèves, en termes d'apprentissage et de conceptualisation ? Quelles sont les limites à l'utilisation d'artefacts ? Les intérêts et les limites des outils TICE sont-ils identiques à ceux des objets concrets ? Comment articuler ces différents outils ? Comment initier ce questionnement dans le cadre de la formation ?

3 L'usage de la calculatrice

La lettre d'intention du Conseil supérieur des programmes (MENJ, 2024) annonce pour le cycle 2 une partie calcul mental « profondément revisitée ». L'interdiction de la calculatrice est avancée en vue de renforcer les compétences en calcul des élèves :

> *Afin d'assurer un renforcement indispensable des compétences en calcul des élèves, les calculatrices ne seront plus autorisées au cycle 2 et seront réservées aux élèves en situation de handicap ou à besoins éducatifs particuliers dans le cadre de compensations prescrites. (MENJ, 2024, p. 4)*

Le groupe de travail « Les calculatrices électroniques et l'enseignement des mathématiques » animé par René Redon lors du 6e colloque à Bombannes en 1979 (Redon, Pinchault et Oriol, 1980) s'interrogeait déjà sur les effets de l'usage de la calculatrice à l'école : les élèves sauront-ils toujours calculer ? Ne risquent-ils pas de perdre confiance en eux par rapport à leur aptitude à calculer seul ? Dans les problèmes, les enfants libérés des calculs (techniques opératoires) se portent-ils plus facilement sur l'analyse de la situation et sur le raisonnement ?

Trente-cinq ans plus tard lors du 41e colloque à Mont-de-Marsan, dans sa conférence intitulée « Associer un boulier et une calculette : visualisations et gestes dans l'apprentissage du calcul, scolarisation des instruments », Eric Bruillard questionne cette prise en compte d'instruments dans les curriculums

scolaires : gain de temps, suppression de tâches de bas niveau donnant plus de temps pour des activités plus conceptuelles ? Ou alors perte de motivation pour réaliser des tâches qu'une machine peut faire automatiquement ? (Bruillard, 2015)

Et lors du 42e colloque à Besançon en 2015, Gilles Aldon et Jean-Pierre Rabatel mettent en avant, lors de l'atelier « CAPRICO : calculatrices en primaire et en collège » qu'ils animent, des intérêts de l'usage de la calculatrice, comme un moyen de donner confiance et permettre aux élèves d'oser dans des situations d'aide personnalisée ou encore comme un révélateur pour le professeur de lacunes ou d'incompréhensions des concepts mathématiques sous-jacents (Aldon et Rabatel, 2016).

4 Les manuels scolaires

Dans le dossier de presse « Choc des savoirs » (MENJ, 2023), le ministre de l'éducation nationale Gabriel Attal informe du projet de mise en place d'une procédure de labellisation pour certifier les manuels scolaires du premier degré « dont l'efficacité des contenus a été prouvée par la science et par la pratique », dès 2025 pour les manuels des cycles 2 et 3 :

> *Par ailleurs, contrairement à d'autres pays comme le Portugal ou le Japon, la France ne dispose d'aucun mécanisme permettant de certifier la qualité des manuels. Une procédure de labellisation sera mise en place pour certifier les manuels scolaires tout en respectant la liberté éditoriale des éditeurs et la liberté pédagogique des professeurs. Cette procédure associera laboratoires de recherche, professeurs et inspecteurs généraux. Les certificateurs analyseront les manuels édités et proposeront leur labellisation dès lors que les critères définis dans le cahier des charges national seront respectés. (MENJ, 2023, p. 22)*

Lors du 21e colloque à Chantilly en 1994, l'atelier « Didactique des mathématiques et manuels scolaires », fondé sur des échanges de points de vue et animé par Marie-Lise Peltier, Michèle Fabregas et Michèle Pecal, aborde les questions suivantes : pourquoi étudier les manuels scolaires dans la formation des professeurs des écoles ? Comment mener une telle étude ? Comment choisir ou élaborer une grille d'analyse ? Quel protocole mettre en place ? Comment donner des outils d'analyse aux maîtres en formation continue pour leur permettre d'utiliser les manuels le mieux possible et les inciter à se référer aux livres du maître ? (Peltier, Fabregas et Pecal, 1995).

Lors du 48e colloque à Toulouse en 2022, Claire Guille-Biel Winder et Edith Petitfour proposent lors de l'atelier « Analyse didactique de l'enseignement de la géométrie dans des manuels scolaires » la mise en fonctionnement d'une grille d'analyse de manuels scolaires en appui sur cinq critères : la conformité institutionnelle, l'adéquation pédagogique, la pertinence de l'enseignement des savoirs proposé, la cohérence par rapport aux savoirs enseignés, la validité des propositions par rapport aux mathématiques (Guille-Biel Winder et Petitfour, 2023).

5 Mathématiques et diversité à l'école

Le 50e colloque de la COPIRELEM « Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les enseignants » s'intéresse à l'un des enjeux majeurs de l'école, à savoir offrir les mêmes chances de réussite à tous, quels que soient leur origine sociale, géographique et culturelle, leur genre, leurs compétences et leurs besoins. Les questions abordées concernent l'école inclusive :

> *Le colloque 2023 de la COPIRELEM à Marseille a ouvert une réflexion sur des questions vives liées à l'école inclusive. Dans la continuité de ces travaux, le colloque 2024 se propose d'approfondir la question des inégalités scolaires liées au milieu social, culturel, économique ou au genre.*
>
> *(Extrait de l'appel à contributions du 50e colloque COPIRELEM, p. 1)*

Lors du 12e colloque à Guéret en 1985, le groupe de travail « Les difficultés des enfants en mathématiques », animé par Jeannine Wéber (Wéber, 1987), s'interroge sur les difficultés des enfants en mathématiques et sur ce qui distingue les élèves en difficulté en mathématiques. Après une analyse de difficultés rencontrées par les élèves, le groupe répertorie des outils didactiques existants pour le repérage des difficultés, puis explore des moyens de remédier à certaines difficultés en lien avec les

questions suivantes : comment éviter le passage obligé par un support verbal ? Comment donner du sens au support verbal ? Comment favoriser une meilleure lecture des énoncés de problèmes ?

Lors du 18e colloque à Nice en 1991, au sein du groupe de travail « Situation d'aide aux élèves en difficulté et gestion de la classe associée », Denis Butlen présente une recherche qu'il a menée avec Monique Pézard dans une classe d'élèves d'un CE2 en milieu défavorisé à Melun (Butlen, 1992). Cette recherche s'appuie sur des constats concernant le profil d'un élève en difficulté et celui d'un enseignant d'une classe en difficulté pour construire un dispositif expérimental de remédiation. La présentation est suivie d'un débat entre les participants.

II - PRODUIRE DES RESSOURCES POUR LA FORMATION

L'une des missions de la COPIRELEM est de produire des ressources à destination des formateurs pour l'enseignement des mathématiques à l'école, aussi bien pour la formation initiale que pour la formation continue. Les colloques de la COPIRELEM sont des occasions privilégiées pour échanger avec les participants à propos de ressources en cours d'élaboration ou récemment publiées : les actes offrent ainsi un témoignage de la diversité des objectifs visés par la COPIRELEM lorsqu'elle produit des ressources. Nous en donnons dans la suite quelques exemples, organisés selon les axes principaux de travail de la COPIRELEM au cours de ces cinquante dernières années.

1 Enseigner les mathématiques les écoles : quelles connaissances ?

Depuis les débuts de ses travaux, la COPIRELEM s'intéresse à la question des connaissances nécessaires pour un futur professeur des écoles : connaissances à enseigner et connaissances pour enseigner. Cette réflexion s'est nourrie d'échanges qui ont eu lieu au fil d'ateliers qui ont jalonné les 50 ans de colloques. En voici quelques exemples, tirés d'actes des premiers colloques et de colloques récents.

Au colloque de Nice en 1976, un groupe de travail animé par Robert Eiller, s'intéresse à la « Détermination des connaissances minimales en mathématiques pour les futurs normaliens », en recherchant des « modalités permettant de vérifier à la fois les connaissances et certaines aptitudes des candidats » (Eiller, 1976). Le compte-rendu rédigé dans les actes du colloque confronte les points de vue développés par un inspecteur général, Roger Duma, et par les membres de différents groupes IREM, dont Guy Brousseau, en réponse aux questions suivantes : faut-il prévoir une épreuve de mathématique au futur concours d'entrée à l'Ecole Normale ? Dans l'affirmative, à quels objectifs une telle épreuve doit-elle répondre ? Sous quelle forme faudrait-il concevoir la ou les épreuves ? Ce compte-rendu recense ensuite des « exemples très variés d'épreuves », proposés par différents groupes IREM : il s'agit aussi bien de tests que de problèmes « ouverts » ou d'études de situations.

Cette réflexion sur les connaissances attendues avant la formation s'est poursuivie dans les années qui ont suivi. On en trouve par exemple des traces quatre ans plus tard dans le compte-rendu des travaux d'un groupe animé par Michel Courrière et Michel Laisne au colloque de Confolant, portant sur la détermination d'«exigences préalables aux Unités de Formation (UF) de didactique » (Courrière et Laisne, 1980). Le compte-rendu décrit des travaux portant à la fois sur des épreuves ayant servi de tests à l'entrée de seize Écoles Normales, puis sur des activités de mise à niveau proposées ensuite aux normaliens. Pour ces dernières, différentes modalités et différents objectifs sont envisagés : imposées ou proposées aux normaliens volontaires, en amont ou intégrées aux Unités de Formation en didactique, permettre l'accès « à un niveau minimal » (difficile à définir, selon les auteurs du compte-rendu) et « modifier la relation aux mathématiques », voire « pallier d'éventuels blocages »). La création d'une banque de documents est amorcée : elle vise d'une part à mutualiser des exemples de tests, et d'autre part à construire un « recueil d'exercices classés, gradués et organisés (indications pour la résolution, résultats, renvois) donnant aux élèves-instituteurs la possibilité de pratiquer une mise à niveau largement autonome et éventuellement auto-évaluative ». En annexe du compte-rendu, de nombreux exercices sont d'ores et déjà rassemblés.

Quarante années plus tard, le contexte a changé : les Écoles Normales ont été remplacées par les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM) en 1990, puis par les Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation (ESPE) en 2013, puis par les Instituts Nationaux Supérieurs du Professorat et de l'Éducation (INSPE) en 2019 et la formation initiale se déroule actuellement (et depuis 2010) au niveau du master… Mais les préoccupations qu'avaient nos collègues en 1980 sont toujours d'actualité, et continuent à alimenter des travaux de la COPIRELEM. Un groupe travaille ainsi depuis quelques années sur l'élaboration d'un « test de positionnement » à proposer à l'entrée en master, visant à informer les étudiants sur leurs points d'appui et leurs difficultés en mathématiques à un instant donné ; à les orienter vers des ressources permettant de travailler de façon autonome ou accompagnée en complément des cours ; à donner aux formateurs des outils pour adapter leurs formations. Ces travaux en cours ont fait l'objet d'un atelier lors du 49e colloque à Marseille en 2023 et sont l'objet d'un atelier de ce 50e colloque à Bonneuil-sur-Marne (Danos, Emprin, Grau, et Moussy, 2024 ; Celi et al., à paraître 2025).

Par ailleurs, depuis quelques années, un travail de la COPIRELEM vise à définir, en complément du référentiel de compétences professionnelles en vigueur depuis 2013, les savoirs spécifiques à l'enseignement des mathématiques à l'école, et a conduit à la publication d'un « document-cadre » (Eysseric et al., 2023). Ce document articule une proposition de liste de savoirs à travailler en formation avec des ressources bibliographiques. Son élaboration s'est nourrie d'échanges qui ont eu lieu lors d'un atelier du 47e colloque organisé en visio-conférence depuis Grenoble en 2021 (Petitfour, Guille-Biel Winder, Tempier, Simard et Eysseric, 2022).

2 La préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles

Toujours en lien avec l'évaluation des connaissances en formation initiale, la COPIRELEM s'est attachée à suivre l'évolution des épreuves du concours de recrutement au fil des réformes successives. Depuis 1992, elle publie chaque année des annales, dont l'esprit avait été initié par des membres de la COPIRELEM qui travaillaient à l'IREM de Bordeaux autour de Guy Brousseau et de Joël Briand. On trouve des traces de leurs intentions par exemple dans le compte-rendu d'un atelier proposé en 1996 au colloque de Montpellier, intitulé « Vers une politique d'élaboration de sujets de concours » (Peltier et Briand, 1997) : « il ne s'agit pas de se cantonner à la rédaction d'un sujet-type, mais d'y apporter des analyses, des remarques et des critiques éventuelles ». Il est également précisé que ces annales pourraient constituer un « instrument de régulation de la formation des professeurs des écoles », dans la mesure où elles sont conçues pour intéresser différents interlocuteurs : les étudiants, les concepteurs de sujets, les présidents des commissions des choix de sujets et les formateurs.

Depuis, la COPIRELEM s'emploie à maintenir cette ambition, avec la publication, chaque année, d'annales pour les épreuves écrites du concours, complétées en fonction des nouvelles modalités du concours ; ainsi, par exemple, depuis la session 2022, les annales comportent des propositions de sujets et de corrigés pour l'épreuve orale de leçon. En complément, pour accompagner la mise en œuvre et la préparation de cette dernière, la COPIRELEM a publié ces deux dernières années un recueil de témoignages de candidats ; ce recueil a été rédigé avec l'ambition d'intéresser aussi bien les étudiants que les formateurs et les membres des jurys (COPIRELEM, 2024).

3 Les stratégies de formation

Les actes des colloques témoignent d'une autre préoccupation qui irrigue les travaux de la COPIRELEM depuis de nombreuses années : développer des scénarios de formation. Par exemple, dans les actes des colloques de Chantilly en 1994 et de Douai en 1995, on peut lire deux textes, rédigés respectivement par Alain Kuzniak et Catherine Houdement, portant chacun sur des « stratégies de formation des maitres du premier degré en mathématiques » (Kuzniak, 1995 ; Houdement, 1996). Ces deux chercheurs en didactique des mathématiques diffusaient ainsi, lors des colloques, les résultats de leurs travaux de thèse portant sur les pratiques de formation des maîtres du premier degré en mathématiques.

Certaines stratégies, comme l'homologie et transposition, sont mises en œuvre dans des scénarios de formation que l'on retrouve dans différentes publications de la COPIRELEM, et qui, régulièrement, sont expérimentés, analysés et nourris des échanges qui ont lieu lors d'ateliers proposés par des membres de la COPIRELEM pendant les colloques. Bon nombre de ces scénarios sont rassemblés dans *Concertum* (COPIRELEM, 2003), et plus récemment, dans deux tomes de la collection *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école* qui réunit des situations anciennes de la Copirelem revisitées pour prendre en compte les conditions actuelles de la formation, et des situations inédites, avec de nouvelles stratégies de formation, comme les jeux de rôles (Guille-Biel Winder, 2019 ; Celi et al., 2022). Le tome 3 est en cours d'écriture.

III - DÉBATS ET PRISES DE POSITION SUR DES QUESTIONS D'ACTUALITÉ

Depuis le début de ses travaux, la COPIRELEM a le souci d'apporter une contribution aux débats qui touchent à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et à la formation des professeurs des écoles. Ainsi, par exemple, dans la préface de Concertum (COPIRELEM, 2023), Guy Brousseau rappelait que « La COPIRELEM débat et se débat pour faire émerger ou pour produire des aides, des commentaires, des exemples… » sur les orientations des réformes. Les actes des colloques permettent de retrouver des traces de cet engagement au fil des 50 dernières années, notamment dans les textes associés aux ouvertures des colloques ou aux « plages d'actualité ». Pour l'ouverture du colloque de l'année 2024, nous avons retenu quelques extraits de colloques passés qui font écho aux réformes en cours.

Sur les difficultés de recrutement des instituteurs, dans les actes du colloque d'Antibes en 1983, Colmez pointait une difficulté qu'il décrit avec des mots que nous pourrions reprendre à l'identique aujourd'hui :

> *Un autre problème est celui du recrutement important d'enseignants qui n'ont pas du tout de formation, particulièrement dans la région parisienne. Le problème est le même dans le secondaire et ne peut être résolu sans une prévision des besoins avec au moins 2 ou 3 ans d'avance.*
>
> *Un autre problème encore est celui des moyens mis à la disposition des IREM : on a les plus grandes difficultés à préparer la rentrée suivante quand on est dans l'ignorance des moyens dont on pourra réellement disposer. (Colmez, 1985)*

Concernant les réformes de la formation, et plus particulièrement les débats récurrents autour du cadrage des contenus de formation dans la formation initiale des professeurs des écoles, Marie-Jeanne Perrin notait dans les actes des 12e et 13e Colloques (Guéret et Quimper) à propos des « programmes de formation applicables dans les Écoles Normales à la rentrée 1986 » :

> *La publication au bulletin officiel confère aux textes concernés une connotation plus impérative qu'antérieurement où l'enseignement en école normale était l'objet de suggestions. La régulation - probablement souhaitable - que ce processus introduit rend particulièrement dommageable certains oublis comme celui de l'enseignement de la géométrie : faut-il rappeler la relative inculture des étudiants de DEUG dans ce domaine ? Voudrait-on minorer l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (contrairement au collège) ? On ne saurait le penser. (Perrin-Glorian, 1987)*

Ces deux extraits font écho à des questions à propos desquelles la COPIRELEM s'est positionnée en 2024, dans un contexte où des projets de réformes majeures ont fait l'objet de nombreux débats.

Sur le projet ministériel global présenté sous forme de « Choc des savoirs » (MENJ, 2023), la COPIRELEM a notamment questionné[3] : le choix des pédagogies dites explicites et leur pertinence dans le cas de l'enseignement des mathématiques ; la portée au pinacle d'une méthode dite « de Singapour » qui

[3] Réaction de la COPIRELEM au « choc des savoirs » annoncé par le ministère de l'Éducation Nationale. 23 décembre 2024. En ligne : https://www.copirelem.fr/

produirait, en dehors de toute autre considération politique, sociologique, des effets miracles ; l'annonce d'une labellisation des manuels sans précision des critères associés ; la promotion d'un recours à l'intelligence artificielle sans que des usages précis ne soient décrits. Ce projet de réforme global incluait un volet particulier : celui d'une réforme des programmes scolaires. Sur ce volet, même si en citant une fois encore Brousseau (2003), la COPIRELEM est sans doute « trop faible pour intervenir sur les orientations et sur les programmes », la commission a pu exprimer devant le Conseil Supérieur des Programmes, en mars 2024, les craintes que faisaient naître les choix imposés par la lettre de saisine et les dilemmes auxquels allait devoir faire face la communauté des formateurs amenée, entre le mois de juin et le 1er septembre de cette année, à remettre en question des éléments de didactique jusqu'alors présentés dans des documents ressource comme des certitudes. Sur l'enseignement des fractions et des décimaux par exemple, alors que la lettre de saisine pour les programmes de cycle 2 engageait les concepteurs à une introduction des nombres décimaux dès le cycle 2 dans le contexte de la monnaie, la COPIRELEM a ainsi rappelé qu'un document ressource publié sur la plateforme Eduscol en 2016, ayant toujours le même statut en juin 2024, comportait le paragraphe suivant :

> *À l'entrée au cycle 3, les élèves ont déjà rencontré des écritures à virgule à travers l'usage social, dans le contexte des grandeurs (prix, taille, masse, etc.). Les formulations utilisées à l'oral dans la vie courante pour les exprimer, comme « trois euros vingt-cinq » pour 3,25 €, ou « trois mètres vingt- cinq » pour 3,25 m laissent entendre que ces nombres sont conçus comme la juxtaposition de deux entiers plutôt que comme un nombre décimal. En effet, on dit « trois euros vingt-cinq » ou « trois mètres vingt-cinq » tout comme on dit « trois heures vingt-cinq », montrant bien qu'il s'agit là d'une juxtaposition des euros et des centimes d'euros, ou des mètres et des centimètres, comme sont juxtaposées les heures et les minutes. Démarrer l'apprentissage des nombres décimaux en s'appuyant sur cet usage ne favorise de ce fait sans doute pas leur compréhension et risque au contraire d'encourager les élèves à concevoir l'écriture à virgule d'un nombre comme étant composée de deux nombres entiers, juxtaposés et séparés par une virgule.*

Ces prises de position doivent souvent malheureusement se faire dans des délais très courts, sur des textes à l'origine parfois floue. Déjà en 1984, dans les actes du colloque de Guebwiller, François Boule écrivait que « tout laissait penser que, pour ce colloque, nous connaîtrions les textes devant régir la formation à venir des futurs instituteurs ; en l'absence de ces données précises, nous pouvons essayer de définir une position commune qui nous permette de discuter efficacement sur l'orientation que nous souhaitons voir prendre dans l'élaboration de ces textes ».

Nous venons ainsi de dresser un panorama des missions de la COPIRELEM que l'on peut résumer ainsi :

- Contribuer à l'animation de la communauté des formateurs en mathématiques pour les professeurs des écoles, d'une part en fédérant les travaux effectués dans les IREM, dans les INSPE, dans les circonscriptions et d'autre part en organisant un colloque annuel, avec ses conférences, ateliers, communications (recherche et partage d'expériences) sur des thèmes variés.
- Contribuer à la réflexion sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles en produisant des ressources pour la formation et en prenant position sur des points d'actualité liés aux changements institutionnels (programmes, formation initiale, etc.).

Nous n'oublions pas que ces missions ont été définies et portées avec conviction pendant plusieurs années par l'un des fondateurs de la COPIRELEM, Guy Brousseau, décédé quelques mois avant le cinquantième colloque. Lors de l'ouverture du colloque, la COPIRELEM a tenu à évoquer sa mémoire. Nous rendons compte de ce moment dans la suite de ce texte.

IV - GUY BROUSSEAU

1 Guy Brousseau et la COPIRELEM

Guy Brousseau a accompagné la COPIRELEM lors de sa création, avec le souci de développer la concertation et la coopération entre les principaux partenaires de l'enseignement des mathématiques à

l'école. Comme il le rappelait à l'occasion des 30 ans de la COPIRELEM dans la préface de *Concertum* (Brousseau, 2003), Guy Brousseau a mené, au sein de la commission, « un travail constant pour promouvoir des recherches et les discuter, mais aussi pour lutter contre l'émiettement, les synthétiser et leur donner un cadre théorique pour en tirer des éléments de formation utilisables ». Sous son impulsion, la COPIRELEM a ainsi investi le champ des recherches et des expérimentations pour contribuer à la formation des instituteurs puis des professeurs des écoles.

La participation de Guy Brousseau est signalée dans douze des quarante-sept actes de colloques à notre disposition : Nice en 1976, Bombannes en 1979, 1989 et 2008, Confolant en 1980, Blois en 1982, Angers en 1987, Rouen en 1988, Nice en 1991, Besançon en 1992, Saint-Etienne en 1997 et Avignon en 2003. Nous donnons dans la suite du texte un aperçu de quelques-unes de ses interventions dont les actes de colloque témoignent.

Lors du XIVe colloque à Angers en 1987, Guy Brousseau donne une conférence intitulée « Les différents rôles du maîtres » (Brousseau, 1987). Il aborde les concepts de contextualisation et décontextualisation du savoir, de dévolution du problème et dédidactification, d'institutionnalisation, ainsi que la gestion des phénomènes de didactique se manifestant dans la négociation du contrat didactique (effet Topaze, effet Jourdain, effet d'analogie, etc.). Ainsi conclut-il sa conférence :

> *« Nous avons vu que le maître est une sorte d'acteur. Il agit en fonction d'un texte qui a été écrit ailleurs et d'une tradition. On peut l'imaginer comme un acteur de la comédie del arte : Il invente son jeu sur le champ en fonction d'un canevas. »*
>
> *« Cette conception est soutenue par l'idée – tout à fait exacte – que le professeur a besoin de liberté et de créativité dans son action. Un professeur qui récite ne pourrait pas communiquer l'essentiel et si on voulait lui faire présenter une situation qu'il ne peut pas bricoler, l'enseignement échouerait. Peut-il y avoir une autre conception, plus professionnelle de l'enseignant ? Peut-il utiliser des situations toutes faites pour recréer des conditions d'apprentissage identiques à un modèle connu ? Cela implique que l'on distinguerait ce qu'il ne peut pas modifier de ce sur quoi peut porter son talent personnel. En poursuivant notre comparaison ci-dessus, le professeur deviendrait un acteur dont le « texte » serait la situation didactique à gérer (pas évidemment le texte au sens strict). »*
>
> *« Cette conception nouvelle est indissociable du développement des connaissances en ingénierie didactique. Elle est le prix à payer pour une professionnalisation des métiers d'enseignants, pour une meilleure efficacité et pour une meilleure négociation sociale et culturelle de ses problèmes. » […] (Brousseau, 1987, pp. 65-66)*

Lors du XVe colloque à Rouen en 1988, un document rédigé par Guy Brousseau et une institutrice de l'école Michelet avec qui il collaborait, Denise Greslard, présente la régulation effective du curriculum de l'école Michelet à Talence et les phénomènes observés au cours de cette régulation (Brousseau et Greslard, 1989). Les conditions réelles de production, de fonctionnement et de régulation du curriculum sont tout d'abord exposées, de même que les précautions prises pour permettre à l'enseignement de se dérouler dans de bonnes conditions malgré les perturbations liées à la recherche. Différents phénomènes sont ensuite abordés : ceux détectés à la suite d'observations directes de séances, ceux mis en évidence par une réflexion théorique et ceux qui se sont imposés suite à des «difficultés persistantes de la régulation pragmatique des expériences ».

Lors du XVIe colloque à Bombannes en 1989, Guy Brousseau anime un groupe de travail sur l'observation d'une séance d'enseignement des mathématiques. L'observation de classe est présentée soit comme moyen de recherche, soit comme moyen de formation. Les participants font une étude *a priori*, puis des analyses *a posteriori*. La conférence plénière sur la théorie des situations fournit des éléments utiles pour l'élaboration d'un texte pour la formation.

Lors du XXIVe colloque à Saint-Etienne en 1997, Guy Brousseau donne une conférence intitulée « Intégration des savoirs de formation, la régulation didactique » (Brousseau, 1998). Il parle en particulier de stratégies de diffusions des connaissances en abordant les différents contrats (non didactique, faiblement didactique, fortement didactique).

Lors du XXXVe colloque à Bombannes en 2008 enfin, Guy Brousseau est invité d'honneur de la COPIRELEM. Son exposé met l'accent sur les équilibres que doit maintenir un professeur dans sa classe.

2 Témoignage de Joël Briand

Guy Brousseau nous a quittés le 15 février 2024. Joël Briand, qui a été l'un des responsables de la COPIRELEM, a accepté d'apporter lors de l'ouverture de ce 50e colloque un témoignage : celui d'un formateur, chercheur, qui a travaillé de nombreuses années avec Guy Brousseau, notamment à l'IREM de Bordeaux. Nous remercions vivement Joël Briand pour cette contribution que nous avons transcrite ci-dessous avec son autorisation[4].

Étant nommé à l'école normale de Bordeaux, je me suis rapproché de l'IREM, puisqu'on m'avait dit que des gens se réunissaient pour réfléchir sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, et là, j'ai fait connaissance de Guy. Il y avait des réunions hebdomadaires. On s'appelait le groupe des seize, en fait, c'était le groupe des seize professeurs d'École Normale de l'académie, on se réunissait chaque semaine. Parallèlement à ça, avant que j'arrive à Bordeaux, Guy avait mis en place, avec une école, le centre pour l'observation pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques, le COREM (figure 2a), qui supposait une construction, une entente avec les autorités locales, trois maîtres pour deux classes, donc c'était déjà un gros travail qui avait été effectué par Guy. Et donc là aussi, prenant le train en marche, j'ai été amené à travailler à l'école Michelet avec les enseignants qui étaient nommés sur volontariat. C'étaient des postes à profil, on est dans une ZEP dans cette école, et je peux dire que, en tous les cas pour moi, et pour la recherche en général, c'est ici que les choses ont vraiment commencé dans l'aventure de la recherche en didactique bordelaise. Donc plus qu'un hommage, je souhaiterais apporter un témoignage à l'aide de quelques anecdotes à propos de Guy et de son travail.



a. COREM et école Michelet



b. Observations en classe



c. Réunion des observateurs

Figure 3. Le COREM et l'école Michelet à Talence

Dans ce centre destiné à l'observation (figure 3a), des micros permettent d'enregistrer chaque élève. Les observateurs sont dans la salle, comme on peut le voir ici (figure 3b), d'autres peuvent observer au travers d'une glace sans tain. Dès la fin de la séance, des observateurs se réunissaient (figure 3c), c'étaient souvent des moments de déclarations à chaud de Guy très fines. Voici ce qu'il disait à propos d'une phase d'institutionnalisation :



« On voit bien que l'institutionnalisation permet aux élèves de négocier un choix parce qu'elle joue, là, un rôle non pas par la conviction de l'élève mais elle joue par l'acceptation du moins bon élève. Alors vous avez là le mécanisme de l'institutionnalisation. Pour les élèves, c'est la socialisation de la bonne réponse… quand vous avez trois élèves qui discutent, les élèves vont s'aligner sur qui ? Ils vont s'aligner sur le répertoire, sur le vocabulaire de l'élève le moins fort, le moins bon ; si vous voulez discuter ensemble, si vous voulez que le type reste dans le coup vous êtes obligé d'utiliser le vocabulaire de l'élève le moins avancé…

[4] Le lecteur pourra la retrouver en vidéo au lien suivant : https://dai.ly/x94wcd0 (consulté en septembre 2024).

Autrement dit il ne faut pas croire en général que les situations de formulation sans institutionnalisation sont des situations qui font fonctionner la bonne formulation. Ça fait fonctionner les mauvaises, les mauvaises raisons, les mauvaises formulations, les mauvais termes, les choses que manient les gens les moins forts. Si un élève a une idée mirifique, il aura du mal à la fournir. Il la fournira une fois et comme il verra que cela ne convient pas, il utilisera les répertoires des autres. Autrement dit, ce avec quoi il va contraindre l'interlocuteur à accepter une décision, un choix, c'est ce que l'autre ne peut pas refuser parce que c'est institutionnalisé.

Donc s'il n'y a pas d'institutionnalisation, toutes les situations dans lesquelles on espère de façon trop empirique, un développement naturel… cela ne fonctionnera pas de manière optimale dans le cas d'une situation ouverte parce que la remarque d'un élève ne peut pas servir. Alors si vous institutionnalisez trop, immédiatement et exigez que tout le monde fasse pareil alors ça ne sert à rien de discuter. Donc l'institutionnalisation c'est l'aide que donne le professeur au bon raisonnement dans les discussions privées. Ça fait partie de la culture de la classe… Les autres élèves, s'ils ne voient trop pourquoi c'est le bon raisonnement, ils se rappellent que cela avait déjà été dit, ils l'utilisent, et cela entre dans les faits parce qu'il y a eu institutionnalisation. » (G.Brousseau, transcription de la vidéo)

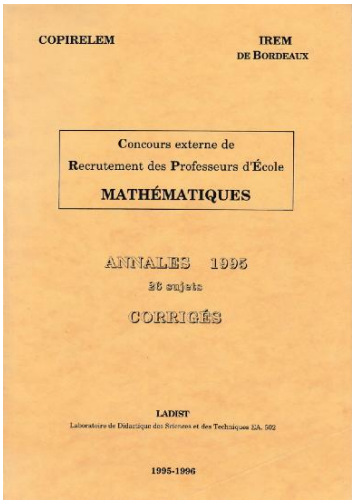
Guy Brousseau était à la fois un militant, un théoricien et un praticien. Il faut bien voir que ça n'a pas été toujours simple pour lui de faire sa place au sein de l'université de Bordeaux. Il a souvent été plus reconnu sur le plan national et international qu'au niveau local.

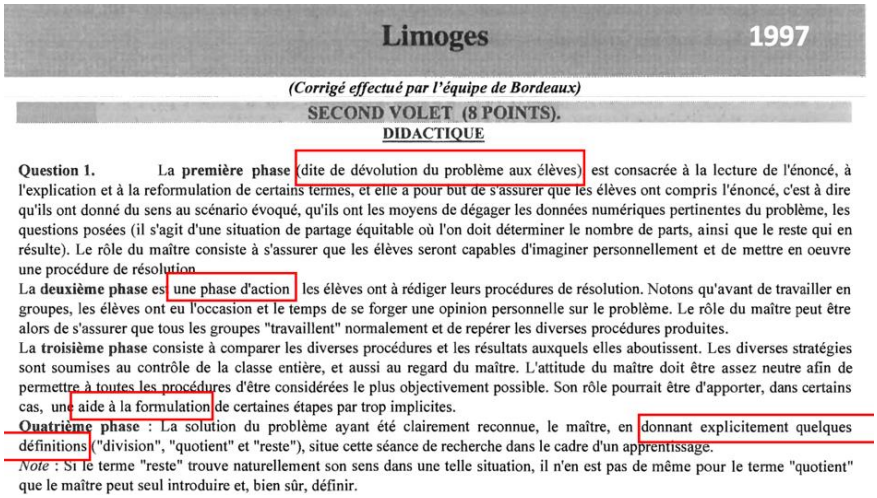
Militant, je l'ai expliqué, le COREM, il fallait quand même beaucoup de courage pour arriver à monter tout ça et militant aussi dans les contenus mathématiques : toute une partie de son travail a été de remettre en cause les algorithmes de la multiplication, de la division pour des raisons ergonomiques, et puis à la fin de sa vie, il était toujours en train de dire : « Mais c'est scandaleux que la numération orale ne fonctionne pas comme la numération écrite ! Il faut faire quelque chose ! », en sachant fort bien que c'était difficile.

Théoricien aussi bien sûr, il en sort que la didactique des mathématiques ne s'identifie pas à une des disciplines qui avoisinaient, c'est-à-dire que ça constitue un corpus, il a été un précurseur, ça n'est pas pour rien que la didactique des mathématiques, les thèses sont reconnues en 26e section des mathématiques appliquées.

Praticien parce que, dès le début, Guy s'est posé la question, nous a posé la question : « Comment ce qui se fait ici va pouvoir être diffusé ailleurs que dans les Écoles Normales de l'académie de Bordeaux ? » Et donc, c'est pour cela qu'il a été un des créateurs de la COPIRELEM. Il a toujours été très attaché à la COPIRELEM, même s'il n'y était pas en permanence.

On avait constitué un groupe à Bordeaux de personnes qui s'occupaient des annales. On était quatre à faire les corrigés, on avait la confiance de la COPIRELEM qui les éditait. Et dans ces annales, on en profitait pour faire des additifs sur des mini-cours de didactique. On allait même parfois jusqu'à remettre en cause le sujet en disant : « Ça, ce n'est pas top, on aurait pu faire une question de ce style ». Vous voyez, c'étaient des annales pas uniquement destinées aux candidats, mais aussi aux formateurs. (Figure 4)




Limoges 1997

(Corrigé effectué par l'équipe de Bordeaux)

SECOND VOLET (8 POINTS).

DIDACTIQUE

Question 1. La **première phase** (dite de dévolution du problème aux élèves) est consacrée à la lecture de l'énoncé, à l'explication et à la reformulation de certains termes, et elle a pour but de s'assurer que les élèves ont compris l'énoncé, c'est à dire qu'ils ont donné du sens au scénario évoqué, qu'ils ont les moyens de dégager les données numériques pertinentes du problème, les questions posées (il s'agit d'une situation de partage équitable où l'on doit déterminer le nombre de parts, ainsi que le reste qui en résulte). Le rôle du maître consiste à s'assurer que les élèves seront capables d'imaginer personnellement et de mettre en oeuvre une procédure de résolution.

La **deuxième phase** est une phase d'action : les élèves ont à rédiger leurs procédures de résolution. Notons qu'avant de travailler en groupes, les élèves ont eu l'occasion et le temps de se forger une opinion personnelle sur le problème. Le rôle du maître peut être alors de s'assurer que tous les groupes "travaillent" normalement et de repérer les diverses procédures produites.

La **troisième phase** consiste à comparer les diverses procédures et les résultats auxquels elles aboutissent. Les diverses stratégies sont soumises au contrôle de la classe entière, et aussi au regard du maître. L'attitude du maître doit être assez neutre afin de permettre à toutes les procédures d'être considérées le plus objectivement possible. Son rôle pourrait être d'apporter, dans certains cas, une aide à la formulation de certaines étapes par trop implicites.

Quatrième phase : La solution du problème ayant été clairement reconnue, le maître, en donnant explicitement quelques définitions ("division", "quotient" et "reste"), situe cette séance de recherche dans le cadre d'un apprentissage.

Note : Si le terme "reste" trouve naturellement son sens dans une telle situation, il n'en est pas de même pour le terme "quotient" que le maître peut seul introduire et, bien sûr, définir.

Figure 4. Un extrait des annales 1997 de la COPIRELEM, rédigées par Guy Brousseau, Joël Briand, Alain Duval et Gérard Vinrich.



La contribution théorique de Guy Brousseau, la théorie des situations, forme avec la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud et la théorie anthropologique du didactique d'Yves Chevallard, l'un des trois grands cadres théoriques de l'école française de didactique des mathématiques, et nul doute que la COPIRELEM contribuera à la poursuite de l'œuvre de Guy et à la diffusion des acquis de la didactique des mathématiques dans la formation des professeurs. Je pense qu'aujourd'hui il vous aurait souhaité un colloque 2024 joyeux et efficace. Alors bon colloque à toutes et à tous !

BIBLIOGRAPHIE

Aldon, G., Rabatel, J.-P. (2016). CaPriCo : des calculatrices en primaire et en collège. Dans *Former et se former … Quelles ressources pour enseigner les mathématiques à l'école ?* Actes du 42e colloque international des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. ARPEME.

Anselmo, B., Dessertine, S., Zucchetta, H. (2019). Des entiers aux décimaux : manipuler pour comprendre les opérations au cycle 3 ? Cas de la multiplication. Dans *Manipuler, représenter, communiquer : quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* Actes du 45e colloque COPIRELEM (378-407). ARPEME.

Bilgot, A., Petitfour, E., Tempier, F. (2024). 50 ans d'activités de la COPIRELEM ... et toujours pas la retraite en vue ! Dans *Mathématiques et diversité à l'école, aider les élèves, accompagner les professeurs*. Actes du 49e Colloque COPIRELEM (13-24). ARPEME.

Brissiaud, R. (1999). Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche. Dans *Évolution de l'enseignement des mathématiques et de la formation des maîtres.* Actes du XXVe colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (147-171). IREM de Brest.

Brousseau, G. (1987). Les différents rôles du maître. Dans *Mathématiques, formation en didactique, didactique et formation.* Actes du XIVe colloque INTER-IREM des PEN (37-67). IREM de Nantes.

Brousseau, G., Greslard, D. (1989). La régulation d'un curriculum : problèmes pratiques et théoriques. Dans *Didactique des mathématiques et formation. Évaluation des apprentissages.* Actes du colloque inter IREM des PEN (207-228). IREM de Rouen.

Brousseau, G. (1998). Intégration des savoirs de formation, la régulation didactique. Dans Actes du XXIVe colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (4-17). IREM Université – Paris VII – Denis Diderot.

Brousseau, G. (2003) Préface dans *Concertum. Les carnets de route de la COPIRELEM, tome 1* (3-6). ARPEME.

Bruillard, E. (2015). Associer un boulier et une calculette : visualisations et gestes dans l'apprentissage du calcul, scolarisation des instruments. Dans *Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?* Actes du XXXIe colloque international des professeurs et des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (59-68). ARPEME.

Butlen, D. (1992). Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de la classe associée. Dans Actes du XVIIIe et XIXe colloques inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (22-43). IREM de Besançon.

Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2022). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Tome 2. Situations - Ressources - Analyses.* Collection : Les outils du formateur. ARPEME.

Celi, V., Danos, P., Emprin, F., Grau, S. Moussy, C. et Vay, G. (A paraitre). *Exploiter un test de positionnement en mathématiques à destination d'étudiants en master MEEF.* Dans *Actes du 50e colloque COPIRELEM.*

Colmez, F. (1985) Table ronde du samedi 29 janvier 1983. Dans Actes du colloque national des professeurs d'école normale. La formation actuelle et future des instituteurs. IREM de Nice.

Colmez, F. (1978). Les décimaux au CM. Dans Actes du 4e colloque des professeurs d'école normale (95-102). IREM de Rennes.

COPIRELEM. (2003). *Carnets de route de la COPIRELEM. Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* ARPEME.

COPIRELEM. (2024). CRPE sessions 2022 et 2023. Épreuve orale de mathématiques. Quelques éléments à propos du contenu et du déroulement de l'épreuve dans plusieurs académies. En ligne : https://www.copirelem.fr/

Courrière, M. et Laisne, M. (1980). Exigences préalables aux UF de didactique. Dans *Actes du 7e colloque de mathématiques des professeurs d'Ecole Normale* (116-133). IREM de Clermont-Ferrand.

Danos, P., Emprin, F., Grau, S. et Moussy, C. (2024). Concevoir et utiliser un test de positionnement en mathématiques à destination d'étudiants en master MEEF. Dans *Actes du 49e colloque COPIRELEM* (473-488). ARPEME.

Eiller, R. (1976). Aspects de la formation initiale et continue. Compte-rendu du groupe A. Dans *Actes du Séminaire national des Professeurs d'Ecole Normale* (1-27). IREM de Nice.

Eysseric, P., Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2023). *Document-cadre pour la formation des professeurs des écoles à l'enseignement des mathématiques.* Version 3 du 31/03/2023. Les outils du formateur. ARPEME. En ligne : https://www.copirelem.fr/ressources/pour-la-formation/

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Tome 2. Situations - Ressources - Analyses.* Collection : Les outils du formateur. ARPEME.

Guille-Biel Winder, C., Petitfour, E. (2023). Analyse didactique de l'enseignement de la géométrie dans des manuels scolaires : mise en fonctionnement d'une grille dans le cas du manuel Maths explicites CM1. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles.* Actes du 48e colloque COPIRELEM (297-325). ARPEME.

Houdement, C. (1996). Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. Dans *Actes du XXIIème colloque COPIRELEM des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres*. (79-98). Douai 1995. IREM de Lille.

Kuzniak, A. (1995). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. Dans *Actes du XXIème colloque Inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. Chantilly 1994.* (37-62). IREM de Picardie.

MENJ (2016). Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3). Fractions et nombres décimaux au cycle 3. https://eduscol.education.fr/document/36665/download

MENJ (2023). Choc des savoirs. Élever le niveau de notre école. Dossier de presse, mardi 5 décembre 2023, 1-36. https://www.education.gouv.fr/choc-des-savoirs-une-mobilisation-generale-pour-elever-le-niveau-de-notre-ecole-380226

MENJ (2024). Programmes de mathématiques des cycles 1 et 2. Lettre d'intention Février 2024, 1-4.

Peltier, M.-L., Fabregas, M., Pecal, M. (1995). Didactique des mathématiques et manuels scolaires. Dans *Savoir et connaissances*. Actes du XXIe colloque inter-IREM COPIRELEM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (155-173). IREM de Picardie.

Peltier, M.-L. et Briand, J. (1997). Vers une politique d'élaboration de sujets de concours. *Dans Actes du XXIIIème colloque COPIRELEM des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres. La Grande Motte 1996.* (247-254). IREM de Montpellier.

Perrin-Glorian, M.-J. (1987). Lettre à la Direction des Écoles du 28 avril 1986. Dans Actes des colloques PEN de Guéret (1985) et Quimper (1986). IREM Paris VII.

Petitfour, E., Guille-Biel Winder, C., Tempier, F., Simard, A. et Eysseric, P. (2022). Un programme de formation des professeurs des écoles pour enseigner les mathématiques ? Contenus, enjeux et repères. Dans *Actes du 47e colloque COPIRELEM. Grenoble 2021 (visio-conférence).* ARPEME.

Redon, R., Pinchault, J., Oriol, J.-C. (1980). Les calculatrices électroniques et l'enseignement des mathématiques. Dans Actes du 6e colloque des professeurs de mathématiques d'école normale (113-119). IREM de Bordeaux.

Valentin, D., Zimmerman, G. (1985). Manipulation pour la formation mathématique des instituteurs. Dans *La formation actuelle et future des instituteurs.* Actes du Xe colloque national des professeurs d'école normale (36-43). IREM de Nice.

Villani, C., Torossian, C. (2018). *Rapport : 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf.

Wéber, J. (1987). Les difficultés des enfants en mathématiques. Dans *Former des enseignants, former des enfants.* Actes des 12e et 13e colloques inter-IREM des PEN de mathématiques (100-117). IREM Paris VII.

ANNEXE 1 – 50 COLLOQUES COPIRELEM

Les cases grisées dans la dernière colonne du tableau permettent de repérer les actes des colloques pour lesquels la participation de Guy Brousseau est mentionnée.

Intitulé	Lieu - année	Thème	Nombre de participants au colloque
	Orléans 1974		
Journées APMEP – Ecoles Normales - IREM	Alpe d'Huez 1975	Géométrie	128
Séminaire national des professeurs d'école normale	Nice 1976	Formation initiale et continue des instituteurs	
Colloque des professeurs d'école normale	Plestin-les-Grèves 1977		130
5ème colloque national des professeurs d'école normale	Auberive 1978	L'enseignement des mathématiques en classe de formation professionnelle	105
6ème colloque des professeurs d'école normale	Bombannes 1979	Élaboration de documents en vue de la formation initiale et continuée des maîtres	161
7e colloque des professeurs de mathématiques d'école normale	Confolant 1980		164
8e colloque APMEP IREM COPIRELEM	Le Touquet 1981		
9e colloque PEN – IREM - APMEP	Blois 1982	DEUG : « enseignement élémentaire »	123
10e colloque national des professeurs d'école normale	Antibes 1983	La formation actuelle et future des instituteurs	93
11e colloque national des professeurs d'école normale	Guebwiller 1984	Les mathématiques dans les nouvelles formes éducatives	66
12ème et 13ème colloque inter-IREM des PEN de mathématiques	Guéret 1985	Former des enseignants, former des enfants	53
	Quimper 1986		77
XIVème colloque inter-IREM des PEN	Angers 1987	Mathématiques. Formation en didactique Didactique et formation	126
XVe colloque inter-IREM des PEN de mathématiques	Rouen 1988	Didactique des mathématiques et formation. Évaluation des apprentissages	236
XVIème colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs en mathématiques	Bombannes 1989		115
XVIIème colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs	Paris 1990		111

XVIII[ème] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Nice 1991		**91**
XIX[ème] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Besançon 1992	Des Ecoles Normales aux IUFM : ruptures et continuité	**151**
XX[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Aussois 1993		**143**
XXI[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Chantilly 1994	Savoir et connaissances	**123**
XXII[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Douai 1995		**130**
XXIII[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	La-Grande-Motte 1996		**188**
XXIV[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Saint-Etienne 1997		**110**
XXV[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Loctudy 1998	Évolution de l'enseignement des Mathématiques et de la Formation des maîtres	**119**
XXVI[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Limoges 1999		**126**
XXVII[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Chamonix 2000	Évolution de l'enseignement des mathématiques et de la formation des maîtres	**142**
XXVIII[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Tours 2001		**125**
XXIX[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	La-Roche-sur-Yon 2002		**150**
XXX[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Avignon 2003	Trente ans d'activités de la COPIRELEM au service de la formation des maîtres : acquis et perspectives	**160**
XXXI[e] colloque inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Foix 2004	Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?	**139**
XXXII[e] colloque COPIRELEM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Strasbourg 2005	Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs	**156**
XXXIII[e] colloque COPIRELEM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Dourdan 2006	Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?	**150**
XXXIV[e] colloque COPIRELEM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Troyes 2007	Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?	**154**
XXXV[e] colloque national des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques	Bombannes 2008	Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ?	**135**

XXXVI[e] colloque national des professeurs et des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	Auch 2009	Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ?	**106**
XXXVII[e] colloque COPIRELEM des professeurs et des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	La-Grande-Motte 2010	L'enseignement des mathématiques à l'école : l'évaluation dans tous ses états	**162**
XXXVIII[e] colloque COPIRELEM des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Dijon 2011	Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants	**128**
39[e] colloque COPIRELEM des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maitres	Quimper 2012	Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève	**148**
XL[e] colloque international de la COPIRELEM	Nantes 2013	Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives	**150**
41[ème] colloque COPIRELEM des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	Mont-de-Marsan 2014	Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?	**120**
42[e] colloque international des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	Besançon 2015	Former et se former … Quelles ressources pour enseigner les mathématiques à l'école ?	**135**
43[e] colloque international des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres	Le-Puy-en-Velay 2016	Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ?	**129**
44[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Epinal 2017	Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?	**154**
45[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Blois 2018	Manipuler, représenter, communiquer : quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?	**222**
46[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Lausanne 2019	Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXI[e] siècle	**165**
47[e] colloque de la COPIRELEM	Chambéry 2020	Annulé COVID	
47[e] colloque de la COPIRELEM	Grenoble 2021 visio	Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques	**334**
48[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Toulouse 2022	Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles	**170**
49[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Marseille 2023	Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les professeurs	**270**
50[e] colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles	Bonneuil-sur-Marne 2024	Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les professeurs	**177**

CONFÉRENCES

COMPLÉMENTARITÉ D'APPROCHES DIDACTIQUE, SOCIALE ET PSYCHO-SOCIALE POUR ÉTUDIER ET COMBATTRE LES INÉGALITÉS DE GENRE EN MATHÉMATIQUES

Nadine GRAPIN
Maitresse de conférences, UPEC
Laboratoire de didactique André Revuz
nadine.grapin@u-pec.fr

Nathalie SAYAC
Professeure des universités, URN
Laboratoire de didactique André Revuz
nathalie.sayac@univ-rouen.fr

Résumé
Les évaluations nationales et internationales soulignent régulièrement des écarts de performance entre garçons et filles en mathématiques. Nous avons cherché à expliquer ce constat en croisant des approches didactiques avec des travaux en psychologie sociale et en sociologie, notamment ceux relatifs aux stéréotypes de genre. Nous montrons ainsi à travers deux études que nous avons menées la façon dont nous nous sommes emparées de cette question. Nous abordons ensuite la question de la formation des enseignant·es à travers la présentation d'un protocole de formation à l'égalité en mathématiques conçu pour agir en profondeur et durablement sur les pratiques des enseignant·es du primaire et du secondaire.

Alors que les écarts de performance entre garçons et filles sont régulièrement soulignés dans les évaluations nationales et internationales, il nous semble nécessaire, en tant que didacticiennes des mathématiques préoccupées par les inégalités scolaires dans notre discipline, de dépasser ce constat et de chercher à l'expliquer en mobilisant des outils propres à notre champ scientifique, mais aussi des travaux en psychologie sociale et en sociologie, notamment ceux relatifs aux stéréotypes de genre (Steele et Aronson, 1995). Après avoir précisé dans une première partie les éléments scientifiques sur lesquels nous nous appuyons pour formuler nos questions, nous montrons ensuite à travers deux études que nous avons menées la façon dont nous nous en sommes emparées et les résultats que nous avons obtenus. Dans une dernière partie, nous aborderons la question de la formation des enseignant·es à travers la présentation d'un protocole de formation à l'égalité en mathématiques actuellement expérimenté en écoles, collèges et lycées.

I - ÉLÉMENTS INSTITUTIONNELS ET SCIENTIFIQUES

Au niveau institutionnel, la loi du 8 juillet 2013 « d'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République » a imposé la transmission du respect de l'égalité entre les femmes et les hommes et ce dès la formation des enseignant·es dans les écoles primaires. Elle a ouvert la voie à toute une série de mesures législatives et de textes de cadrage.

1 Une pluralité de ressources institutionnelles

Il ne s'agit pas de faire une liste exhaustive des ressources institutionnelles à destination des enseignant·es[1], mais plutôt de montrer à travers quelques exemples la façon dont les enseignant·es sont sensibilisé·es institutionnellement à cette question et accompagné·es pour y répondre.

Indépendamment de la discipline scolaire, de nombreux textes ont été publiés enjoignant les enseignant·es à avoir des pratiques égalitaires. La compétence 6 du référentiel de compétences professionnelles du professorat et de l'éducation stipule que les enseignant·es doivent :

> *se mobiliser et mobiliser les élèves contre les stéréotypes et les discriminations de tout ordre. Promouvoir l'égalité entre les filles et les garçons, les femmes et les hommes. Contribuer à prévenir et à gérer les violences scolaires, à denier toute forme d'exclusion ou de discrimination (Bulletin officiel, 2013).*

De même, dans le code de l'éducation, se trouvent deux articles[2] ciblant explicitement le devoir d'égalité imposé aux professeur·es et l'injonction de formation à leur égard. Par ailleurs, dans la dernière convention interministérielle pour l'égalité entre les filles et les garçons, les femmes et les hommes (2019-2024), cinq axes d'intervention sont déclinés dont la formation de l'ensemble des personnels et la transmission d'une culture de l'égalité et du respect mutuel.

Plus particulièrement en mathématiques, différentes ressources ont été publiées, dont le rapport de l'Inspection générale piloté par Xavier Gauchard (MENJ, 2023a). On y trouve des éléments factuels sur la place des filles dans les filières à dominante mathématique, mais aussi une série de leviers d'amélioration (s'appuyer sur les pratiques collaboratives, interroger ce qui se passe en classe, etc.) et des pistes ou recommandations pour promouvoir la réussite des filles en mathématiques étayées par des travaux scientifiques ou des enquêtes (PISA). Ce rapport est complémentaire aux deux autres documents parus pour lutter contre les stéréotypes sexués en mathématiques, l'un dédié à l'évaluation et l'autre aux interactions et à l'organisation en classe : des pistes sont également proposées à l'enseignant·e sous forme de questions à se poser pour s'observer, observer les élèves et agir en classe.[3]

2 Des travaux en psychologie sociale et sociologie pour étudier les stéréotypes de genre

Différents travaux en psychologie sociale et sociologie ont dénoncé le manque de confiance en soi des filles en mathématiques (Baudelot et Establet, 2009 ; Sayac et Grapin, 2016) et un sentiment d'efficacité personnelle moindre que celui des garçons (OCDE, 2015 ; Meece et al., 2006).

Au-delà de ce manque de confiance en soi des filles en mathématiques, de nombreuses études, dont les enquêtes PISA, ont également pointé l'anxiété plus grande des filles à l'égard des mathématiques (Lafortune et Fennema, 2002). Néanmoins, il a également été souligné que ce constat était relatif puisque « l'écart de performance en mathématiques entre les filles et les garçons se comble totalement lorsque l'on compare des garçons et des filles présentant des niveaux similaires de confiance en soi en mathématiques et d'anxiété vis-à-vis de cette matière » (OCDE, 2015, p.2).

Les stéréotypes de sexe (Steele et Aronson, 1995) sont souvent convoqués pour expliquer les écarts de réussite en mathématiques entre les filles et les garçons car celui qui est le plus important, le plus stable

---

[1] Pour approfondir, cf. https://eduscol.education.fr/1629/egalite-filles-garcons-et-prevention-des-violences-sexistes-et-sexuelles (consulté le 24/10/2024)

[2] Article L121-1 « Les écoles, les collèges, les lycées et les établissements d'enseignement supérieur sont chargés de transmettre et de faire acquérir connaissances et méthodes de travail. Ils contribuent à favoriser la mixité et l'égalité entre les hommes et les femmes. »
Article L312-17-1 « Une information consacrée à l'égalité entre les hommes et les femmes, à la lutte contre les préjugés sexistes et à la lutte contre les violences faites aux femmes et les violences commises au sein du couple est dispensée à tous les stades de la scolarité. »

[3] Cf. https://eduscol.education.fr/document/39275/download et https://eduscol.education.fr/document/33806/download (consulté le 24/10/2024)

et culturellement universel concerne la conception des mathématiques comme domaine masculin (Cvencek et al., 2014). Ce stéréotype est très prégnant dans les systèmes scolaires et la « menace du stéréotype » (Spencer et al., 1999) qui en découle contribue souvent à amoindrir les performances des filles en mathématiques. Des expériences dites « d'habillage de la tâche » ont d'ailleurs montré que lorsque l'on présente une tâche mathématique à réaliser à des élèves en faisant des commentaires particuliers, spécifiquement adressés pour activer ou neutraliser des stéréotypes ou l'identité de genre des élèves, les performances des filles et des garçons varient immanquablement. Par exemple, Huguet et Régner (2007) ont présenté à des élèves de 10-12 ans une tâche de reproduction de figure complexe en indiquant à un groupe que c'était un test de géométrie et à l'autre groupe un dessin à reproduire. Les résultats ont montré que seule la performance des filles était inférieure lorsque la tâche était présentée comme un test de géométrie. Ces travaux sont intéressants et éclairent avec une certaine approche les écarts de performances entre les filles et les garçons en mathématiques mais, même s'ils concernent bien la discipline scolaire des mathématiques, ils n'en explorent pas le contenu spécifique.

II - NOTRE POSITIONNEMENT ET NOS QUESTIONS

À l'origine de notre travail, nous nous interrogions sur la façon d'expliquer des écarts de performance en mathématiques alors que filles et garçons ont les mêmes capacités. Un grand nombre d'études témoignent de différences de performance entre filles et garçons en mathématiques en les reliant avec le sentiment d'efficacité, le niveau d'anxiété, etc. et en expliquant ces constats à partir d'approches sociales et psycho-sociales. En tant que didacticiennes des mathématiques, nous estimons que la prise en compte des savoirs en jeu dans les tâches proposées et qu'une analyse des réponses des élèves au regard d'une analyse *a* priori des tâches peut permettre de préciser ce qui serait à l'origine des écarts de score. A notre connaissance, peu de recherches se situent dans cette perspective. Nous retenons cependant les travaux de Che, Wiegert et Threlkeld (2012) qui montrent des différences dans les types de procédures utilisées par les garçons et les filles lors de la résolution de problèmes de proportionnalité en 6ème et ceux de Roditi et Salles (2015) qui, après une analyse des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques (Robert, 1998) dans les items du PISA 2012, montrent que « les filles sont d'autant plus en difficulté par rapport aux garçons que le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances est un niveau exigeant » (Roditi et Salles, 2015, p. 252). Les résultats produits par ces travaux montrent ainsi qu'une approche didactique, à partir d'une analyse des tâches et-ou des procédures des élèves peut permettre d'éclairer différemment et complémentairement les différences de performance entre filles et garçons.

Dans la continuité de ces travaux, nous nous proposons dans la partie suivante de montrer comment nous avons cherché à éclairer des écarts de performance entre garçons et filles à deux niveaux de l'école élémentaire, à partir de deux évaluations à grande échelle : le bilan CEDRE[4] fin d'école et les évaluations nationales à l'entrée au CE1.

Les travaux de Duru-Bellat (1990) et de Mosconi (1994) ont montré que les différences de performance entre les filles et les garçons en mathématiques ne pouvaient s'expliquer sans prendre en compte ce qui se passait dans les classes et notamment la façon dont les enseignant·es y faisaient vivre les mathématiques. Elles ont toutes deux montré que, non seulement les garçons étaient davantage sollicités que les filles durant les séances de mathématiques, mais aussi qu'ils l'étaient de manière plus constructive du point de vue des apprentissages. C'est également ce qu'a montré Jarlégan (1999), en pointant des conséquences en termes de performances et d'attitudes des élèves.

Plus précisément au niveau des pratiques d'évaluation, le sexe des élèves est également un élément à prendre en compte car il interfère dans les jugements des enseignant·es (Jarlégan et Touzati, 2007 ; Sayac,

[4] Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon.

2019) et dans la notation qu'ils et elles attribuent aux élèves (Bonniol, 1981 ; Felouziz, 1996), notamment en mathématiques (Lafontaine et Monseur, 2009 ; Terrier, 2014). Dans Toczek (2005), l'auteure évoque très bien comment les instruments d'évaluation institutionnels révèlent de manière précoce et récurrente une stéréotypie sexuée.

Il semble donc essentiel d'agir au niveau de la formation des professeur·es enseignant les mathématiques pour développer des pratiques égalitaires permettant la réussite de tous les élèves, filles et garçons simultanément. En tant que didacticiennes des mathématiques, nous considérons que c'est à partir de contenus mathématiques spécifiques et maitrisés qu'il faut concevoir ces formations, tout en prenant en compte les travaux en psychologie sociale évoqués ci-dessus. Le protocole de Formation à l'Égalité en Mathématiques (FÉM) que nous décrirons à la fin de cette présentation est une proposition actuellement expérimentée de la maternelle au lycée.

III - DEUX ÉTUDES POUR COMPRENDRE LES ECARTS DE PERFORMANCE

Les deux recherches que nous présentons ci-après visent à comprendre les écarts de performance entre garçons et filles en nous intéressant à la façon dont ils ou elles ont procédé pour produire leurs réponses. Nous ne reprenons ci-après que les éléments saillants de ces travaux et proposons au lecteur ou à la lectrice de se référer à Sayac et Grapin (2014 ; 2016) et Grapin et Sayac (soumis) pour avoir des précisions sur les fondements scientifiques, la méthodologie et les résultats.

1 Stratégies de réponses aux QCM et degrés de certitude en fin d'école

1.1 Précision du questionnement

Les QCM étant majoritairement utilisés dans les évaluations à grande échelle, nous nous sommes interrogées initialement sur les stratégies que mobilisaient les élèves pour répondre à ces questions. Nous avons ainsi défini trois types de stratégies (Sayac et Grapin, 2014) :

- les *stratégies de savoirs*, lorsque l'élève active des connaissances ou des savoir-faire (techniques – raisonnement) pour choisir la réponse qu'il pense être la bonne : soit il résout complètement la tâche (par la procédure de son choix, juste ou fausse), soit il teste les propositions de réponse et choisit celle qui peut convenir ;
- les *stratégies de substitution ou de repli*, lorsque l'élève n'utilise pas ses connaissances mathématiques de façon explicite pour faire un choix ; son choix ne repose pas de façon assurée sur ses connaissances ;
- les *stratégies mixtes*, lorsque l'élève a initié un raisonnement pour répondre à la question posée, mais il se sert des différentes propositions de réponse pour faire un choix.

En complément de la stratégie adoptée par l'élève, il nous semblait également intéressant d'adjoindre le degré de certitude qu'il ou elle accordait à sa réponse (Leclerq, 1982) puisque la mise en relation du degré de certitude avec la qualité de la réponse donnée (juste ou fausse) permet ensuite d'apporter des éléments d'évaluation plus précis et de distinguer des états de connaissance spécifiques (Gilles, 1996) :

- l'ignorance reconnue (réponse incorrecte et peu sûre) ;
- la connaissance incomplète (réponse correcte mais peu sûre) ;
- la connaissance assurée (réponse correcte et très sûre) ;
- l'ignorance ignorée (réponse incorrecte et très sûre).

Les données que nous avons recueillies ont ensuite été analysées au filtre du genre afin de répondre aux questions suivantes : y a-t-il une différence entre les stratégies utilisées par les filles et celles utilisées par les garçons ? La certitude accordée à leur réponse est-elle différente selon les filles ou les garçons ? Quel lien y a-t-il alors avec la réussite ?

1.2 Méthodologie

Sept tâches (2 en « grandeurs et mesures », 3 sur « fractions et décimaux », 2 en « résolution de problèmes ») extraites du bilan CEDRE fin de CM2 ont été proposées à 155 élèves de fin de CM2 en juin 2012, après les évaluations nationales. Chaque élève a résolu individuellement les tâches en compagnie de l'une des chercheures ; à la fin de chacune des tâches, il ou elle devait attribuer un degré de certitude à sa réponse et expliquer la façon dont il ou elle avait procédé pour répondre. Nous avons choisi d'utiliser une échelle avec 4 degrés de certitude (pas sûr du tout ; pas très sûr ; sûr ; sûr et certain) et l'avons présentée à l'aide d'un exemple à la classe entière, avant les passations individuelles.

1.3 Résultats

Sur l'ensemble du test, la répartition des stratégies utilisées pour répondre diffère peu selon les garçons et les filles, sauf pour deux questions (cf. Tableau 1) pour lesquelles les garçons utilisent davantage des stratégies de savoirs.

Question	Résultats
Dans une heure, combien y a-t-il de secondes ? □ 360 s □ 3 060 s □ 3 600 s □ 6 300 s	78 % des garçons vs 68 % des filles mobilisent une stratégie de savoir. 21,1 % des filles *vs* 11,4% des garçons utilisent des stratégies de repli. 62% des garçons réussissent cette tâche *vs* 53 % des filles.
Pour faire une bonne confiture, il faut mettre 300 g de sucre pour 400 g de fruits. Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de fruits ? □ 600 g □ 700 g □ 750 g □ 800 g	49% des garçons vs 34 % des filles mobilisent davantage des stratégies de savoirs basées sur des calculs. 50% des filles vs 38 % des garçons utilisent des stratégies de repli (élimination de certaines réponses pour ensuite en choisir une parmi celles restantes). Il n'y a pas d'écart dans la réussite entre garçons et filles (environ 27%).

Tableau 1. Questions présentant des différences de stratégies entre garçons et filles

Nombreux et nombreuses élèves accordent un degré de certitude élevé à des réponses fausses, en particulier sur les deux questions présentées dans le Tableau 2, ci-après. Sur l'ensemble du test, entre 33 % des garçons et 43 % des filles accordent une certitude élevée à une réponse fausse.

Les garçons attribuent en moyenne sur chacune des questions un degré de certitude plus élevé que les filles, qu'ils donnent une réponse fausse ou une réponse correcte. Les garçons auraient donc des connaissances plus assurées que les filles, mais aussi, une ignorance ignorée plus fréquente, selon ces indicateurs.

Même si les résultats sont à relativiser (nombre réduit d'élèves et d'exercices, compréhension des degrés de certitude, modalités de passation, etc.), la menace du stéréotype semble impacter négativement les filles qui se confortent dans l'idée que « elles ne sont pas bonnes en mathématiques », mais aussi les garçons pour qui « l'assurance d'être bons en mathématiques » peut les leurrer sur leur ignorance.

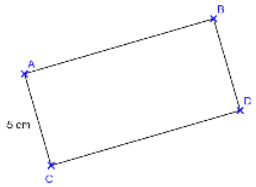
Question	Résultats
ABCD est un rectangle dont la largeur est 5 cm. Quelle doit être la longueur de ce rectangle pour que son périmètre soit égal à 30 cm ?  □ 6 cm □ 10 cm □ 25 cm □ 14 cm	En moyenne, 55,7 % des garçons répondent correctement et le degré de certitude moyen sur l'ensemble des réponses des garçons est de 3,7. En moyenne, 47,4 % des filles répondent correctement et le degré de certitude moyen sur l'ensemble des réponses des filles est de 3,3. Par ailleurs, 39,3 % des garçons et 40,8 % des filles accordent un degré de certitude élevé (sûr ou sûr et certain) à une réponse qui est fausse.
Sophia va à la boulangerie et achète 3 croissants à 1,20 € l'un. Elle paie avec un billet de 10 €. Combien lui rend la caissière ? □ 7,20 € □ 3,60 € □ 8,80 € □ 6,40 €	En moyenne, 59,4 % des garçons répondent correctement et le degré de certitude moyen sur l'ensemble des réponses des garçons est de 3,6. En moyenne, 47,4 % des filles répondent correctement et le degré de certitude moyen sur l'ensemble des réponses des filles est de 3,3. Par ailleurs, 40,8 % des garçons et 43,4 % des filles accordent un degré de certitude élevé (sûr ou sûr et certain) à une réponse qui est fausse.

Tableau 2. Exemples de questions accompagnées des scores et des degrés de certitude associés

2 Écarts de performance entre filles et garçons à l'entrée au CE1

2.1 Contexte et précision du questionnement

Si les évaluations nationales montrent qu'à l'entrée au CP les performances des garçons sont légèrement inférieures à celles des filles, « on assiste à un renversement complet à l'entrée au CE1 » (DEPP, 2023, p. 40). Les écarts sont alors particulièrement marqués en faveur des garçons pour les compétences « additionner » et « soustraire » alors qu'ils sont moindres pour d'autres, comme « calculer mentalement » (cf. Tableau 3). L'écart le plus important se situe sur la compétence « additionner » : 67,3% des garçons en ont une maitrise satisfaisante pour 53,4% des filles.

	Filles	Garçons	Écart
Additionner	53,4	67,3	-13,9
Soustraire	57,0	64,6	-7,6
Calculer mentalement	77,7	75,0	2,7

Tableau 3. Extrait de DEPP (2023, p.43) « Proportion d'élèves présentant une maitrise satisfaisante dans les domaines comparables en CE1 en 2023, selon le sexe »

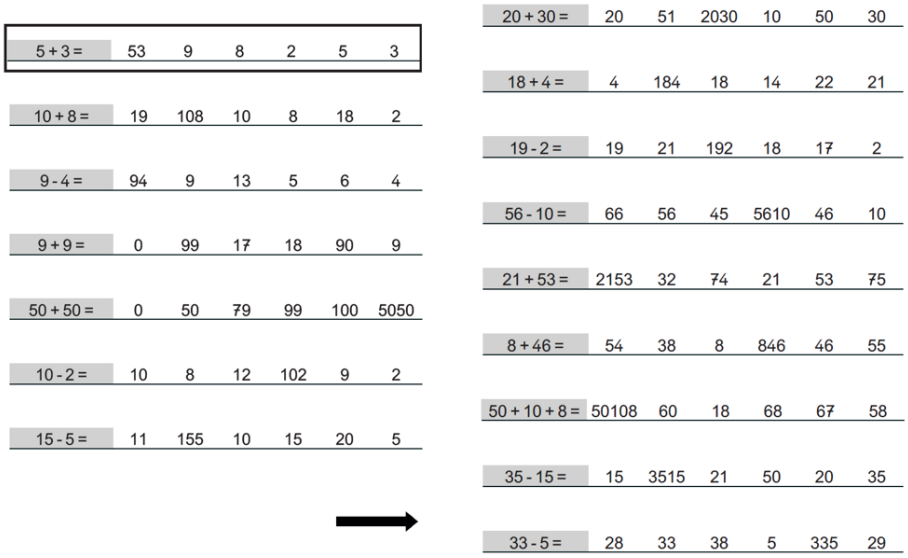
Cette étude, en cours, vise à comprendre ce constat. Nous n'interrogeons pas ici la validité de ces tâches (Grapin et al., 2022), c'est-à-dire ce qu'elles permettent effectivement d'évaluer relativement à leur format, aux calculs proposés, aux modalités de passation, etc. même si comme nous le montrerons par la suite, les résultats obtenus permettent d'éclairer cette question.

2.2 Méthodologie

Analyse de la tâche

Les tâches retenues pour l'étude sont celles proposées dans l'exercice 7 de l'évaluation nationale à l'entrée au CE1 en 2022[5] et pour lesquelles la compétence associée est, d'après le guide du professeur : « Calculer en ligne avec des nombres entiers (additions et soustractions) » (MENJ, 2022a, p. 20)

[5] Cet exercice est repris à l'identique à l'évaluation de septembre 2023.



5 + 3 =	53	9	8	2	5	3
10 + 8 =	19	108	10	8	18	2
9 - 4 =	94	9	13	5	6	4
9 + 9 =	0	99	17	18	90	9
50 + 50 =	0	50	79	99	100	5050
10 - 2 =	10	8	12	102	9	2
15 - 5 =	11	155	10	15	20	5

20 + 30 =	20	51	2030	10	50	30
18 + 4 =	4	184	18	14	22	21
19 - 2 =	19	21	192	18	17	2
56 - 10 =	66	56	45	5610	46	10
21 + 53 =	2153	32	74	21	53	75
8 + 46 =	54	38	8	846	46	55
50 + 10 + 8 =	50108	60	18	68	67	58
35 - 15 =	15	3515	21	50	20	35
33 - 5 =	28	33	38	5	335	29

Figure 1. Reproduction des pages 21 et 22 du cahier d'évaluation de l'élève à l'entrée au CE1 (MENJ, 2022b)

Nous remarquons d'abord que, pour chaque calcul, les six choix de réponse sont toujours construits de la même façon (ou presque), mais proposés dans un ordre différent avec : la bonne réponse, la bonne réponse +1 ou la bonne réponse -1, le nombre constitué en accolant les termes de la somme ou de la différence, le résultat de l'opération inverse, chacun des deux termes du calcul.

La passation en classe est encadrée par les consignes données aux enseignant·es (MENJ, 2022a, p. 20 et 21). Le premier calcul (5+3) est traité collectivement afin que l'élève comprenne la tâche et la façon dont il doit indiquer sa réponse (entourer le nombre choisi). L'enseignant·e indique ensuite à l'élève qu'il continue seul et que les calculs sont donnés sur deux pages.

Recueil et traitement des données

Notre méthodologie articule deux études, l'une quantitative et l'autre qualitative. Pour la première, nous avons étudié les réponses données lors des évaluations nationales par 265 élèves (128 garçons – 137 filles) d'une même circonscription parisienne.

Pour l'étude qualitative, des passations individuelles ont été menées auprès de 37 élèves (20 filles et 17 garçons) de fin de CP résolvant cet exercice dans des conditions similaires à celles des évaluations nationales. A la suite de la réalisation de cet exercice, nous avons interrogé chaque élève sur la façon dont il ou elle a procédé pour fournir sa réponse sur quatre calculs : 9 – 4 ; 20 + 30 ; 18 + 4 ; 19 – 2. Nous avons particulièrement observé si l'élève utilisait ou non ses doigts de façon visible pour donner la réponse et avons pris en note les explications qu'il ou elle nous donnait quant aux procédures qu'il ou elle utilisait pour donner sa réponse ; des enregistrements audio et vidéo de certaines passations ont également été réalisés. L'étude de ces données étant en cours, nous n'en donnerons que de premiers résultats.

2.3 Résultats de l'étude quantitative

L'enquête quantitative confirme une meilleure performance des garçons à cet exercice, leur score moyen étant de 11 réponses justes (sur 15) alors qu'il est de 9 réponses justes (sur 15) pour les filles. L'écart est encore plus marqué en faveur des garçons sur les soustractions (Tableau 4). Les résultats par calcul sont fournis en annexe 1, Figure 2.

	Additions / 8	Soustractions / 7
Garçons	6,3	4,8
Filles	5,6	3,7
Ecart (garçons – filles)	0,7	1,1

Tableau 4. Nombre moyen de bonnes réponses par type de calcul (addition – soustraction) selon le sexe

L'analyse des réponses montre d'abord une augmentation du taux de non-réponse au fur et à mesure de l'avancée dans les calculs (Annexe 1, Figure 3) avec un nombre plus important de non-réponse chez les filles et un écart entre le pourcentage de non-réponse par calcul entre garçons et filles qui se stabilise autour de 13 % à partir du onzième calcul (21 + 53).

Le nombre composé des deux termes accolés est une erreur peu fréquente (moins de 5% des réponses) sauf pour trois calculs : 21 + 53 (8,3% des erreurs) ; 50 + 10 + 8 (13,6%) ; 35-15 (5,7%) ; l'écart entre garçons et filles étant particulièrement marqué pour 50 + 10 + 8 (10,2% des garçons et 17,5% des filles commettent cette erreur).

Les bonnes réponses à + ou – 1 près représentent plus de 10% des erreurs sur les calculs trois calculs : 56-10 (10,2% des erreurs) ; 8+46 (11,3%) ; 33-5 (10,6%) ; l'écart entre garçons et filles étant particulièrement marqué pour 8+46 (14,8% des garçons et 8% des filles commettent cette erreur).

Enfin, la confusion entre addition et soustraction représente environ 10 % des erreurs pour chacune des soustractions (elle est inférieure à 4% pour les additions). La différence entre garçons et filles est particulièrement marquée pour ce type d'erreur sur les trois premières soustractions où la proportion des filles commettant cette erreur est supérieure de plus de 7% à celle des garçons (cf. Tableau 5).

	9-4	10-2	15-5	19-2	56-10	35-15	33-5
Garçons	8,6%	10,2%	6,3%	7,8%	15,6%	10,9%	8,6%
Filles	16,1%	18,2%	16,8%	10,9%	9,5%	9,5%	14,6%
Écart (F-G)	7,5%	8%	10,5 %	3,1%	6,1%	1,5%	-6%

Tableau 5. Pourcentage de la confusion addition / soustraction selon le calcul et selon le sexe

L'écart se réduit sur les dernières soustractions, voire s'inverse, ce qui est à relativiser puisque le score de non-réponse est particulièrement élevé pour les filles sur les trois derniers calculs.

2.4 Résultats de l'étude qualitative et discussion

Nous rappelons que les résultats que nous présentons dans ce paragraphe sont à relativiser puisque le nombre d'élèves retenu pour l'enquête qualitative est faible. Sur notre échantillon, nous observons d'abord que le score moyen est meilleur chez les filles. En revanche, le taux de non-réponse reste supérieur chez les filles mais est plus étalé selon les calculs : il n'est pas aussi important sur les derniers calculs qu'il ne l'est lors des évaluations nationales, alors que seules les modalités de passation ont changé d'une évaluation à l'autre. Ce constat conduit ainsi à nous interroger sur les effets des conditions de passation sur les réponses produites par les élèves et pourraient ainsi rejoindre une des conclusions émises par Sayac (2023) sur l'anxiété générée chez des petites filles de 6-7 ans par de telles évaluations.

Nous avons également observé que les garçons utilisaient de manière plus visible leurs doigts pour compter (ce qui remet en cause la validité de la tâche dont l'objectif est d'évaluer si les élèves savent ou non calculer) et qu'ils avaient tendance à choisir une réponse plus rapidement que les filles ; aucun d'eux ne restant « bloqué » sur un calcul (à la différence des filles). Ces observations demandent des investigations supplémentaires pour mettre en relation la procédure utilisée, le discours de l'élève pour expliquer la façon dont il ou elle a choisi sa réponse et la qualité de la réponse fournie (juste ou fausse).

IV - UNE PROPOSITION DE FORMATION POUR COMBATTRE LES INÉGALITÉS DE GENRE

1 Formations à l'égalité

> *Que l'enseignant·e le veuille ou non, le genre, entendu comme un système de normes et de rôles de sexe hiérarchisés, est présent dans les situations scolaires. Il s'agit donc d'apprendre à en tenir compte pour construire l'égalité ou des formes d'égalité. (Anka Idrissi, Gallot et Pasquier dans Delcroix, 2019, p.3)*

Loségo et Durler (2023) se demandent comment responsabiliser les futur·es enseignant·es sans les culpabiliser ? C'est effectivement un point d'attention que nous retenons, de même que la nécessité de proposer une formation tournée vers l'expérience subjective des élèves et la gestion de leur anxiété comme le préconise Duru-Bellat (1995).

Ce qui nous semble également primordial de prendre en compte pour concevoir une formation à l'égalité, c'est d'amener les enseignant·es à prendre conscience que des disparités de genre sont à l'œuvre dans leur(s) classe(s). Comme Plateau (2011) nous visons à ce que les enseignant·es chaussent des lunettes de genre, c'est-à-dire :

> *Regarder autrement, en utilisant une grille de lecture intégrant la dimension de genre afin de repérer les multiples manifestations, parfois voilées, du sexisme dans le monde de l'école. Nous espérions susciter une vigilance à la dimension du genre et déclencher ainsi un processus de prise de conscience. (Plateau, 2011).*

Notre conception d'une formation à l'égalité en mathématiques s'inscrit donc dans une pédagogie de l'égalité telle que Collet (2016) la définit, c'est-à-dire « une pédagogie de conscientisation qui permet de de prendre conscience de la réalité socioculturelle qui modèle l'existence, et aussi de croire à sa capacité à changer cette réalité » (p. 115).

2 Protocole FÉM (formation à l'égalité en mathématiques)

Le protocole que nous avons conçu s'inspire des travaux ci-dessus et vise à engager les enseignant·es dans une démarche de conscientisation de leur enseignement des mathématiques, à la fois constructive et égalitaire du point de vue des apprentissages mathématiques de leurs élèves, filles et des garçons. Il se décline en trois temps :

Temps 1 : apports scientifiques sur les inégalités de genre, les stéréotypes de genre, les différents effets (pygmalion, golem), menace du stéréotype, etc.

Temps 2 : prise de conscience des inégalités de genre liées à l'enseignement des mathématiques à partir d'outils et/ou de dispositifs spécifiques élaborés dans le cadre des projets de recherche ou de recherches collaboratives.

Temps 3 : actions à mener au sein de sa classe, soit au niveau de sa pratique, soit au niveau des élèves à partir des résultats issus des dispositifs réalisés dans le temps 2 ou d'activités proposées sur différentes plateformes (Canopé, Eduscol, etc.) pour promouvoir l'égalité dans les classes (jeux de rôles, *role m*odels, débats, etc.).

Pour mesurer l'incidence de ce protocole sur les pratiques enseignantes et sur les élèves (performances, bien-être), il conviendra de déterminer des indicateurs (questionnaires pré/post formation, auto-expérience, retours élèves, etc.).

2.1 Protocole FÉM (temps 2) : les dispositifs

Pour le temps 2, trois dispositifs ont été testés dans le cadre d'une expérimentation menées au dernier trimestre de l'année scolaire 2023-2024. L'enjeu de ces dispositifs est d'étudier dans quelle mesure filles et garçons se comportent différemment du point de vue de leurs performances et de leur activité mathématique selon les situations proposées. Repérer des différences de comportement entre filles et garçons, c'est réaliser que des inégalités de genre sont à l'œuvre dans sa classe. C'est la première étape pour les combattre.

Dispositif 1

Pour observer le comportement et les performances des élèves (filles et garçons) lors de séances de résolution de problèmes (par exemple) et les éventuelles différences, ce 1er dispositif propose de tester deux modalités de composition de groupes mixtes/non mixtes.

Dans un premier temps, les enseignant·es proposent une séance de résolution de problèmes (ou autre) en groupes mixtes puis dans un 2ème temps, ils et elles proposent une autre séance de résolution de problèmes (ou autre de même type) en groupe non mixte. Le but, pour les professeur·es, est de comparer le comportement social et cognitif des filles et des garçons durant ces deux séances.

Parmi les éléments à observer, on pourra se concentrer (sans exclusive) sur :

- La prise de parole des filles et des garçons ;
- La prise d'initiative des filles et des garçons ;
- Les interactions entre élèves ;
- L'engagement des élèves dans l'activité ;
- Le comportement des élèves selon leur rôle ;
- Etc.

Dispositif 2

Pour observer l'incidence de l'habillage de la tâche sur le comportement et les performances des élèves (filles et garçons), les enseignant·es peuvent tester différents habillages pour une activité mathématique, avec des tâches équivalentes.

On pourra, par exemple, proposer de faire passer deux tests équivalents d'un point de vue mathématiques en modifiant un paramètre (ordre des questions, habillage de la tâche, temps limité ou non, etc.), puis comparer les performances des élèves (filles et garçons) à ces deux tests.

Parmi les habillages différents à proposer, on pourra choisir de proposer le premier test :

- sans pression évaluative, puis le deuxième avec pression évaluative ;
- sans imposer de durée, puis le deuxième avec une durée imposée avec instrument de mesure visible (chronomètre, horloge, timer) ;
- sans aucun commentaire particulier, puis le deuxième en indiquant qu'aucune différence entre les filles et les garçons n'a été observée lors du premier test ;
- en imposant une durée avec des tâches de difficulté croissante, puis le deuxième en imposant la même durée, mais avec des tâches de difficulté décroissante.

Dispositif 3

Pour observer des différences de confiance en soi des élèves selon leur genre, les enseignant·es peuvent se servir de l'outil « degrés de certitude », élaboré dans le cadre d'une étude (Sayac et Grapin, 2016). Cet outil comporte une échelle de 4 niveaux que les élèves doivent renseigner pour indiquer dans quelle mesure ils et elles sont assuré·es d'avoir réussi chaque exercice proposé. Cet outil peut être utilisé lors de séances d'exercices ou d'évaluation. En faisant la moyenne des niveaux renseignés et en les comparant suivant le genre des élèves, les enseignant·es peuvent aisément dégager des différences de confiance en soi entre les filles et les garçons.

2.2 Protocole FÉM : retours de l'expérimentation

Les trois dispositifs ont été testés par des professeur·es volontaires enseignant de la maternelle (MS) au lycée (Seconde). Au total, dix enseignant·es ont expérimenté dans leur(s) classe(s) un ou plusieurs des trois dispositifs (1 en MS, 1 en MS-GS, 1 en CP, 2 en CE1, 1 en CE2, 2 en CM1-CM2, 1 en Sixième, 1 en Seconde), dans des établissements des académies de Paris et de Normandie.

Les enseignant·es ont eu le choix de tester le(s) dispositif(s) qu'ils et qu'elles avaient envie de tester, selon la répartition suivante (Tableau 6[6]) :

	Dispositif 1 (groupes mixtes/non mixtes)	Dispositif 2 (habillage de la tâche)	Dispositif 3 (degrés de certitude)
PE1 (MS/GS)	X	X	X
PE2 (CE1)		X	
PE3 (CM1/CM2)	X	X	X
PE4 (CP)		X	
PE5 (CE1)	X		X
PE6 (CE2)	X		X
PE7 (CM1/CM2)			X
PE8 (MS)	X		X
PS1 (6ème)			X
PS2 (Seconde)		X	

Tableau 6 – Répartition des dispositifs testés selon les enseignant·es

Dans Sayac (soumis), nous rendons compte plus précisément de cette expérimentation, nous ne fournissons ici que les constats qui en résultent.

Les dispositifs ont été expérimentés sans difficulté de la maternelle au lycée avec, à la marge, des adaptations ne remettant pas en cause les objectifs visés. Leur mise en œuvre par les enseignant·es n'a pas été problématique.

Les enseignant·es ont eu le choix du ou des dispositifs à expérimenter dans leur classe, ce qui a permis une appropriation aisée et un engagement notable. Bien que tou·tes volontaires, les enseignant·es ont témoigné d'un réel intérêt pour cette expérimentation, ont fait preuve d'une grande créativité pour mettre en œuvre les dispositifs dans leur classe et ont même été force de propositions pour approfondir ou compléter les dispositifs.

Malgré les difficultés liées à l'observation des élèves ou à la récolte et au traitement des données, les dispositifs ont bien permis aux enseignant·es de réaliser qu'il se passait quelque chose dans leur classe du point de vue du genre lors de séances de mathématiques. Ils et elles ont permis d'attirer l'attention sur la question des inégalités de genre en mathématiques, avec pour conséquence l'envie de poursuivre l'expérimentation dès la rentrée prochaine.

V - CONCLUSION

Comme nous l'avons montré dans la deuxième partie de notre présentation, il est difficile d'expliquer de manière probante les écarts constatés entre les performances des filles et des garçons dans des tests standardisés en mathématiques. L'analyse didactique basée sur une analyse des tâches apporte des éléments de compréhension intéressants, mais il est nécessaire de la compléter avec des approches sociales et psycho-sociales prenant en compte des éléments comme l'anxiété des élèves, la confiance en soi ou encore le sentiment d'efficacité personnelle.

Par ailleurs, former les enseignant·es, mais aussi les formateurs et formatrices, à prendre conscience des inégalités de genre qui peuvent advenir dans les classes et qui se manifestent lors d'épisodes évaluatifs, les amener à « chausser des lunettes de genre » (Plateau, 2011), est une orientation nécessaire. Comme pour le protocole FÉM, ces formations peuvent s'appuyer sur des résultats similaires à ceux que nous

[6] PE : professeur·e des écoles – PS : professeur·e du secondaire

avons proposés dans la première et la deuxième partie afin de sensibiliser les enseignant·es à ces inégalités et à la façon dont elles se manifestent, puis mobiliser des outils issus de différentes approches (analyse des tâches, degré de certitudes, composition des groupes, type d'interactions, etc.) pour penser des dispositifs en classe. Enfin, c'est en menant des recherches portant conjointement sur les pratiques de l'enseignant·e (notamment ses pratiques évaluatives), l'activité en mathématiques de l'élève lors d'épisodes évaluatifs et leurs affects mathématiques que nous pourrons avoir une meilleure compréhension de la façon dont se construisent, s'intensifient ou se réduisent les inégalités de genre en mathématiques en classe. La thèse de Chloé Brismontier (en cours) se situe dans cette perspective et devrait permettre, à terme, d'envisager également d'autres leviers en termes de formation d'enseignant·es et de formateurs et formatrices.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Baudelot, C. et Establet, R. (2009). *L'élitisme républicain. L'école française à l'épreuve des comparaisons internationales.* Paris : Seuil.

Bonniol, J. J. (1981). Influence de l'explicitation des critères utilisés sur le fonctionnement des mécanismes d'évaluation d'une production scolaire. *Bulletin de psychologie*, *35*(353), 173-186.

Bulletin Officiel (2013) Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation. *Journal Officiel du 18 juillet 2013.*

Che, M., Wiegert, E. et Threlkeld, K. (2012). Problem solving strategies of girls and boys in single-sex mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 311-326.

Cvencek, D., Meltzoff, A. N. et Kapur, M. (2014). Cognitive consistency and math–gender stereotypes in Singaporean children. *Journal of experimental child psychology*, *117*, 73-91.

Collet, I. (2016). Former les enseignant-es à une pédagogie de l'égalité. *Le français aujourd'hui*, (193), 111-126.

Delcroix, C. (2019). Entretien avec Naima Anka Idrissi, Fanny Gallot et Gaël Pasquier à propos de leur ouvrage Enseigner l'égalité filles-garçons. *Genre Éducation Formation*, (3).

DEPP (2023). Evaluations 2023. Repères CP, CE1. Premiers résultats. *Série Études. Document de travail n°2023-E05.*

Duru-Bellat, M. (1990). *L'école des filles. Quelle formation, pour quels rôles sociaux ?* Paris : L'Harmattan.

Duru-Bellat, M. (1995). Filles et garçons à l'école, approches sociologiques et psycho-sociales. 2e partie : La construction scolaire des différences entre les sexes. *Revue française de pédagogie*, (110), 75-109.

Felouzis, G. (1996). Évaluation et efficacité pédagogique des enseignants du secondaire : le cas des mathématiques. *Revue française de sociologie*, 77-105.

Gilles, J.-L. (1996). Utilisation des degrés de certitude et normes de réalisme en situation d'examen et d'auto-estimation à FA.P.S.E. - ULG. *Communication présentée à ADMEE-EUROPE "Dix années de travaux de recherche en évaluation", Grenoble, France*. http://hdl.handle.net/20.500.12162/4809 (consulté le 24/10/2024)

Huguet, P. et Regner, I. (2007). Stereotype Threat Among School Girls in Quasi-Ordinary Classroom Circumstances. *Journal of educational psychology*, *99*(3), 545-560.

Jarlégan, A. (1999). La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire. Thèse de doctorat. Dijon : Université de Bourgogne.

Jarlégan, A. et Tazouti, Y. (2007). Jugements des enseignants et représentations liées aux différences de sexe et d'appartenance sociale des élèves. *Congrès international de l'AREF, du 28 au 31 aout 2007 à Strasbourg.*

Lafontaine, D. et Monseur, C. (2009). Les évaluations des performances en mathématiques sont-elles influencées par le sexe de l'élève ? *Mesure et évaluation en éducation*, *32*(2), 71–98.

Lafortune, L. et Fennema, E. (2003). Anxiété exprimée et stratégies utilisées en mathématiques : une comparaison entre les filles et les garçons. In L. Lafortune et C. Solar (Dirs), *Femmes et maths, sciences et technos* (p. 205-222). Québec : Presses de l'université du Québec.

Leclercq, D. (1982). Confidence marking : its use in testing. *Evaluation in Education, 6*(2), 163-287.

Meece, J. L., Glienke, B. B. et Burg, S. (2006). *Gender and Motivation. Journal of School Psychology*, *44*, 351-373.

MENJ (2021) L'égalité filles-garçons dans les programmes d'enseignement. https://eduscol.education.fr/document/12988/download (consulté le 24/10/2024)

MENJ (2022a). Repères CE1 2022. Guide pour le professeur.

MENJ (2022b). Repères CE1 2022. Cahier de l'élève.

MENJ (2023a). Égalité filles – garçons en mathématiques. *Rapport IGÉSR* coordonnée par X. Gauchard, *22-23 139A*. https://www.education.gouv.fr/media/133538/download (consulté le 24/10/2024)

MENJ (2023b). Place des mathématiques de l'école au lycée: https://www.education.gouv.fr/bo/23/Hebdo2/MENE2300946N.htm (consulté le 24/10/2024)

Mosconi, N. (1994). *Femmes et savoir. La société, l'école et la division sexuelle des savoirs.* Paris : L'Harmattan.

OCDE (2015). Comment expliquer l'inégalité entre les sexes dans l'éducation ? *PISA à la loupe*, 2015-3.

Plateau, N. (2011). Chaussons nos lunettes de genre, *Cahiers pédagogiques, 487, en ligne.* https://www.cahiers-pedagogiques.com/chaussons-nos-lunettes-de-genre/ (consulté le 24/10/2024)

Robert A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

Roditi, E. et Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats. *Éducation et formations, Évaluation des acquis : principes, méthodologie, résultats, 86-87* (11), 235-255.

Sayac, N. et Grapin, N. (2016). Stratégies et degrés de certitude des filles et des garçons en mathématiques. *Repères IREM*, *104*, 43-57.

Sayac N. et Grapin N. (2014). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degrés de certitude. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 169-199.

Sayac, N. (2019). Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 39(3),* 283-329.

Sayac, N. (2023). Comment expliquer les écarts de performance entre les filles et les garçons en mathématiques aux évaluations nationales de CP-CE1 ? *Evaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, 9(3), 32-51. https://doi.org/10.48782/e-jiref-9-3-32

Sayac N. (soumis). *Expérimentation d'un protocole de formation à l'égalité en mathématiques (FÉM), de la maternelle au lycée, Recherche* et Formation.

Spencer, S. J., Steele, C. M. et Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of experimental social psychology*, *35*(1), 4-28.

Steele, C. M. et Aronson, J. (1995). Stereotype threat and the intellectual test performance of African Americans. *Journal of personality and social psychology*, *69*(5), 797.

Terrier, C. (2014). Un coup de pouce pour les filles ? Les biais de genre dans les notes des enseignants et leur effet sur le progrès des élèves. *Notes de l'Institut des Politiques Publiques,* 14. https://www.ipp.eu/actualites/un-coup-de-pouce-pour-les-filles-les-biais-de-genre-dans-les-notes-des-enseignants-et-leur-effet-sur-le-progres-des-eleves/ (consulté le 24/10/2024)

Toczek, M. C. (2005). Réduire les différences de performances selon le genre lors des évaluations institutionnelles, est-ce possible ? Une première étude expérimentale... *L'orientation scolaire et professionnelle*, *34*(4), 439-460.

ANNEXE 1 – RÉSULTATS COMPLEMENTAIRES DE LA SECONDE ETUDE

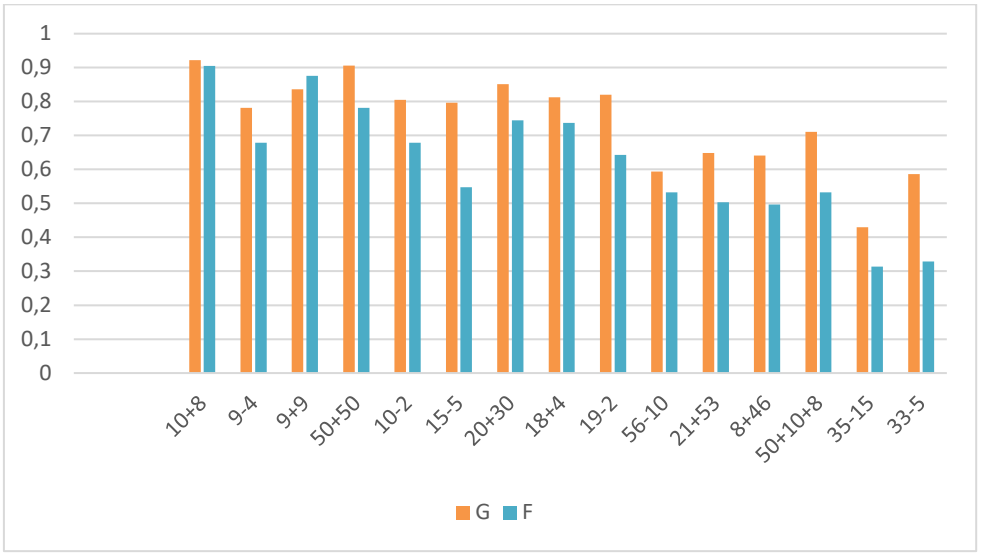


Figure 2 - Score de réussite par calcul selon le sexe

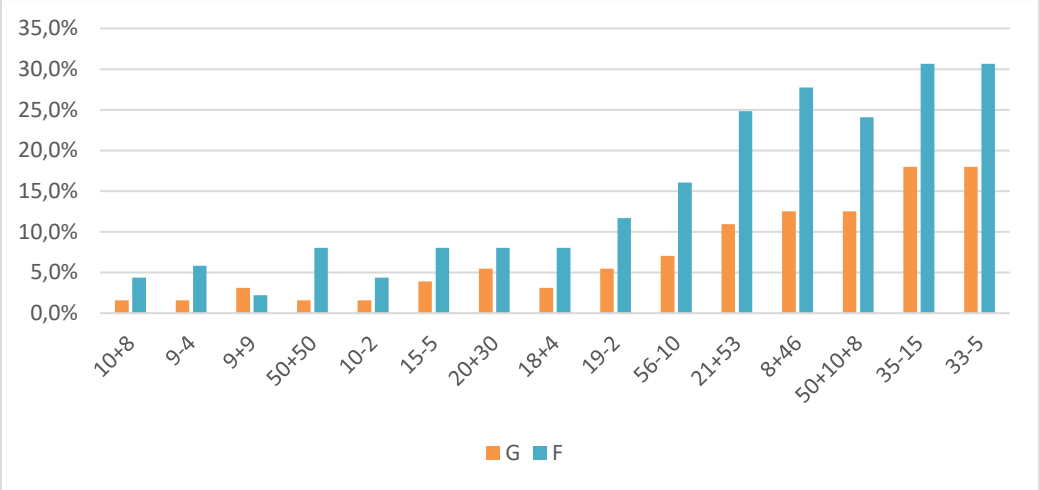


Figure 3 – Pourcentage de non-réponse par calcul

LA FRANCE FACE À LA DIVERSITÉ DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : PROGRAMMES SCOLAIRES, PRATIQUES ENSEIGNANTES ET EFFETS SUR LES APPRENTISSAGES

Éric RODITI
Professeur, Université Paris Cité
Laboratoire EDA (URP 4071)
eric.roditi@u-paris.fr

Résumé
La faiblesse des scores des élèves aux évaluations internationales en mathématiques est dorénavant considérée comme un témoin des difficultés que rencontre le système éducatif. Les réformes se succèdent au nom d'un effort pour gagner en efficacité. Celle des programmes scolaires pour l'école primaire a été lancée, ainsi qu'une autre de la formation des enseignants… En juin 2024, alors que le ministère de l'Éducation nationale a annoncé ces réformes, nous nous interrogeons sur les leçons que la France pourrait tirer de l'analyse de la diversité de l'enseignement des mathématiques, à l'international comme sur son propre territoire.
Examinons donc les performances mathématiques des élèves, à l'évaluation internationale TIMSS-4 (CM1) et sur le cas des fractions par exemple, en fonction des programmes scolaires des différents pays et de la formation des enseignants qui ont à mettre en œuvre ces programmes. Réfléchissons à la diversité des exercices d'évaluation : celle des enquêtes internationales, et celle proposée par les auteurs des manuels diffusés en France – seront-ils bientôt soumis à une labellisation ? Et s'il fallait s'appuyer sur « la recherche » pour préconiser des formes d'enseignement ou d'évaluation, quels résultats faudrait-il retenir parmi la diversité de ceux qu'elle produit ?

Cette conférence s'appuie principalement sur deux recherches consacrées aux résultats de la France à l'évaluation TIMSS-4 (*Trends in International Mathematics and Science Study*, *grade 4*) en mathématiques au niveau CM1 (*grade 4*). Cette évaluation est conduite par l'IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) qui est une association internationale scientifique indépendante à but non lucratif, et qui pilote, depuis plus de 60 ans (1958), des évaluations internationales sur les acquis des élèves. Les concepteurs des questionnaires d'évaluation recueillent des informations sur les programmes scolaires des pays participants ; TIMSS porte ainsi sur les acquis des élèves, sur la mise en œuvre des programmes scolaires et sur les contextes de scolarisation.

La première recherche dont il est question concerne seulement le cas des fractions ; elle compare différents pays ou provinces quant aux performances de leurs élèves sur cette notion à l'évaluation de 2015. Ces performances sont mises en regard avec l'organisation de l'enseignement des fractions ainsi qu'avec d'autres indicateurs de contexte publiés par l'enquête TIMSS. La seconde recherche concerne l'ensemble des mathématiques évaluées en 2019 et se limite au cas de la France. Son objectif est d'identifier les différences éventuelles entre les questions d'évaluation proposées par TIMSS, et celles auxquelles les élèves français sont familiarisés, cette familiarité étant évaluée à l'aune des questions évaluatives proposées dans les manuels scolaires.

À l'issue de la présentation de ces deux recherches, nous nous interrogeons sur les perspectives offertes à la France pour améliorer les acquis des élèves qu'elle scolarise.

I - TIMSS-4 : LA FRANCE ET DIX AUTRES PAYS FACE AUX FRACTIONS

La recherche comparative effectuée sur l'apprentissage des fractions a fait l'objet de la thèse de doctorat de Martinez (2018) et a donné lieu à la publication d'un article scientifique (Martinez & Roditi, 2017). Le choix des pays répond à deux contraintes : l'accessibilité des instructions officielles et la comparabilité relativement à des critères économiques. La France et dix autres pays ou provinces ont ainsi été retenus, des pays « développés » au sens de l'OCDE : Angleterre, Corée du Sud, Floride, Hong Kong SAR, Irlande du Nord, Ontario, Québec, République d'Irlande, Singapour, Taipei chinois. Le thème des fractions a été choisi car il est bien couvert dans le questionnaire TIMSS (14 questions évaluatives élémentaires ou items) et il est bien documenté en didactique des mathématiques.

L'analyse didactique des résultats requiert en effet d'autres indicateurs que ceux retenus par l'IEA qui distingue seulement les items selon le domaine de contenu sur lequel ils portent (nombres, géométrie et mesure, données) et la fonction cognitive à mobiliser pour y répondre (connaître, appliquer, raisonner). L'IEA ne distingue pas les compétences d'un même domaine c'est-à-dire, pour le domaine numérique par exemple, s'il s'agit de reconnaître un nombre (en l'associant à une quantité par exemple), comparer deux nombres ou ordonner une liste de nombres, calculer avec des nombres (mentalement, en ligne ou en posant l'opération), associer différentes écritures d'un même nombre ($\frac{1}{4}$ et 25 % par exemple), etc. L'IEA ne distingue pas non plus les questions en fonction de la complexité de l'énoncé ou de la difficulté de la tâche (*a priori*). Autant d'éléments d'information qui apparaissent utiles aux didacticiens, aux formateurs et aux enseignants pour comprendre la variabilité des réussites des élèves aux questions posées.

1 Les compétences relatives aux fractions évaluées par TIMSS-4 2015

Différentes typologies des conceptions relatives aux fractions émergent des nombreux travaux conduits en didactique des mathématiques ; elles restent toutefois assez convergentes. Celle de Behr et al. (1983) fait généralement référence ; elle distingue cinq conceptions. Ces conceptions sont sous-jacentes aux tâches à effectuer pour répondre au questionnaire du TIMSS-4.

1.1 Rappel des différentes conceptions des fractions

La première conception est la fraction « partie-tout » ou « partition » qui quantifie la relation entre un tout (une unité ou, respectivement, une collection d'unités) et le nombre de parties égales qui le composent. Cette conception est mobilisée quand on indique qu'un quart de la tarte a été mangé ou que les quatre cinquièmes des croissants ont été vendus. La deuxième conception est la fraction « rapport », elle met en relation la mesure de deux parties, sans référence à celle du tout. C'est le cas lorsqu'on dénombre trois femmes pour deux hommes dans une équipe pédagogique, ou deux chats pour un chien parmi les animaux domestiques en France. La troisième conception est la fraction « opérateur » ; elle ne représente pas une quantité mais indique une transformation : 3/5 est ainsi la fraction par laquelle le prix est multiplié lorsqu'une remise est de 40 % est consentie. La quatrième conception est la fraction « quotient », elle correspond seulement au nombre que représente la fraction, indépendamment du lien entre le numérateur et le dénominateur. C'est le cas de la fraction 3/100 quand elle représente seulement le nombre dont l'écriture décimale est 0,03. Enfin, la cinquième conception est la fraction « mesure » qui exprime la mesure d'une grandeur, une unité étant fixée. La fraction 5/4 indique ainsi la longueur du segment [AB] lorsque ce segment coïncide avec cinq reports d'un quart de l'unité.

1.2 Conceptions des fractions et tâches à réaliser pour répondre aux items TIMSS

Ces différentes conceptions ne s'acquièrent pas aussi facilement les unes que les autres ; la difficulté d'un item dépend donc de la conception sous-jacente, mais aussi de la tâche à effectuer : reconnaître une fraction, calculer avec des fractions, modéliser une situation de comparaison avec des fractions, etc. Le tableau 1 présente une description sommaire des items relatifs aux fractions du questionnaire TIMSS-4 de 2015.

Conception	Tâche	Effectif
Partie-tout	Associer une fraction et un dessin	7
Partie-tout	Comparer des fractions	1
Partie-tout	Trouver une fraction équivalente	1
Partie-tout	Additionner deux fractions	1
Partie-tout	Trouver le complément à l'unité	1
Partition	Associer une fraction et un dessin	2
Quotient	Convertir un décimal en fraction	1

Tableau 1. Répartition des items relatifs aux fractions dans le questionnaire TIMSS-4 2015

Ce tableau révèle que pour 11 des 14 items, la conception sous-jacente est « partie-tout » ; la conception est la fraction « partition » pour 2 items et la conception « quotient » pour 1 item. La prédominance de la conception « partie-tout » apparaît cohérente avec les programmes scolaires des onze pays : les élèves soumis à l'évaluation sont nombreux à seulement débuter leur apprentissage des fractions, et c'est avec la conception « partie-tout » que l'enseignement introduit généralement le concept de fraction. Le même argument explique la répartition des tâches proposées aux élèves dans le questionnaire d'évaluation : associer une fraction et un dessin correspond en effet à 9 items sur les 14. Les 5 autres items reposent sur 5 tâches différentes (évaluées donc une seule fois chacune) : comparer des fractions, trouver une fraction équivalente à une fraction donnée, additionner deux fractions, trouver le complément à l'unité d'une fraction et convertir un décimal en fraction.

Examinons les performances des différents pays à ces items relativement à leur programme scolaire.

2 Relation entre programmes scolaires et performances à l'évaluation TIMSS-4 2015

Malgré la prépondérance de la conception la plus facile à acquérir et du type de tâches très classique qui consiste à associer une fraction et un dessin, on constate une grande variabilité des performances des élèves selon leur pays ou province d'origine. Des explications qui tiennent à l'enseignement des fractions ont été recherchées pour expliquer de telles différences ; une étude des programmes scolaires de ces pays a été menée à cet effet. La première question qui s'est posée est celle de la précocité de l'enseignement des fractions, la seconde est celle de la richesse de cet enseignement.

2.1 Précocité de l'enseignement et performance à l'évaluation TIMSS

Nous avons, pour chaque pays, repéré l'année scolaire à laquelle débute l'enseignement des fractions, et nous avons rapproché cette information de la réussite moyenne des élèves des différents pays.

Les résultats sont synthétisés dans le tableau 2 où figure, pour chaque pays (première colonne), le score moyen de réussite aux 14 items portant sur les fractions (deuxième colonne) et l'année de l'enseignement élémentaire où débute l'enseignement des fractions (troisième colonne).

Pays ou province	Score moyen	Début de l'enseignement (année)
Angleterre	55 %	2
Corée du Sud	73 %	2
Floride	69 %	3
France	37 %	4
Hong Kong SAR	83 %	3
Irlande du Nord	65 %	2
Ontario	45 %	2
Québec	57 %	1
République d'Irlande	65 %	3
Singapour	83 %	2
Taipei chinois	72 %	2

Tableau 2. Score moyen aux items portant sur les fractions et précocité de l'enseignement

L'examen de ce tableau laisse apparaître une corrélation faible entre la précocité de l'enseignement des fractions et le score moyen aux items portant sur cette notion. Le Québec qui commence le plus tôt, dès la première année, n'a pas une très bonne performance (57 %). Les deux provinces qui réussissent le mieux (score de 83 %) font débuter l'enseignement des fractions à deux années différentes, la 2e pour Singapour et la 3e pour Hong Kong SAR. On peut remarquer toutefois que le pays qui commence le plus tard est la France (4e année) et que c'est le pays qui obtient le score le plus faible des onze pays étudiés (37 %). Ces résultats laissent à penser qu'un début trop tardif est de nature à nuire à l'obtention de bons résultats et que la richesse et l'intensité de l'enseignement sur les fractions jouent également un rôle dans l'acquisition de ce concept par les élèves, comme nous allons le voir dans la section suivante.

2.2 Richesse de l'enseignement et performance à l'évaluation TIMSS

En ce qui concerne la richesse de l'enseignement (l'intensité est difficile à percevoir à travers la lecture des programmes scolaires seulement), nous avons examiné la présence ou non des compétences évaluées dans TIMSS dans les programmes scolaires des pays étudiés. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau 3.

Pays ou province	Score moyen	Associer fraction dessin	Comparer des fractions	Trouver fraction équival.	Ajouter deux fractions	Trouver le compl. à l'unité	Convertir un décimal en fraction
Angleterre	55 %	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Oui
Corée du Sud	73 %	Oui	Oui	Non	Non	Non	Oui
Floride	69 %	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Oui
France	37 %	Oui	Non	Non	Non	Non	Oui
Hong Kong SAR	83 %	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
Irlande du Nord	65 %	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Oui
Ontario	45 %	Oui	Oui	Non	Non	Non	Oui
Québec	57 %	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Oui
République d'Irlande	65 %	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Oui
Singapour	83 %	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Oui
Taipei chinois	72 %	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Oui

Tableau 3. Score moyen aux items portant sur les fractions et compétences enseignées

Le tableau 3 révèle une certaine variabilité de l'adéquation entre le programme d'enseignement et les compétences évaluées par l'IEA. Pour Hong Kong SAR, l'Irlande du Nord et Singapour, l'adéquation est forte, et les performances moyennes le sont aussi pour deux de ces trois pays ou provinces. L'adéquation la plus faible est constatée pour la France, c'est aussi ce pays qui obtient le score le plus bas parmi les onze étudiés ici. Entre ces deux extrêmes, la relation entre l'adéquation des programmes scolaires au questionnaire TIMSS et la performance des élèves n'apparaît pas très nettement : l'information apportée par la présence d'une compétence évaluée ou son absence parmi celles qui figurent au programme n'est manifestement pas suffisante pour apprécier, même sommairement, l'enseignement dispensé et son lien avec les apprentissages qui en découlent.

Attardons-nous toutefois sur le cas de la comparaison des fractions. Les programmes scolaires distinguent souvent « comparer deux fractions » (indiquer laquelle des deux est la plus grande) et « ordonner des fractions », la seconde tâche apparaissant plus exigeante que la première. Cela nous a incité à mettre en lien d'une part la présence (ou l'absence) de ces deux compétences dans les programmes scolaires des pays étudiés, et d'autre part le score relatif à l'item de comparaison de fractions proposé dans TIMSS. Le score relatif d'un pays indique de quel pourcentage d'écart-type son score à l'item de comparaison se

différencie de son score moyen sur les fractions[1]. Les résultats figurent dans le tableau 4 dont l'examen montre que, à l'exception de l'Ontario et du Québec, les pays ou provinces dans lesquels sont enseignés à la fois « comparer » et « ordonner » des fractions ont un score relatif positif (il est en moyenne de +53 %), alors que dans ceux où seule la comparaison est enseignée, les scores relatifs sont plus disparates (leur moyenne est de 0 %). Le seul pays où aucune des deux compétences n'est au programme est la France dont le score relatif très négatif.

Pays ou province	Score relatif	Comparer deux fractions	Ordonner des fractions
Angleterre	79 %	Oui	Oui
Corée du Sud	− 35 %	Oui	Non
Floride	80 %	Oui	Oui
France	− 87 %	Non	Non
Hong Kong SAR	68 %	Oui	Non
Irlande du Nord	94 %	Oui	Oui
Ontario	− 31 %	Oui	Oui
Québec	− 14 %	Oui	Oui
République d'Irlande	136 %	Oui	Oui
Singapour	24 %	Oui	Oui
Taipei chinois	− 34 %	Oui	Non

Tableau 4. Score à l'item de comparaison des fractions et compétences enseignées

L'apprentissage de la comparaison des fractions apparaît donc, en tendance, favorisé lorsque les programmes scolaires sont exigeants et prescrivent non seulement de comparer des fractions mais aussi de les ordonner. La variabilité des résultats résulte sans doute de l'effectivité de la mise en œuvre des programmes.

2.3 Effectivité de l'enseignement et performance à l'évaluation TIMSS

La mise en œuvre effective de l'enseignement prescrit n'est pas directement étudiée par l'IEA. Toutefois, à propos de la conversion d'un décimal en fraction qui est une compétence au programme dans tous les pays (voir tableau 3 ci-dessus), l'enquête TIMSS révèle deux résultats. Le premier est que les scores des pays à l'item qui évalue cette compétence sont très variables. Le second est que les pays ayant les scores relatifs les plus faibles (− 54 % pour la France et − 99 % pour l'Ontario) sont ceux pour lesquels les professeurs indiquent le plus fréquemment que la notion de nombre décimal ne sera étudiée qu'après l'année de passation du test (36 % pour la France et 51 % pour l'Ontario). L'adhésion des enseignants aux programmes scolaires apparaît donc comme un facteur important sur l'apprentissage et les scores des élèves.

L'étude des résultats de TIMSS-4, croisée avec celle des curriculums sur les fractions, montre que la performance des élèves est d'autant plus forte que les programmes sont en adéquation avec ce qui est évalué, et qu'une compétence est d'autant mieux assimilée qu'elle a été enseignée de façon effective, pendant un temps assez long et avec un niveau d'exigence assez élevé. Il ressort de cette étude que la performance des élèves dépend aussi du fait que les programmes scolaires emportent l'adhésion des enseignants. La généralisation de ces résultats à d'autres contenus mathématiques et à d'autres niveaux scolaires exige de nouvelles recherches, notamment sur la nature des questions évaluatives effectivement travaillées dans les classes lors des évaluations internes, mais aussi, bien sûr, sur la durée de l'enseignement comme celle du travail personnel des élèves, la formation des enseignants et les moyens

[1] Le score moyen de l'Angleterre aux items portant sur les fractions est de 55,21 % avec un écart-type de 18,16 points de pourcentage. Son score à l'item de comparaison est de 69,50 %. La performance relative de l'Angleterre à l'item de comparaison a donc été calculée ainsi : (69,50 – 55,21) / 18,16 = 0,787 ≈ 79 %.

dont ils disposent pour prévenir la difficulté scolaire et lutter contre elle. Sur ces tout derniers point, les enquêtes sociologiques menées récemment en France décrivent des professeurs des écoles particulièrement en souffrance du fait du décalage entre les objectifs assignés par l'institution scolaire et les ressources dont ils disposent pour atteindre ces objectifs (Mierzejewski et al., 2023). Sur la question de la familiarité des élèves scolarisés en France avec les questions évaluatives proposées dans TIMSS-4, une recherche a été effectuée dont nous rapportons la teneur dans la suite de ce texte.

II - TIMSS-4 : LA FRANCE ET LA FAMILIARITÉ DE SES ÉLÈVES AVEC LES QUESTIONS ÉVALUATIVES PROPOSÉES PAR L'IEA

Une recherche a donc été menée pour mettre en parallèle les questions évaluatives de l'évaluation TIMSS-4 et celles auxquelles sont soumis les élèves scolarisés en France. Cette recherche a été effectuée dans le cadre d'un stage effectué au Cnesco (Centre national d'étude des systèmes scolaires) et a fait l'objet d'une publication dans la revue Grand N (Fanjat & Roditi, 2024). L'impossibilité matérielle d'accéder réellement, et à grande échelle, aux questions d'évaluation posées aux élèves durant leur année de CM1, nous a conduits à analyser plutôt celles qui figurent dans les manuels scolaires de ce niveau scolaire – les manuels comportent en effet des pages dédiées à l'évaluation des notions étudiées.

S'il apparaît peu vraisemblable que les enseignants choisissent directement leurs outils d'évaluation dans le manuel qu'ils utilisent, il semble toutefois raisonnable de penser que les questions d'évaluation proposées par les manuels sont assez représentatives des outils des enseignants : d'une part les auteurs ne sont pas déconnectés du terrain, et d'autre part l'enquête « PRAESCO Mathématiques CM2 » concernant les pratiques d'enseignement des mathématiques en CM2 montre que presque tous les enseignants (98 %) déclarent se référer « souvent » ou « très souvent » à un manuel scolaire au moins pour préparer leurs enseignements de mathématiques (comprenant entre autres la préparation d'exercices à donner en évaluation) et qu'une majorité d'entre eux (53 %) se limite au seul manuel utilisé en classe (Allard et al., 2023).

D'un point de vue méthodologique, la comparaison à effectuer a nécessité de caractériser les questions évaluatives afin de les catégoriser, puis de construire des outils quantitatifs adaptés à la mise en regard des fréquences des différentes catégories de questions, d'une part dans l'évaluation TIMSS, et d'autre part dans les manuels scolaires diffusés en France.

1 Caractérisation des questions évaluatives

Caractériser des questions évaluatives demande de distinguer des critères qui ont trait aux connaissances mathématiques évaluées, et d'autres qui portent sur les formats d'évaluation : l'activité de l'élève qui répond à ces questions dépend en effet de ces deux facteurs.

1.1 Critères relatifs aux connaissances mathématiques évaluées

Concernant les connaissances mathématiques évaluées, nous avons commencé par reprendre la classification de l'IEA. Nous avons conservé ses choix quant au *domaine de contenu* en distinguant trois domaines : *nombres*, *géométrie et mesure*, *données*. Nous avons également repris tel quel le *domaine cognitif* pour lequel sont différenciées les modalités *connaître*, *appliquer* et *raisonner*. Pour le domaine de contenu nombres, la modalité connaître correspond par exemple à l'appel d'un fait numérique (36 : 9 = ?), la modalité appliquer à la mise en œuvre directe d'une connaissance (Un carton comporte 12 paquets de 8 stylos. Combien y a-t-il de stylos dans le carton ?), la modalité raisonner correspond au traitement d'une situation peu familière (Un professeur souhaite répartir 30 élèves de telle manière que

chaque groupe ait le même nombre d'élèves, et que chaque groupe ait un nombre impair d'élèves. Trouve une façon permettant au professeur de faire ses groupes[2]).

Nous nous sommes ensuite référés à la littérature didactique ; elle conduit à distinguer différentes activités mathématiques engendrées par les tâches à effectuer. Nous avons repéré les questions nécessitant ou non d'effectuer une *conversion de registre* (Duval, 1995) c'est-à-dire de transformer la représentation sémiotique d'un objet ; par exemple de passer de 1/5 à 0,2. Nous avons pris en compte le caractère *contextualisé* ou *décontextualisé* de la tâche à réaliser, la contextualisation pouvant apporter une aide, comme le montre Roditi (2007) pour la comparaison de deux décimaux, mais pouvant aussi impliquer une charge cognitive supplémentaire, comme l'expliquent Theis et Gagnon (2010). Nous avons également distingué les questions évaluatives suivant les différents *niveaux de mise en fonctionnement des connaissances* requis ; nous avons pour cela repris la catégorisation de Roditi et Salles (2015) utilisée pour analyser les résultats des élèves à l'évaluation de 2012 du PISA (Programme international de suivi des acquis des élèves). Les auteurs distinguent quatre modalités : *concept*, *direct*, *adaptation* et *intermédiaire*. Prenons un exemple du domaine « géométrie et mesure » pour illustrer ces modalités. Chacune des quatre questions suivantes évalue la connaissance de la notion de périmètre, mais avec un niveau différent de mise en fonctionnement de cette connaissance.

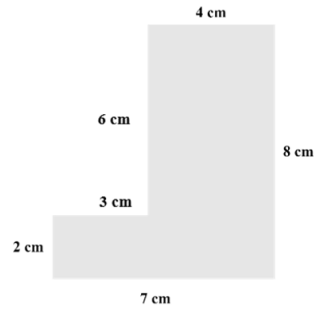
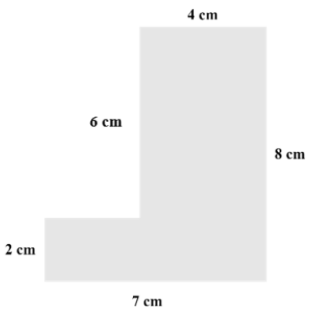
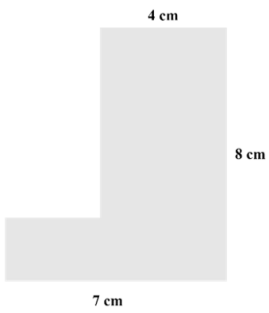
Concept	Direct	Adaptation	Intermédiaire
Colorie ce que mesure le périmètre de la figure gisée.	Calcule le périmètre de cette figure. 	Calcule le périmètre de cette figure. 	Calcule le périmètre de cette figure. 

Tableau 5. Quatre niveaux de mise en fonctionnement de la connaissance « périmètre »

Dans la première question l'élève doit colorier le tour de la figure (et pas sa surface) et faire preuve ainsi de sa connaissance factuelle du concept. Dans la deuxième, il doit ajouter les longueurs des côtés du polygone, il s'agit donc d'une application directe de la connaissance du concept dans une situation particulière. Dans la troisième, il doit adapter sa connaissance : ne pas juger le calcul impossible à cause de l'information manquante (les 3 cm du côté horizontal) mais effectuer un raisonnement pour calculer cette valeur. Pour répondre à la quatrième question, il lui faudra introduire un intermédiaire : la somme des deux côtés verticaux dont les longueurs ne sont pas indiquées ; il n'est pas possible en effet de connaître la longueur de chacun de ces deux côtés, mais il est possible de connaître leur somme (8 cm), ce qui suffit pour calculer le périmètre de la figure.

1.2 Critères relatifs aux formats d'évaluation : questions et réponses attendues

En référence à une littérature qui n'est pas seulement didactique, nous avons également pris en compte des critères qui ont trait aux formats d'évaluation qui influencent l'activité de l'élève et donc sa potentielle réussite : le *nombre de modes d'information* de l'énoncé, la *longueur* de l'énoncé textuel et le *format attendu de réponse*. Nous avons distingué les énoncés qui comportent un seul mode d'information

[2] Cette question est un item en libre accès de l'évaluation TIMSS-4 2019 (tous les items ne le sont pas car ils sont nombreux à être réutilisés d'une évaluation à l'autre).

(textuel, iconique, etc.) de ceux qui en comportent plusieurs (à la fois un texte et un dessin par exemple) car, comme l'explique Tricot (1998), il y a une charge cognitive supplémentaire quand les élèves ont deux modes d'information à articuler. L'analyse des résultats des évaluations internationales TIMSS et PISA relève que la longueur de l'énoncé est un facteur à ne pas négliger s'il s'agit d'apprécier la charge cognitive ; la Direction générale de l'enseignement scolaire (Dgesco) indique à ce sujet, dans sa publication de 2022 sur la résolution de problème au cours moyen, que les élèves doivent être davantage confrontés à des énoncés longs. Cela nous a conduit à distinguer les énoncés suivant que l'énoncé ne comporte *aucune information textuelle*, qu'il comporte un texte de *20 mots maximum* (énoncé court) ou de *plus de 20 mots* (énoncé long). Nous avons enfin pris en compte le format de réponse, en référence aux travaux de Bodin et al. (2016) qui mettent en relief des différences quant aux attendus suivant les cultures scolaires : les élèves du système français devant produire des réponses plutôt développées alors que dans d'autres pays, les formats sont plus limités. Nous distinguons ainsi quatre modalités pour caractériser ce format attendu : *construction* lorsque la réponse à la question nécessite que l'élève trace une figure géométrique ou complète un graphique, etc. ; *question à choix multiple* (QCM) lorsque l'élève doit choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s) parmi un ensemble de propositions ; *question ouverte à réponse courte* lorsque l'élève peut répondre en une phrase ou en quelques mots ; *question ouverte à réponse rédigée* lorsque l'élève doit écrire un texte pour répondre à la question posée. Notons dès à présent que cette dernière modalité n'est présente dans aucun des items analysés du questionnaire TIMSS-4 2019.

Chaque question évaluative, qu'elle soit issue du questionnaire TIMSS-4 2019 ou des manuels scolaires analysés, se retrouve ainsi caractérisée par huit modalités (une par critère étudié). Nous avons finalement codé 96 items du questionnaire TIMSS- 2019[3] et 2 842 questions évaluatives issues des manuels scolaires de CM1 retenus pour l'étude. Pour choisir ces manuels, nous les avons classés par ordre décroissant de leur diffusion[4], puis nous avons retenu les collections permettant de couvrir au moins la moitié des manuels vendus en France ; quatre collections ont suffi pour atteindre cet objectif. Ce sont les données récupérées par le codage de toutes ces questions évaluatives, selon ces 8 critères et leurs modalités associées (au total 22 modalités), qui nous ont permis de comparer les questions d'évaluation proposées dans les manuels scolaires et celles présentes dans le questionnaire TIMSS-4 2019. Indiquons comment a été effectuée cette comparaison.

2 Deux indicateurs de la familiarité des élèves avec l'évaluation TIMSS

Le codage des questions évaluatives issues de TIMSS-4 2019 et des manuels scolaires a permis de construire deux indicateurs de familiarité avec l'évaluation TIMSS-4 2019 pour les élèves scolarisés en France en CM1.

2.1 Familiarité avec une modalité évaluative et score de réussite

Le premier indicateur concerne les modalités évaluatives – et pas les questions évaluatives. Pour chaque modalité évaluative et chaque manuel, nous avons calculé la fréquence de cette modalité dans ce manuel en rapportant le nombre de questions évaluatives du manuel relevant de cette modalité au nombre total de questions évaluatives du manuel. Nous avons calculé, de manière analogue, la fréquence de chaque modalité dans le questionnaire TIMSS. Nous avons alors mis ces fréquences en rapport : pour chaque modalité et chaque manuel, nous avons calculé le quotient de la fréquence de la modalité dans le manuel par la fréquence de cette modalité dans le questionnaire TIMSS. Si le quotient obtenu est inférieur

[3] Pour des raisons de confidentialité, nous n'avons pas eu accès à l'ensemble des items, mais seulement à la moitié d'entre eux (96 sur les 200 que contient le questionnaire). Nous n'avons toutefois *a priori* aucune raison de penser que ceux auxquels nous avons eu accès soient significativement différents des autres.

[4] Ces données sont confidentielles ; aussi, nous ne citerons pas les manuels scolaires étudiés.

(supérieur) à 1, c'est que la modalité évaluative est moins (davantage) présente dans le manuel qu'elle ne l'est dans le questionnaire TIMSS. Afin de passer des quatre manuels à l'ensemble des manuels, nous avons calculé la moyenne des valeurs obtenues, en les pondérant par les chiffres de vente. C'est grâce à cette pondération que nous considérons cette moyenne, pour les élèves scolarisés en France en CM1, comme un indicateur de leur familiarité avec la modalité évaluative considérée. La familiarité sera d'autant plus forte que la valeur de l'indicateur est élevée. Pour interpréter la valeur 0,5 (respectivement 2), nous dirons que les élèves rencontrent deux fois moins (respectivement deux fois plus) cette modalité évaluative dans leur scolarité de CM1 qu'elle n'est présente dans le questionnaire TIMSS.

La mise en regard de ces indicateurs de familiarité avec les scores de réussite de la France par rapport à ceux de l'ensemble des pays participants de l'OCDE (tableau 6) est instructive.

Critère	Modalité évaluative	Familiarité avec la modalité évaluative	Écart de score de la France avec l'OCDE
Domaine de contenu	Nombres	1,32	− 10,0 pp
	Géométrie et mesure	0,83	− 7,1 pp
	Données	0,18	− 14,2 pp
Domaine cognitif	Connaître	1,41	− 6,3 pp
	Appliquer	0,73	− 12,9 pp
	Raisonner	0,39	− 13,8 pp
Conversion de registre	Oui	0,92	− 11,1 pp
	Non	1,04	− 8,8 pp
Contextualisation	Oui	0,41	− 11,7 pp
	Non	1,59	− 7,5 pp
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Concept	0,85	− 10,3 pp
	Direct	1,07	− 8,1 pp
	Adaptation	1,98	− 12,0 pp
	Intermédiaire	0,54	− 11,9 pp

Tableau 6. Familiarité avec les modalités évaluatives et lien avec les scores

Commençons l'analyse de ce tableau par la ligne consacrée aux domaines de contenu. On constate une forte familiarité des élèves scolarisés en France avec le contenu *nombres* (1,32), mais aussi une très faible familiarité avec le contenu *données* (0,18) pour lequel les élèves obtiennent, en France, le score le plus faible comparativement aux pays de l'OCDE (− 14,2 points de pourcentage de différence). Toutefois, la familiarité avec le domaine de contenu *géométrie et mesure* est intermédiaire, et c'est le domaine de contenu parmi les trois où les élèves sous-performent le moins. Le lien entre familiarité et score n'est ici pas très clair, il l'est davantage en ce qui concerne la contextualisation : la familiarité des élèves scolarisés en France est plus faible avec les questions contextualisées que décontextualisées ; c'est également pour ces questions contextualisées que la sous-performance par rapport à l'OCDE est la plus forte (− 11,1 pp *vs* − 7,5 pp). Pour les modalités qui témoignent du coût cognitif (domaine cognitif, conversion de registre et niveau de mise en fonctionnement des connaissances), nous constatons que les élèves scolarisés en France sont surexposés à la modalité la plus accessible cognitivement et sous-exposés à la modalité la plus exigeante cognitivement (sauf pour le niveau adaptation). Parallèlement, la sous-performance de la France par rapport à l'OCDE est aussi (globalement) d'autant plus forte que le coût cognitif est élevé. Une relation entre familiarité et performance apparaît donc, mais qui requiert une analyse complémentaire ; nous y avons travaillé et nous indiquons nos résultats dans la section suivante.

Avant cela, présentons (tableau 7) les résultats concernant les modalités évaluatives liées aux formats d'évaluation, de l'énoncé comme de la réponse attendue.

Critère	Modalité évaluative	Familiarité avec la modalité évaluative	Écart de score de la France avec l'OCDE
Nombre de modes d'information de l'énoncé	Un mode	1,86	− 11,0 pp
	Plusieurs modes	0,49	− 7,7 pp

Longueur du texte de l'énoncé	Pas d'énoncé textuel	0,06	− 8,5 pp
	Entre 1 et 20 mots	1,81	− 7,9 pp
	Plus de 20 mots	0,25	− 11,8 pp
Format attendu de réponse	QCM	0,61	− 7,8 pp
	Construction	0,81	− 12,5 pp
	Réponse courte	1,71	− 11,8 pp

Tableau 7. Familiarité avec les formats évaluatifs et lien avec les scores

L'analyse du tableau 7 fait apparaître, comme précédemment, que les élèves scolarisés en France ne sont pas familiarisés de manière uniforme avec toutes les modalités évaluatives, et que la familiarité est souvent plus forte quand les formats sont moins exigeants (un seul mode d'information, énoncé court, réponse textuelle courte). Le lien entre familiarité et score n'est pas toujours bien clair : il l'est nettement en ce qui concerne la longueur du texte de l'énoncé, mais il est plus confus quant au nombre de modes d'information de l'énoncé ou pour le format de réponse attendu.

Ces résultats renforcent l'intérêt déjà constaté pour une analyse spécifique de la relation entre familiarité et score, elle nécessite de s'appuyer sur un indicateur de la familiarité avec les questions évaluatives (et non plus avec les modalités évaluatives) car les scores correspondent à des items et non à des modalités évaluatives isolées.

2.2 Familiarité avec un item TIMSS et effet sur le score de réussite

Nous avons donc construit un indicateur de familiarité avec les items de l'évaluation TIMSS – et plus avec les modalités évaluatives. Chacun des items étant caractérisé par 8 modalités, nous avons aggloméré les familiarités avec les 8 modalités associées à cet item[5].

Une régression multilinéaire a été effectuée, cela permet de traiter simultanément les relations entre les scores aux 96 items et les familiarités à ces items, sans perdre les valeurs associées à chacun de ces items. Sans entrer ici dans les détails des résultats de la régression, indiquons qu'ils montrent que les indicateurs de familiarité avec les items TIMSS contribuent, à eux seuls et de manière significative, à l'explication des scores des élèves scolarisés en France. En outre, dans le modèle multilinéaire obtenu, le coefficient associé aux indicateurs de familiarité a une valeur positive ; cela signifie que pour chaque item, plus l'indicateur de familiarité est élevé, plus le score à cet item est élevé également. Le lien entre familiarité et score est donc avéré, même si bien sûr la familiarité n'explique pas le score à elle seule.

Nous avons complété cette étude par une autre régression multilinéaire prenant cette fois en compte les indicateurs de familiarité, mais aussi les caractéristiques des questions évaluatives. Nous obtenons une amélioration significative de l'explication des scores de la France. Selon ce modèle, le score obtenu en France à un item de l'évaluation TIMSS dépend finalement du *domaine de contenu* (nombres, géométrie et mesure, données) ; du *format attendu de réponse* (question ouverte à réponse rédigée, construction ou question à choix multiple), du *niveau de mise en fonctionnement des connaissances* (concept, direct, adaptation ou intermédiaire) et bien sûr de l'*indicateur de familiarité avec l'item*.

Quels bilans tirons-nous de ces deux recherches dans le contexte politique français relatif à l'enseignement des mathématiques à l'école, comme à la formation envisagée pour les futurs enseignants du premier degré ?

[5] Nous avons à cet effet calculé la moyenne des indicateurs de familiarité relatifs aux 8 modalités associées. La moyenne calculée est la moyenne géométrique puisque ces indicateurs de familiarité sont des quotients et sont donc centrés en 1. L'indicateur de familiarité avec l'item est obtenu en ôtant 1 à la valeur précédemment calculée : la régression multilinéaire à effectuer pour mettre en lien familiarité et score nécessite en effet d'avoir des variables centrées en 0 et non en 1.

III - PROPOS CONCLUSIF DANS LE CONTEXTE DES RÉFORMES ENVISAGÉES À LA FIN DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2023-2024

En 2015, la France a participé pour la première fois à l'enquête TMSS-4 ; les résultats obtenus par les élèves de CM1 furent faibles et ont été largement commentés. Une recherche comparative entre le cas de la France et celui de dix autres pays ou provinces analogues sur le plan économique a été menée, en se limitant au cas des fractions. Le croisement avec les curriculums montre que la performance des élèves est d'autant plus forte que les programmes sont en adéquation avec ce qui est évalué, et qu'une compétence est d'autant mieux acquise qu'elle a été enseignée pendant un temps assez long et avec un niveau d'exigence suffisamment élevé. La précocité n'apparaît pas comme un facteur déterminant, il serait donc une erreur de penser que l'introduction des fractions dès le CP constitue l'alpha et l'oméga de la solution pour la France. Les programmes qui devaient entrer en vigueur dès la rentrée 2024-2025, et dont la mise en œuvre a été abandonnée – ou différée – pour des raisons de politique intérieure, ne changeront rien aux difficultés des élèves scolarisés en France si les enseignants ne sont pas formés et accompagnés. La recherche effectuée montre en effet que la performance relève bien des programmes scolaires, mais aussi du fait que ces derniers emportent l'adhésion des enseignants. Elle montre en outre qu'il est important que les élèves bénéficient d'un temps long d'instruction effective, et que leurs enseignants soient suffisamment formés pour prévenir les difficultés d'apprentissage et y faire face quand elles surviennent.

En 2019, la France a participé pour la seconde fois à l'enquête TIMSS et les résultats sont restés faibles. Afin de dépasser la recherche précédente focalisée sur les programmes scolaires et les conditions d'enseignement, nous nous sommes interrogés sur un décalage éventuel entre les tâches auxquelles les élèves scolarisés en France sont habituellement confrontés, dans les situations d'évaluation, et celles proposées dans le questionnaire mathématique de l'IEA. Un travail d'analyse didactique des questions d'évaluations du questionnaire TIMSS et des manuels scolaires diffusés en France a été effectué ; il a permis de comparer ces questions d'évaluations et de mettre en lien cette comparaison avec les scores des élèves. L'analyse statistique met en lumière des différences entre les items TIMSS et les questions évaluatives présentes dans les manuels scolaires diffusés dans plus de la moitié des classes du territoire français. Les élèves scolarisés en France apparaissent très familiers des questions évaluatives cognitivement accessibles et peu familiers des celles qui sont exigeantes. Il en ressort également que, statistiquement, les scores augmentent avec la familiarité.

Doit-on alors exiger des enseignants qu'ils accroissent le niveau d'exigence durant les évaluations et durant l'enseignement ? Cela ne serait pas suffisant, et cela serait sans doute contre-productif sans autre réforme profonde : comme indiqué précédemment (Mierzejewski et al., 2023), la responsabilisation par l'évaluation et la prescription de la réussite de tous les élèves met les enseignants français en souffrance du fait qu'ils ne disposent pas des ressources nécessaires pour atteindre les objectifs assignés par l'institution scolaire. Mais plutôt que de donner des moyens à la recherche pour étudier précisément – dans le contexte français – le lien entre pratiques d'enseignement et apprentissage des élèves, plutôt que d'en tirer profit pour développer les ressources qui manquent aux professeurs, le ministère se contente de communiquer… Il annonce un « choc des savoirs » qui repose sur trois mesures phares dont la recherche a justement montré l'inefficacité (Collins, 2019) : le redoublement, les groupes de niveaux et le port de l'uniforme !

IV - BIBLIOGRAPHIE

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E. & Tempier, F. (2023). Ce que nous disent les professeurs de CM2 de leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. *Grand N, 111,* 69-84.

Behr, M. J., Lesh R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational numbers concepts. Dans R. Leshand & M. Landau (dir.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (91-125). New York: Academic Press.

Bodin, A., de Hosson, C., Décamp, N., Grapin, N. & Vrignaud, P. (2016). Analyse comparative des cadres de référence des deux enquêtes (N°1). Cnesco. Paris.

Collins, S. (2019). Améliorer l'enseignement : perspectives internationales - Comment fonctionne le fonds de dotation pour l'éducation ? Communication du 28 mars 2019 au congrès international organisé par le CSEN « Les sciences cognitives dans la salle de classe ». Url : https://cdn.reseau-canope.fr/archivage/valid/contenus-associes-presentation-N-22037-38074.pptx

Duval, R. (1995). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Fanjat, J. & Roditi, E. (2024). TIMSS CM1 2019 : faiblesse des résultats français, faiblesse de la familiarité des élèves avec les items. *Grand N*, *113,* 49-74.

Martinez, S. & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Éducation & Formations, 94,* 23-40.

Martinez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Descartes.

Mierzejewski, S., Broccolichi, S., Joigneaux, C. & Dormoy, C. (2023). L'école du désengagement ? Sur-responsabilisation et impuissance des enseignants face aux difficultés des élèves. *Revue française de pédagogie*, *221*, 71-88.

Roditi, E. & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats. *Éducation & formations*, *86-87*(11), 235-255.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *12*, 55-81.

Theis, L. & Gagnon, N. (2010). Enjeux et limites de la contextualisation en enseignement des mathématiques : points de vue d'une praticienne et d'un chercheur. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *50*(4).

Tricot, A. (1998). Charge cognitive et apprentissage. Une présentation des travaux de John Sweller. *Revue de Psychologie de l'éducation*, *1*, 37-64.

ATELIERS

A1.1 Page 57	Sylvie BLANQUART (Lab E3D, Université de Bordeaux, J2MA) Émilie BLANCHETIER (École Grenade sur l'Adour, IREM de Bordeaux, Projet Cardie Raisonner et communiquer en géométrie) Claire GUILLE-BIEL WINDER (IRES d'Aix-Marseille, ADEF, J2MA, Aix-Marseille Université) Christophe DRACOS (IRES d'Aix-Marseille, ADEF, J2MA, Aix-Marseille Université) Clémence LARCHER (École Alphonse Daudet, IRES d'Aix-Marseille, J2MA, Aix-en-Provence) Émilie MARI (IRES d'Aix-Marseille, ADEF, J2MA, Aix-Marseille Université	À la découverte de la situation PLIOX du cycle 2 au cycle 3
A1.2 Page 81	Edith PETITFOUR – Elann LESNES, LDAR, Université de Rouen Normandie	Une situation d'enseignement et de formation autour de la proportionnalité pour répondre à la diversité des apprenants
A1.3 Page 103	Valentina CELI, Université de Bordeaux, INSPé de l'Académie de Bordeaux, COPIRELEM Pierre DANOS, Université Toulouse 2 – Jean Jaurés, INSPé TOP, COPIRELEM Fabien Emprin, URCA, CEREP, INSPé de l'académie de Reims, COPIRELEM Sylvie GRAU, Nantes Université, INSPé de l'académie de Nantes, COPIRELEM Chantal MOUSSY, UPEC, INSPé de l'académie de Créteil, COPIRELEM Gwenaëlle VAY, Nantes université, INSPé de l'académie de Nantes, COPIRELEM	Exploiter un test de positionnement en mathématiques à destination des étudiants de Master MEEF
A1.4 Page 115	Annie CAMENISCH, LiLPa UR 1339, INSPE, Université de Strasbourg Serge,PETIT Professeur de mathématiques honoraire, IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg	Les concepts mathématiques et leurs désignations lexicales
A1.5 Page 139	Julien ANGLARD, Olivier METTER, Sven SEYFRIED et Catherine THOMAS Groupe IREM de Strasbourg	Une construction des fractions de l'unité, à travers la situation « Bande-unité » ERMEL revisitée
A1.6 Page 167	Vincent BECK, Irem centre val de Loire, Université d'Orléans Frédéric Métin, IREM Dijon, INSPE de Dijon Agnès GATEAU, IREM Dijon, PE Académie de Dijon Sylviane SCHWER, IREM Paris Nord, Université Sorbonne Paris Nord	Les abaques à jetons : un outil plein de ressources à mettre dans toutes les mains pour la compréhension des nombres, des grandeurs et des calculs
A1.8 Page 184	Pascal SIRIEIX, CDP 91	Donner du sens à la mesure de grandeurs au cycle 3 : analyse de situations d'apprentissage et de formation.

A2.2 Page 206	Cécile ALLARD MCF, Upec, LDAR Florence QUINTON, enseignante école Jacques Solomon, Champigny sur Marne Les enseignantes du LéA Ecrainum et groupe Irem	Le jeu des trois bandes
A2.3 Page 219	Sylvia COUTAT Université de Genève	Un environnement virtuel au service des connaissances spatiales de repérage dans le plan et dans l'espace
A2.4 Page 233	Sylviane SCHWER IREM Paris Nord, Université Sorbonne Paris Nord	D'où vient le système de numération orale français ? Ses enseignements pour mieux comprendre les difficultés des élèves
A2.5 Page 256	Anne-Marie RINALDI MCF, LIRDEF, Université Paul-Valéry Montpellier 3 ; Sophie GASTAL, RMC, Montpellier ; Bérengère LAURENT, PEMF Montpellier ; Anne-Catherine POUSSARD, PE, Montpellier	Manipulation, représentation des nombres sous dix : quels enjeux pour l'apprentissage et l'enseignement de la résolution de problèmes à l'entrée de l'école élémentaire ?
A2.6 Page 274	Jean-Berky NGUALA (1-2)- Myriam DI BETTA (2) Colette GUILLON (2) (1) - Laboratoire d'informatique et de mathématiques (LIM) Université de la Réunion (2) - Institut de Recherche sur l'Enseignement de mathématiques, d'informatique et de Sciences (IREMIS) Université de Mayotte	Un exemple de dispositif d'enseignement / de formation des fractions à Mayotte

À LA DÉCOUVERTE DE SITUATIONS DE REPRODUCTION DE FIGURES PAR PLIAGE D'UN PLIOX DU CYCLE 2 AU CYCLE 3

Claire GUILLE-BIEL WINDER
MCF, INSPE, Aix-Marseille Université
IRES d'Aix-Marseille, AMPIRIC
claire.winder@univ-amu.fr

Sylvie BLANQUART
PRAG, INSPE-Université de Bordeaux
Lab E3D, IREM de Bordeaux
sylvie.blanquart@u-bordeaux.fr

Émilie BLANCHETIER
PEMF, École de Grenade sur l'Adour
Groupe mathématiques des Landes, IREM de Bordeaux
blanchetier.emilie@u-bordeaux.fr

Christophe DRACOS
CPD, référent mathématiques, DSDEN des Bouches-du-Rhône
IRES d'Aix-Marseille, ADEF
christophe.dracos@ac-aix-marseille.fr

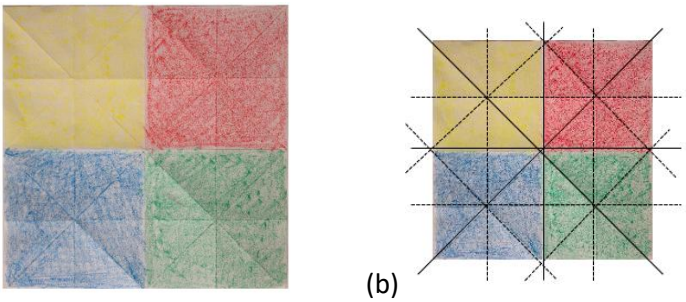
Résumé
L'atelier proposé visait à présenter les premiers résultats d'un travail collaboratif en cours entre chercheurs, formateurs et enseignants au sein de l'IRES d'Aix-Marseille et de l'IREM de Bordeaux, qui prend sa source dans une recherche portant sur la reproduction de figures par pliage d'un artefact particulier, le PLIOX (Guille-Biel Winder, 2014, 2021). Il s'agissait de faire découvrir et analyser par les participants, un ensemble de situations didactiques pouvant être mises en œuvre en cycle 2 et cycle 3 (école primaire) et visant le développement du regard sur les figures (Duval, 1995), ainsi que celui des raisonnements (Blanquart, 2023).

I - INTRODUCTION

Cet atelier prend sa source dans une recherche portant sur la reproduction de figures par pliage d'un artefact (Rabardel, 1995) particulier, le Pliox (Guille-Biel Winder, 2014a, 2021), qui consiste en un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu vert et jaune, et non coloré sur l'autre face (figure 1a). Dans le cadre d'un travail collaboratif en cours (projet J2MA[1]) entre chercheurs, formateurs et enseignants au sein de l'IRES d'Aix-Marseille et de l'IREM de

[1] Le projet J2MA (*Jeux et Manipulations en Mathématiques pour Apprendre*) s'inscrit dans les travaux communs de l'équipe pilote Maths-Ampiric du PIA3-AMPIRIC et de l'IRES d'Aix-Marseille. Les membres impliqués au niveau national dans le projet sont : Émilie Blanchetier (PEMF, École de Grenade sur l'Adour, Groupe mathématiques des Landes, IREM de Bordeaux), Sylvie Blanquart (LabE3D, IREM de Bordeaux, Université de Bordeaux), Christophe Dracos (CPD, référent mathématiques, DSDEN des Bouches-du-Rhône, ADEF, IRES d'Aix-Marseille), Claire Guille-Biel Winder (ADEF, AMPRIRIC, IRES d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université), Clémence Larcher (PEMF, École Alphonse Daudet, Aix-en-Provence, IRES d'Aix-Marseille), Émilie Mari (PEMF, École La Corderie, Marseille, INSPE, IRES d'Aix-Marseille), Anne Prouha (IRES d'Aix-Marseille), Stéphan Roger (PEMF, École de Saint Barthélémy, Marseille, IRES d'Aix-Marseille).

Bordeaux, nous avons développé à partir de cet objet, plusieurs séquences à destination d'élèves de différents niveaux de l'école élémentaire (du CP au CM2). Ces séquences mettent en œuvre des situations d'action et de formulation (Brousseau, 1998) et visent le développement du regard sur les figures (Duval, 1995), ainsi que celui des raisonnements (Blanquart, 2023).



(a) (b)

Figure 1. Recto du Pliox (a) ; lignes de pli autorisées (b)

Notre recherche s'inscrit ainsi dans le cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et dans celui des travaux en didactique de la géométrie : ceux de Berthelot et Salin (1999-2000), Brousseau (2001), Houdement et Kuzniak (2000) portant sur les problèmes spatiaux et la géométrie ; ceux de Duval (1988, 1995, 2005), Duval et Godin (2005), Duval, Godin et Perrin-Glorian (2005), pour penser le rapport aux figures dans l'enseignement et l'apprentissage. En particulier, nous convoquons la notion d'unité figurale (Duval, 1995), qui désigne une unité élémentaire du registre sémiotique des figures géométriques mise en relation avec sa dimension :

- le point est ainsi la seule unité figurale de dimension 0 (0D) ;
- les lignes et courbes, ouvertes ou fermées, sont des unités figurales de dimension 1 (1D) ;
- les surfaces, comme les intersections de lignes ouvertes ou fermées, des unités figurales de dimension 2 (2D).

Selon ce chercheur, un objet mathématique peut être représenté par différentes unités figurales, éventuellement de dimensions différentes, et en particulier, une figure géométrique dans le plan est toujours une configuration d'au moins deux unités figurales élémentaires. Enfin, nous prenons en compte les niveaux d'appréhension des figures géométriques (Duval, 1995) : appréhensions perceptive (reconnaissance immédiate d'une forme), opératoire (centrée sur des modifications figurales comme les décompositions / recompositions ou l'inclusion dans une sur-figure, des modifications optiques de type agrandissement/réduction, ou positionnelles consistant à déplacer une figure ou la faire tourner), et discursive (liée à une dénomination ou aux propriétés données comme hypothèses).

L'objectif de cet atelier est de présenter puis de faire analyser les séquences produites. Le plan du compte-rendu reprend dans les grandes lignes celui de l'atelier : la partie II est ainsi consacrée à la présentation des situations d'action (reproduction de figures par pliage d'un Pliox), puis la partie III à celles des situations de formulation. La partie IV revient sur le déroulement de l'atelier et les productions des participants.

II - LES SITUATIONS D'ACTION

Après avoir présenté les situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox, nous revenons sur quelques éléments d'analyse *a priori* (Brousseau, 1998) : nous relevons les connaissances en jeu et explicitons les principales variables didactiques de ces situations d'action. Nous présentons ensuite le scénario que nous avons élaboré. Nous concluons cette partie par la présentation de différents constats que nous avons pu établir à l'issue de nos travaux.

1 Présentation des situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox

Dans les situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox, une figure modèle est donnée (elle-même obtenue à partir du pliage d'un Pliox), et les pliages se réalisent selon les lignes de pli autorisées qui correspondent aux axes de symétrie du grand carré et à ceux des carrés monochromes (figure 1b). La figure 2 propose des exemples de figures modèles.

Ces situations sont assez spécifiques. En effet, elles se déroulent d'une part dans l'espace sensible et nécessitent une action – un ou plusieurs pliages (ce sont donc des origamis particuliers) : à ce titre elles correspondent à des problèmes spatiaux au sens de Salin (2008). D'autre part, le Pliox évoque un objet de dimension 2 dont la forme correspond à une figure géométrique composée elle-même de sous-figures. Même si l'enjeu pour les élèves consiste à reproduire un objet matériel, la situation engage des connaissances sur les figures géométriques, et les situations d'actions peuvent alors être considérées comme des problèmes géométriques (de reproduction de figures) dans le paradigme de la géométrie axiomatique naturelle (G1) identifié par (Houdement et Kuzniak, 2000)[2].

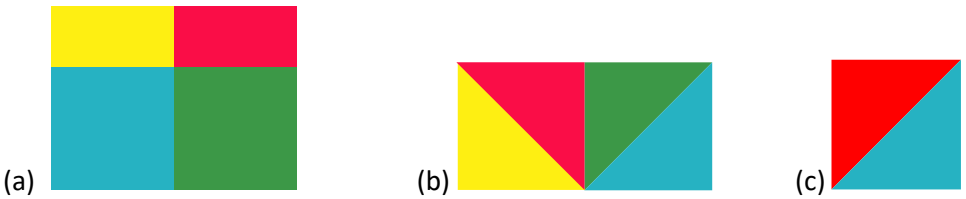


Figure 2. Exemples de figures modèles à reproduire

2 Connaissances en jeu dans les situations d'action

Nous précisons les connaissances en jeu à partir de l'analyse de la figure modèle présentée en figure 2a. Pour réaliser cette figure, il est nécessaire d'identifier les « figures internes » (c'est-à-dire les sous-figures monochromes) : en effet le jeu des couleurs fait apparaître une décomposition figurale composée de quatre éléments figuraux 2D (deux rectangles et deux carrés secondaires). En revanche, l'identification de la « figure externe », élément figural 2D correspondant au « contour » de la figure modèle (un rectangle ici) n'est pas indispensable. Le pliage à réaliser se fait selon un pli correspondant à un axe de symétrie des deux carrés rouge et jaune (élément figural 1D) et se réalise en prenant appui sur une médiane, axe de symétrie du Pliox qu'il faut prendre en compte au verso. On peut alors s'attendre à certaines productions « approximatives », c'est-à-dire comportant bien quatre figures internes, dont les deux carrés bleu et vert, mais aussi : soit deux rectangles jaune et rouge de taille différente de celle attendue (non « demi-carrés »), le pli correspondant étant parallèle à la médiane secondaire (figure 3a) ; soit deux trapèzes rectangles rouge et jaune, le pli correspondant n'étant pas parallèle à la médiane des carrés monochromes associée au pliage (figure 3b).

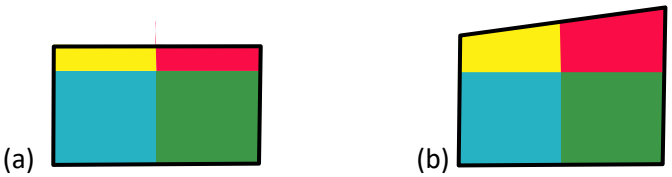


Figure 3. Exemples de figures « approximatives » pouvant être obtenues lors de la reproduction de la figure modèle 2a

Les connaissances en jeu sont alors de différentes natures, certaines sont en cours d'apprentissage en CP / CE1, d'autres sont plus anciennes. Des **connaissances géométriques** portent sur des quadrilatères particuliers (le carré et le rectangle) et certaines de leurs propriétés (égalités de longueurs, angles droits notamment), et dans d'autres reproductions sur les triangles rectangles isocèles. Des relations entre

[2] Pour des analyses plus fines, nous référons le lecteur à (Guille-Biel Winder, 2014a).

différents éléments figuraux 2D apparaissent également : ici entre le rectangle « demi-carré » et le carré, ailleurs, avec le triangle rectangle « demi-carré » et le carré. Les côtés sont perçus comme les bords des figures internes colorées. Des droites particulières du carré apparaissent sous forme de plis (médiane, axe de symétrie, voire diagonales dans d'autres reproductions). La médiane principale utilisée dans le pliage et située au verso est ici effectivement perçue comme une droite (donc détachée des côtés des carrés). Dans certaines reproductions, des éléments figuraux 0D apparaissent (des milieux de côtés, des sommets de polygones, le centre du carré). Il existe également un enjeu langagier relatif à l'utilisation de termes géométriques désignant les différents éléments figuraux. Des **connaissances spatiales**[3] (Bertelot et Salin, 1999-2000) sont également en jeu. Certaines sont liées à l'orientation et à la position des différentes sous-figures dans les figures modèles. Elles sont implicites au moment de l'action mais peuvent être explicitées lors des mises en commun, incitant à des formulations adaptées (elles concernent donc également l'usage adéquat du vocabulaire). D'autres sont relatives au passage du plant fronto-parallèle (modèle affiché au tableau) à son Pliox posé sur sa table en face du tableau, ou encore à l'orientation du Pliox lors des explicitations de procédures.

Notons toutefois que le vocabulaire géométrique est introduit et utilisé en situation, sans brider l'expression spontanée des élèves : les termes de la vie courante sont acceptés (mais repris au besoin par l'enseignant) s'ils permettent une bonne communication, puis sont progressivement remplacés par les termes spécifiques du langage géométrique.

Un enjeu cognitif est associé à l'ensemble des problèmes de reproductions de figures par pliage d'un Pliox : il s'agit à terme d'acquérir une sorte de flexibilité quant à la reconnaissance des formes dans n'importe quelle position et détachées ou intégrées dans d'autres figures.

Nous complétons cette première analyse *a priori* par une présentation des principales variables didactiques.

3 Principales variables didactiques

Un premier ensemble de variables didactiques concerne *la modalité de présentation de la figure modèle* mise en relation avec le support retenu. En effet, la figure modèle peut être présentée sous la forme d'un Pliox préalablement plié. Le support de l'enseignant est alors identique à celui des élèves. On peut y percevoir les plis déjà réalisés ainsi que son épaisseur. Dans ce cas, la figure modèle peut rester éloignée des élèves ou pas, elle peut être manipulable ou pas (lorsqu'elle est affichée au tableau par exemple). Le problème posé correspond alors à une reproduction à l'échelle 1. Mais d'autres modalités sont envisageables. Ainsi la figure modèle peut être présentée sous la forme d'un dessin, ou d'une photo ou encore vidéoprojetée, et cette représentation peut être éloignée ou pas. La reproduction peut s'effectuer à échelle 1 ou pas.

Un deuxième ensemble de variables didactiques porte sur la position de la figure modèle (sur le plan fronto-parallèle, mettant alors potentiellement en jeu des modifications positionnelles, ou sur un plan horizontal) et son orientation (facilitant alors plus ou moins la reconnaissance de certaines figures planes usuelles, notamment le carré).

Selon le modèle que l'on choisit, l'activité est rendue plus ou moins difficile et met en jeu différentes connaissances. Ainsi le nombre de pliages peut être un premier facteur de difficultés. Cependant la nature de la figure externe, le nombre de sous-figures, leurs positions relatives, ainsi que la position qu'elles occupent, interviennent également. Par exemple sur la figure 4, la figure modèle (a) est plus simple à

[3] « Par connaissances spatiales, nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de : reconnaître, décrire, fabriquer des objets ; déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ; reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement. » (Berthelot et Salin,1999-2000, p. 38)

reproduire que la figure modèle (b) qui nécessite trois pliages ; mais la figure modèle (c) qui nécessite un seul pliage est plus difficile que la figure modèle (d) qui en nécessite deux.

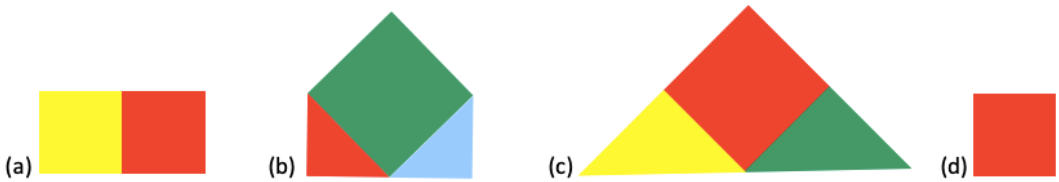


Figure 4. Figures modèles correspondant à différentes valeurs de variables (nombre de pli, nature de la figure externe, nombre et nature des zones monochromes, direction des plis)

Les directions des plis (parallèles à l'une des médianes du carré « externe », ou bien à l'une de ses diagonales) jouent également un rôle. De plus, l'existence des plis déjà formés facilite l'activité : en effet si l'on doit prendre en compte les parties repliées au verso du Pliox, l'activité est rendue plus difficile.

Enfin, selon le modèle, il peut s'avérer nécessaire de prendre en compte le verso du Pliox (comme pour le modèle figure 2a dont la reproduction exige de prendre en compte la médiane du carré externe apparaissant au verso), voire des parties repliées au verso (comme c'est le cas figures 2b et 2c), ce qui rend la tâche plus ardue car elle met en fonctionnement des retournements.

En prenant appui sur un jeu de variables didactiques, nous avons élaboré un scénario en au moins trois séances que nous présentons maintenant.

4 Scénario élaboré

Le scénario élaboré comporte plusieurs étapes nécessitant au moins trois séances.

La première étape vise l'appropriation de l'artefact par sa construction guidée. Dans cette étape, la tâche des élèves consiste à fabriquer le Pliox : dans un premier temps (uniquement pour les élèves de CE1), il s'agit d'obtenir le plus grand carré possible à partir d'une feuille A4 ; dans un deuxième temps les élèves (de CP et de CE1) doivent colorier le carré en le pliant correctement. C'est ainsi un problème technique qui est posé aux élèves, mais qui fait appel à des connaissances géométriques. L'enseignant poursuit plusieurs objectifs :

- la (ré)activation du vocabulaire géométrique (carré, rectangle, côté) et spatial de position ou d'orientation (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de, à droite, à gauche, en haut, en bas) ;
- la mise en évidence que le contour du Pliox (la figure externe) est un carré partagé en quatre zones carrées ;
- l'explicitation du pliage bord sur bord comme modalité de reproduction.

Cette étape se déroule en plusieurs temps : la présentation collective du Pliox accompagnée d'une discussion sur ce que les élèves « voient », la réalisation du carré pour les CE1, le pliage du carré en quatre carrés superposables, et le coloriage.

La deuxième étape correspond à la première confrontation au problème. Elle vise l'appropriation de la situation. Les élèves doivent reproduire la figure modèle 4a par pliage. Cette étape se déroule en cinq temps. La figure modèle est d'abord présentée à la classe et les élèves sont invités à l'analyser collectivement (la figure 5 présente un exemple de consigne écrite au tableau et allant dans ce sens).

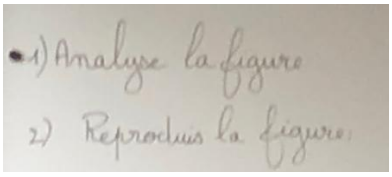


Figure 5. Un exemple de consigne écrite au tableau (classe Rep+ CE1, Stephan Roger, 2024)

Puis individuellement les élèves réalisent la reproduction. Dans un troisième temps, la mise en commun collective vise à expliciter les procédures et à invalider d'éventuelles productions incorrectes. Il s'agit de rendre explicites les connaissances qui circulent et de choisir celles à institutionnaliser en élargissant le contexte. La conclusion collective revient dans cette étape sur les relations entre le carré et le rectangle et l'institutionnalisation « locale » peut porter sur le vocabulaire rencontré (carré, rectangle, côté).

Dans la troisième étape, d'autres reproductions à un pliage sont proposées aux élèves, par exemple les figures 2a et 4c (figure 6), avec un déroulement identique à l'étape 2 (présentation et analyse collectives de la figure modèle, recherche individuelle, mise en commun, conclusion et institutionnalisation locale).

(2a)  (4c) 

Figure 6. Les figures 2a et 4c

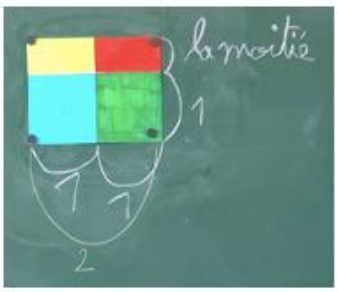
À cette occasion, de nouvelles relations entre carré, rectangle « demi-carré » ou triangle rectangle isocèle sont mises en évidence. La création de nouveaux plis fait émerger de nouvelles droites et conduit également à l'apparition de nouvelles figures (décompositions ou recompositions figurales). Par ailleurs, la demande, par l'enseignant, de justifier l'identification des figures conduit à la mise en évidence de leurs propriétés (nombre de côtés, égalité de longueurs, présence d'angles droits). Ainsi, la reproduction de la figure modèle 4c conduit à la reconnaissance du carré en situation non prototypique (et on peut jouer sur la mobilité du Pliox et le tourner pour « retrouver » le carré). D'autre part, l'existence de plusieurs procédures possibles fournit l'occasion de faire fonctionner le vocabulaire spatial. L'institutionnalisation locale porte sur le vocabulaire, les relations entre les figures, les objets géométriques particuliers (identification et / ou propriétés). La figure 7 en présente des exemples.



(a) CE1 Rep+ (Stephan Roger, 2024)



(b) CE1 (Isabelle Richard, 2018)



(c) CE1 (Sandrine Jadot, 2017)

Figure 7. Exemples d'institutionnalisations locales

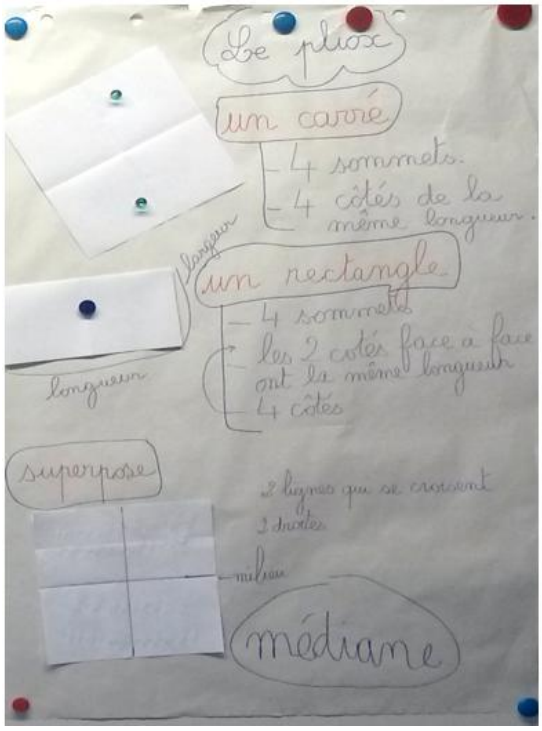
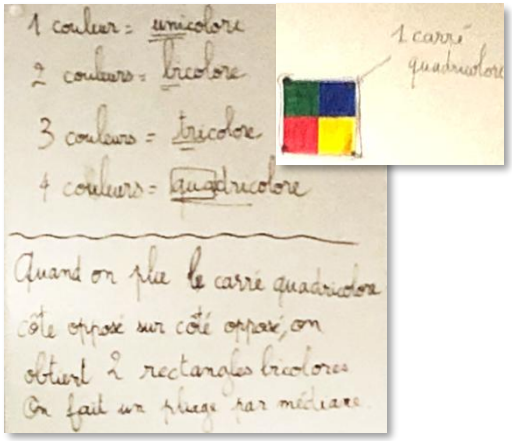


Figure 8. Exemple d'une trace écrite collective évolutive (classe CP/CE1, Cathy Le Reun, 2017)

Ce scénario autorise différentes adaptations. Nous en citons deux qui ont été réalisées dans des classes associées à notre projet. La première consiste à fournir une figure modèle sur la table de l'élève en difficulté afin qu'une modification positionnelle ne soit pas nécessaire. La seconde est relative à l'apport d'outils langagiers (vocabulaire mais pas seulement), afin de faciliter la prise de parole (deux exemples sont donnés en figure 9). Cela conduit également à une institutionnalisation locale.



(a)



(b)

Figure 9. Deux exemples d'apports d'outils langagiers : (a) en classe Rep+ CE1 (Stephan Roger, 2024) ; (b) en classe CE1/CE2 (Clémence Larcher, 2024)

5 Constats établis à l'issue de nos travaux

Nous présentons ici quelques éléments de constat établis à l'issue de l'analyse de plusieurs mises en œuvre du scénario dans des classes de CP et de CE1. Certains portent sur les élèves, d'autres concernent les pratiques enseignantes.

5.1 Du côté des élèves

Nous constatons une motivation de tous les élèves (même ceux qui usuellement ont du mal à rentrer dans le rythme de la classe), probablement due à une dévolution toujours réussie. En effet, le but à atteindre (reproduire la figure modèle) est accessible, la manipulation favorise les ajustements et l'erreur n'est pas

vécue négativement. Par ailleurs, l'implication des élèves ne faiblit pas, les élèves rencontrant des difficultés scolaires n'étant pas les moins impliqués : ils cherchent et trouvent parfois plus rapidement que certains considérés comme bons… À titre d'illustration, nous avons étudié à travers les transcriptions de mises en œuvre du scénario dans deux classes différentes mais dont les déroulements comme la population étaient comparables, le nombre d'élèves ayant pris la parole à bon escient dans deux séances consécutives (Guille-Biel Winder, 2014b). La figure 10 met en lumière un nombre grandissant d'élèves impliqués dans chacune des classes.

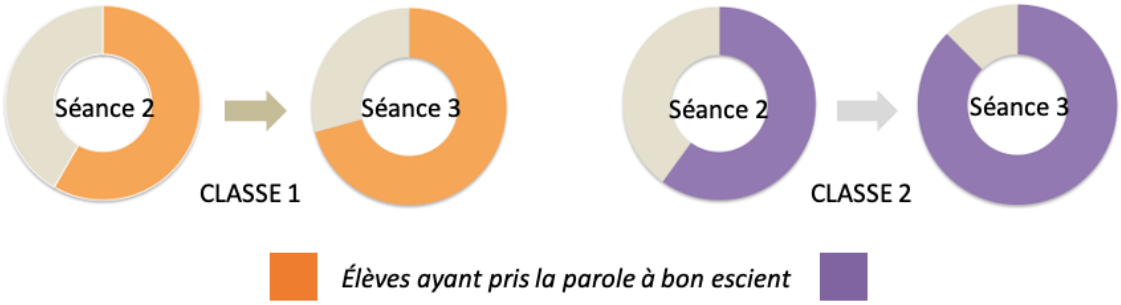


Figure 10. Nombre d'élèves ayant pris la parole à bon escient lors de deux séances consécutives dans deux classes

Nous avons également constaté un enrichissement progressif du regard que les élèves pouvaient porter sur les figures à reproduire. D'abord focalisés sur les zones de couleurs ou bien sur la forme globale de la figure, les élèves ont été capables, au fil de la séquence, d'identifier des sous-figures et de les recomposer. Cet enrichissement est cependant plus marqué lorsque l'enseignant crée les conditions dans la classe pour rendre explicite les décompositions et recompositions figurales.

Enfin, certaines difficultés dans la réalisation des pliages ont été constatées chez des élèves ayant des problèmes de motricité fine, même si cela ne présume pas de difficulté à identifier ce qu'il faut faire. On peut donc voir sans faire. Ce constat rejoint celui de Petitfour (2017) qui propose alors un travail en dyade afin de prendre en compte ces difficultés.

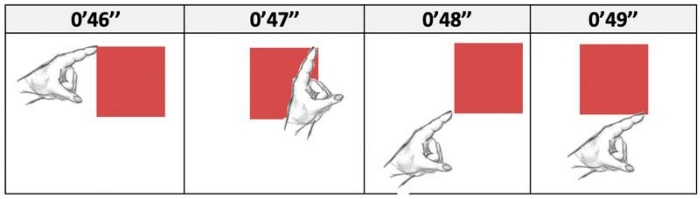
5.2 Du côté des enseignants

En mettant en regard la proportion de mots relevant du langage géométrique par rapport à ceux relevant d'autres domaines langagiers employés par l'enseignant et par les élèves dans deux séances consécutives pour deux classes qui ont suivi le même déroulement de séance, nous avons constaté une très forte corrélation entre l'usage du vocabulaire géométrique par l'enseignant et celui employé par les élèves dans chaque séance (de l'ordre de 80%), ainsi qu'une corrélation avec l'évolution de l'usage de ce vocabulaire par les élèves (Guille-Biel Winder, 2014b, 2021). Or Mathé (2009) souligne que dans les situations d'action sur des objets géométriques, le langage joue un rôle dans les possibilités d'allers-retours entre objets et concepts. Ceci signifie que les activités langagières de l'enseignant ou proposées par lui, ont un impact sur l'acquisition des concepts. Citons notamment la formulation de décompositions et recompositions figurales ou encore la justification de l'identification des figures. Cependant des travaux ultérieurs sur le Pliox ont révélé que l'usage du vocabulaire géométrique ne garantit pas forcément la compréhension des concepts : on a vu ainsi des élèves parler des « quatre côtés du carré » (ce qui est tout à fait correct), mais désigner les quatre sommets… (Blanquart, Guille-Biel Winder et Petitfour, 2024).

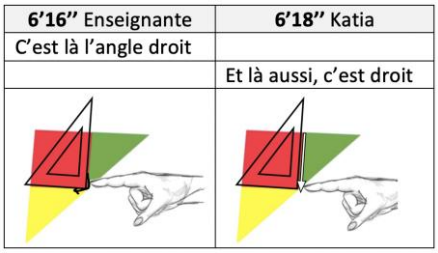
Comme nous l'avons vu, les connaissances en jeu sont plurielles : connaissances géométriques portant sur des polygones particuliers, leurs propriétés et les relations qu'ils entretiennent entre eux, sur certaines des droites qui leur sont associées (diagonales, médianes, axes de symétrie) ainsi que sur certains points particuliers (sommets, milieux) ; connaissances spatiales et connaissances langagières. Ces connaissances circulent effectivement dans la classe pendant les mises en œuvre et le regard des élèves s'enrichit. Ainsi l'appropriation de ces connaissances est doublée d'un travail sur les différents regards à porter sur une figure (complexe). Cependant lors de nos expérimentations, nous avons constaté une difficulté chez les

enseignants à s'emparer de ces connaissances qui circulent et plus généralement à identifier les enjeux de la situation (Guille-Biel Winder, 2021). Notons que ces différents constats rejoignent ceux d'autres recherches et soulèvent la question cruciale de la formation des maîtres.

Signalons enfin un geste professionnel qui s'est révélé important, à savoir celui de faire venir montrer au tableau par les élèves les objets géométriques qu'ils énoncent (Blanquart, Guille-Biel et Petitfour, 2024). Cela permet en effet, côté élèves, de soutenir la compréhension de l'oral et de fixer ce qui est dit, et d'autre part, côté enseignant, de révéler des *dissonances sémiotiques* (Petitfour et Houdement, 2022), c'est-à-dire des termes (géométriques ici) employés qui ne sont pas en concordance avec les objets pointés. Des exemples sont donnés figure 11.



Mia dit « quatre côtés » mais pointe les « quatre côtés du carré »



Katia n'associe pas « droit » à un angle

Figure 11. Exemples de dissonances sémiotiques révélées (Blanquart, Guille-Biel et Petitfour, 2024)

III - LES SITUATIONS DE FORMULATION

Dans le cadre de la TSD, le fonctionnement des connaissances est modélisé en situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998). La formulation est un moyen incontournable qui nait de la contrainte posée sur l'action (Brousseau, 1998, p. 35) par exemple par éloignement temporel ou spatial : le sujet peut alors prélever des informations sur la situation mais sa seule action immédiate est insuffisante pour obtenir le résultat escompté. Par ailleurs une situation de formulation est considérée comme effective seulement si les formulations inadaptées reçoivent une rétroaction du milieu (Brousseau, 2012, p. 120). Ainsi dans les situations de formulation, le sujet explicite ce qui régit les actions ; cette communication peut être orale ou écrite, pour lui-même ou pour un tiers. L'élève est alors amené à énoncer formellement les actions effectuées, mais aussi les conditions dans lesquelles il a effectué ces actions.

Après une présentation des situations de formulation construites dans le contexte de la reproduction de figures par pliage d'un Pliox, nous précisons dans le second paragraphe les connaissances en jeu en distinguant phases de verbalisation et phases de formulation. Nous présentons ensuite les variables didactiques en jeu puis le scénario élaboré.

1 Présentation des situations de formulation

Dans les situations de formulation les élèves sont répartis par groupes. Chaque groupe est lui-même scindé en deux équipes : les « émetteurs » et les « récepteurs ».

Dans un premier temps, les équipes « émetteurs » reproduisent, par pliage d'un Pliox, une figure modèle donnée par l'enseignant ou construisent une figure de leur choix. Dans un deuxième temps, les équipes « récepteurs » doivent reproduire cette figure modèle sans la voir, uniquement en suivant les instructions des « émetteurs ». Ainsi les deux équipes doivent coopérer, par l'intermédiaire de messages, pour atteindre le même objectif, mais sans avoir les mêmes interactions avec le milieu. Outre les connaissances associées à la situation d'action, les messages échangés (à l'oral ou à l'écrit) mobilisent des connaissances spécifiques comme la formulation d'une caractéristique du modèle à reproduire ou l'explicitation de l'organisation des tâches.

2 Connaissances en jeu dans les phases de verbalisation et de formulation

2.1 Les phases de verbalisation

En appui sur les travaux de Blanquart (2020), nous considérons des phases de verbalisation comme un intermédiaire entre phase d'action et phase de formulation. Quand il y a verbalisation, la connaissance a en effet pour fonction la désignation précise des actions effectuées (ou à effectuer), ou la description de leur but. L'action explicitée est contextualisée, située dans le temps et l'espace, elle porte la marque de celui qui agit. Pour autant, nous différencions la verbalisation de l'action effective, car du point de vue des connaissances, la verbalisation permet déjà un premier retour réflexif sur l'action : le sujet qui verbalise le fait pour autrui. Ce faisant, il sélectionne les informations à communiquer, l'ordre dans lequel il les énonce, les signes utiles pour cette communication (langue orale, gestes, symboles écrits). Il doit pouvoir désigner les objets dont il parle et leurs relations, par exemple, en géométrie, par l'intermédiaire du langage technique géométrique (Petitfour, 2017). Les rétroactions sont apportées de manière immédiate, soit par le milieu, soit par l'interlocuteur.

Dans le cas de la reproduction de figure par pliage d'un Pliox, cette verbalisation est favorisée par une communication orale au cours de laquelle les élèves sont répartis par binômes. Les deux élèves d'un même binôme sont séparés par une cloison opaque qui leur permet d'échanger par oral mais ne leur permet pas de voir les gestes effectués par le partenaire. Les élèves disposent tous d'un modèle distribué par l'enseignant (au sein d'un binôme les modèles sont différents). À tour de rôle chaque élève reproduit la figure modèle qui lui est assignée puis décrit à son partenaire les actions à effectuer pour que celui-ci la reproduise sans la voir. Ce partenaire est autorisé à rétroagir oralement au fur et à mesure.

Ce dispositif peut favoriser l'acquisition de connaissances langagières, la production de raisonnements, et ainsi contribuer à l'articulation entre activité de visualisation et activité discursive, essentielle dans le domaine de la géométrie.

2.2 Les phases de formulation

Au niveau de la formulation, les actions ne sont plus seulement décrites mais aussi réfléchies en lien avec les conditions de la situation. Apparait un enjeu de généralisation : « formuler une méthode à partir de ce qu'on a fait afin de pouvoir la réutiliser dans un autre problème. » (Bosch et Perrin-Glorian, 2013, p. 279). Dans le cadre de la reproduction de figures par pliage d'un Pliox nous favorisons le passage à la formulation par l'intermédiaire d'une communication écrite : des binômes d'élèves sont associés deux à deux pour former des groupes de 4 élèves. Dans un premier temps chaque binôme construit une figure modèle. Dans un second temps il rédige un message écrit permettant de reproduire ce modèle et ne contenant pas de dessin. Dans un troisième temps, les messages sont échangés selon le protocole suivant :

- Un premier binôme (les « récepteurs ») réalise la figure demandée dans le message du binôme associé (les « émetteurs »).
- Les « émetteurs » assistent à la lecture de leur écrit et à la réalisation des pliages par les « récepteurs ». Ils peuvent observer comment leur message est interprété mais n'ont pas le droit d'intervenir. Il y a ainsi une rétroaction différée, le message est écrit dans son intégralité avant d'être communiqué, mais les « émetteurs » assistent à toutes les étapes de l'interprétation de leur écrit.
- Quand les « récepteurs » pensent avoir terminé, la figure obtenue est confrontée au modèle. Une discussion s'engage sur les raisons de la réussite ou de l'échec. Si nécessaire les quatre élèves réécrivent ensemble un message plus adapté.

Dans ces phases de formulation le langage peut être amené à évoluer, s'enrichir tant au niveau des termes employés que de la syntaxe. En particulier l'emploi d'un vocabulaire spatial et géométrique précis est

favorisé. Par ailleurs, les rétroactions interviennent de manière différée afin de faire porter le questionnement sur une procédure globale et pas uniquement sur une action isolée.

3 Principales variables didactiques

Dans la communication entre sujets différents, les joueurs peuvent être des élèves, des groupes d'élèves ou l'enseignant. Nous privilégions les situations de communication entre groupes d'élèves qui apparaissent les plus propices au développement de la dialectique de formulation (Petitfour et Barrier, 2019, p. 344 ; Brousseau, 1998, p. 208) : un élève (ou groupe d'élèves) « émetteur(s) » doi(ven)t communiquer à un interlocuteur « récepteur » les consignes nécessaires à la reproduction d'une figure par pliage d'un Pliox. Cette phase est toujours précédée d'une phase d'action au cours de laquelle le(s) élève(s) « émetteur(s) » a(ont) produit la figure considérée. Nous distinguons pour les situations de formulation dans le contexte de la reproduction de figures par pliage d'un Pliox trois grandes catégories de variables didactiques.

Une première catégorie concerne la figure modèle donnée à reproduire. Comme pour les situations d'action, le nombre de plis, leur orientation, le rôle éventuel du verso de la figure influent sur les connaissances en jeu. La figure à reproduire peut être imposée par l'enseignant ou bien laissée libre.

Une deuxième catégorie de variables didactiques porte sur les moyens de communication autorisés. Le message est-il oral ou écrit ? Des contraintes sont-elles données sur le langage à mobiliser ? Les gestes sont-ils autorisés ? Dans le cas d'un message écrit, les dessins sont-ils autorisés ?

La troisième catégorie porte sur les rétroactions apportées par le milieu aux émetteurs. Les rétroactions apportées au message peuvent être immédiates, concomitantes à sa production, différées à la fin de la réalisation du message ou du pliage prescrit.

4 Scénario élaboré

Le scénario que nous présentons est destiné aux classes de fin de cycle 2 (CE2) ou de cycle 3 (CM1-CM2). Il est pensé pour aménager une progression dans les apprentissages à partir d'un jeu sur les variables didactiques. Plus spécifiquement, outre l'alternance entre oral et écrit, nous jouons sur les rétroactions afin de favoriser chez les élèves la prise de conscience des insuffisances éventuelles de leurs messages.

Ce scénario comprend, dans une première étape, une situation d'action qui comporte les phases décrites dans le paragraphe II.1. Suivant le niveau de classe considéré, ces phases peuvent être réparties sur une ou deux séances.

La deuxième étape, qui peut se dérouler sur une séance, consiste en une communication orale par binômes pour favoriser des phases de verbalisation. Quand tous les élèves ont été successivement « émetteurs » et « récepteurs », une mise en commun est organisée durant laquelle un travail sur les formulations orales efficientes est mené collectivement. Ce travail conduit à l'explicitation des critères qui permettent de réussir et à la création d'un répertoire commun de formulations.

Dans une troisième étape, qui comporte une ou deux séances, la communication écrite est abordée, qui permet de de réinvestir les connaissances précédemment élaborées et de les structurer. Lorsque tous les élèves ont été tour à tour « émetteurs » et « récepteurs », une synthèse collective clôture cette étape. Cette synthèse peut notamment mettre en évidence la nécessité d'organiser les différentes étapes de la reproduction de la figure, de qualifier les objets en jeu en employant un lexique et une syntaxe adaptés (figure 12).

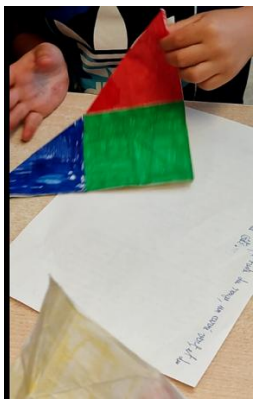


Figure 12. Pliage du Pliox suivant les instructions d'un message (CE2, E. Blanchetier, 2023).

5 Premiers constats

Nous présentons ici les premiers constats issus d'expérimentations menées dans des classes de CE2 et de CM1-CM2.

5.1 Du côté des élèves

Lors de la mise en œuvre de cet ensemble de situations les élèves se retrouvent confrontés à la nécessité d'employer un langage commun et précis. Cela est notamment favorisé par la concomitance entre les formulations produites et les rétroactions reçues. Cette prise de conscience est favorable à l'élaboration d'un répertoire commun de formulations qui porte autant sur la syntaxe que sur le vocabulaire à employer. Être confrontés à leur message et à ses éventuelles insuffisances amène les élèves à porter un regard critique sur leur production ou à argumenter en mobilisant des connaissances géométriques. En particulier, pour produire un message dépourvu d'ambiguïté, les élèves sont amenés à comprendre la nécessité de *qualifier* les objets en jeu. *Qualifier* un objet, c'est indiquer dans sa désignation la nature des relations qu'il entretient avec les autres objets en jeu au moment de cette désignation dont les termes employés relèvent du langage géométrique ou du langage courant. Nous disons qu'un objet est *complètement qualifié* quand sa désignation donne à voir les relations qu'il entretient avec les autres objets du milieu, pour le sujet qui s'exprime au moment de l'énonciation. Nous parlons de qualification *partielle* quand une partie de la relation est implicite ou qu'un terme est manquant : ainsi l'expression « le milieu » permet une qualification partielle d'un élément 0D, alors que l'expression « le milieu du segment AB » correspond à une qualification complète.

Ainsi le message[4] « *On plie sur la diagonale. Il faut qui reste du rouge, un carré vert, et du bleu. On pli le triangle rouge sur le côté* » (figure 13) amène une discussion sur la nécessité de préciser dans la première phrase quelle est la diagonale support du pli.

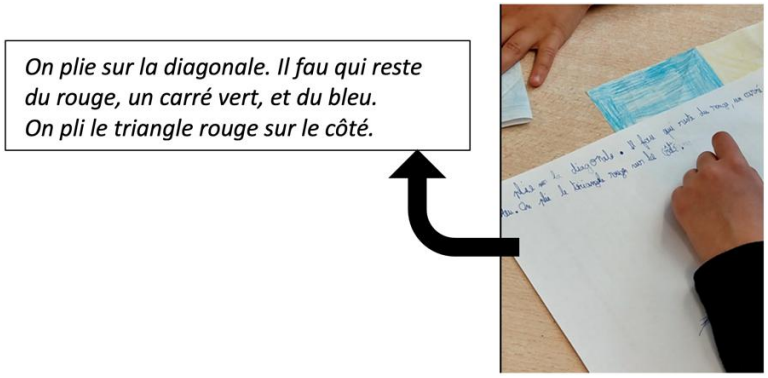


Figure 13. Confrontation d'un message et de la figure produite par les « récepteurs » (CE2, E. Blanchetier, 2023)

[4] Le message est reproduit tel qu'il a été écrit par l'élève.

5.2 Du côté des enseignants

Les enseignants volontaires ont noté l'intérêt d'introduire une situation de formulation basée sur des échanges oraux *avant* d'introduire la situation de formulation par l'intermédiaire de messages écrits. Ils se sont particulièrement engagés dans une réflexion pour la mise en œuvre de cette communication orale peu habituelle : en effet des énoncés incorrects peuvent permettre la reproduction du modèle si les élèves partagent les mêmes implicites ou connaissances erronées. Ainsi des élèves réussissent la tâche demandée avec des formulations imparfaites que l'enseignant ne peut pas contrôler car il ne peut pas entendre tous les échanges langagiers qui circulent au sein des binômes. Cela peut déstabiliser des enseignants soucieux de ne laisser circuler que des formulations idoines. Concernant le support utilisé, les enseignants ont observé l'intérêt d'avoir un objet sur lequel les actions sont facilement réversibles. La possibilité de plier et déplier le PLIOX très rapidement aide les élèves dans la décomposition des étapes qui conduisent à la production de la figure attendue.

IV - LE DÉROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier regroupe 24 participants répartis entre six tables de quatre numérotées de 1 à 6. Il se déroule selon deux grandes parties, chacune consacrée à un type de situation différent : des situations d'action d'abord, puis des situations de formulation. Tout au long de l'atelier, nous constatons une grande implication des participants dans les tâches proposées.

1 Découverte et analyse des situations d'action

Cette partie se déroule en trois étapes.

1.1 Étape 1 : reproduction de figures modèles

Lors d'un premier travail individuel, les participants ont chacun un Pliox à disposition et sont invités à réaliser successivement la reproduction de trois figures modèles (celles qui sont données figure 2) avec la consigne suivante :

> *À partir du Pliox, identique à celui présenté, vous devez, par pliage uniquement, réaliser une figure identique à celle proposée dans la diapositive suivante.*

La première figure modèle (nécessitant un seul pliage) permet la dévolution de la tâche. Les deux suivantes sont suffisamment complexes (plusieurs plis, prise en compte de parties repliées au verso venant se superposer au recto) pour que les problèmes posés soient un peu résistants. À l'issue de ce ces reproductions, les participants sont d'ailleurs convaincus d'être effectivement placés dans des tâches de résolution de problèmes ! Ces trois étapes favorisent l'appropriation du Pliox comme la prise de conscience de ses potentialités. Nous constatons des comportements variés de la part des participants une fois le Pliox en main ainsi que lors de la première reproduction : certains marquent toutes les lignes de pliage avant de réaliser la première figure (figure 2a), d'autres éprouvent le besoin d'utiliser le verso pour prendre des repères afin de plier correctement. Ces reproductions de figures modèles servent d'expérience aux participants pour alimenter leur réflexion en groupe et la mise en commun collective de la deuxième étape.

1.2 Étape 2 : réflexion sur les situations proposées

Dans cette nouvelle étape, les participants engagent, par groupes de quatre, une réflexion sur les situations de reproduction de figures par pliage d'un Pliox qu'il est possible d'envisager. Cette réflexion prend en compte des éléments de l'analyse *a priori*, comme le montre la consigne :

> *Dans l'objectif de mettre en place de telles situations dans une classe de CE1 : quels sont les prérequis nécessaires dans une situation de reproduction de figure par pliage du Pliox ? Sur quelles variables peut-on envisager de jouer ? Quelles sont les connaissances en jeu ?*

Les éléments d'analyse dégagés sont écrits sur feuille A4. On trouvera en annexe 1 les analyses réalisées. Les propositions des groupes se regroupent et se complètent dans les trois catégories : prérequis, variables didactiques et connaissances en jeu. Les prérequis explicités se répartissent en six classes : ceux liés à la motricité fine (« plier une feuille bord à bord », « marquer un pli sans déchirer le Pliox »), ceux en lien avec une vision spatiale (« décomposer le modèle en sous-figures », « reconnaitre et nommer des formes géométriques »), des compétences cognitives (inhibition, flexibilité du regard, planification, anticipation et comparaison), des compétences comportementales (« oser s'engager dans une procédure au risque de faire des erreurs », « persévérer dans la tâche », « vérifier son résultat »), des compétences linguistiques (vocabulaire lié aux pliages, milieu, diagonale, sommet, etc.). Il est apparu également des compétences mathématiques, signalées comme non obligatoires mais pouvant être une aide à la pensée pour anticiper et formuler des phrases. Les variables didactiques relevées par les groupes concernent essentiellement la nature des plis, leur nombre nécessaire ou imposé pour réaliser la figure modèle, mais également les liens entre le Pliox et la figure modèle (présence des carrés de départ, de rectangles ou triangles rectangles issus du carré principal ou des carrés secondaires, possibilité ou non de tracer le modèle sur le Pliox) ainsi que sur des modalités organisationnelles et matérielles. Enfin les participants identifient une grande partie des connaissances géométriques et spatiales décrites dans l'analyse *a priori* de la partie II, mais aussi la capacité de l'élève à passer d'une vision 2D à une vision 1D, voire 0D et celle d'utiliser une chronologie pour décrire les étapes d'une réalisation.

1.3 Étape 3 : discussion

Un temps collectif de discussion est ensuite aménagé. Il donne lieu à des discussions très riches avec une forte implication des participants.

Plusieurs propositions de groupes concernant les prérequis sont renvoyées au collectif pour être débattues. Les participants concluent que les seuls prérequis nécessaires sont liés à l'identification des couleurs et la mobilisation d'une motricité fine pour plier bord sur bord et marquer des plis sans déchirer le Pliox. Citons pour exemple, un extrait des échanges concernant les compétences visuo-spatiales dont un groupe interroge la nécessité en tant que prérequis :

> Participant 1 : *Compétences visuo-spatiales, faire des aller retours entre une vision de superposition et une juxtaposition. Est-ce que cela peut s'apprendre avec le Pliox ou est-ce que ce doit être des prérequis maitrisés par les élèves pour réussir à réaliser les tâches de pliage du Pliox ?*
>
> Animateur (renvoie la question au groupe) : *Est-ce qu'il faut savoir superposer et juxtaposer les formes avant de réaliser les tâches du Pliox ? (…)*
>
> Participant 2 *: On s'est posé la même question et on a conclu qu'à part savoir plier bord à bord ou sommet à sommet, il n'y a besoin de rien d'autre.*

Plusieurs participants proposent des connaissances lexicales comme prérequis : vocabulaire géométrique, vocabulaire permettant de qualifier les plis et les actions. Ceci fournit l'occasion de faire émerger que ce lexique ne constitue pas un prérequis mais qu'il apparait comme un besoin dans les situations de formulation.

La planification est également proposée par plusieurs groupes, mais la réflexion collective permet de l'écarter pour les situations d'action :

> Participant 3 : *On n'est pas sûr d'avoir tout le temps planifié. On faisait des essais et on regardait ce que ça donnait.*
>
> Animateur : *est-ce qu'on est obligé d'anticiper les résultats ?*
>
> Participant 4 : *Non, on peut faire, puis confronter au modèle.*
>
> Participant 5 : *Oui et après on ajuste.*

Les échanges portent ensuite sur les variables didactiques liées aux plis (nature et nombre imposé, plis déjà existants ou nouveaux plis nécessaires pour réaliser une figure modèle), ainsi que sur la mise à disposition du modèle et sa présentation (image projetée ou figure positionnée au tableau). Il est souligné

que l'affichage au tableau de la figure modèle effectivement réalisée permet une première prise d'indices et une comparaison avec un modèle à la même échelle que le Pliox utilisé. Un participant questionne alors le groupe entier :

> *Est-ce que le modèle peut se dessiner directement sur le Pliox (pour aider à identifier et ordonner les pliages à effectuer) ou est-ce que ce n'est pas possible ? Les figures 2a et 2b peuvent se dessiner sur le Pliox, au contraire de la figure 2c ou encore pouvoir découper directement sur le Pliox.*

La discussion amène à prendre conscience que si le dessin des plis peut aider à bien à identifier les pliages, en revanche pour les figures 2b et 2c, il est impossible de tracer la figure modèle sur le Pliox. Ainsi, par exemple, le marquage des plis sur le Pliox fait apparaître les deux triangles rouge et vert accolés par un côté (figure 14a), mais ce sont les deux autres triangles rouge et vert qui apparaissent sur la figure modèle (figure 14b).

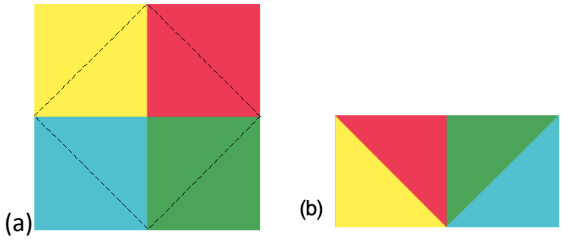


Figure 14. Traçage sur le Pliox des plis nécessaires (a) pour réaliser la figure (b)

Un participant fait le lien avec la conférence de Nadine Grapin et Nathalie Sayac (dans ces actes), en proposant de mener la même activité sans l'identifier dans le domaine des mathématiques mais dans celui des arts plastiques. Ainsi, ce nouveau contexte de présentation de la tâche pourrait lutter contre une menace de stéréotype de genre qui parfois s'érige en obstacles car la tâche mathématique de géométrie est parfois réputée plus difficile pour les filles que pour les garçons.

Ce temps collectif d'échange se termine par la mise en exergue de plusieurs intérêts relatifs à la reproduction de figures par pliage du Pliox :

- l'élève n'a pas besoin de savoir manipuler les instruments de géométrie ;
- peu de prérequis sont nécessaires (motricité fine et reconnaissance des couleurs) ;
- la facilité de plier et déplier le Pliox pour reprendre la tâche demandée offre la possibilité d'effectuer aisément plusieurs essais : en effet même si la démarche de se rendre compte d'une erreur et de tout déplier pour recommencer est difficile pour certains élèves, elle n'en reste pas moins beaucoup plus facile, voire tout simplement faisable, au contraire d'un tracé réalisé au crayon sur un papier.

Cette troisième étape se conclut par des informations complémentaires apportées par les animateurs de l'atelier, et qui prennent appui sur les éléments d'analyse *a priori* (présentés en partie II).

2 Découverte et analyse des situations de formulation

Cette deuxième partie de l'atelier s'organise selon cinq étapes (récapitulées figure 15) et que nous détaillons dans ce qui suit.

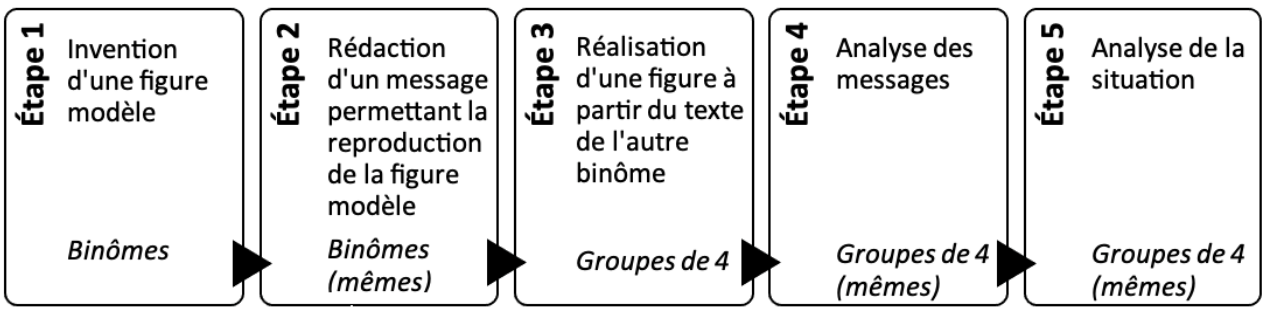


Figure 15. Déroulement de la deuxième partie de l'atelier

Dans la première les participants sont regroupés en binômes (il y a donc deux binômes désignés par B^n1 et B^n2 pour chaque table n, $1 \leq n \leq 6$) (voir figure 16a). Ils doivent réaliser, en deux minutes, une figure modèle à partir d'un Pliox. Aucune autre information ne leur est transmise sur la suite de cette deuxième partie d'atelier. Ils ne savent donc pas ce qu'on va leur demander de faire de la figure qu'ils ont à réaliser.

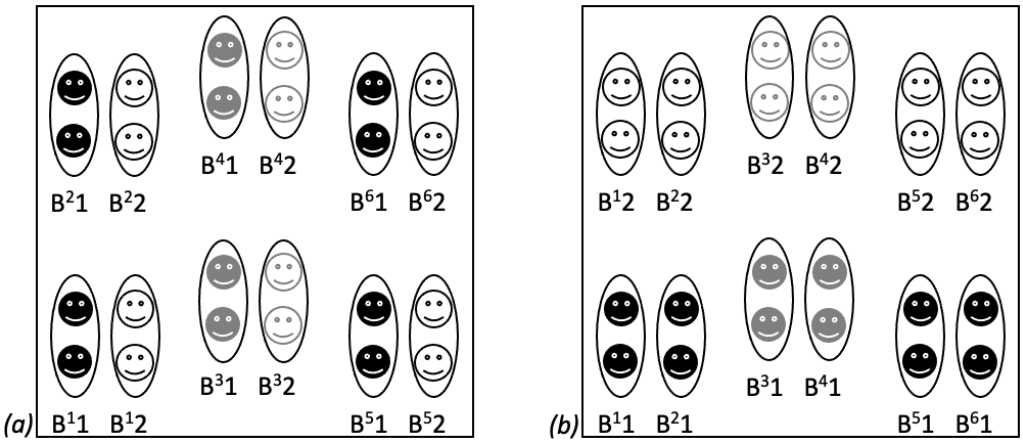


Figure 16. Répartition des binômes dans la salle : (a) durant les étapes 1 et 2 ; (b) durant l'étape 3

Dans la deuxième étape, les mêmes binômes doivent rédiger un message à l'intention d'un autre binôme afin que celui-ci puisse réaliser une figure identique à leur figure modèle. Il est précisé que le message ne doit pas comporter de dessin. Le message est rédigé sur une demi-feuille A4 prévue à cet effet (figure 17).

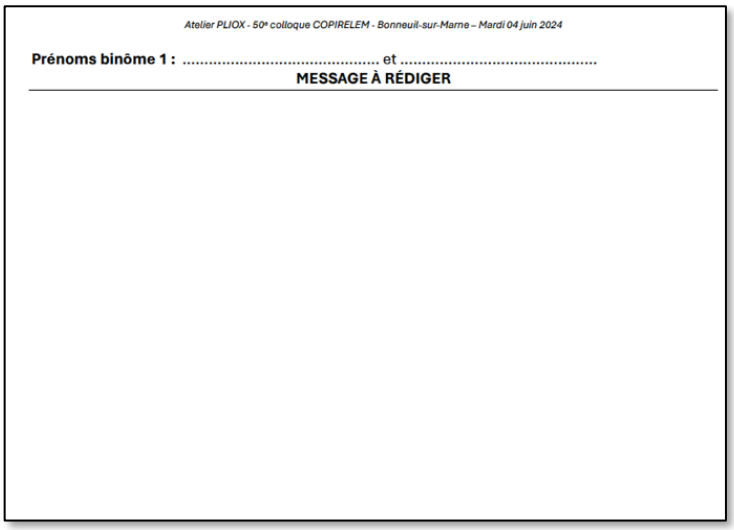


Figure 17. Feuille message (demi-feuille A4)

À l'issue de ce travail, la figure est glissée dans un cache de couleur[5]. On trouvera en annexe 2 toutes les figures modèles réalisées par les participants et les messages associés.

Pour la troisième étape, la moitié des binômes changent de table afin de respecter la confidentialité des messages. Les binômes suivants sont ainsi respectivement assis dans un même îlot : B^11 et B^21, B^12 et B^22, B^31 et B^41, B^32 et B^42, B^51 et B^61, B^52 et B^62 (voir figure 13b). La consigne suivante est alors donnée :

> *Chaque binôme à son tour réalise la figure décrite dans le message écrit par le binôme associé. Le binôme associé observe cette réalisation sans faire de commentaire. Il peut prendre des notes mais pas parler. Quand la réalisation est terminée, la figure produite est confrontée au modèle.*

Dans une quatrième étape, les deux binômes associés se concertent pour analyser les messages rédigés et les améliorer si nécessaire (avec si possible une autre couleur de stylo). Nous enregistrons par ailleurs

[5] Les caches de couleur sont des feuilles A4 pliées en deux et scotchées.

les discussions dans les quadrinômes. Nous constatons ainsi la richesse des discussions dans les groupes. Elles portent tout d'abord sur des questions langagières : mises au point concernant le vocabulaire non géométrique à utiliser – plier « en avant » ou « en arrière » (message du binôme $B^6$1 par exemple), « pli montagne » (messages des binômes $B^1$2 et $B^2$1 notamment), « pli vallée » (messages du binôme $B^2$2) – ainsi que sur les différentes manières de caractériser les médianes – « grande » médiane, « petite » médiane, médiane du carré vert et du carré jaune, médiane primaire (du grand carré) ou secondaire (d'un petit carré). Dans certaines discussions, les participants s'interrogent aussi sur la possibilité ou non d'avoir plusieurs solutions pour une consigne donnée, en particulier pour les consignes qui concernent des diagonales, bien que dans la plupart des cas, le pliage ne peut se réaliser que sur l'une des diagonales (il n'y a donc pas forcément besoin de les caractériser précisément). Voici, pour illustrer certains de ces points, un exemple de discussion qui a eu lieu dans le quadrinôme $B^1$1-$B^2$1 :

- On a deux grandes diagonales et quatre petites, et de dire « plier selon les 4 petites diagonales de façon » /

- C'est quoi les quatre petites diagonales ?

- Deux grandes diagonales et quatre petites [nous imaginons que le participant les montre]

- Ah oui !

- Plier les quatre petites diagonales de façon à ramener les couleurs sur le côté blanc. Ça devrait suffire.

- Et bien moi j'ai eu besoin de la diagonale qui passe par le centre. La petite et grande diagonale, j'aurais eu du mal à les voir. J'ai compris l'explication avec la diagonale qui ne passe pas par le centre. La petite diagonale, elle n'est pas facile à voir.

- Au bout d'un moment comme on a des carrés secondaires, on pourra avoir des diagonales secondaires qui sont les diagonales des petits carrés, qui ne sont pas les diagonales principales.

Il est à noter que lors de ces discussions la plupart des groupes effectuent des vérifications d'une ou de plusieurs étapes en relisant le message et en reconstruisant la figure.

La cinquième étape est consacrée à une réflexion dans les mêmes groupes de quatre avec la consigne suivante :

Quelles potentialités identifiez-vous pour ce type de situation ? Quels points de vigilance envisagez-vous ?

Elle est suivie d'une discussion collective. Un participant souligne que le dispositif est différent des dispositifs proposés d'habitude dans les situations de communication, car les émetteurs sont incités à observer les récepteurs en train de décoder, alors que lors de cette étape, les binômes émetteurs n'observent généralement pas le décodage du message qu'ils ont écrit. Cela permet un retour de message direct pour les émetteurs et un retour réflexif sur l'écrit produit. En revanche cette modalité ne permet pas à l'enseignant d'entendre ce qui se passe dans les groupes : il ne peut donc pas intervenir à chaud si le vocabulaire utilisé n'est pas adéquat – il peut néanmoins revenir par la suite sur ces écrits puisqu'il dispose des messages rédigés.

Ce type de situation possède une autre particularité, celle de conjuguer l'emploi de termes géométriques et celui de termes spatiaux. En effet il est très difficile d'employer uniquement du vocabulaire géométrique : les binômes qui ont tenté de le faire ont obtenus un message très (trop) complexe. On sort alors du cadre de la géométrie standard avec un langage standard (comme dans les programmes de construction habituels). Plusieurs points sont abordés à ce propos. D'une part, certains participants s'interrogent sur la question de la validation des messages. Pour d'autres, l'intervention du langage spatial peut amener l'élève à aller plus loin dans ce qu'il voit de la figure, et par suite d'aller plus loin dans les raisonnements. Un participant pense même que :

C'est une vraie situation de maths, qui fait travailler une situation neuve et dans laquelle y compris les mots pour le dire et le langage qu'on doit employer est neuf et doit être inventé (du fait de ce mélange entre spatial et géométrique). Ici on est vraiment mis dans la position du chercheur en maths, qui n'est pas face à une situation scolaire, mais qui doit inventer en même temps ses gestes et le type de langage qui permet d'en parler.

D'autres encore font remarquer que cette situation oblige les élèves à se mettre d'accord sur le vocabulaire afin de parler la même langue. En conséquence, le vocabulaire se met en place par et dans l'action.

L'une des difficultés de ce type de situation pour l'enseignant réside dans l'acceptation de l'emploi d'un vocabulaire non strictement géométrique au profit d'un langage le plus « efficace » possible pour obtenir la réalisation d'une figure donnée. Il a ainsi été remarqué que l'utilisation d'un vocabulaire imprécis peut en réalité conduire à la réalisation de la bonne figure, et que les récepteurs, en particulier les élèves les plus en difficulté, risquent de ne pas être aussi exigeants que l'enseignant. Le dispositif (retour en groupe de quatre sur le message) incite cependant les élèves à identifier seulement ce qui est nécessaire à la réalisation de la figure.

Enfin, les participants observent qu'il est possible d'avoir des messages qui disent la même chose mais de façon complètement différente.

V - CONCLUSION

Dans cet atelier nous avons fait vivre aux participants puis analyser, les différentes étapes d'un scénario didactique portant sur la reproduction de figures à l'école élémentaire. Les retours des participants ont confirmé l'intérêt de ce scénario ainsi que son potentiel en termes d'apprentissages des élèves. En particulier, la possibilité de faire et défaire rapidement les pliages sur le Pliox apparaît comme un réel atout de cet artefact pour engager les élèves dans les tâches de reproduction et de formulation, comme pour assurer une rétroaction du milieu effective et immédiate. Elle offre également, pour la situation de formulation, la possibilité aux « émetteurs » d'observer les « récepteurs » en train de décoder. Cette modalité, peu usuelle, nous semble favoriser un regard réflexif des élèves sur leur production. Cependant, comme la mise en œuvre du scénario a permis de le révéler, l'enseignant doit accompagner le passage de la manipulation à l'explicitation de connaissances, et notamment prendre en compte les interactions entre connaissances spatiales et géométriques.

Prenant en compte les différents retours des participants ainsi que leurs analyses, le travail de l'équipe se poursuit maintenant par l'écriture d'une ressource à destination des enseignants. Par ailleurs, une deuxième piste de travail concerne la mise au point de pistes d'adaptations à destination de différents publics, et notamment des élèves déficients visuels.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Berthelot, R. et Salin, M-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, 65*, 37-59.

Blanquart, S. 2020. Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant. (Thèse de doctorat). Paris : Université de Paris.

Blanquart, S. (2023). Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, numéro thématique 1*(2), 5-37.

Blanquart, S., Guille-Biel Winder, C. et Petitfour, E. (2014). Knowledge and reasoning in circulation during a situation of figures reproduction by folding. Dans F. Emprin (dir.), *The 26th ICMI study: Advances in geometry education*.

Bosch, M. et Perrin-Glorian, M. J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. *Actes de la 16e école d'été de didactique des mathématiques ARDM* (pp.267-302). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). La *théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétiens aux situations didactiques. *Éducation et didactique*, *6*(2), 103-129.

Brousseau G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Dans *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon 2000* (p. 67-83). Grèce : Université de Crète.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 57-74.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Duval, R., Godin, M. et Perrin-Glorian, M-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. Dans C. Castela et C. Houdement (dir.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2004* (p. 5-89). Paris : Irem de Paris 7.

Guille-Biel Winder, C. (2014a). Étude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19*, 103-128.

Guille-Biel Winder, C. (2014b). Une situation de reproduction de figures au cycle 2 : mises en œuvre et analyses Dans S. Coppé (dir.), *Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives, Actes du 40e colloque COPIRELEM* (p. 1-15). IREM de Nantes.

Guille-Biel Winder, C. (2021). Impact du langage de l'enseignant sur les relations entre les élèves et le milieu dans une situation d'action en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 41*(1), 55-96.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1) 89-116.

Mathé, A.-C. (2009). Confrontation aux objets et processus de conceptualisation en géométrie à la fin de l'école primaire, rôle des interactions langagières. *Efficacité et équité en éducation, Nov 2008*, France. hal-00421810.

Petitfour, É. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 37*(2/3),247-288.

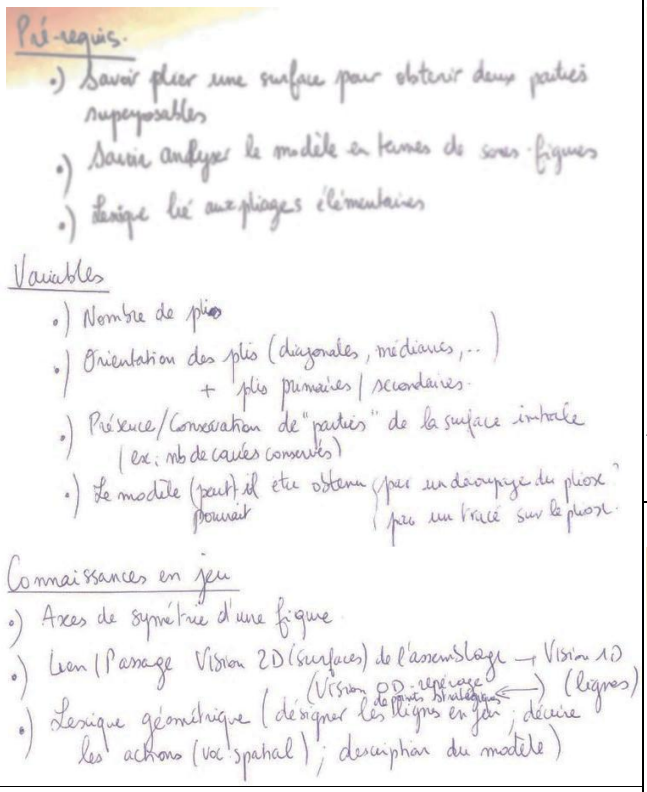
Petitfour, É. et Barrier, T. (2019). D'un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie à l'élaboration d'un dispositif de travail en dyade au cycle 3. *Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques ARDM* (pp.329-349). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

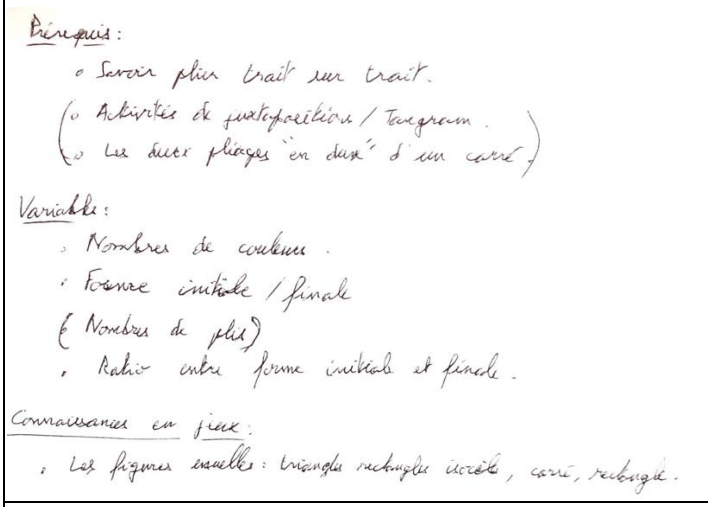
Salin, M.-H. (2008). Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie). *PLOT, 14*, 2-9.

ANNEXE 1 – ANALYSES RÉALISÉES PAR CHACUN DES SIX GROUPES

Groupe 1



Groupe 2



Groupe 3

Prérequis :

- Reconnaître et nommer les forms géométriques : carré, triangle, rectangle
- Connaître le vocabulaire : milieu, diagonale, sommet, quadrilatère
- Marquer un pli sans déchirer
- [illegible]
- Vérifier son résultat

Variables :

- le nombre de plis imposé
- les lignes selon lesquelles on peut plier imposés
- les plis nécessaires : - vers l'arrière
  - le long de diagonales

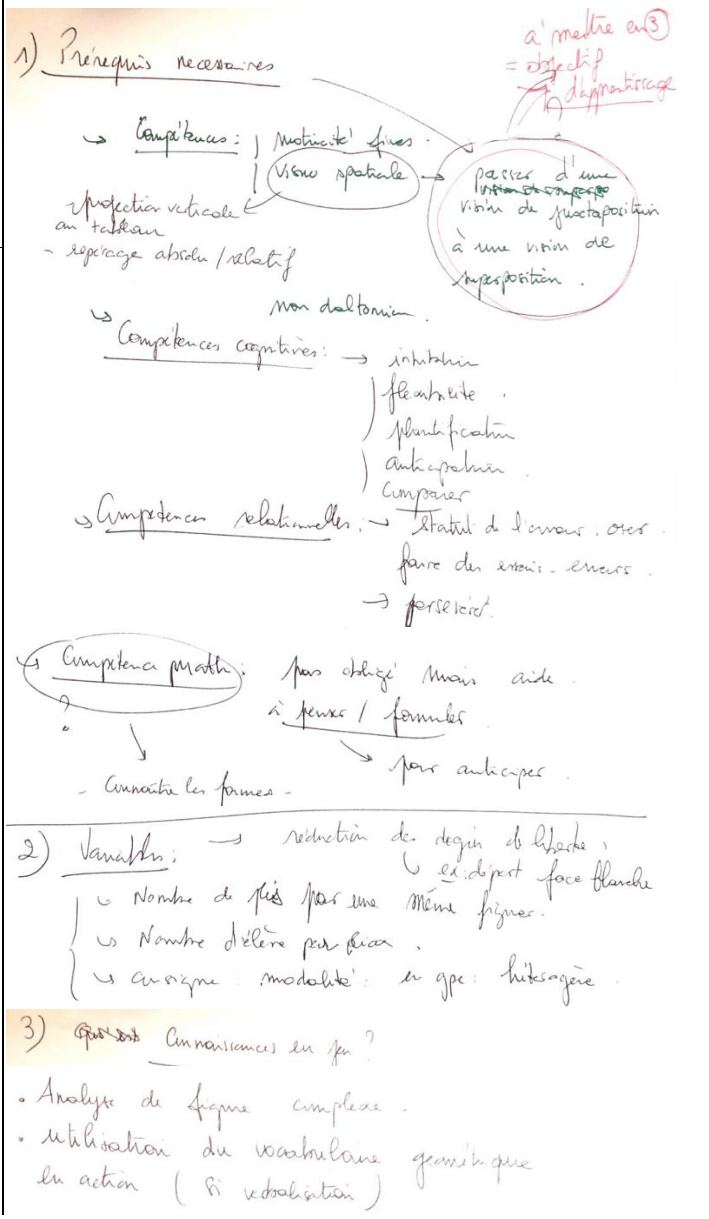
Connaissances en jeu :

Reconnaître et nommer les forms géométriques

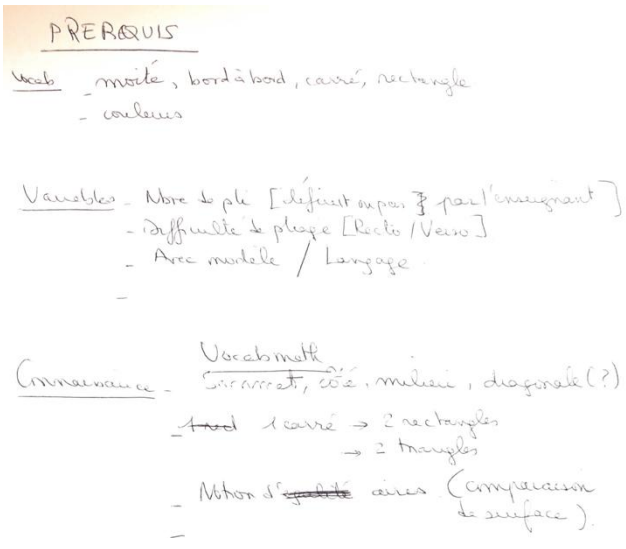
Découvrir l'axe de symétrie

Propriétés des forms géométriques

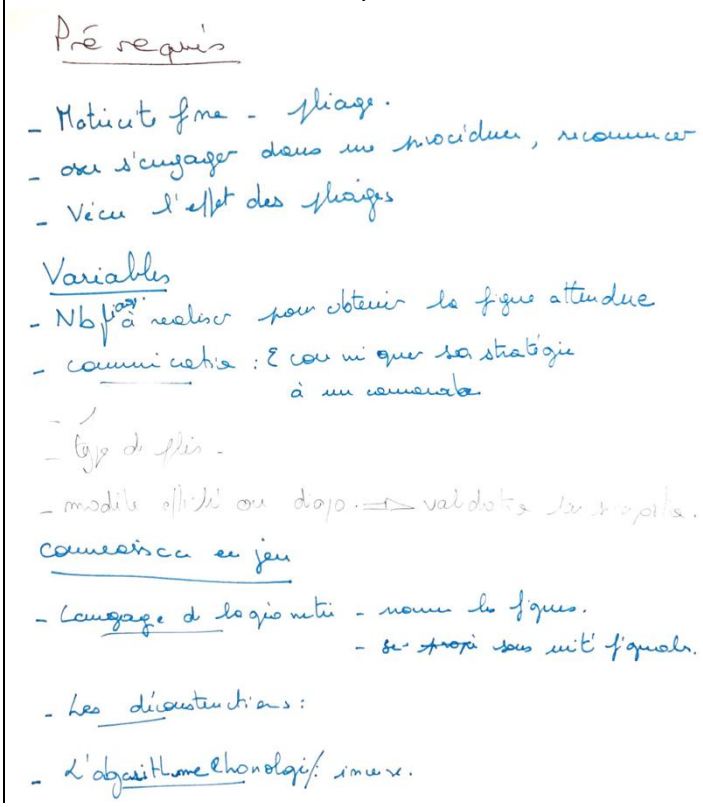
Groupe 4



Groupe 5

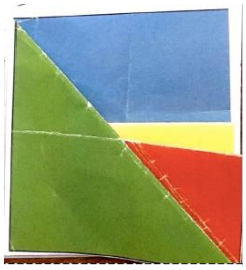
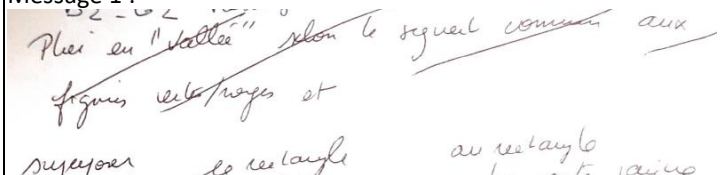
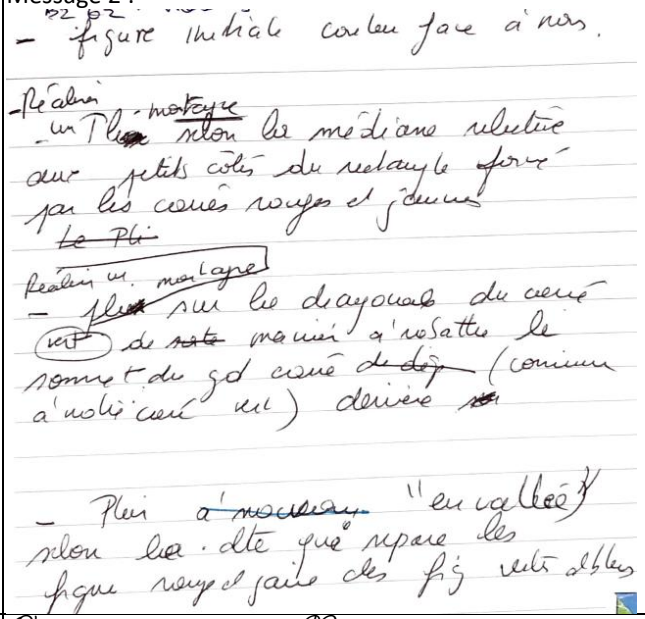
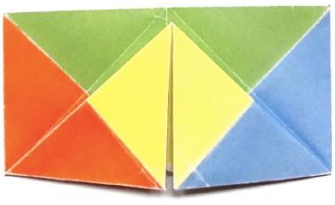


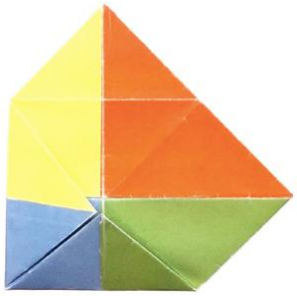
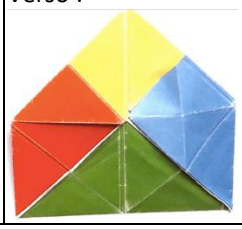
Groupe 6

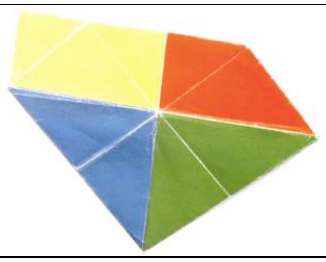
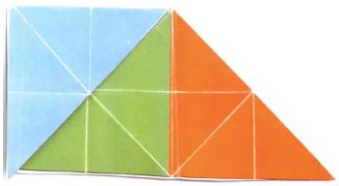


ANNEXE 2 – FIGURES MODÈLES RÉALISÉES ET MESSAGES RÉDIGÉS PAR LES BINOMES

$B^1 1$		- Placez le carré jaune en haut à gauche. - Pliez les carrés bleu et vert selon leurs médianes horizontales (pli montagne) : on obtient deux rectangles bleu et vert. - Pliez le carré jaune selon la diagonale qui relie un sommet du rectangle bleu (le sommet du bord du pli) et un sommet du carré orange (pli montagne) - Idem avec le carré orange selon la diagonale qui relie un sommet du rectangle vert à un sommet du carré jaune - Pliez selon le segment qui relie le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle jaune et le milieu de la longueur du rectangle vert (pli vallée) - Idem avec le triangle rectangle jaune et le rectangle bleu...
$B^2 1$		*-Plier en montagne suivant la diagonale commune aux carrés bleu et orange afin de laisser apparent le carré jaune.*

		-Plier alors en montagne suivant la diagonale du carré jaune ayant pour extrémités des sommets des traiangles (bleu et orange)
B[1]2		Plier les carrés jaune et orange suivant les diagonales (plis montagne). Plier le rectangle constitué des carrés bleu et vert suivant la « grande » médiane. (pli montagne) Replier la partie bleu/vert derrière la partie jaune/orange. Replie vert l'arrière l'angle droit « jaune-orange ». Replie vers l'avant les petits triangles rectangles isocèles vert et bleu. Retourne l'objet. Tu as gagné !
B[2]2		Message 1 :  Message 2 : 
B[3]1		On définit l'arrière du Pliox comme le côté blanc. 1- Plie chaque carré secondaire selon une diagonale en amenant le sommet à l'arrière du Pliox. 2- Tourner l'objet de façon à ce que le triangle jaune soit situé en haut. 3- Même manipulation que l'étape 1 mais uniquement pour la partie haute de l'objet (2 carrés « jaune et bleu » et « jaune et rouge »). On obtient un objet formé d'un triangle dans sa partie haute et un rectangle dans sa partie basse. 4- Plier le rectangle vers soi de manière à le ramener sur le rectangle. On obtient un petit rectangle quadricolore.

B41		*On appelle carré de couleur les carrés d'une seule couleur qui font le quart du grand carré.* *Plier chaque carré de couleur selon celle de ses diagonales qui ne passe pas par le centre du Pliox, de façon à garder toutes les couleurs visibles.* *Placer la figure de façon à voir l'ordre bleu, jaune, rouge, vert dans le sens des aiguilles d'une montre.* *Placer les 2 sommets extérieurs du triangle bleu sur le centre du carré qu'on regarde.* *Tu as obtenu un pentagone symétrique à 4 couleurs, qui est notre figure.*
B32		- On se positionne face à la face colorée du modèle. - Plier chacun des 4 carrés de couleur selon sa diagonale vers l'arrière Les 4 sommets des grand carré se rejoignent donc au centre grand carré blanc (les pliages sont à l'arrière) - en tenant le modèle face à soi, avec le triangle rouge vers le bas, rabattre le triangle bleu sur le triangle rouge - on obtient un rectangle composé de deux triangles vert et jaune et un grand triangle bleu. - plier ce rectangle selon la hauteur du triangle bleu. en son milieu vers l'intérieur - on obtient un carré composé d'un triangle rouge et d'un triangle vert
B42	Verso :  	- Prendre le pliox sur la face blanche. - Plier le carré bleu selon la diagonale pour obtenir un triangle bleu sur fond blanc - Refaire la même chox avec le carré orange. - la figure obtenue est un hexagone composé de 2 carrés blancs et, un triangle bleu et un triangle orange - Superposer le triangle bleu sur le orange côté carrés blancs. - Prendre le pliox de façon à voir le triangle orange. - Replier sur le dessus le triangle jaune selon le côté commun avec le orange - Idem avec le triangle vert sur le dessous.
B51	Verso :  	1) Couleur face à soi, plier chaque sommet au centre du pliox, face blanche contre face blanche (~~pli montagne~~) en arrière. 2) Replier le sommet rouge/jaune vers le centre en pli (~~montagne~~) l'arrière. 3) ~~Replier~~ Superposer le sommet jaune-bleu sur le sommet bleu-vert (pli vallée) vers l'avant Bravo ! !!

B61		① Plier les carrés jaunes et rouge au niveau de la médiane vers l'arrière. ② Plier le carré vert au niveau de la diagonale vers l'arrière. ③ Plier ~~le carré bleu~~ la figure suivant la diagonale du carré bleu et du carré rouge
B52		- Plier selon la diagonale qui traverse le carré rouge et le carré bleu - Positionner triangle rouge à gauche et le triangle bleu (en bas) à droite. Non nécessaire - Replié le triangle bleu sur le vert sur le côté commun au triangle bleu et le carré vert. - Pour valider : un triangle Rouge, un triangle vert et un triangle bleu ~~sont~~ apparents visibles
B62		Plier ~~le carré~~ la médiane commune aux carrés bleus et verts. On obtient 1 rectangle bleu et vert. Plier le carré jaune sur la diagonale qui va du carré bleu vers le carré rouge, en rabattant sur la partie blanche Plier sur le côté commun carré jaune, carré rouge, et ~~un~~ rectangle bleu. rectangle vert NON FINI !

UNE SITUATION DE FORMATION AUTOUR DE LA PROPORTIONNALITÉ POUR RÉPONDRE À LA DIVERSITÉ DES APPRENANTS

Édith PETITFOUR
MCF, INSPE de Normandie Rouen-Le Havre
Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Elann LESNES
MCF, INSPE de Normandie Rouen-Le Havre
Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France
elann.lesnes@univ-rouen.fr

Résumé
Cet atelier s'appuie sur une situation d'enseignement élaborée dans le cadre d'un projet de conception d'une ressource en mathématiques visant une accessibilité aux savoirs mathématiques pour les élèves à besoins éducatifs particuliers. La situation, expérimentée dans des classes et en formation d'enseignants, met en jeu des connaissances sur la proportionnalité entre grandeurs lors de tâches de production et résolution de problèmes à partir d'images.
Le travail proposé dans l'atelier a permis de s'interroger sur la prise en compte des élèves à besoins particuliers en classe et celle de la diversité des étudiants en formation d'enseignants du premier degré.

I - INTRODUCTION

Nous proposons une situation de formation, ensemble de tâches à partir desquelles un formateur peut élaborer un scénario de formation (Guille-Biel Winder et al., 2019), mettant en jeu des connaissances sur la proportionnalité entre grandeurs. Cette situation s'appuie sur un scénario d'enseignement élaboré dans le cadre d'un projet[1] de formation-recherche de conception d'une ressource visant à aider les élèves dits « à besoins éducatifs particuliers » à entrer dans les apprentissages mathématiques. Elle vise à prendre en compte la diversité des élèves en classe, tout comme la diversité des étudiants en formation initiale au professorat des écoles. Notre travail est fondé sur le droit de tous à une éducation inclusive et équitable de qualité, qui réponde aux besoins de tous les apprenants, ainsi que le rappelle l'Organisation des Nations Unies pour l'éducation, la science et la culture (UNESCO, 2017). Nous nous intéressons en particulier à l'accessibilité didactique, à savoir l'ensemble des conditions qui permettent aux élèves (ou aux étudiants) d'accéder à l'étude des savoirs (Assude et al., 2014).

Nous exposons, dans une première partie, la conception de la situation de formation proposée dans l'atelier en donnant des informations sur le dispositif de formation-recherche mis en œuvre en formation continue d'une part et sur le dispositif de formation expérimenté en formation initiale de professeurs des écoles d'autre part. Nous présentons dans une deuxième partie la mise en situation proposée lors de l'atelier, et, dans une troisième partie, les analyses de la mise en œuvre de cette situation de formation avec des étudiants de master. Nous interrogeons enfin, dans une quatrième partie, la prise en compte

[1] Projet soutenu par l'École Académique de la Formation Continue de l'académie de Normandie et par l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation Normandie Rouen-Le Havre.

des élèves à besoins particuliers en classe et celle de la diversité des étudiants en formation d'enseignants du premier degré à l'université.

II - CONCEPTION DE LA SITUATION DE FORMATION

Nous présentons tout d'abord le dispositif de formation-recherche à partir duquel nous avons élaboré la situation de formation proposée lors de l'atelier. Nous introduisons ensuite le dispositif de formation destiné à des professeurs des écoles en formation initiale. Notre but est double : partager les clés de la conception de cette situation aux formateurs pour les outiller à l'élaboration de situations de formation à l'enseignement des mathématiques à l'école pour les enseignants ; présenter le contexte dans lequel nous avons recueilli les données exploitées en formation avec les étudiants de master et lors de l'atelier.

1 Le dispositif de formation-recherche

À l'automne 2022, un groupe de travail s'est constitué en Normandie sous l'impulsion d'une inspectrice qui souhaitait que les enseignants impliqués dans le groupe puissent élaborer des activités[2] adaptées aux besoins éducatifs particuliers d'élèves dans les cours de mathématiques, en étant aidés dans ce travail par des chercheurs. Un groupe pluri catégoriel formé de six professeurs de mathématiques volontaires, de deux inspectrices et de trois chercheurs s'est ainsi réuni durant l'année scolaire 2022-2023, avec l'objectif de travailler à la conception d'une ressource destinée à aider les enseignants à la prise en compte de la diversité de leurs élèves en mathématiques.

La ressource a été envisagée avec deux types de contenu. Le premier composé de quelques « activités clefs en main » sur différents thèmes mathématiques, conçues pour rendre accessibles des apprentissages pour tout élève, avec une focale sur la prise en compte des besoins particuliers d'élèves présents dans les classes des enseignants concevant et expérimentant la mise en œuvre des tâches. Le second type de contenu est une explicitation de la réflexion ayant permis d'aboutir aux tâches finalisées. Mettre ainsi au jour les clés de la conception de la ressource visait à permettre aux futurs enseignants utilisateurs de la ressource de s'emparer de la démarche afin de la transposer dans leur contexte de classe à d'autres tâches qu'ils voudraient adapter à la diversité de leurs élèves. La démarche d'élaboration de la ressource, proposée par les chercheurs, s'est déroulée en différentes étapes que nous exposons à présent et qui sont récapitulées sur la figure1.

Dans une première étape, les enseignants interagissent en binômes de façon autonome (sans intervention des autres membres du groupe de travail) : ils choisissent un thème mathématique d'enseignement et un niveau de classe, puis conçoivent une *activité V0* qu'ils considèrent comme permettant de prendre en compte la diversité de leurs élèves pour travailler en classe la notion mathématique envisagée. Ils font des choix en fonction de leur contexte de travail, des besoins de leurs élèves dont ils ont une connaissance fine, en fonction de leur expérience d'enseignement, mais aussi de leur conviction sur la façon de favoriser les apprentissages mathématiques pour toutes et tous. Le binôme A, constitué de deux professeures de mathématiques de collège, a choisi de travailler sur le thème de la proportionnalité au cycle 3. Nous nous sommes appuyés sur la proposition de ce binôme dans l'atelier.

Dans une deuxième étape, l'*activité V0* est mise en œuvre par un membre du binôme dans une de ses classes (V0.1) au cours d'une séance. L'autre membre du binôme est présent pour observer, de même que les chercheurs qui filment et enregistrent les actions et interactions au sein de la classe en ciblant plus spécifiquement des élèves choisis par l'enseignante. À l'issue de la séance, une première analyse « à chaud » est réalisée avec les deux enseignantes. Des entretiens individuels avec les élèves sont menés pour savoir en particulier ce qu'ils retiennent de la séance. Le binôme récupère un enregistrement vidéo

[2] Activité est à lire dans le sens de « ensemble de tâches ».

centré sur un groupe d'élèves du choix de l'enseignante qui a mené la séance. Il a la charge de le visionner et d'en sélectionner des épisodes qui retiennent son attention.

Dans une troisième étape, le groupe de travail analyse l'*activité V0.1* mise en œuvre par l'une des conceptrices, avec des outils d'analyse didactiques et sémiotiques (Petitfour et Houdement, 2022) introduits par les chercheurs. Nous menons ainsi une analyse *a priori* (Brousseau, 1998) des tâches proposées aux élèves, puis nous nous intéressons aux actions et interactions au sein d'un groupe d'élèves à partir des extraits vidéo choisis par le binôme, et ceux sélectionnés par les chercheurs. Nous étudions conjointement l'activation des différentes ressources sémiotiques présentes dans notre recueil de données (langage, productions écrites, gestes, regards, postures, intonation de la voix, etc.) en vue d'identifier des conditions favorables ou non à une accessibilité aux savoirs mathématiques.

Dans une quatrième étape, chaque binôme d'enseignants produit une nouvelle version de son *activité V0* (V0*) en tenant compte des analyses faites au sein du groupe pour sa situation d'enseignement, et possiblement pour les situations des deux autres binômes.

Dans une cinquième étape, l'*activité V0** est mise en œuvre par le second membre du binôme (V0.2), le déroulement est analogue à celui de la deuxième étape.

La sixième étape est analogue à la troisième : le groupe de travail analyse l'*activité V0.2*. L'analyse aboutit à la production d'une *activité V1*, destinée à être expérimentée cette fois par un enseignant non concepteur.

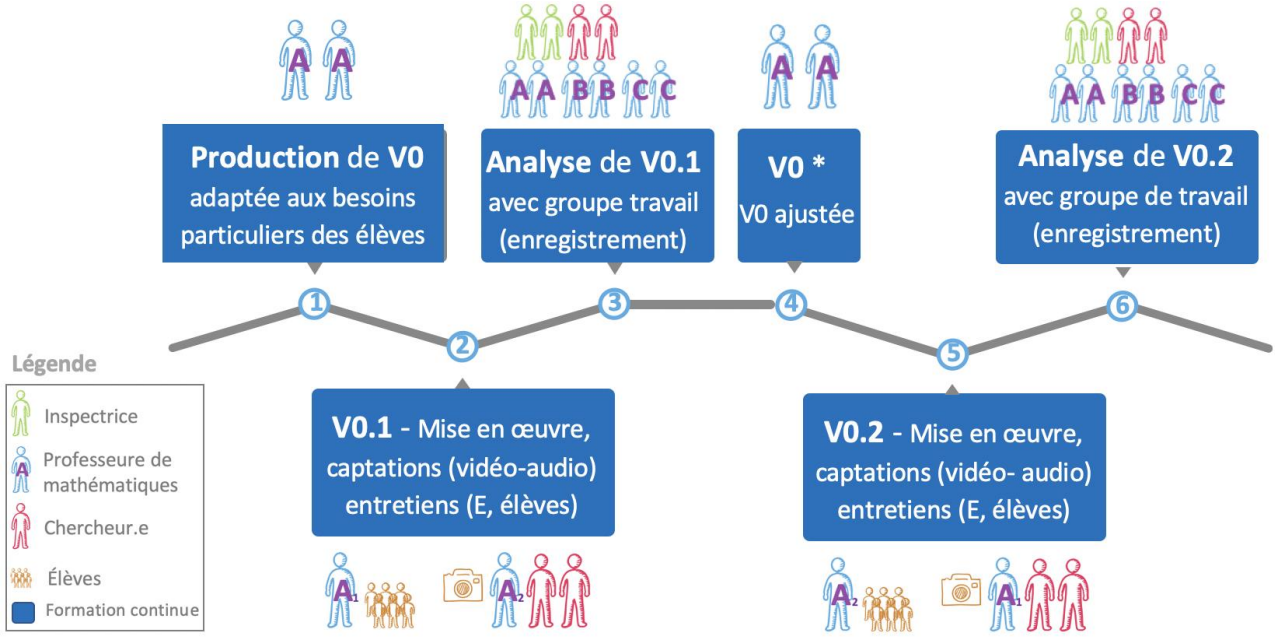


Figure 1. Protocole de conception de la ressource

2 Le dispositif de formation initiale

En appui sur la situation d'enseignement produite sur le thème de la proportionnalité selon le protocole précédemment décrit, nous avons conçu une situation de formation destinée à des étudiants de première année de master métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (M1, master MEEF), dans le cadre de l'unité d'enseignement « Pratique de la recherche », option didactique des mathématiques.

La situation de formation a été envisagée pour répondre à plusieurs objectifs. Un premier objectif concerne le développement de connaissances didactiques sur la proportionnalité comme outil de modélisation pour créer et résoudre des problèmes de type proportionnalité. Un second objectif est relatif au développement de connaissances pédagogiques pour favoriser la prise en compte de la diversité des élèves dans les situations d'enseignement mises en œuvre en classe. Un dernier objectif enfin est lié

à une initiation à la recherche : il s'agit d'une part de permettre un apport méthodologique pour le recueil de données en vue de la réalisation du mémoire à produire dans le cadre du master MEEF, et d'autre part de sensibiliser les étudiants aux pratiques inclusives développées par des professionnels de terrain engagés dans des projets de formation-recherche dans leur académie.

La démarche d'élaboration de la situation de formation s'est déroulée en différentes étapes que nous présentons dans ce qui suit et qui sont récapitulées sur la figure 2.

La première étape est celle qui a abouti à la production de l'*activité V1*, durant l'année scolaire 2022-2023 dans le cadre de la formation continue, lors du travail collaboratif entre enseignants, inspectrices et chercheurs (cf. figure 1).

Dans une deuxième étape, nous avons produit une situation de formation (*situation S0*) composée d'une mise en situation permettant de faire vivre aux étudiants des tâches de l'*activité V0*, d'une analyse de productions d'élèves issues des mises en œuvre *V0.1* et *V0.2* (productions écrites et extraits de transcription d'interactions entre élèves) et d'apports en lien avec nos objectifs de formation. La stratégie de formation choisie, de type homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996), consiste ainsi à faire vivre aux formés ce que vivent des apprenants lorsqu'ils sont dans une situation d'apprentissage, pour leur permettre de mieux percevoir ce que les apprenants ont besoin de comprendre et les difficultés auxquelles ils peuvent être confrontés. Il s'agit ensuite d'analyser la situation vécue pour dégager des connaissances pour l'enseignant, en vue de la transposition de la situation en classe.

Dans une troisième étape, nous avons mis en œuvre la situation avec deux groupes d'étudiants de M1. Des étudiants, avec le rôle d'observateur, ont observé certains de leurs pairs dans la réalisation de la tâche proposée. Les observations ont été recueillies par prise de notes, captation vidéo ou audio.

À l'issue de cette formation, un étudiant a adhéré au projet d'étudier la mise en œuvre de l'*activité V0* adaptée à un public d'élèves d'un dispositif ULIS[3] (*V0.3*) en collaboration avec une enseignante du groupe de travail et des chercheurs, dans le cadre de son mémoire de master. L'adaptation de l'*activité V0* a été d'abord discutée (quatrième étape), puis mise en œuvre avec un dispositif de recueil de données analogue à ceux déjà réalisés pour les mises en œuvre *V0.1* et *V0.2* (cinquième étape) et analysée (sixième étape).

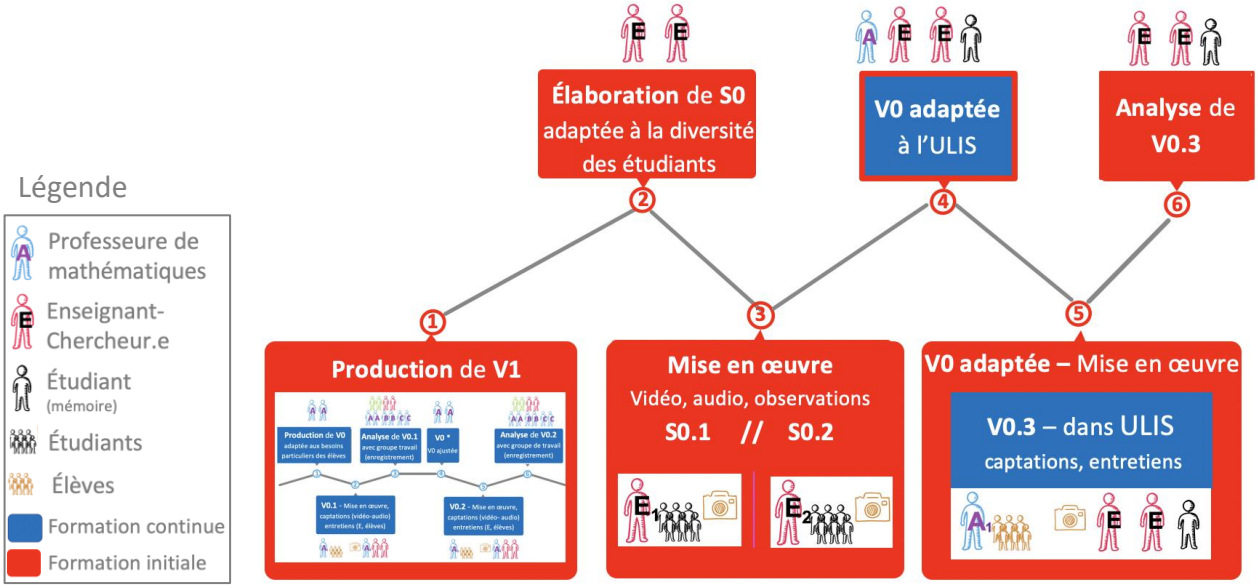


Figure 2. Protocole de conception de la situation de formation

Notre proposition de travail pour l'atelier suit également une stratégie de type homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996). Nous avons choisi de faire vivre aux participants de l'atelier la mise en

[3] Unité localisée pour l'inclusion scolaire

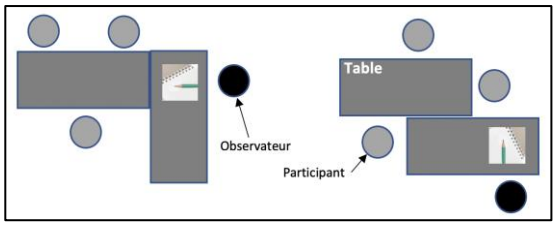
situation vécue par nos étudiants dans la *situation S0*, d'analyser des productions d'étudiants issues des mises en œuvre *S0.1* et *S0.2*, et de mener une réflexion sur des apports de formation qu'il serait opportun de donner aux étudiants.

III - MISE EN SITUATION

Nous présentons dans cette partie la mise en situation proposée, les productions des participants et un compte-rendu des échanges qui ont suivi.

1 La situation

Les tables sont disposées en îlots de quatre personnes qui se répartissent des « cartes de rôle » selon le souhait de chacun (figure 3).



Différentes dispositions des tables



Cartes de rôles pour les membres du groupe

Figure 3. Organisation du travail de groupe

Le « maître du son » doit veiller à un niveau sonore raisonnable lors des échanges entre les membres du groupe. Il intervient lorsque nécessaire pour demander à son groupe de parler moins fort. Le « maître du temps » est attentif au temps accordé pour la réalisation de la tâche. Il veille à ce que le travail soit réalisé dans le temps accordé. Le « secrétaire » complète la fiche de travail en notant ce sur quoi le groupe s'est mis d'accord. « L'observateur » se place en retrait, il ne doit pas intervenir, il est muet. Il prend notes des sujets de discussion entre les trois autres membres du groupe et de toutes autres observations qui lui semblent intéressantes. Dans de potentiels groupes de cinq, la personne qui n'a pas de carte est « rapporteur », sinon le « maître du son » endosse aussi ce rôle. Le rapporteur communique certains contenus de la fiche de travail lors de la mise en commun. Chaque groupe se voit attribuer trois images (figure 4) et une fiche de travail sur laquelle il faut inscrire : l'analyse de l'image sélectionnée, deux grandeurs choisies, si la situation considérée est de proportionnalité ou non, la formulation d'un problème et sa résolution.



Figure 4. Images

Les différentes étapes du travail à réaliser sont présentées oralement, tandis qu'un tableau récapitulatif reste projeté durant toute la durée de réalisation de la tâche. Sur ce tableau, figurent les numéros des étapes, les consignes écrites avec les verbes principaux en rouge, accompagnées de pictogrammes (dessin

d'une oreille associée au terme « écouter », dessin d'une loupe associé au terme « analyser », etc.), ainsi que le temps accordé pour le travail proposé (15 minutes représentées sur le dessin d'une horloge). Ainsi, il s'agit de :

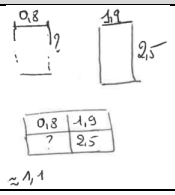
1. Écouter la consigne et chercher à comprendre ce qui est demandé.
2. Choisir une image parmi les trois distribuées et la coller sur la fiche.
3. Analyser l'image (décrire ce que l'on voit).
4. Choisir deux grandeurs et inventer un problème à partir de l'image.
5. Résoudre le problème.

Si le travail est fini avant la fin du temps imparti, les participants de l'atelier peuvent traiter une autre image.

2 Productions des groupes

Six groupes de quatre ou cinq personnes ont participé à la mise en situation. L'image du linge a été choisie par cinq groupes et celles des épices par un groupe. Le tableau 1 rend compte des productions des groupes. Pour chaque groupe sont renseignés le(s) problème(s) et les pistes de solutions proposées.

<table>
<tr><td colspan="2"> 
Image du linge</td><td>Analyse de l'image (compilation des analyses des cinq groupes)
Linge étendu, modélisable par des formes géométriques (carrés, rectangles), sèche sous le soleil et le vent. 9 objets, de couleurs (jaune, blanc, rouge) et tailles variées
Des cordes à linge, des pinces à linge, des arbres. Projection de l'ombre au sol.

Objet étudié : le linge (serviettes, torchons, nappes, draps)</td></tr>
<tr><th>Grandeur 1</th><th>Grandeur 2</th><th>Problèmes</th></tr>
<tr><td colspan="2">Longueur | Largeur
Situation de proportionnalité :
OUI</td><td>N°1
• Le torchon rouge est-il un agrandissement du torchon jaune ?
• Le torchon n°1 (derrière le jaune) est une réduction du torchon n°2 (rouge). Déterminer la longueur du torchon n°1.
→ Mesure directe, sans tenir compte de la perspective.
  </td></tr>
<tr><td colspan="2">Longueur | Aire
Situation de proportionnalité :
OUI-NON</td><td>N°2 - Les serviettes (du premier plan) sont étendues de la plus petite à la plus grande. Chacune a une aire double de la précédente. La suite des longueurs est-elle proportionnelle à la suite des aires ?
→ Si la largeur est fixe oui, sinon on ne peut rien dire.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Masse d'eau | Durée de séchage
Situation de proportionnalité :
?</td><td>N°3 - Deux torchons identiques mouillés n'ont pas la même masse. La durée de séchage est-elle proportionnelle à la masse d'eau contenue dans un torchon ?
→ Expérimentation : peser le torchon sec, peser le torchon essoré, faire en sorte que le n°2 ait une masse d'eau doublée, mesurer les durées de séchage.</td></tr>
<tr><td>Temps de séchage</td><td>Aire</td><td>N°4
• La serviette jaune a pour longueur 50 cm et pour largeur 30 cm. Elle sèche en 1h30. Combien de temps mettra la serviette violette pour sécher, sachant que son aire est de 3000 cm² ?
• Version ouverte : La serviette jaune met 1h30 à sécher. Combien de temps mettra la serviette violette pour sécher ?
→ On ne peut pas savoir (type de tissu, exposition au soleil, au vent). Pas de situation de proportionnalité.</td></tr>
</table>

Situation de proportionnalité : NON	**N°5 -** Monsieur X arrive et fait sécher son torchon, qui est deux fois plus long que le torchon jaune. Va-t-il mettre deux fois plus de temps à sécher ? → Non car il n'y a pas proportionnalité entre ces deux grandeurs car plusieurs facteurs extérieurs peuvent influencer le résultat (exposition au soleil, vent…).

 *Image des épices*		**Analyse de l'image** Problème de la vie réelle (marché), pas forcément du quotidien pour tous. Deux épices avec des prix identiques. **Objet étudié** : épices
Grandeur 1	**Grandeur 2**	**Problèmes**
Masse	Prix	**N°6** - Combien coûtent 150 g de curcuma ? 200 g de curcuma ? 75 g de curcuma ? → Plusieurs hypothèses de modélisation dont certaines utilisant la proportionnalité.
Proportionnalité : OUI-NON		

Tableau 1. Productions des six groupes de l'atelier

Nous relatons les questions qui se sont posées en lien avec la tâche à réaliser, au cours de l'atelier mais aussi en formation avec les étudiants de M1. Ces questions suggèrent potentiellement des choix à réaliser par le formateur lors de la mise en situation, en amont, au moment de la consigne ou au fil de la demande des étudiants.

Une question concerne le public d'élèves visé : le problème doit-il être envisagé pour des élèves d'un niveau imposé ? Nous avons observé des étudiants décidant du niveau de classe à qui serait donné leur problème : « Pour les cycles 1 : est-ce qu'il y a autant de linge coloré que de linge pas coloré ? ». Notons que ce problème n'a pas d'intérêt pour un travail sur la proportionnalité.

Les autres questions concernent l'exploitation de l'image pour la création ou la résolution du problème : peut-on « modifier la photo », par exemple dire que ce sont tous des torchons de forme carrée ? Peut-on changer les valeurs indiquées sur l'image (tarif des épices) ? Peut-on ajouter des données, comme le temps de séchage d'une serviette ou ses dimensions (n°4) ou encore apporter des informations (n°2 - serviettes d'aire double ; n°5 - torchon deux fois plus long) ? L'image sera-t-elle à disposition de ceux qui devront résoudre le problème (n°6 - Faut-il rappeler les tarifs des épices indiqués sur l'ardoise) ? Les résolveurs pourront-ils prélever des données (n°1 - mesure directe envisagée pour connaître les dimensions des parties visibles des torchons) ? L'image peut-elle servir seulement à suggérer des idées de problèmes (n°3 – l'image informe du contexte de torchons qui sèchent) ? Attend-on une résolution expérimentale ou une résolution avec un modèle mathématique (n°3 - proposition d'un protocole expérimental) ?

Les participants de l'atelier ont fait des choix différents de réponses à ces questions, avec des propositions de problèmes conduisant à une réflexion sur la pertinence ou non de l'application de la proportionnalité. Cette mise en situation a permis de préparer les participants à une analyse de productions d'étudiants ayant vécu une mise en situation analogue.

Notons qu'aux étudiants, nous avons proposé une analyse de productions d'un groupe d'élèves qui avait travaillé sur les trois images (linge, épices et bouteille). Nous mettons quelques productions d'élèves en annexe 1, offertes comme supports pour l'analyse, pour le lecteur qui souhaiterait les exploiter en formation.

IV - ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS

1 Documents et consignes pour l'analyse

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la situation proposée aux participants de l'atelier est une situation de formation. Ainsi, une mise en situation similaire à celle présentée dans la partie III.1 a été menée auprès de deux groupes d'étudiants de M1 MEEF mention 1 à l'automne 2023. Nous étudierons en particulier les productions d'un de ces groupes.

Lors de la séance, les étudiants ont été répartis en six groupes de quatre personnes. Dans chaque groupe, trois étudiants travaillaient sur les images et devaient remplir la même fiche que celle distribuée aux participants de l'atelier. Le dernier étudiant était chargé d'observer et, dans deux groupes, de filmer l'intégralité des échanges. Contrairement à la mise en situation proposée dans l'atelier, les étudiants avaient pour consigne de travailler sur les trois images, disposant pour ce faire d'environ quarante minutes. À la fin de la séance, nous avons récupéré les fiches complétées, les notes écrites des observateurs et les enregistrements vidéo des deux groupes filmés (les groupes 1 et 6). Les enregistrements vidéo ont été retranscrits puis les données ont été compilées et triées pour concevoir trois documents de trois ou quatre pages portant chacun sur un thème : les grandeurs, la proportionnalité et la modélisation[4]. Ce sont ces trois documents qui ont été étudiés par les participants à l'atelier lors de la phase d'analyse didactique.

Lors de l'atelier, deux groupes ont travaillé séparément sur le document « grandeurs », deux groupes sur le document « proportionnalité » et deux groupes sur le document « modélisation ». Les participants ne savaient pas que les documents étaient thématiques et ne connaissaient, *a fortiori*, pas le thème de leur document qui était identifié par une lettre (A, B ou C). La consigne était la suivante : « *Vous menez cette situation de formation avec vos étudiants de M1. Voici différentes productions d'étudiants que vous avez pu observer lors du travail en groupe. Sur quoi pourriez-vous orienter la mise en commun ? Quels apports de formation vous semblent nécessaires ?* ». Nous avons demandé à chaque groupe de répondre à l'écrit sur des feuilles que nous avons récupérées ensuite, puis nous avons proposé un moment de mise en commun. Lors de celui-ci, les participants ont été invités à s'exprimer thème par thème mais tous les autres participants pouvaient également intervenir.

2 Analyses des productions des étudiants de M1

2.1 Thème A : grandeurs

Une première difficulté des étudiants concerne la définition des grandeurs. Tous les participants de l'atelier s'accordent pour dire que cette notion n'est pas maîtrisée au regard des productions étudiées. Sur la figure 5, on peut voir par exemple renseignés, en guise de grandeurs, des nombres (3/4, 1/4, « nombre de »), des unités (L, cL, cm, cm^2, g, €) ou encore des objets (bouteille, drap). Des participants de l'atelier s'interrogent sur les grandeurs « draps colorés » et « draps blancs » : les étudiantes voulaient-elles parler du nombre de draps ? de la couleur ? On peut remarquer aussi que les « grandeurs » déterminées par les étudiants ne sont pas toujours cohérentes d'une image à l'autre (voir production du groupe 1 sur la figure 5).

[4] Ces trois notions sont très liées dans la situation proposée et ne sont pas toujours indissociables dans les productions des étudiants. Le but n'était pas de les séparer strictement mais de préparer des documents avec une dominante pour faciliter le travail d'analyse lors de l'atelier puis la mise en commun.

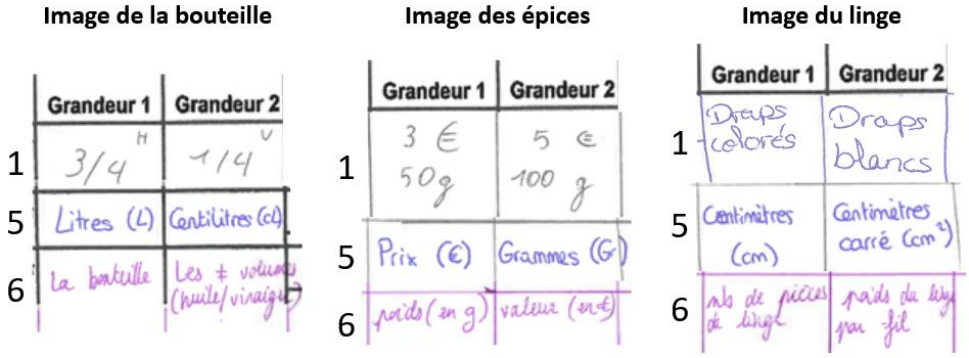


Figure 5. Grandeurs renseignées par les groupes 1, 5 et 6

Notons que lors de l'expérimentation, aucun étudiant n'a posé de question au formateur au sujet des grandeurs. Les étudiantes filmées ne s'interrogent pas non plus entre elles sur la signification du mot « grandeur » même si dans les deux groupes, on retrouve l'expression d'un doute et d'une confusion entre la notion de « grandeur » et celle d'« ordre de grandeur » :

> *Olga, à propos de l'identification des grandeur 1 et grandeur 2 pour l'image des épices : Ah bah dans ce cas-là vous êtes sûres qu'on met euro poids ? […]*
> *Anna : Non je pense pas je pense juste que c'est deux ordres de grandeur qu'on a dans l'énoncé.*
>
> ***Extrait transcription 1 : groupe 1***

> *Clara, à propos de l'image de la bouteille : Bah j'aurais dit que la première grandeur c'est la bouteille et que les autres grandeurs c'est les volumes*
> *Alice : Ah oui / donc combien de litres fait la bouteille ?*
> *Clara : Bah pas forcément / ah grandeur comme ça ? […] j'pensais juste à un ordre de grandeur moi […] l'ordre de grandeur c'est que la bouteille elle fait quatre doses et y a une dose de vinaigre et trois d'huiles.*
>
> ***Extrait transcription 2 : groupe 6***

Pour l'image de la bouteille, plusieurs groupes attribuent des nombres aux grandeurs 1 et 2 (figure 6) : « ¾ » et « ¼ » (groupe 1) ou « 1 » et « 3 » (groupe 4). Il semblerait également que les étudiants soient réticents à nommer deux fois la même grandeur. En effet, pour cette image, on pourrait vouloir comparer les différents volumes (d'autres choix sont possibles) et dans ce cas, on indiquerait « volume » dans les colonnes des deux grandeurs. Cependant, les étudiants n'écrivent jamais deux fois la même chose dans ces deux colonnes (comme on peut le voir figure 6 sur les productions des groupes[5]).

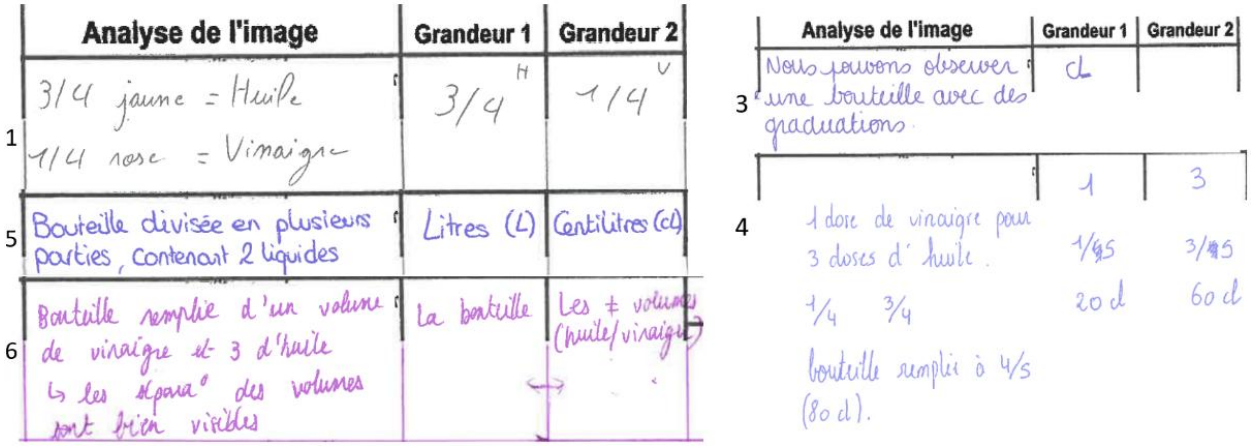


Figure 6. Description et grandeurs pour l'image de la bouteille des groupes 1, 3, 4, 5 et 6

[5] Le groupe 2 n'est pas représenté car les grandeurs choisies sont le « volume » et la « taille ». Notons cependant que le problème proposé ensuite met uniquement en jeu des volumes et aucune longueur.

Les apports faits aux étudiants doivent donc leur permettre d'apprendre à distinguer l'objet de la grandeur, de la mesure et de l'unité associée. Notons enfin que certaines images font apparaître des complexités en lien avec la notion de grandeur. Ainsi, les participants de l'atelier évoquent l'impossibilité de faire de la proportionnalité en considérant la couleur comme une grandeur. Nous précisons que la couleur a été explicitement désignée comme une grandeur par une enseignante lorsque cette carte a été analysée par un élève de collège lors de l'expérimentation de la situation V0.2. Cependant, les participants de l'atelier rappellent que la couleur n'est pas une grandeur (mesurable) à moins de lui associer une autre grandeur comme la longueur d'onde ou un code RGB.

Au-delà de ces questionnements récurrents en formation, les participants de l'atelier se sont demandés si l'absence de maîtrise de la notion de grandeur pouvait être un obstacle à la compréhension de la proportionnalité. Dans la partie suivante, nous étudions donc ce que les étudiants ont produit en lien avec la proportionnalité.

2.2 Thème B : proportionnalité

La fiche proposée aux participants de l'atelier et aux étudiants demande d'abord de déterminer deux grandeurs puis d'indiquer si elles sont proportionnelles. Les élèves, les étudiants ou les participants de l'atelier doivent seulement après imaginer un problème (qui relève ou non de la proportionnalité). Nous discuterons de la pertinence (ou non) de cet ordre par la suite mais nous remarquons que pour l'image des épices, alors que plusieurs groupes d'étudiants ont choisi les mêmes grandeurs, tous ne sont pas d'accord sur l'existence d'une situation de proportionnalité (figure 7).

	Analyse de l'image	Grandeur 1	Grandeur 2	Situation de proportionnalité?	
				OUI	NON
2	Sacs contenant du paprika et du curcuma Affichage avec prix à payer 50 et 100 grammes.	poids en grammes	prix en euros		X
				OUI	NON
3	On voit 2 sacs d'épices (Curcuma et Paprika) avec des prix affichés	gramme	€		
				OUI	NON
4	Vente d'épices sur un marché.	Grammes	€		X

Figure 7. Description et grandeurs pour l'image des épices des groupes 2, 3 et 4

Ces choix différents semblent propices à la discussion entre les étudiants selon plusieurs participants de l'atelier. Concernant le groupe 3, des participants font l'hypothèse que les étudiants ont repéré une régularité entre les prix du paprika et ceux du curcuma, ils pourraient avoir conclu que « deux objets suivant la même règle sont proportionnels ». Cette hypothèse concorde avec ce que nous avons pu observer au collège lors de l'expérimentation de la situation V0.2, un élève ayant livré cette même explication. Concernant les groupes 2 et 4 (qui n'ont pas été filmés), nous pouvons supposer qu'ils raisonnent comme Clara du groupe 6 :

> *Clara : parce que euh on voit que cinquante grammes c'est trois euros et par contre cent grammes c'est cinq sauf que si c'était proportionnel cent grammes ça serait […] six euros*
>
> ***Extrait transcription 3 : groupe 6 à propos de l'image des épices***

Lors d'une mise en commun, les étudiants pourraient ainsi confronter leurs explications et des participants de l'atelier relèvent qu'il serait alors pertinent de revenir avec eux sur ce qui peut être proportionnel ou non, et pour quelles raisons on peut l'affirmer. On peut même se demander en quoi cela a du sens de se poser la question de la proportionnalité, notamment en se référant à certains contextes et conventions sociales : conventionnellement, le prix et la masse sont proportionnels mais il existe des phénomènes de promotions.

L'image de la bouteille est intéressante aussi en ce qui concerne la proportionnalité car chez les élèves de collège comme chez les étudiants, il n'y a aucun doute sur le fait qu'elle représente une situation de proportionnalité. Ceux-ci remarquent en effet le découpage en quatre volumes et un rapport tel qu'il y a trois fois plus d'huile que de vinaigre dans la bouteille. C'est cette relation multiplicative qui est assimilée à de la proportionnalité. Comme les participants de l'atelier l'ont fait remarquer, il serait intéressant de travailler sur la différence entre ratios et proportionnalité. On peut également faire le lien avec le contexte et les conventions sociales évoqués plus haut puisque dans le cadre d'une recette de vinaigrette, on pourrait facilement imaginer que pour une bouteille deux fois plus grande, on doublerait les doses de vinaigre et d'huile, ce qui évoquerait effectivement une situation de proportionnalité. Il semblerait ainsi important que les étudiants comprennent que les volumes d'huile et de vinaigre d'une seule bouteille ne sont pas proportionnels (malgré la relation multiplicative qui permet de passer de l'un à l'autre) et qu'au moins deux grandeurs et quatre mesures sont nécessaires pour déterminer si une situation est proportionnelle ou non.

Lors de la mise en situation présentée dans la partie III, nous avons remarqué que les participants de l'atelier ont majoritairement choisi l'image du linge pour produire des problèmes de proportionnalité. Ils se différencient des étudiants de M1 MEEF qui ont jugé cette image plus difficile que les autres et qui semblent divisés sur les grandeurs en jeu, la proportionnalité et les problèmes que l'on peut poser. Ainsi, le groupe 3 détermine que les grandeurs en jeu sont « cm » et « m » mais ne tranche pas sur la question de la proportionnalité et ne propose pas de problème. Le groupe 6 identifie des grandeurs considérées comme non proportionnelles, « nb de pièces de linge » et « poids du linge par fil », mais ne propose pas non plus de problème. Le groupe 1 identifie des « draps colorés » et « draps blancs » qui ne sont pas proportionnels et propose donc un problème à destination du cycle 1 qui ne relève pas de la proportionnalité : « Marie étend ses draps, sur neuf draps, trois sont colorés et les autres sont blancs. Combien y a-t-il de draps blancs ? ». Pour le groupe 2, le « nombre de tissus » et la « taille des tissus » ne sont pas non plus proportionnels, et le problème suivant est proposé : « un fil peut contenir 5 torchons. Noa a 18 torchons. Combien de fil faudra-t-il à Noa ? »[6]. On peut imaginer que ce problème met finalement en jeu la proportionnalité, mais ce n'est pas précisé dans l'énoncé ou le corrigé. De même chez les groupes 4 et 5 qui s'intéressent à l'aire des draps (figure 8).

Ainsi, les participants de l'atelier remarquent qu'en lisant les corrections rédigées par les étudiants à leurs propres problèmes, le modèle proportionnel reste très implicite. Ces participants suggèrent qu'il serait intéressant d'en discuter avec les étudiants, dans un aspect plus didactique que mathématique, afin qu'ils puissent se demander à quel point la correction doit expliciter le choix du modèle proportionnel lorsqu'on travaille sur cette notion avec ses élèves. La modélisation (par un modèle proportionnel ou non) est au cœur de la situation choisie, c'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

[6] Notons que ce problème ne met pas en jeu les deux grandeurs identifiées.

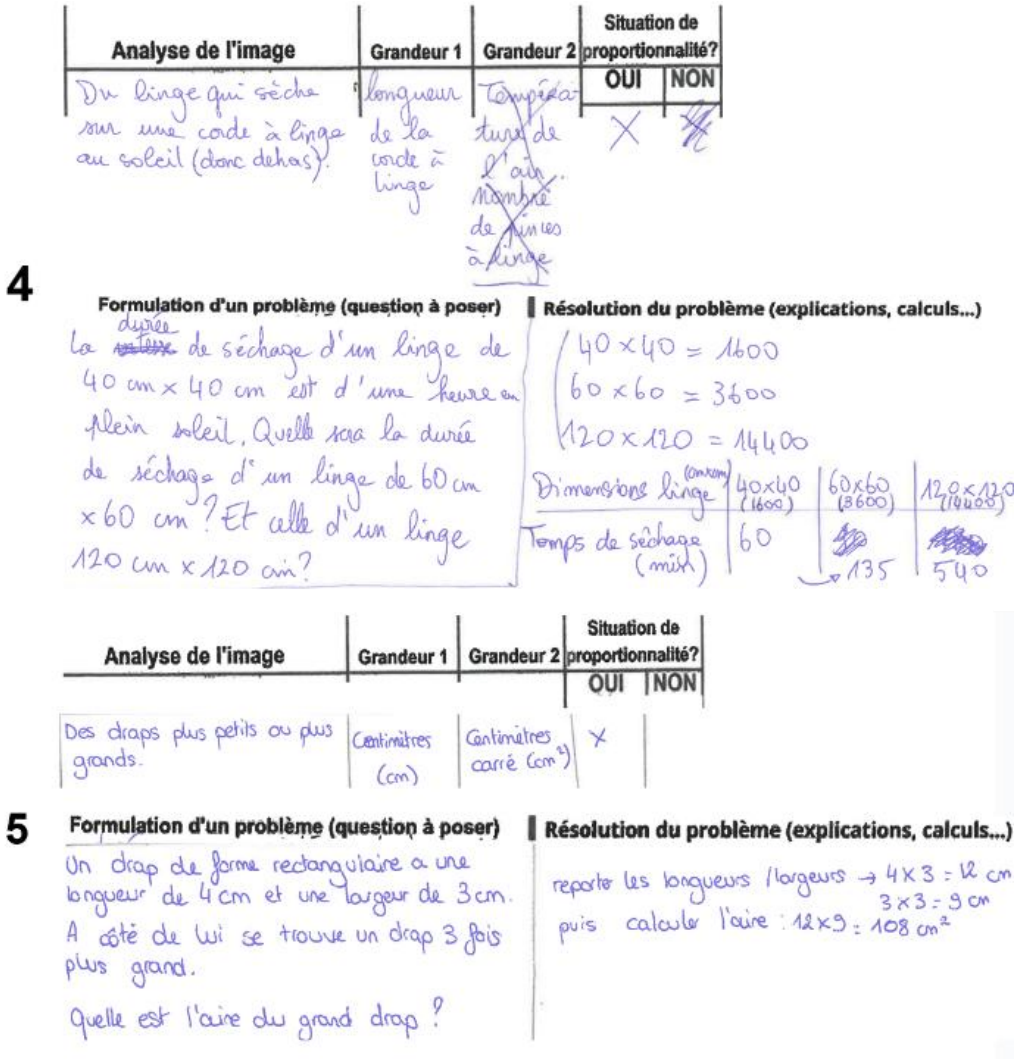


Figure 8. Description, grandeurs et problèmes pour l'image du linge des groupes 4 et 5

2.3 Thème C : modélisation

Selon certains participants, si les étudiants n'explicitent pas le modèle choisi, c'est parce qu'ils font passer la question pratique (par exemple : « qu'est-ce qui coûte le moins cher ? ») avant la mise en œuvre de connaissances mathématiques. Ces participants pensent qu'ils seraient intéressants de distinguer les connaissances pratiques des connaissances mathématiques avec les étudiants mais aussi pour que les étudiants s'en emparent avec leurs élèves. Une participante de l'atelier a alors évoqué le travail d'Yvain-Prebiski et Discours (2022) qui porte sur la nécessité de faire des choix pour pouvoir modéliser une situation complexe. Il semble nécessaire que les étudiants, en tant que futurs enseignants, puissent être conscients de ces choix et de ce qu'ils perdent ou gagnent par rapport à la situation complexe lorsqu'ils les appliquent.

Si ces choix ne sont jamais explicites dans les productions des étudiants que nous avons analysées, il semble évident que certains groupes en ont pourtant fait. Des participants ont ainsi remarqué que les étudiants du groupe 3 avaient modifié les données de l'image des épices dans l'énoncé du problème qu'ils écrivent (figure 9). C'est le même groupe qui avait considéré que les « grammes » et les « € » étaient proportionnels. Même si on ne peut pas écarter l'hypothèse d'une erreur de lecture de l'image, nous faisons plutôt l'hypothèse que ce groupe a fait le choix de se placer dans le cadre d'une situation où les masses et les prix sont proportionnels. Cette hypothèse est renforcée par les notes de l'observatrice de ce groupe qui indiquent « c'est pas proportionnel si y en a une + gagnante que l'autre », il semblerait donc

que les étudiants aient remarqué le phénomène promotionnel en jeu sur l'image et aient choisi de ne pas le prendre en compte pour construire un problème de proportionnalité.

Concernant l'image des épices, selon les participants de l'atelier, la question intéressante est de se demander combien un acheteur payerait s'il achetait 150 grammes d'épices : les 150 grammes sont-ils au prix des 100 grammes ? des 50 grammes ? sont-ils décomposés en 100g + 50g ? Les étudiants semblent avoir plus ou moins conscience de cette ambiguïté. Ainsi, les membres du groupe 4 considèrent uniquement le prix pour 100 grammes (alors qu'ils avaient indiqué que les « grammes » et les « € » n'étaient pas proportionnels) pour calculer le prix pour 125 grammes et pour 175 grammes d'épices (figure 9). Le groupe 2 contourne le problème en choisissant des multiples de 100 (300 grammes de curcuma et 500 grammes de paprika) et le groupe 6 propose une simple lecture d'image : « Michel achète 50 g de curcuma et 100 g de paprika. Combien cela va-t-il lui coûter ? ».

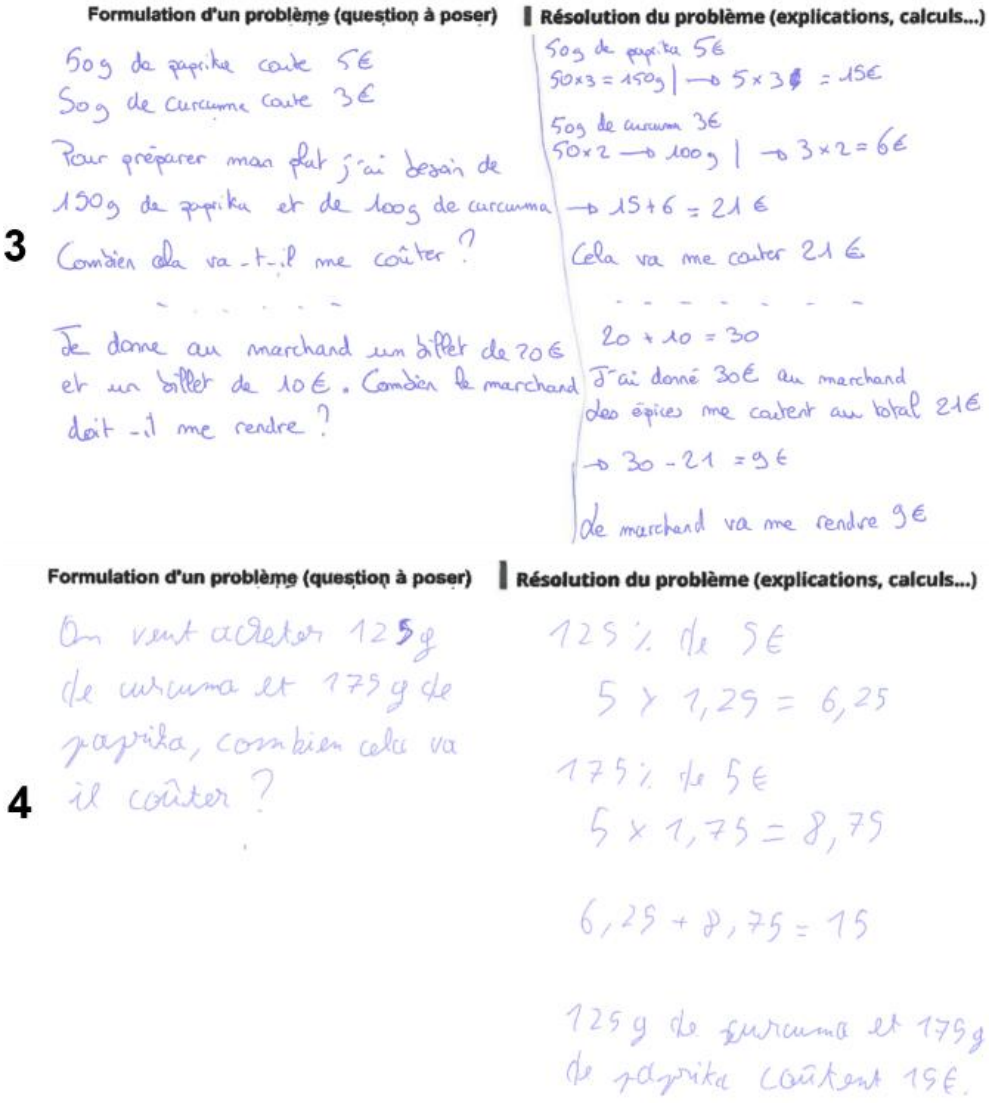


Figure 9. Problème et sa résolution pour l'image des épices des groupe 3 et 4

Au contraire, les groupes 1 et 5 se penchent sur la question soulevée par les participants de l'atelier en se demandant « quelle solution est la plus avantageuse ? » (figure 10).

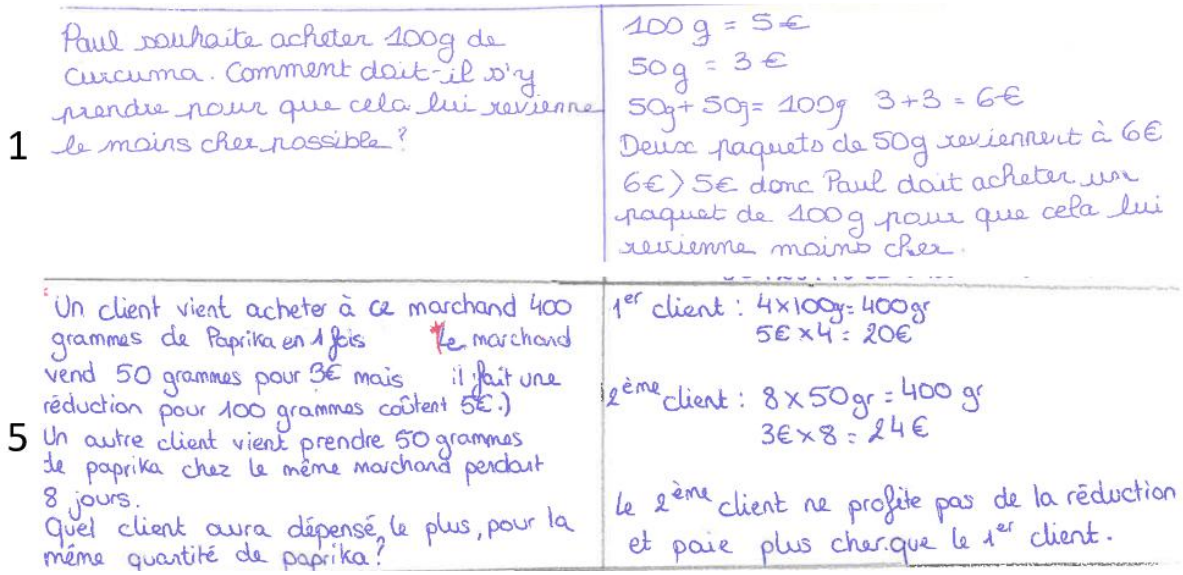


Figure 10. Problème et sa résolution pour l'image des épices des groupes 1 et 5

L'image de la bouteille nécessite également de faire des choix de modélisation. Les participants de l'atelier soulignent d'abord le fait qu'il faut assimiler la bouteille à un cylindre dont le volume d'une certaine partie est proportionnel à la hauteur. On peut ensuite se demander s'il faut considérer que la bouteille est remplie ou non. C'est une question que s'est posée le groupe 6 :

Alice : après euh après la bouteille elle est pas complètement remplie
Clara : oui […] mais du coup je sais pas si ça représente quelque chose ou pas c'est toute la question […] parce que les bouteilles elles sont jamais remplies à fond
Alice : nan nan c'est vrai ça s'arrête plus par là [elle désigne le goulot de la bouteille]
Clara : oui mais du coup est-ce qu'on considère que là elle est pleine et
Alice : oui on euh
Ninon : c'est ça le truc j'pense qu'on peut je pense qu'on peut considérer que oui

Extrait transcription 4 : groupe 6 à propos de l'image de la bouteille

Cinq groupes sur six font ainsi le choix de modéliser une bouteille complètement remplie d'huile et de vinaigre alors que le groupe 4 considère la bouteille remplie au quatre cinquièmes (figure 6).

Pour conclure concernant l'aspect de modélisation de cette situation, les participants de l'atelier considèrent que les images distribuées aux élèves ou aux étudiants ont une grande importance. D'une part parce que celles-ci permettent des productions jugées plus ou moins riches : ils considèrent ainsi les productions autour de l'image du linge beaucoup plus riches que celles autour de la bouteille puisque cette dernière n'amène que peu de débats entre les étudiants (malgré leurs erreurs comme nous l'avons vu dans la partie IV.2.2). D'autre part, comme nous l'avons vu dans la partie III.2, il faut réfléchir au statut que joue l'image dans le problème posé. Ainsi, lors de l'expérimentation en formation, certains étudiants ont demandé au formateur si le problème posé serait donné avec l'image ou non. Il s'agit alors de savoir si l'image est un prétexte et si on peut donc s'éloigner des données qui y sont présentes comme le groupe 3 pour l'image des épices (figure 9). Mais les participants à l'atelier se sont aussi interrogés sur le rôle de l'image : simple décoration ou élément indispensable à la résolution du problème ? C'est une question qu'il est également intéressant de travailler avec les étudiants en tant que futurs enseignants, en appui par exemple sur les travaux de Fagnant (2018).

3 Complément aux analyses des participants

3.1 Apports mathématiques et didactiques en formation

Dans cette partie, nous complétons les apports possibles qui ont émergés au cours des échanges lors de l'atelier par quelques apports que nous avons faits à nos étudiants de M1.

La notion de grandeur n'est pas si simple à définir, en particulier sans faire immédiatement intervenir la notion de mesure. Le Bureau International des Poids et Mesures définit ainsi, dans le Vocabulaire International des termes fondamentaux et généraux en Métrologie (JCGM-VIM, 2008), les grandeurs comme : des « propriétés d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance que l'on peut exprimer quantitativement sous la forme d'un nombre et d'une référence ». Pour définir cette notion en formation, nous nous sommes donc d'abord appuyés sur la thèse de Comin (2000) qui traite de la proportionnalité et qui définit lui aussi la notion de grandeur en mathématiques :

> *Dans la pensée et la langue commune, une grandeur est perçue comme la propriété d'un objet ; un objet possède une certaine grandeur comparativement à un objet de même nature. La grandeur d'un objet est une qualité qu'il partage avec ceux qui lui sont comparables d'un certain point de vue. Un objet est plus grand qu'un autre, en référence à une idée protomathématique de longueur, de volume, de masse, …, exprimée par les mots « grand, gros, lourd… »* (Comin, 2000, Annexes p. 40)

Nous avons ensuite distingué les différents termes connexes à cette notion : unité de mesure, mesure, grandeur mesurée. Pour cela, nous nous appuyons sur un travail de Perrin-Glorian (2014) qui répond à une commande du Conseil Supérieur des Programmes à propos des nouveaux programmes de cycle 2 et 3 (parus en 2015 pour une application à la rentrée 2016). Synthétiquement : une « unité de mesure » est donc une grandeur étalon à laquelle on peut comparer toute autre grandeur de même nature. Une « mesure » est un nombre et une « grandeur mesurée » est un nombre associé à une unité de mesure (Perrin-Glorian, 2014, p. 6).

Concernant la proportionnalité, nous nous appuyons également sur les travaux de Comin (2003a, 2003b) : « nous dirons que deux grandeurs sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre » (Comin, 2003a, p. 45). L'auteur s'intéresse alors à la détermination d'une mesure dans le cas où des grandeurs sont proportionnelles : « rappelons que le rapport de deux éléments d'une même grandeur est dit interne (c'est un scalaire, c'est à dire un nombre sans unité) alors que le rapport de deux éléments issus de deux grandeurs distinctes est dit externe (c'est un rapport fonctionnel, il n'est explicitable qu'avec les unités de mesures des deux grandeurs) » (Comin, 2003a, p. 48). Ainsi, « la recherche d'une quatrième proportionnelle nécessite l'explicitation soit du rapport interne (q), soit du rapport externe (k) » (Comin, 2003b, p. 204). En plus de ces apports, la proportionnalité fait l'objet d'un ou plusieurs autres cours par la suite mobilisant notamment le puzzle de Brousseau (Morin, 1988) et les travaux de Péault (2003).

Autour de la modélisation et en particulier concernant le modèle proportionnel, nous nous appuyons sur l'article de Girard (1999) qui donne l'exemple suivant : « si on a utilisé 2 litres de peinture pour peindre 8 m², combien doit-on acheter de peinture pour pouvoir terminer les 15 m² qui restent ? » (Girard, 1999, p. 10). C'est un problème typique de proportionnalité. Pourtant, appliquer le modèle proportionnel à cette situation nécessite de faire beaucoup d'hypothèses (le support est toujours le même, la peinture est uniformément répartie, etc.). La réponse obtenue à la question est une approximation de la véritable réponse sans qu'on puisse vraiment déterminer le degré d'incertitude. Selon l'auteur : « la seule façon de savoir si un modèle est adapté est de le confronter avec la réalité. S'il donne des résultats aberrants, alors on doit le rejeter. S'il donne des résultats cohérents avec la réalité, il sera déclaré valable sans qu'on sache dans quelles limites il l'est, ni s'il n'y en a pas un meilleur » (Girard, 1999, p. 10). Les discussions engagées autour du choix d'un modèle et de sa validité doivent ainsi permettre aux étudiants de prendre conscience des implicites dans la formulation de leurs problèmes et de leurs corrigés.

3.2 Discussion sur la fiche à remplir

En plus des apports mathématiques et didactiques, nous nous sommes interrogés sur les supports proposés. Ainsi, la pertinence de la fiche remplie par les participants de l'atelier (ainsi que les étudiants et les élèves) a été abordée lors des discussions à l'atelier mais aussi avec les étudiants. Nous avions fait le choix de proposer la fiche telle quelle, puis d'engager une discussion avec eux sur la pertinence de ce support. Si l'analyse de l'image et le fait de déterminer deux grandeurs ont semblé intéressants, nous avons amené les étudiants à s'interroger sur la question « situation de proportionnalité ? ». En particulier : de quelle situation parle-t-on ici ?

Soit la situation fait référence à l'image toute entière et dans ce cas, on peut y observer diverses situations de proportionnalité et de non proportionnalité selon la façon dont on choisit de la regarder. Soit la situation fait référence à l'image réduite aux deux grandeurs identifiées et dans ce cas, il est nécessaire de se demander comment on détermine que deux grandeurs sont proportionnelles. Par exemple, sur l'image des épices, on pourrait ne regarder que le paprika et les grandeurs « masse » (des épices) et « prix » (des épices), on peut alors en déduire que ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. Mais les images affichant assez d'informations pour déterminer la (non) proportionnalité sont rares et les deux autres images présentées à l'atelier le montrent. Pour déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles, il faudrait alors se référer à des connaissances de la vie quotidienne. Par exemple, d'expérience, on sait que les situations impliquant des recettes respectent la proportionnalité entre les quantités d'ingrédients. Pour le linge, on sait que la surface à faire sécher n'est pas proportionnelle à la durée de séchage (un linge deux fois plus étendu ne met pas deux fois plus de temps à sécher, toutes les autres conditions étant les mêmes par ailleurs). Sont-ce ces connaissances pratiques que les concepteurs de la fiche voulaient travailler ?

Soit la situation fait référence au problème qui doit être construit ensuite par les élèves ou étudiants et dans ce cas, il serait sûrement plus pertinent d'inverser l'ordre sur la fiche pour demander aux élèves ou étudiants de créer le problème d'abord, de décider s'ils choisissent ou non de se placer dans le cadre d'un modèle proportionnel ensuite, puis de rédiger la solution.

Dans un premier temps et au vu des difficultés rencontrées par les étudiants, il serait peut-être plus intéressant d'envisager le troisième cas et de modifier la fiche à remplir. Une fois les étudiants au clair avec les notions de grandeur, de proportionnalité et de modélisation, on pourrait alors leur proposer différentes fiches présentant différents ordres pour travailler cet aspect didactique avec eux.

V - PRISE EN COMPTE DE LA DIVERSITÉ

1 Prise en compte de la diversité dans l'*activité* V0

Suite à l'analyse didactique des productions des étudiants, nous sommes revenus avec les participants de l'atelier sur l'*activité* V0 construite par le binôme d'enseignantes et qui est à peu près celle qu'ils ont expérimenté dans la situation (cf. parties II et III). Les enseignantes ont construit la situation dans une perspective de prise en compte de la diversité de leurs élèves. Nous avons donc interrogé les participants de l'atelier sur ce qu'ils percevaient des choix faits par les enseignantes pour atteindre cet objectif d'inclusion.

Le premier choix évoqué par les participants de l'atelier est celui de travailler à partir d'images sans textes. En effet, les enseignantes ont consciemment choisi de limiter l'écrit, en réception comme en production, celui-ci pouvant empêcher la mise en œuvre des connaissances mathématiques de certains élèves à besoins éducatifs particuliers. Les participants de l'atelier notent cependant des obstacles au fait de se baser sur des images puisqu'il est nécessaire d'y chercher des indices et de faire un gros travail d'interprétation et d'inférences.

Le deuxième choix repéré par les participants de l'atelier concerne le travail en groupe et les rôles des élèves au sein de ceux-ci. Deux possibilités sont évoquées : d'une part, laisser le choix aux élèves de leur rôle afin de leur permettre de prendre des initiatives et ainsi favoriser leur enrôlement et leur engagement. D'autre part, l'enseignant peut aussi attribuer les rôles aux élèves en cherchant à leur éviter des difficultés, ou, au contraire, en souhaitant les faire progresser sur des aspects qui posent problème, par exemple en attribuant le rôle d'observateur (présent dans la situation de formation mais qui n'existait pas dans l'*activité* V0) à un élève qui aurait tendance à se précipiter pour répondre. Dans la pratique, les conceptrices de l'*activité* V0 ont en effet choisi de faire travailler les élèves en groupes hétérogènes pour que les élèves à besoins éducatifs particuliers puissent déléguer les tâches qu'ils ne pouvaient pas faire et que les élèves puissent s'apporter des explications les uns aux autres. Elles ont fait le choix de ne pas attribuer les rôles sans toutefois toujours constater les effets attendus. Dans une classe en effet, les élèves d'un groupe se sont répartis le travail de telle sorte que tout le monde a travaillé en parallèle sur une image, ce qui n'a donc pas évité à l'élève dyslexique du groupe de devoir rédiger. Des participants de l'atelier suggèrent d'ajouter le rôle de « régulateur » qui ferait attention à ce que chacun garde son rôle. De plus, les participants de l'atelier soulignent le fait que travailler en groupe n'a rien de naturel et nécessite un apprentissage à part entière.

Le troisième choix repéré par les participants de l'atelier concerne la structuration de la fiche et les pictogrammes associés à chaque consigne. Les enseignantes ont en effet fait ces choix pour aider les élèves à s'organiser et à se concentrer.

Le dernier choix repéré par les participants de l'atelier porte sur les images. Certaines images nécessitent plus ou moins de créativité, d'autres peuvent être jugées plus rassurantes par les élèves. Dans l'*activité* V0, beaucoup d'autres images étaient proposées et les élèves pouvaient ainsi choisir les trois sur lesquelles ils voulaient travailler, ce qui avait encore une fois pour but de favoriser leur engagement.

Un élément important, qui n'a pas été discuté lors de l'atelier, est le choix qu'a fait le binôme concepteur de construire une unique *activité* pour tous les élèves de la classe. C'est également le choix fait par les autres binômes du projet de formation-recherche. Nous nous plaçons donc ici dans une conception universelle de l'enseignement en reprenant la définition de « conception universelle » de l'ONU (2006) :

> *On entend par « conception universelle » la conception de produits, d'équipements, de programmes et de services qui puissent être utilisés par tous, dans toute la mesure possible, sans nécessiter ni adaptation ni conception spéciale. La « conception universelle » n'exclut pas les appareils et accessoires fonctionnels pour des catégories particulières de personnes handicapées là où ils sont nécessaires.* (ONU, 2006, p. 5)

2 Expérimentation de l'*activité* V0 en ULIS collège

Comme nous l'avons vu dans la partie II, l'*activité* V0.3 a été proposée dans le cadre d'un dispositif ULIS en collège. L'enseignante, qui est une des deux conceptrices de l'*activité* V0, a cependant fait des choix assez différents pour prendre en compte ce contexte d'enseignement spécialisé. Ainsi, une première séance est d'abord consacrée au décodage des images et en particulier l'image des citrons (figure 11, à gauche). Avec l'enseignante, les élèves discutent de la notation « 0.50 » plutôt que « 0,50 » et de la signification des signes « / U ».



1. De quelle couleur sont les citrons ?
2. Un citron ça coûte 50 centimes.
3. D'où viennent les citrons ?
4. Si j'achète 2 citrons je paie 1 €
5. Ça veut dire quoi U?
6. J'ai 5 €. J'achète combien de citrons avec ça ?

Figure 11. Image des citrons (à gauche), questions mathématiques en lien avec cette image (à droite)

Suite au décodage de l'image des citrons, l'enseignante présente aux élèves une tâche dans laquelle ils doivent déterminer si les phrases qu'on leur présente sont ou non des questions mathématiques (figure 11, à droite). Ces phrases proviennent d'un exercice réalisé avec une partie des élèves de l'ULIS[7] lors d'une précédente séance au cours de laquelle ils devaient écrire des questions mathématiques. L'enseignante ayant constaté que certaines des phrases produites n'étaient pas des questions et/ou n'avaient pas de lien avec les mathématiques, a décidé de retravailler la notion de « question mathématique » avant d'en faire écrire aux élèves.

À partir de l'image des citrons, puis de celle d'une recette de vinaigrette, les élèves constituent ensuite un répertoire de grandeurs[8] que l'enseignante écrit au fur et à mesure au tableau (« prix », « nombre de », « masse », etc.). Enfin, les élèves sont amenés à repérer les grandeurs en jeu sur plusieurs images parmi un grand nombre d'images à disposition. Ils doivent entourer les nombres présents sur l'image et indiquer à quelles grandeurs ils correspondent.

La proportionnalité et l'*activité* V0 en tant que telles ne sont abordées que dans une séance suivante.

3 Prise en compte de la diversité dans la situation de formation

Concernant la situation de formation avec les étudiants de master MEEF, nous avons repris la plupart des choix faits par les conceptrices de l'*activité* V0. En effet, les étudiants ont travaillé par groupe (de leurs choix). À part pour le rôle d'« observateur », nous n'avons pas utilisé les rôles pour laisser aux étudiants le choix de s'organiser comme ils le souhaitaient. Certains groupes ont ainsi travaillé en parallèle (chaque étudiant a travaillé sur une image) alors que d'autres, dont les deux groupes filmés, ont travaillé sur les images une par une (les trois étudiants ont travaillé sur les trois images).

Le support utilisé est le même que dans l'*activité* V0, ce qui implique le même découpage ainsi que les mêmes pictogrammes. En revanche, nous n'avons pas laissé le choix des images afin de pouvoir travailler ensuite sur des productions d'élèves ayant choisi ces images particulières.

En pratique, nous constatons que dans les deux groupes filmés, les étudiantes avec des connaissances peu assurées en mathématiques ne se distinguent pas des autres. Le problème étant consistant pour toutes, elles participent aux discussions au même titre que les autres, elles proposent des idées et valident ou invalident les idées proposées par d'autres. Même si les participants de l'atelier n'ont eu accès qu'à des extraits de transcription, nous remarquons ainsi qu'une même étudiante du groupe 1 a été repérée comme en difficulté par certains et comme plutôt moteur du groupe (avec des propositions mathématiques pertinentes) par d'autres. Il est à noter que le niveau général de la plupart de nos étudiants de M1 est plutôt faible en mathématiques, comme en témoignent certaines de leurs productions (cf. partie IV). Nos premières analyses des interactions entre étudiants au sein de groupes hétérogènes ont permis d'entrevoir un certain intérêt au dispositif de travail expérimenté pour la réactivation de leurs connaissances sur la proportionnalité.

VI - CONCLUSION

Pour conclure, la situation présentée dans cet atelier nous semble riche de potentialités, que ce soit en classe ou en formation d'enseignants ou de formateurs. Concernant la formation des enseignants plus particulièrement, elle permet de travailler des notions clefs relatives aux domaines des grandeurs, de la proportionnalité et de la modélisation. D'abord d'un point de vue mathématique, puisque la stratégie de formation choisie, l'homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996), amène les étudiants à vivre

[7] Les élèves du dispositif ULIS ont des cours avec l'enseignante spécialisée mais peuvent aussi se trouver dans leurs classes de référence. D'une heure à l'autre et d'un jour à l'autre, les élèves présents diffèrent donc.

[8] Le mot « grandeur » n'est pas prononcé.

la situation comme leurs élèves pourraient la vivre, ce qui permet de mettre au jour leurs connaissances et de déceler leurs difficultés sur ces notions. Le formateur peut alors réaliser des apports de formation répondant aux besoins avérés des étudiants. Ensuite d'un point de vue didactique, puisque l'analyse de productions et de discours d'élèves, l'analyse de leurs propres productions et l'analyse du support permettent de travailler sur l'enseignement des notions en jeu, sur la place du modèle et du travail de modélisation quand on pose un problème ou qu'on rédige une solution, ainsi que sur les potentialités et les obstacles que peut offrir un support de travail. De plus, cette situation peut permettre d'aborder l'idée de conception universelle de l'enseignement comme une piste pour prendre en compte la diversité de ses élèves et de discuter de certains obstacles, notamment celui de l'écrit pour de nombreux élèves en difficulté.

Enfin, le processus de conception de la situation de formation (cf. partie II), en appui sur un travail impliquant chercheurs, formateurs, inspecteurs, enseignants de terrain, étudiants et élèves, nous semble riche pour ancrer la formation dans la réalité du terrain et développer des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques des enseignants, avec comme ambition la prise en compte de la diversité des apprenants (élèves, étudiants, enseignants). Nous avons aussi pu le vérifier dans une situation introduisant la symétrie axiale en sixième comme transformation ponctuelle, proposée par un autre binôme d'enseignants au sein de notre dispositif de formation-recherche, et expérimentée avec des étudiants du master MEEF mathématiques (Grenier-Boley et al., à paraître ; Lesnes et al., à paraître).

VII - BIBLIOGRAPHIE

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Verillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(1), 33-57.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. [Thèse de doctorat, Université Bordeaux-I].

Comin, E. (2003a). Des graines et des souris. *Grand N, 72*, 41-73.

Comin, E. (2003b). Des graines et des souris. Dans *Actes du 30e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres* (199-216).

Fagnant, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? Dans *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – 2018* (94-113).

Girard, J.-C. (1999). Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation ? *Repères - IREM, 36*, 7-14.

Grenier-Boley, N., Lesnes, E. et Petitfour, E. (à paraître). Solving techniques of future mathematics teachers: the case of reflection. In G. Gueudet and A. S. González-Martín (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*.

Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations-Ressources-Analyses* (vol. 1, 131-142). ARPEME.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 289-322. La Pensée Sauvage.

JCGM-VIM (2008). *Vocabulaire international de métrologie – concepts fondamentaux et généraux et termes associés* (3e éd.).

Lesnes, E., Petitfour, E. et Grenier-Boley, N. (à paraître). Étude des leviers d'accessibilité d'une situation d'enseignement sur la symétrie axiale. Dans I. Mayeur et L. Leduc (dir.), *Supports didactiques, ressources pédagogiques. Formes, (in-)égalités, autorités et pratiques*. Presses Universitaires de Liège.

Morin, C. (1988). Le puzzle. *Petit x, 17*, 49–56.

ONU (2006). *Convention relative aux droits des personnes handicapées*. https://www.ohchr.org/fr/instruments-mechanisms/instruments/convention-rights-persons-disabilities

Péault, H. (2003). Proportionnalité. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM* (Vol. 2, 246–260).

Perrin-Glorian, M.-J. (2014). *Réflexions dans la perspective de nouveaux programmes pour les cycles 2 (CP-CE2) et 3 (CM1-6ème)* (Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4 pour le Conseil Supérieur des Programmes).

Petitfour, E. et Houdement, C. (2022). Des effets didactiques de microphénomènes sémiotiques en mathématiques. Dans C. Houdement, C. de Hosson et C. Hache (dir.), *Approches sémiotiques en didactique des sciences* (209-244). ISTE Editions.

UNESCO (2017). *Un guide pour assurer l'inclusion et l'équité dans l'éducation*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259389

Yvain-Prebiski, S. et Discours, J. (2022). La modélisation mathématique dans la résolution de problèmes concrets : un dispositif de formation adossé au rallye mathématique vidéo proposé par une circonscription. Dans *Actes du 48e colloque international COPIRELEM sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles,* Toulouse (129-148).

ANNEXE 1 – PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (FIN DE CYCLE 3)

1 Image du linge

<table>
<tr><th>Grandeur 1</th><th>Grandeur 2</th><th>Problèmes</th></tr>
<tr><td>Temps

Situation de proportionnalité :
NON</td><td>nombre de serviette</td><td>Groupe A
Il y a 9 serviettes,
Toute les 17 min 1 serviette
fini de sechea donc il y a
1 de moin toute les 17 min
Combien de serviettes auront fini
de sécher en 1h 25?
Combien de temps faudra t-il
encore pour toute les serviet
 
Résolution
Anne peut pas savoir car une serviette ne sèche pas forcément en 17 minutes.</td></tr>
<tr><td>couleur

Situation de proportionnalité :
NON</td><td>couleur</td><td>Il y a t'il plus de draps blancs que de draps d'autre couleur ?
Groupe de Stéfan
 
Résolution
Sur cette image il y a 6 draps blancs ; 3 rose - que 3 d'autre couleur.
Alors il y a plus de draps blanc que d'autre couleur</td></tr>
</table>

2 Image des épices

Grandeur 1	Grandeur 2	Problèmes
grammes	euros	Quelle prix allons nous payer pour 200g ? **Résolution** Le curcuma : 50g 100g ×2 ×2 100g 200g 50g = 3 100g = 5 3×2 - 1 = 6 - 1 = 5 200g = 5×2 - 1 = 10 - 1 = 9 Paprika : 50g 100g ×2 ×2 100g 200g 50g = 3 100g = 5 3×2 - 1 = 6 - 1 = 5 200g = 5×2 - 1 = 10 - 1 = 9 Pour 200g de paprika et curcuma on pérva 9€ pour 200g. *Groupe de Maguy* 
C'est proportionnelle car sur l'image les 50g ainsi que les 100g de curcuma sont proportionnelle aux grandeurs du paprika		Pourquoi n'ont-ils pas doublé le prix comme ils ont doublé le poid **Résolution** Comme il ont doublé mais ont doublé le prix *Groupe B* 

3 Image de la bouteille

Grandeur 1	Grandeur 2	Problèmes
3/4	1/4	S'il y a 2 bouteille combien en aura de quantité de Vinaigre et de Huile **Résolution** Si on a 2 bouteille on aura 6 de Huile et 2/8 de Vinaigre. 8 *Groupe de Noé* 
Non proportionnel car il y a plus d'huile (3/4) que de vinaigre (1/4)		Est ce que la quantité de vinaigre est proportionnelle à celle d'huile ? **Résolution** 1/4 de vinaigre 3/4 de Huile Si on multiplie par trois la quantité de vinaigre, on obtient la quantité d'huile. Cette situation est donc proportionnelle. *Groupe C* 

4 Interactions au sein du groupe Noé – Maguy – Stéfan

1	Noé :	Ben moi, j'ai mis « Mon image c'est une bouteille, elle contient trois quarts de l'huile et un quart de vinaigre »
2	Maguy :	Ouais.
3	Noé *à Maguy* :	Et euh à ton tour.
4	Maguy :	On observe sur cette image du curcuma et du paprika. On remarque que les grandeurs sont des grammes et des euros.
5	Noé :	Ah, moi aussi j'ai oublié… la grandeur. Fais voir *il prend la feuille de Maguy, regarde l'image* Faut mettre cinquante grammes est à trois euros et les cent grammes sont à cinq euros.
6	Maguy :	On met ça dans les grandeurs !
7	Stéfan :	C'est quoi les grandeurs ?
8	Noé :	Ben, les grandeurs par exemple
9	Maguy :	Ben c'est les grandeurs de mesure.
10	Noé :	Voilà
11	Stéfan :	Et comment on sait ?
12	Maguy :	Ben c'est c'qui est marqué.
13	Noé :	le mètre, les prix, le volume
14	Stéfan :	Et si y a rien de marqué ?
15	Maguy :	Ben tu mets que tu n'as pas d'information.
16	Stéfan	*écrit « Je ne pas d'information » sur son brouillon*
17	Noé *à Maguy* :	C'est sûr que c'est une situation de proportionnalité puisque les prix ils sont égals de cinquante, de cinquante, cinquante c'est égal.
18	Stéfan :	C'est quoi de la proportionnalité ?
19	Noé :	Ha, ha *(rires)*
20	Maguy	*regarde son image de plus près*
21	Noé :	Ben la proportionnalité en fait c'est/ par exemple là t'as deux nombres qui sont égals. Genre, là, on va prendre/ là par exemple, on va prendre le cas de Maguy. En fait, le curcuma il est à trois/les cinquante grammes ils sont à trois euros et le paprika les cinquante grammes ils sont à trois euros. En fait comme le prix il est égal c'est une situation de porportionnalité. Le cinquante grammes y sont à trois euros du curcuma et les cinquante grammes y sont à trois euros du paprika c'est-à-dire comme y sont, les deux grandeurs sont égales ben alors c'est une situation de proportionnalité.

E : professeure de mathématiques

30	E *à Stéfan* :	Alors qu'est-ce que t'as observé ? Quelles sont alors les grandeurs que tu sélectionnes, dans cette image ?
31	Stéfan :	des grandes et des petites.
32	E :	des grandes et des petites / grandeurs. OK. Quels autres trucs encore vous pouvez/ Qu'est-ce que t'as dit dans ta description ?
33	Stéfan :	Que y a plus de draps blancs que de couleurs
34	E :	Donc y a la couleur, ça c'est une grandeur. Y a quoi d'autre encore ? Qu'est-ce qu'ils font les draps ? Essayez de me décrire.
35	Noé :	Ben ils bougent.
36	Maguy :	Ils sont étendus
37	E :	Ils sont étendus. Donc qu'est-ce qu'ils font ?
38	Noé :	Ben y sont en mouvement.
39	Maguy :	Ils sèchent
40	E :	Ils sèchent, donc, essayez, à partir de cette image, de vous inventer un, une problématique et de déterminer deux grandeurs. *Elle part.*
41	Stéfan :	Du coup en grandeur j'écris couleur !
42	Noé :	Ben non
43	Maguy :	Ben c'est une grandeur la couleur
44	Stéfan :	Voilà
45	Noé :	La couleur c'est pas une grandeur !
46	Stéfan :	Ben elle a dit, la prof.
47	Noé :	Grandeur la taille euh
48	Stéfan :	Ben j'écris y a des petits et des grands.
49	Maguy :	Ben oui, la taille.

CONCEVOIR ET UTILISER UN TEST DE POSITIONNEMENT EN MATHÉMATIQUES À DESTINATION D'ÉTUDIANTS DE MASTER MEEF

Valentina Celi
Université de Bordeaux, INSPé de l'Académie de Bordeaux
COPIRELEM
valentina.celi@u-bordeaux.fr

Pierre Danos
Université Toulouse 2 – Jean Jaurés, INSPé TOP
COPIRELEM
pierre.danos@univ-tlse2.fr

Fabien Emprin
URCA, CEREP, INSPé de l'académie de Reims
COPIRELEM
Fabien.emprin@univ-reims.fr

Sylvie Grau
Nantes Université, INSPé de l'académie de Nantes
COPIRELEM
Sylvie.Grau@univ-nantes.fr

Chantal Moussy
UPEC, INSPé de l'académie de Créteil
COPIRELEM
chantal.moussy@u-pec.fr

Gwenaëlle Vay
Nantes université, INSPé de l'académie de Nantes
COPIRELEM
gwenaelle.vay@univ-nantes.fr

Résumé
La COPIRELEM expérimente depuis trois ans un test de positionnement en mathématiques pour les futurs enseignants du primaire. L'objectif de cet atelier a été de travailler collaborativement sur la conception de ressources, de parcours ou d'activités répondant aux besoins identifiés par le test.
Un test de positionnement permet d'informer les étudiants sur leurs points d'appui et leurs difficultés en mathématiques à un instant t. Il peut également orienter ces derniers vers des ressources permettant de travailler de façon autonome ou accompagnée en complément des cours. Il peut encore donner aux formateurs des outils pour adapter leurs formations. L'atelier présenté lors du colloque qui a eu lieu à Bonneuil-sur-Marne a permis d'engager une réflexion commune et de mutualiser les expériences pour rendre disponible à la communauté un nouvel outil constitué de ressources adaptées à chaque difficulté.

I - DE MARSEILLE À BONNEUIL-SUR-MARNE OÙ EN SOMMES-NOUS ?

La COPIRELEM expérimente depuis trois ans un test de positionnement en mathématiques pour les futurs enseignants du primaire. Il s'agit de proposer aux formateurs un outil permettant d'adapter leurs formations, différencier ou encore proposer des aides personnalisées aux étudiants.

Cet atelier prolonge celui qui a été mis en œuvre lors du colloque de Marseille en 2023 (Danos et al., 2024). L'enjeu était alors d'identifier les usages que les participants faisaient ou souhaitaient faire d'un test de positionnement. Ensuite, en analysant le test qui était disponible à l'époque, les participants ont enrichi la ressource en produisant d'autres exercices et problèmes. Alors que les premiers exercices étaient construits à partir de tests d'entrée en IUFM (Michaut & Lang, 2005), nous avons pu identifier la nécessité de proposer des exercices différents, basés sur des productions d'élèves ou des problèmes que certains participants ont qualifié de résistants. Ces problèmes permettent de balayer pour certains les connaissances disciplinaires, mais pour d'autres des connaissances plus didactiques en proposant des productions d'élèves ou des problèmes permettant de questionner les représentations des étudiants sur l'enseignement.

Durant l'année 2023-2024, la COPIRELEM s'est appuyée sur ce travail pour produire de nouveaux exercices, enrichissant et complétant ainsi la base de données d'exercices. Cela nous a également permis de modifier nos critères d'indexation de la base de données et de proposer un nouvel atelier visant cette &fois l'exploitation du test pour la remédiation ou la différenciation.

L'atelier s'est déroulé en trois temps. Nous avons tout d'abord mené une réflexion sur la notion d'accompagnement et d'aide à apporter aux étudiants, en nous appuyant sur ce que pouvait proposer chatGpT 4.o.

Puis nous avons réinterrogé l'usage de tests de positionnement en partant des réflexions menées lors du précédent colloque. Le troisième temps a été consacré, à partir de l'analyse de certains résultats aux tests, à l'élaboration de propositions, par groupe, de dispositifs d'aides.

1 Réflexion sur l'aide

Cet atelier est centré sur l'objectif d'apporter une aide aux étudiants, c'est pourquoi nous avons fait le choix de commencer par analyser collectivement une vidéo[1] volontairement provocatrice par rapport au rôle des enseignants.

Cette vidéo fait partie d'un lot proposé par la société openIA pour illustrer les nouvelles fonctionnalités de chatGPT 4.o. Il s'agit d'une nouvelle IA générative qui n'est plus basée sur des prompts (des interrogations sous forme de messages écrits), mais peut être interrogée vocalement. Dans cette vidéo, on voit un père et son fils. Le père demande à ChatGPT d'aider son fils à résoudre un exercice de mathématiques, sans lui donner la réponse. Il précise que ChatGPT a le droit de lui poser des questions, le mettre sur la voie, mais elle doit s'assurer qu'il comprenne.

L'élève doit trouver le sinus de l'angle α sur la figure 1.

Dans cette vidéo, la fluidité des interactions verbales entre l'homme et la machine, le ton et même l'humour de la voix de synthèse donne l'impression d'un dialogue réel. En revanche, on peut analyser comment l'IA propose « d'aider » l'élève à trouver. La démarche relève de la maïeutique et laisse penser à l'élève qu'il trouve par lui-même.

L'IA demande à l'élève de montrer l'hypoténuse. L'élève montre d'abord le côté [AC] (cf. Figure 1). ChatGPT répond : « C'est presque cela, celui-ci s'appelle le côté adjacent à l'angle α, l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle, et il est opposé à l'angle droit du triangle, est-ce que tu peux trouver l'hypoténuse ? » L'élève montre alors le côté [AB]. Les informations données par ChatGPT donnent la réponse sans prononcer le nom du côté [AB], mais également sans permettre à l'élève de comprendre ce qu'il fait.

[1] Cf. https://youtu.be/mvFTeAVMmAg?si=W0Z0rFWjqkGiBTK0 (16'05 à 19'18).

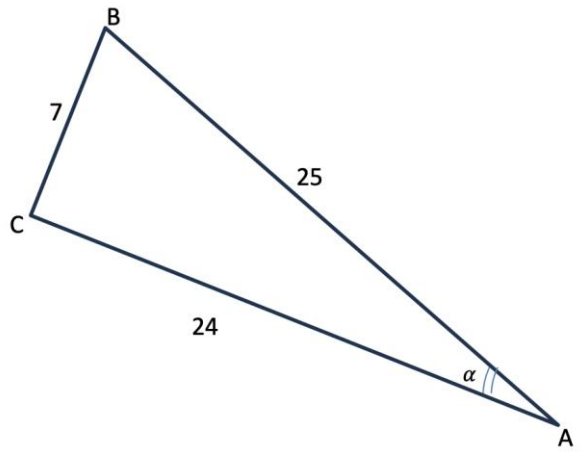


Figure 1. Le problème posé dans la vidéo

Il nous a semblé intéressant, alors que notre atelier porte sur l'aide automatisée par l'informatique, d'engager la discussion avec les collègues grâce à ce petit extrait.

2 L'analyse du groupe

Les collègues participant à l'atelier analysent la vidéo et se posent la question de la différence entre ce que l'on voit faire par l'IA et ce qu'un enseignant pourrait faire.

Sur le travail de l'IA, on remarque que la nature de l'aide est réellement une décomposition de la tâche en micro-tâches avec un accompagnement pas à pas dans la réalisation de toutes les micro-tâches. Elle intervient très souvent, dès que l'élève fait quelque chose. L'IA propose d'identifier déjà les différents côtés. Elle oriente toujours et confirme même quand l'élève n'est pas certain : elle dit « right » en réponse à la question : « Est-ce que ça pourrait être ça la réponse ? ».

Le groupe considère que cette démarche conduit au résultat, mais ne garantit pas que l'élève puisse refaire la tâche par lui-même. En effet, il n'y a pas de gestion de l'erreur. Par exemple, si l'élève pense que le côté de l'angle adjacent est le plus long après l'hypoténuse, après cet exercice, il peut très bien continuer à le penser. Rien n'a permis dans les interactions que nous avons analysées, ni de savoir ce que pensait l'élève, ni d'amener l'élève à contredire cette idée.

Une aide plus adaptée aurait peut-être été de poser des questions à l'élève pour décrire la méthode générale : comment compte-t-il s'y prendre ? Il manque donc une analyse de la difficulté de l'élève : quelle est sa difficulté, pourquoi ne parvient-il pas à résoudre cet exercice ?

Cette première réflexion nous amène donc à l'importance de l'identification très précise de la difficulté de l'élève.

Il est vrai que l'on peut aussi noter que l'exercice proposé ne se prête peut-être pas à une aide très riche. C'est un exercice d'application. Il y a donc des connaissances à avoir et on aurait pu imaginer de demander à l'élève ce qu'il sait et lui rappeler les informations qu'il ne peut pas deviner tel que le vocabulaire spécifique, comme « côté adjacent à un angle », « côté opposé à un angle », « hypoténuse ».

Le groupe propose de s'appuyer sur d'autres exemples, soit pour aider l'élève à résoudre cet exercice, soit pour compléter sa résolution en donnant des pistes de généralisation et de mise en évidence des conditions à vérifier pour pouvoir la mettre en œuvre.

Cela oriente la réflexion vers le fait que, dans l'aide, l'analyse de l'erreur est importante, mais également la suite : quel exercice va-t-on faire résoudre après ? L'aide se situe dans un processus et nous amène à réfléchir aussi au moment où celle-ci est apportée. En effet il aurait été possible de laisser l'élève continuer l'exercice jusqu'à l'obtention d'un résultat. L'intervention à la fin de la résolution aurait pu être d'une autre nature amenant l'élève à questionner la validité de son résultat.

Que retenir pour l'exploitation des tests ?

À l'issue de cette réflexion générale et volontairement un peu décalée, le groupe retient plusieurs pistes :

- proposer plusieurs exercices, l'aide ne pouvant pas être un processus ponctuel dans le temps même si elle ne peut concerner qu'un seul type de difficulté, en ce sens qu'il est nécessaire d'avoir une meilleure connaissance de ce que sait réellement l'élève, de ses difficultés, pour que l'aide soit adaptée et limitée dans le temps ;
- contrôler les exercices posés par une analyse didactique fine ;
- analyser l'erreur et ne pas se contenter de la rectifier. Il s'agit de bien identifier la fonction de l'aide apportée, elle ne doit pas se limiter à une aide procédurale mais bien une aide constructive (Robert et al., 2020) ;
- ne pas empêcher l'erreur de se produire ;
- amener une formulation de généralités à retenir ;
- organiser un discours méta et pas seulement un discours de confirmation ou d'assistance à la réalisation ;
- réfléchir à ce que nous pouvons proposer de plus efficace que ce que l'IA est capable actuellement de proposer.

Nous gardons donc en tête ces pistes tout au long de la réalisation du travail qui va suivre.

II - ANALYSE DU TEST

1 Rappel des enjeux du travail sur le test

La description détaillée du travail sur le test est présente dans les actes du précédent colloque COPIRELEM (Danos et al., 2024). Pour aider le lecteur, nous reprenons ici les éléments essentiels du travail précédent.

À l'origine, ce test a été développé à l'INSPÉ de l'académie de Reims, en partenariat avec l'IREM de Reims, pour aider les étudiants, en début d'année de M1, à connaître de façon précise leurs points d'appui et leurs difficultés en mathématiques. L'objectif, à plus ou moins long terme, est de proposer des ressources personnalisées à chaque étudiant de façon à nourrir son travail personnel. Les résultats de ce test servent aussi aux enseignants pour planifier leur progression de travaux dirigés (TD) en s'adaptant aux caractéristiques de chacun de leurs groupes, lors des séances de TD.

La COPIRELEM développe depuis plusieurs années ce test pour le mettre à disposition des enseignants qui le souhaitent, mais aussi pour en faire l'objet d'un espace de partage. Outre l'objectif du concours, ce travail pose la question de fond de la nature des connaissances mathématiques que doit avoir un enseignant de primaire pour enseigner, puisque la formation des étudiants poursuit ces deux objectifs : préparation au concours et au monde professionnel. Ces mathématiques nécessaires pour enseigner ont été mises en évidence par Clivaz (2011, 2012) et par Ma (2010). Elles sont différentes des mathématiques pour réussir le concours. Ma (*ibid.*) met en effet en évidence l'existence d'une connaissance approfondie des fondements des mathématiques CAFM (Profound Understanding of Fundamental Mathematics – PUFM en anglais) qui diffère des « connaissances de haut niveau » travaillées dans la scolarité et attendues au concours. Il est difficile de trouver des propositions de définition pragmatiques des CAFM, mais elles sont liées à une compréhension de tous les aspects des concepts à enseigner, mais aussi du fonctionnement des mathématiques et de leur épistémologie.

Le test est donc composé d'une base de 108 exercices intégrés dans *Moodle*[2], d'un fichier d'indexation, d'un fichier xls permettant le traitement de l'exportation des résultats des étudiants et d'un fichier de publipostage permettant à chaque étudiant de recevoir une analyse personnalisée de ses résultats.

Pour chaque exercice, l'indexation permet de définir un domaine, une analyse de la difficulté qui n'aurait pas été surmontée en cas d'échec ainsi qu'un niveau de difficulté. Le niveau 1 correspond aux savoirs de l'école primaire, le niveau 2 à la prise de recul par rapport aux savoirs de l'école et le niveau 3 aux savoirs du collège. Les niveaux 1 et 2 combinés peuvent renvoyer aux CAFM.

Les diagrammes en Figures 2 et 3 présentent l'état de la base de données : ils montrent que la répartition en domaine correspond bien aux attendus du concours et de l'enseignement en général et que la moitié de la base renvoie aux CAFM alors que l'autre moitié à une orientation concours. Pour l'instant, à l'issue du publipostage, chaque étudiant reçoit une analyse personnalisée, mais aucune piste ni ressource ne lui sont proposées.

Notre ambition est, à terme, d'avoir une base de données dans laquelle l'utilisateur puisse faire des requêtes et ainsi créer son test personnalisé, l'exploitation des résultats étant alors automatisée et conduisant l'étudiant à des aides personnalisées. Afin d'être enrichie, cette base de données pourrait également être ouverte à l'ajout de nouveaux exercices.

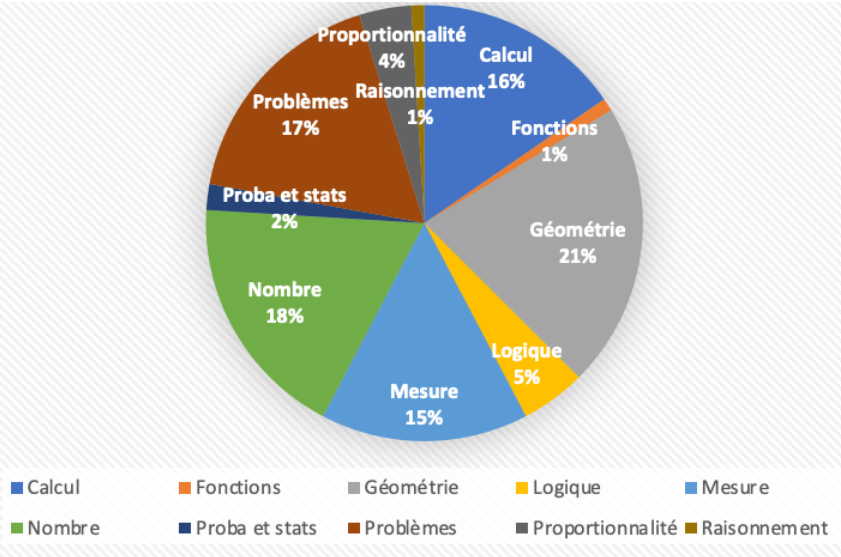


Figure 2. Répartition des exercices par domaine dans la base de données.

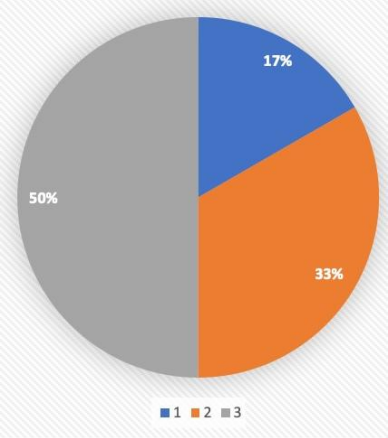


Figure 3. Répartition des exercices par niveau de difficulté dans la base de données.

[2] *Moodle* est une plateforme d'enseignement en ligne qui permet d'accéder à des espaces dédiés aux cours des enseignants, à des ressources pédagogiques ou autres.

2 Un test pour quelle population d'étudiants, quelles fins et comment ?

Au moment du colloque, nous étions dans l'incertitude de la mise en œuvre d'une réforme de la formation des enseignants qui aurait modifié la place du concours et créé des licences préparatoires au professorat des écoles. En fonction de la place du concours et de la structure de la formation, un tel test peut être proposé à différents moments pour différents publics et de différentes façons :

Quel public ? Quelle fonction ?

Un test en début de formation, quelle que soit la formation : L1, L2, L3, M1, M2, Formation continue	Évaluation diagnostique pour l'étudiant et pour le formateur
Au moment de l'inscription, pour que les étudiants préparent leur rentrée et s'assurent qu'ils ont bien les prérequis avant la formation.	Évaluation diagnostique pour l'étudiant
Un test proposé régulièrement tout au long de la formation, pour donner des informations aux étudiants sur leur progression.	Évaluation formative
Utilisé en formation avec le formateur ou uniquement pour le travail personnel de l'étudiant.	Évaluation formatrice

Comment ?

- à distance ou en présentiel pour plus d'authenticité ;
- en temps limité ou non ;
- avec un retour différencié ou non ;
- sur un temps dédié de la formation ou libre ;
- en expliquant les enjeux en TD et demandant aux étudiants de faire le test chez eux.

Nous avons également questionné les participants à l'atelier sur leur motivation éventuelle à utiliser un tel test. Les réponses ont été traitées dans un nuage de mots *via* l'application *Wooclap*, dont l'image obtenue est présentée Figure 4.



Figure 4. Nuage de mots sur les intentions d'usage du test

On voit bien qu'il n'y a pas une unique façon d'utiliser ce test et notre ambition est bien de faciliter ces diverses utilisations. La fonction de diagnostic apparait cependant majoritairement.

3 Le feedback renvoyé aux étudiants

Pour proposer une aide adaptée à chaque étudiant, nous sommes partis du feedback actuellement adressé directement après la passation du test : un positionnement personnalisé. Voici un extrait du publipostage d'un étudiant :

Bilan de positionnement de Prénom NOM

Vous trouverez ci-dessous votre bilan de positionnement en mathématiques suite au test réalisé en ligne le 17 septembre 2022 à 13:36.

Votre score global en % : 48,2%

Résultat détaillé

- Domaine du calcul en % 30,0%

Liste des difficultés rencontrées dans ce domaine

- *faire le produit de puissances*
- *division par 7*
- *interprétation du texte de problème*

- Domaine de la géométrie : 35,0% (global)

- en 3D : 33,3%

Liste des difficultés rencontrées

- *différence entre le vu et le su et lecture de la perspective cavalière*
- *identifier le patron d'une pyramide et savoir qu'il existe plusieurs patrons*

- *en 2D : 35,7%*

Liste des difficultés rencontrées

- *lecture des propriétés et connaissance du vocabulaire hypoténuse, bissectrice*
- *utiliser les propriétés du 2D dans le 3D, interprétation de la perspective et VU-SU*
- *connaissance des propriétés de géométrie type Thalès*
- *connaissance des propriétés du triangle [...]*

Par ailleurs, les étudiants disposent d'un graphique leur permettant de comparer les résultats des différents sites et de positionner leurs propres résultats pour les comparer par rapport à leurs collègues. Un exemple est fourni en Figure 5.

Même si ce document renvoie bien des informations à l'étudiant sur ses difficultés, il n'est pas certain qu'il puisse les interpréter. Par exemple, la phrase « utiliser les propriétés du 2D dans le 3D, interprétation de la perspective et VU-SU » ne peut être interprétée qu'avec des connaissances didactiques comme la question du VU et du SU (Parzysz, 1988). Cela signifie qu'un accompagnement de l'étudiant est actuellement nécessaire pour expliciter ces difficultés et pose la question de comment aller au-delà de la simple formulation de la difficulté. Par ailleurs, l'étudiant n'a pas un relevé de ses points forts si ce n'est le pourcentage de réussite dans chaque domaine.

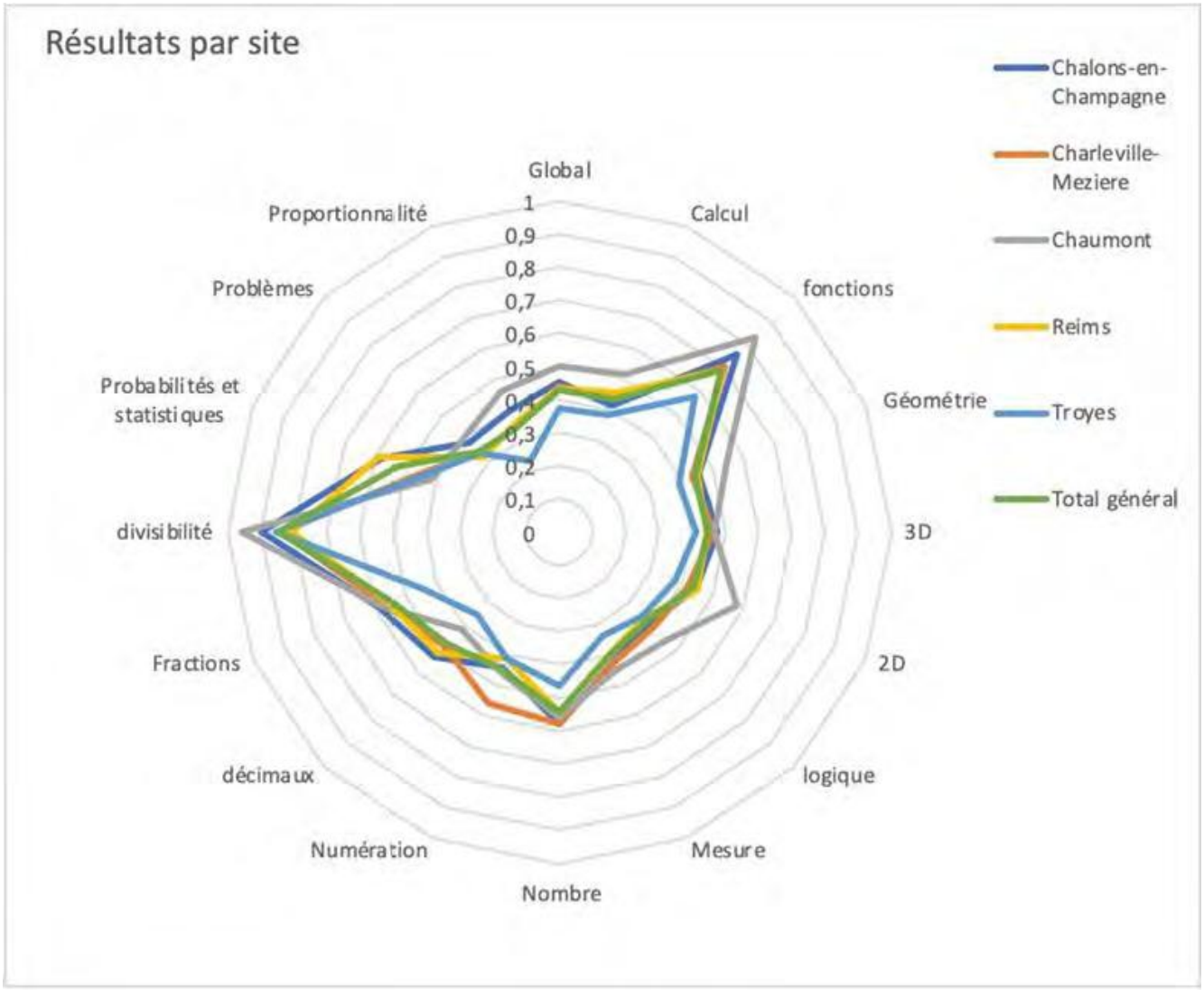


Figure 5. Graphique fourni aux étudiants présentant les résultats moyens par site de formation.

III - PRODUCTION D'AIDES

Forts de cette analyse, les participants de l'atelier ont réfléchi à ce qui pourrait être proposé pour aider les étudiants. Pour cela ils ont travaillé en groupe à partir de documents fournis :

- les 110 exercices de la base de données ;
- le fichier d'analyse des 110 exercices, avec leur indexation et les informations renvoyées en cas d'erreur ;
- le fichier complet anonymisé des réponses pour une promotion de 241 étudiants, ce qui fournit un taux de réussite moyen par exercice.

Les groupes ont alors eu plusieurs possibilités :

- choisir un ou plusieurs étudiants et proposer des aides personnalisées ;
- choisir un ou plusieurs exercices grâce à son taux de réussite et proposer une exploitation en termes d'aide ;
- proposer des aides, des ressources, des activités, des exercices complémentaires et les relier à des exercices ;
- proposer des modalités d'aides : en autonomie ; accompagnées, en présence ou à distance, etc.

Chaque groupe de participants a alors pris le temps de s'approprier le test, puis a décidé d'une démarche de travail. La synthèse a permis de mutualiser les pistes de travail. Ci-après, nous présentons les principales conclusions.

1 Les points à questionner

1.1 Nécessité d'une analyse plus fine de l'erreur

Dans l'état actuel, la première question qui se pose est de savoir si on arrive à faire mieux qu'une IA, en référence à l'introduction de cet atelier. Effectivement, sans avoir accès à plus d'informations sur les réponses des étudiants que « réussi » ou « échoué », comme c'est le cas dans l'extraction de *Moodle*, il est difficile d'analyser l'erreur.

De plus, un groupe formule le besoin de voir ce que l'on sait d'autre, par exemple sur les fractions, car un seul exercice ne suffit pas. On aurait besoin de savoir, par exemple, comment découper le calcul dans le sous-domaine « Calcul » car il y a beaucoup d'exercices et il faudrait des unités plus petites à partir des tâches. Ensuite seulement, il serait possible de chercher des ressources. L'idée serait de partir de sous-domaines avec du cours et des exercices. Dans le domaine de la géométrie, de la même manière, il faudrait savoir comment on a découpé le domaine ; il faut en savoir plus sur ce qu'on teste.

Un autre groupe fait le même constat en partant cette fois d'un travail d'analyse sur la distinction entre aire et périmètre. En regardant les exercices sur ce domaine, il remarque qu'il y a des compétences très différentes : de l'analyse de figures, du calcul, de la décomposition en sous-figures, le passage par des calculs de longueur pour calculer des aires, des calculs basiques d'aires et périmètres, etc. Par conséquent l'aide serait à adapter en fonction de chaque exercice. Le groupe propose une variété d'aides possibles : une invitation des étudiants à consulter des capsules vidéo, le dico-maths trouvé dans les manuels d'élémentaires ou de collèges, des annales de la COPIRELEM … Par ailleurs, si une grande majorité d'étudiants a échoué à une question en particulier, il est possible de proposer une situation comme « Les annuaires » (Danos et al., 2014) permettant de reprendre avec le groupe d'étudiants en entier la notion à consolider. Cette situation pourrait être accompagnée d'exercices de consolidation.

En tout cas, même si les analyses actuelles apparaissent comme pertinentes, cela suppose d'exploiter plus finement chaque exercice, de mettre de nouveaux marqueurs et d'analyser les distracteurs en s'inspirant des travaux de Pilet et Grugeon-Allys (2015). La mise en relation des exercices est également un élément porteur d'amélioration de la réponse renvoyée aux étudiants.

1.2 La nature de l'aide

Un groupe met en évidence la difficulté spécifique de l'aide asynchrone : « Si on voit bien ce qu'on pourrait faire dans une formation en présentiel, c'est différent de ce qu'on peut donner à l'étudiant à faire en autonomie. La séance de formation est là pour redonner du sens ».

La réflexion que nous engageons permet d'apporter des pistes pour des aides : asynchrone et synchrone. En fonction des types d'usage, la nature de l'aide diffère. Dans un test à l'inscription par exemple, le feed-back à l'étudiant doit être interprétable par lui et les ressources accessibles tant informatiquement qu'intellectuellement. Dans le cas d'un test passé en cours et exploité avec l'enseignant, il peut s'agir de donner des indications synthétiques au formateur.

2 Exemple d'aides possibles : les travaux des groupes

Un groupe de participants a choisi un étudiant qui avait des résultats assez faibles et a regardé dans quel domaine il avait des difficultés. Il s'est ensuite intéressé aux questions pour lesquelles il avait échoué. Une rapide analyse de la tâche a été réalisée pour essayer de trouver des pistes d'aide.

2.1 Aides pour l'exercice 2004-10

En partant de l'exercice indexé, le groupe identifie qu'il s'agit d'un travail sur le calcul fractionnaire avec pour objectif de « casser » les techniques qui n'ont pas de sens.

Les réponses proposées dans le test sont reproduites en Figure 6 :

A. $\frac{5}{7}+\frac{9}{11}=\frac{5+9}{7+11}$

B. $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{5+10}{7+14}$

C. $\frac{1}{\frac{5}{7}+\frac{9}{11}}=\frac{7}{5}+\frac{11}{9}$

D. $\frac{5}{7}+\frac{9}{11}=\frac{118}{77}$

Figure 6. Réponses à l'exercice Q 2004-10

Le groupe fait deux propositions, l'une en autonomie et l'autre en formation, lors de la séance de TD.

En TD, il s'agit de revenir avec du matériel comme des bandes de papier unités, quart d'unité et demi-unité pour constater que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ ne font pas $\frac{2}{4}$, mais aussi des droites graduées de différentes façons.

Pour le travail en autonomie, deux niveaux seraient envisagés. Un niveau proposerait un lien vers une sorte de manuel d'éditeur type « Préparation au CRPE » avec cours en autonomie, pour enclencher des automatismes, avec peut-être des exemples et contre-exemples. L'autre niveau pourrait renvoyer vers un site de manipulation de bandes. Le groupe ne sait pas si un tel site existe ou s'il faut construire une telle activité pour qu'elle soit disponible pour l'étudiant en autonomie. Cela peut aussi être réalisé en TD pour donner du sens à l'objet mathématique. Des liens vers des manuels « bien choisis » pour proposer des exercices d'addition de fractions simples, vues à l'école élémentaire, pourraient permettre aux étudiants d'avoir la connaissance minimale pour enseigner des « propriétés » telles que : « Pour obtenir la somme de deux fractions, on n'additionne pas d'une part les numérateurs et d'autre part les dénominateurs » et éventuellement compléter ensuite par un lien vers des entraînements en autonomie type exercices de préparation aux concours.

2.2 Aides pour l'exercice 2004-17

Cette fois-ci, on prend en compte l'exercice indexé 2004-17 (Figure 7) qui porte sur la comparaison de rapports, l'égalité de ratios et les fractions.

Q2004-17

Léa, Juliette et Sophie jouent au football.

Léa a réussi trois buts sur dix tirs. Juliette a réussi deux buts sur cinq tirs. Sophie a réussi quatre buts sur sept tirs.

- Léa est la plus adroite.
- Sophie est meilleure que Juliette.
- Juliette est la moins adroite.
- Léa est moins habile que Sophie.

Figure 7. L'énoncé de l'exercice 2004-17

Les propositions d'aides sont l'utilisation du chapitre sur la comparaison de fractions de l'ouvrage Mathématiques CRPE (Charnay et Mante, 2023) et du manuel *Haut les maths !* CM1 ou CM2 (Kazandjian et al., 2021) pour proposer des exercices du niveau de l'école élémentaire, comme dans l'exemple en Figure 8, accompagné des pages correspondantes du guide pédagogique.



Figure 8. Extrait du manuel haut les maths

2.3 Aides pour l'exercice 2004-18

La question du test 2004-18 est la suivante « Un groupe de 10 randonneurs s'arrête dans un refuge pour s'y restaurer. Chacun prend un sandwich et une boisson. En sachant que le sandwich coûte 1,80 €, le jus d'orange 0,7 € et l'eau gazeuse 0,5 €, est-il possible que le prix total des consommations soit :

- 26 € ?
- 23,80 € ?
- 21,5 € ?
- 23,2 € ? »

L'aide proposée en autonomie consiste en des activités qui permettent de développer le goût de la recherche, de l'essai. Cela suppose de penser un parcours permettant à l'étudiant de comprendre ce qui est en jeu et quelle activité mathématique est attendue face à ce type de problème.

IV - CONCLUSIONS DE L'ATELIER

Le travail sur les aides à fournir est complexe. Il met en évidence que notre test a besoin de pouvoir s'appuyer sur les réponses des étudiants, et non uniquement sur le fait qu'elles soient justes ou fausses, pour leur apporter une analyse plus précise. En l'état actuel, il n'est pas possible, avec l'exportation *Moodle*, de récupérer plus que le score de l'étudiant. Il est peut-être informatiquement possible d'obtenir les réponses détaillées des étudiants, mais cela nécessite d'intervenir directement au niveau du serveur. Deux solutions sont envisageables : programmer le test dans une autre plateforme ou faire en sorte que l'on puisse retrouver la réponse grâce au score. En paramétrant le pourcentage du score attribué de la façon suivante : réponse 1 vaut 7% de la note, la 2 vaut 13%, la 3 vaut 26% et la 4 vaut 54%, chaque score

correspond à une combinaison unique de réponse. Un étudiant qui à 39% de la note a nécessairement répondu les réponses 3 et 2, celui qui a 61% a répondu les réponses 1 et 4…. En revanche, le score obtenu ne reflète plus la réussite à l'exercice. Il faut l'interpréter de façon différente pour chaque exercice mais cela apporte une nouvelle information jugée essentielle par les collègues de l'atelier pour fournir une aide adaptée.

Cet atelier montre également l'importance dans le travail du formateur de mathématiques de la question des connaissances mathématiques qu'un enseignant doit avoir pour enseigner cette discipline à l'école primaire. Si des recherches en didactique existent (Clivaz 2011 ; 2012 ; Ma, 2010), cela reste un champ important à explorer.

La relation entre le concours et les compétences professionnelles est également questionnée. Quelle doit être la place des connaissances de niveau collège dans la formation des futurs enseignants ? Est-ce que ces connaissances ont leur place dans une formation universitaire ? Si les formateurs en licence et en master n'apportent pas de connaissances universitaires, donc didactiques ou spécifiques telles que les CAFM, qu'est-ce qui justifie l'attribution de crédits ETCS pour ces connaissances ?

Ce travail de positionnement va donc bien au-delà de la simple réflexion sur des exercices de mathématiques. Pour aller plus loin dans notre volonté de partage et de travail collaboratif autour du test, cet atelier met au jour la nécessité de développements informatiques plus poussés que seul un projet financé pourrait apporter avec l'appui d'informaticiens. C'est donc une piste qu'il nous faut explorer.

BIBLIOGRAPHIE

Charnay, R., Mante, M. (2023). *Mathématiques – CRPE 2023*. Paris : Hatier Concours.

Clivaz, S. (2012). Des mathématiques pour enseigner : une comparaison entre enseignants, étatsuniens, chinois et vaudois. *Math-Ecole,* 218, 61-63.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève.

Danos, P., Emprin, F., Grau, S. et Moussy, C. (2024). Concevoir et utiliser un test de positionnement en mathématiques à destination d'étudiants de master MEEF, *Actes du 49e Colloque COPIRELEM*, Marseille 2023, ARPEME, 473-486.

Danos, P., Masselot, P., Simard, A. et Winder, C. (2014). Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires », *Actes du XXXXI colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 2014*, ARPEME, 59-83.

Kazandjian, E., Mazollier, A.-S., Pfaff, N. et Guimard, S. (2021). *Haut les MATHS !* Retz.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Lawrence Erlbaum Associates.

Mante, M. et Charnay, R. (2023). *Mathématiques-CRPE 2024-2025-Epreuve orale d'admission*. Paris : Hatier.

Michaut, C. et Lang, V. (2005). *Évaluation des profils des candidats au professorat des écoles et facteurs de réussite aux tests d'entrée à l'IUFM,* Sep 2005, Reims, 1-11.

Parzysz, B. (1988). Voir et savoir, la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP*, 364, 339-350.

Pilet J. et Grugeon-Allys B. (2015) Conception et exploitation d'un diagnostic en mathématiques à l'entrée en formation initiale des enseignants du premier degré pour organiser des stratégies de formation. Dans L. Theis (éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*. *Actes du colloque EMF2015* (185-198).

Robert, A., Panninck, J. et Lattuati, M. (2020). *Une caméra au fond de la classe.* PUFC : Besançon.

CONCEPTS MATHÉMATIQUES ET DÉSIGNATIONS LEXICALES

Annie CAMENISCH
Maitre de conférences en sciences du langage,
Université de Strasbourg, LiLPa, UR 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire,
Université de Strasbourg
serge.labaroche@sfr.fr

Résumé
Le vocabulaire spécifique utilisé pour dénommer les concepts mathématiques peut être source de difficultés pour les élèves : mots nouveaux ou polysémiques, dont le sens courant peut masquer le sens spécifique mathématique.
Le vocabulaire mathématique peut aussi contribuer à la construction des concepts tels que définis par Vergnaud (1990), définition dans laquelle les moyens d'expressions font partie intégrante des concepts. L'articulation entre concept et mot mérite donc d'être interrogée dans le contexte de l'enseignement des mathématiques à l'école dans l'objectif de favoriser des démarches accessibles à tous les élèves. Ces démarches interrogent à la fois les mots, leurs processus de formation, au sens linguistique, et leur articulation avec les mathématiques enseignées.

Dans cet atelier, le lien entre concepts mathématiques et leurs désignations lexicales est questionné à partir de l'analyse de différents supports, poétiques et surtout mathématiques. L'objectif est de sélectionner et d'observer le vocabulaire spécifique mathématique pour analyser les mots et la manière dont ils sont utilisés dans le contexte mathématique, et comment ils interagissent avec d'autres mots.

La centration sur les mots, en tant qu'unité lexicale, donne l'occasion de faire le point sur certains savoirs lexicaux comme la définition d'un mot, certains processus de formation des mots, les relations de sens entre les mots. Il s'agira de s'interroger sur les connaissances, et leurs sources, dont l'enseignant a besoin pour enseigner les mathématiques, et de tester des démarches qui favorisent une meilleure mémorisation des mots et des notions qu'ils représentent.

I - ENTRER DANS LES CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Afin de permettre à chacun de se sentir personnellement sollicité, l'atelier débute par une réflexion qui permet de se centrer sur certains mots utilisés couramment en mathématique, faisant partie intégrante de la définition du concept (Vergnaud, 1990). L'entrée en matière, à partir de supports poétiques en lien avec les mathématiques, vise à s'interroger sur la réception personnelle de certains mots utilisés par le poète et de l'évocation mathématique qui en surgit.

1 Associer des poèmes à des figures[1]

Quatre poèmes extraits de *Euclidiennes* de Guillevic (1967) vont servir d'inducteur pour une première réflexion sur les relations entre concepts mathématiques et mots (poèmes en annexe 1). Ce recueil a la

[1] Le terme « figure », mot polysémique par excellence, peut, en géométrie, désigner l'objet conceptuel défini par ses propriétés. Il est couramment utilisé en classes pour désigner l'objet matériel qui le représente, un dessin. C'est dans ce sens que nous utilisons le mot « figure » dans la suite du texte. Le dernier poème du recueil *Euclidiennes* de Guillevic s'intitule

particularité d'évoquer des figures géométriques par le langage poétique. Chaque poème, nommé d'après une figure, est aussi accompagné du dessin de la figure (Camenisch, Petit, 2008).

Un poème est proposé, aléatoirement, à chaque participant, sans le titre ni la représentation de la figure. Les participants ont pour consigne de dessiner la figure géométrique que leur inspire le poème, de souligner les mots qui ont servi d'indices et de nommer la figure géométrique.

Cette approche vise à se centrer sur le langage et les mots utilisés en mathématiques pour dénommer des concepts, que ce soient le nom des figures mathématiques ou de leurs caractéristiques.

Plusieurs participants ont le même poème, ce qui permet des confrontations et discussions autour de leurs choix. La mise en commun consiste à lire le poème, montrer les dessins réalisés autour du même poème, à proposer un nom pour la figure représentée et à énoncer les indices tirés du poème. En fonction du poème proposé, du type de figure, du nombre d'indices présents, les représentations et dénominations des figures en jeu ont été diversement interprétées.

Triangle scalène[2]

Le poème (Annexe 1) a engendré des figures variées, mais représentant toutes un triangle. Les titres proposés par les participants étaient « triangle » ou « triangle quelconque » ou « triángulo » (participantes hispanophones). Les indices relevés étaient soit des mots couramment utilisés en mathématiques (« base, côté, sommet ») qui renvoyaient à des éléments mathématiques des triangles, soit des expressions comme « sans égalité », « au hasard » qui renvoient à l'aspect « quelconque ». Le mot « scalène » utilisé dans le titre original, inconnu pour certains, désuet pour d'autres, n'a pas été mentionné.

Parallélogramme

Les représentations figurales montraient des formes proches nommées « losange » ou « parallélogramme ». Les mêmes indices avaient été relevés : « angles obtus », « aigus », « aplatir » et « rectangle ». Une participante a décrit le mouvement de la figure et les transformations qu'elle peut subir. Une discussion a écarté le « losange » qui se redresserait en carré et non en rectangle (tout en sachant que le carré est aussi un rectangle).

Ellipse

Une participante, qui n'était pas spécialiste des mathématiques, a dit rencontrer des difficultés pour se représenter la figure. Elle avait pensé à « cercle » ou « polygone régulier », sans pouvoir se décider, mais le participe féminin « tiraillée » l'a fait hésiter et chercher un nom féminin de figure. Les spécialistes en mathématiques ont dessiné et reconnu l'ellipse à ses « deux centres ». Certains dessins représentaient les deux points au centre de la figure. Les mots « équilibre », « tiraillés » et « extérieur informe » ont aussi été relevés.

d'ailleurs « Figures ». Ce choix, vraisemblablement pas dû au hasard, renvoie peut-être à ce que sont ces dessins figurant dans le recueil, ces représentations matérielles de figures (ces dernières étant des éléments de la noosphère, parfaitement décrites par leurs propriétés mathématiques).

[2] Les titres des trois paragraphes qui suivent et de celui-ci sont les titres des poèmes de Guillevic.

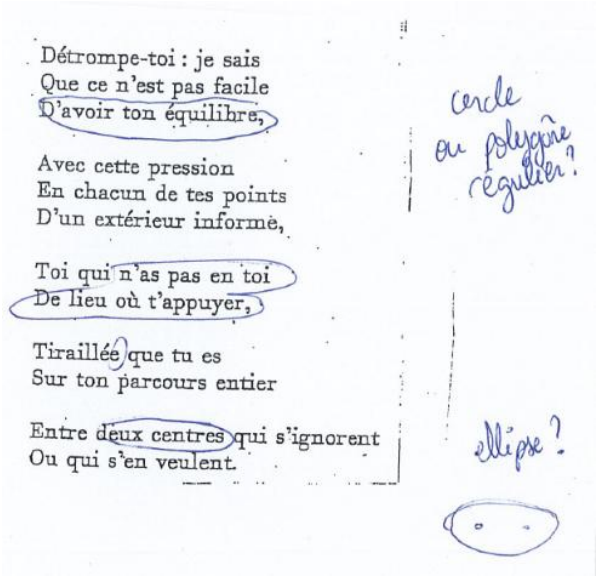


Figure 1. Les annotations du poème « Ellipse » par une participante

Rhomboèdre

Une forme correspondant à la figure a été représentée par les participants qui avaient ce poème, avec la représentation de deux losanges reliés par des traits et des pointillés, dessinant la représentation, en deux dimensions, d'un « solide ». Les indices étaient « losange », « pareil », « parallèle », « lié », « droites ». Aucun n'a cependant proposé de nom à la figure, « parallélépipède » ayant été écarté, car ses faces seraient des rectangles et non des losanges. Cette figure étant moins courante que les autres, les participants n'ont pas su la dénommer.

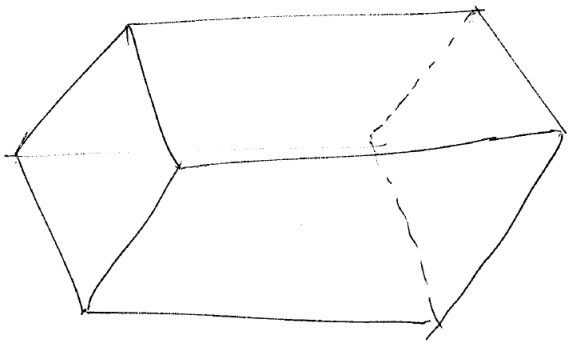


Figure 2. La représentation figurale réalisée par un participant à la lecture du poème « Rhomboèdre »

La « mise en bouche » de l'atelier à partir des poèmes de Guillevic a permis de s'interroger sur le vocabulaire utilisé en mathématiques et son lien avec les concepts. Elle a soulevé la nécessité d'en savoir plus sur les mots, d'un point de vue linguistique.

2 Concepts et mots

2.1 Représentation et concept

Le mot « représentation » a par exemple été utilisé pour parler des figures. En effet, deux moyens, dessin et mots, ont été utilisés pour se construire puis dessiner une image des figures évoquées dans les poèmes. Il s'agit là d'articuler deux formes, l'une langagière (mot) et l'autre non langagière (dessin ou figure) du troisième point de la définition ci-dessous donnée par Vergnaud, le concept restant, lui, tout à fait abstrait :

[…] un concept est un triplet de trois ensembles : C = (S, I, F)

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

> *I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) :*
> *F : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant)* (Vergnaud, 1990, p. 145)

La représentation, dessin ou mots, n'est pas la figure, mais est un moyen de l'évoquer, de la *représenter*. Ce mot est d'ailleurs formé des éléments « re- », « présent » et du suffixe verbal « -er ». Le préfixe « re- » a ici une valeur intensive. « Représenter[3] », c'est littéralement « rendre complètement présent » quelque chose, et dans le cas des mathématiques, un concept, rendu complètement présent, en son absence, par sa dénomination. Représenter, c'est donc renvoyer à un ensemble de signes matériels (signifiants d'un mot, dessin d'un segment, etc.) permettant de rendre un objet conceptuel physiquement présent. Cet aspect physique (son, lettres, chiffres, schéma, etc.) permet la communication, à la différence des représentations mentales, très subjectives et non communicables. Magritte indique cette nuance fondamentale dans ses œuvres par la mention *Ceci n'est pas une pomme*, *Ceci n'est pas une pipe.* Le poète Mallarmé exprime la même idée :

> *Je dis : une fleur ! et, hors de l'oubli où ma voix relègue aucun contour, en tant que quelque chose d'autre que les calices sus, musicalement se lève, idée même et suave, l'absente de tous les bouquets.*[4]

Comme le mot *fleur* fait surgir l'idée de fleur, ce mot générique ne peut se représenter que par un de ses référents (à savoir une fleur bien concrète)[5], appartenant à une espèce précise. Mais le mot renvoie au concept même commun à toutes les fleurs, à une totale abstraction.

2.2 Point de vue linguistique

Linguistiquement, les mots sont des signes, formés de manière inséparables, d'un signifiant, propre à chaque langue, représentant « concret » formé de lettres (à l'écrit) ou de phonèmes (à l'oral), et d'un signifié, abstrait, qui renvoie à une idée ou ce qu'on pourrait appeler un concept. En nous fondant sur la définition maintenant très classique de la notion de *concept* tel que défini par Vergnaud (1990), on devrait peut-être écrire « qui contribue à la construction du concept » puisque cet auteur intègre les mots et expressions dans la définition même du concept.

Dans leur maitrise progressive du vocabulaire spécifique mathématique, les élèves peuvent donc se heurter à deux difficultés : maitriser le concept (et donc le signifié) et ne pas savoir le nommer (se rappeler du signifiant) ; ou connaitre le nom des concepts (le signifiant) mais sans les relier à un concept clair (le signifié). Si la première est plus facile à repérer, les élèves ne mobilisent pas le mot attendu, la seconde est plus pernicieuse, car les élèves peuvent utiliser le mot, mais sans qu'aucune image mentale, n'y soit reliée, ou avec une image mentale erronée.

Nous pensons en conséquence que la tâche de l'enseignant visant l'appropriation d'un concept mathématique par les élèves pourrait être avantageusement étayée par des travaux lexicaux spécifiques, portant sur des termes (voire des expressions) faisant partie intégrante du concept. Une telle démarche s'inscrit dans la définition que donne Vergnaud (1990) du concept.

2.3 Rôle des mots dans la représentation des figures d'Euclidiennes

Ainsi, la « mise en bouche » a permis de mettre en évidence l'importance des mots usuels ou non dans l'évocation de concepts géométriques. L'image mentale forgée par les mots peut prendre la forme d'une

[3] Ce verbe *représenter* ne doit pas être confondu avec l'autre verbe *représenter* dans lequel le préfixe *re-* a un tout autre sens (à nouveau) et indique une reprise donc le fait de se présenter à nouveau (à des élections par exemple).

[4] Mallarmé, « Crise de vers » dans *Divagations*¸1897.

[5] Une photo, un dessin, un autre poème, etc. ne peut en effet « être pleinement présent », c'est-à-dire représenter une rose car tout au moins, son parfum disparaitrait. Mais le concept de fleur ne se limite pas à celui d'une rose, exemple choisi, mais désigne toutes les fleurs et n'est donc pas représentable ni par un référent donné, ni par un dessin donné, mais bien par l'ensemble des caractéristiques scientifique que le mot « fleur » désigne et qui relèvent de la botanique. C'est pour cette raison que « la fleur » est absente du bouquet.

figure et rend donc visible, par cette représentation, une partie du concept. En effet, les textes de Guillevic fonctionnent comme des programmes de construction subjectifs et poétiques d'une figure géométrique, mais qui néanmoins peuvent parvenir à une figure correspondant à une forme attendue et « reconnue » en géométrie. C'est parce que les participants savent qu'ils doivent dessiner (représenter) une figure et qu'ils en connaissent un certain nombre, qu'ils cherchent des indices qui leur permettent de se la représenter mentalement, puis de la dessiner et de la nommer.

On peut constater que ce sont, pour la majorité, des mots extraits du vocabulaire spécifique mathématique qui servent d'indice pour reconnaitre une figure. Il s'agit principalement de noms, parfois des adjectifs, qui sont utilisés, soit spécifiquement en mathématiques (par exemple « losange »), soit dans un sens particulier en mathématiques (par exemple « aigu »).

Certains noms renvoient des caractéristiques de figures, comme « base, côté, sommet, angle, parallèle, centre ». Ces noms définissent des concepts précis qui permettent de décrire une figure et qui doivent être connus pour être pertinents. Il fallait une connaissance géométrique préalable pour reconnaitre l'ellipse[6] à ses « deux centres ».

L'utilisation du nom d'autres figures dans les poèmes, comme « losange » dans le poème « Rhomboèdre » ou « rectangle » dans le poème « Parallélogramme » (voir annexe 1), permet d'entrevoir les figures dans une certaine dynamique. Pour la première, c'est le losange qui se dédouble et utilise des « droites », pour la seconde, c'est un état transitoire possible, où on agit sur la figure, jusqu'à la transformer en « rectangle » ce qui est traduit par les expressions « m'aplatir » ou « ou bien me redresser ». L'image mentale ainsi créée n'est pas seulement statique, mais on voit littéralement la figure en mouvement, en train de se construire. Quelques adjectifs, comme *obtus* et *aigu*, participent à cette vision dynamique de la figure.

D'autres mots ou expressions appartiennent au vocabulaire courant, mais contribuent aussi à la représentation d'une figure, comme *au hasard*, traduit ici par l'adjectif *quelconque.* Ce mot *quelconque* est toujours supposé dans les expressions comme « Soit ABC un triangle… », ce qui contraint éventuellement à envisager plusieurs « cas de figure » (triangle rectangle, équilatéral ou autres). Afin d'éviter cette ambigüité, le poète a utilisé l'adjectif plus approprié *scalène*[7]. En effet, cette dénomination écarte parmi les triangles quelconques ceux qui seraient isocèles, rectangles ou équilatéraux.

Si les figures sont reconnues à l'aide du vocabulaire, elles sont nommées à condition que le mot qui sert à les désigner soit connu. Ainsi le mot « rhomboèdre » ne peut pas se deviner, et pourtant, il aurait pu être nommé au moins partiellement, à partir du morphème[8] « -èdre » (face[9]), qui est utilisé dans la composition de la plupart des noms de polyèdres. Ce dernier point permet de s'interroger sur les dénominations utilisées pour représenter les figures et sur le rôle des éléments de mots pour favoriser les représentations des concepts. Ainsi, « rhombo » vient du mot grec *rhombos* qui peut signifier « losange » et « Rhombus » est le mot utilisé en allemand, comme en anglais, pour désigner cette figure. Littéralement, le mot signifie « losange-face », ce qui donne un indice, tel que le fait le poème, sur la forme de la figure. Le mot « triangle » est plus évident encore puisque on y trouve les « trois angles » qui le caractérisent. De même le mot parallélogramme se décompose en *parallèle* et *gramme*, et peut signifier « dessin de parallèles »[10].

[6] Etymologie : du latin *ellipsis* (suppression), l'ellipse étant considérée comme un cercle imparfait.

[7] Etymologie : du grec *skalenos* (boiteux, inégal).

[8] Unité graphique (mot ou partie de mot) ayant un sens lexical.

[9] Etymologie : du grec *hedra* (siège, face).

[10] Analyse morphologique : de *para* (à côté), *allelon* (l'un l'autre), éléments que l'on retrouve dans le mot « parallèle » d'une part, et *gramm-* (écriture, trait) d'autre part.

En géométrie, et plus généralement en mathématiques, le vocabulaire spécifique est utilisé pour dénommer ou décrire, mais son analyse précise et la compréhension des éléments de mots (morphèmes) qui le composent peuvent aussi servir d'indices pour construire la troisième composante du concept au sens défini par Vergnaud (1990). Ces indices sont souvent mathématiquement insuffisants, mais entrent en résonance avec les connaissances des participants pour construire la figure attendue.

II - INTERROGER LE VOCABULAIRE SPÉCIFIQUE MATHEMATIQUE

Pour interroger ce vocabulaire, et établir un lien explicite entre le signifiant et le signifié des mots travaillés, un nouveau support est proposé aux participants, extrait d'un manuel de mathématiques (annexe 2). Si ce support porte à nouveau sur la géométrie, c'est notamment pour observer une représentation scolaire, et non plus poétique, des mêmes types de concepts, et notamment établir en quoi elles sont, ou non, plus rigoureuses et plus abordables pour des élèves. La page proposée était particulièrement riche en vocabulaire spécifique. En effet, la plupart des supports, issus ou non d'un manuel, portant sur l'introduction d'un concept mathématique, comporte son lot de vocabulaire spécifique ou des mots connus par ailleurs ayant un sens très spécifique en mathématiques (*droite* par exemple). L'important en classe est que les mots y soient présentés dans un contexte, textuel et / ou iconique, qui éclaire leur usage mathématique et permet de le distinguer de leur usage courant

1 Sélectionner des mots du vocabulaire spécifique

Les participants sont invités à adopter deux postures successives : celle de l'enseignant, en s'interrogeant sur le vocabulaire spécifique à maitriser pour aborder les concepts en jeu, et, celle plus ponctuelle, de l'élève qui doit comprendre et mémoriser ces mots. Il s'agit à la fois de voir dans quelle mesure le support favorise, ou non, l'articulation entre signifiant et signifié (au sens linguistique) du vocabulaire utilisé, et de proposer une démarche d'apprentissage possible de ce vocabulaire.

Dans la posture de l'enseignant, les participants ont sélectionné les mots du support appartenant selon eux au vocabulaire spécifique mathématique (liste en annexe 3).

1.1 Un dispositif didactique

Avant de faire adopter aux participants la posture d'élève, les conditions d'un apprentissage de ce vocabulaire spécifique ont été énoncés. Les participants devaient imaginer une situation où ces mots avaient été rencontrés et explicités dans une séquence de mathématiques. L'utilisation du support « Identifier et décrire un polygone » (annexe 1) se situerait en aval du travail d'acquisition autour du concept de polygone en guise de structuration et d'entrainement. C'est à ce moment-là que peut intervenir une séance de « vocabulaire », centrée sur l'appropriation des mots, tant du point de vue de leur signifiant que de leur signifié en contexte mathématique.

Dans ce dispositif d'enseignement, ce sont les élèves qui vont, par binômes, sélectionner un ou deux mots qu'ils estiment « importants » pour « décrire les polygones » et les copier sur de grandes étiquettes. Cette activité n'est pas anodine. En effet, pour réaliser leur choix, les élèves doivent reprendre connaissance du support, s'interroger sur la relation entre le mot et le concept en jeu (ici, les polygones) et se mettre d'accord avec un autre élève. L'activité de copie permet de s'attacher à la matérialité du mot et en particulier son orthographe. Elle est donc davantage centrée sur le signifiant. Elle donne aussi un matériel pratique à manipuler lors de la mise en commun.

La mise en commun consiste à afficher les mots choisis, en faisant vérifier la copie exacte par rapport au modèle présent dans le support, puis à donner la parole aux élèves qui doivent expliciter les raisons de leur choix. Cela vise à recentrer l'attention sur le signifié et donc sur le sens mathématique des mots. En explicitant ce choix, les élèves vont de fait, rendre compte de leur compréhension du mot, et donc de leur compréhension du concept mathématique auquel il renvoie. Dans cette phase, l'enseignant peut alors

renvoyer au contexte du support ou à la séance d'apprentissage vécue par les élèves. Les élèves ayant fait le même choix de mot peuvent aussi confronter la justification de leur choix et entamer une discussion.

1.2 Le choix des mots

Les participants ont été amenés à vivre ce scénario en adoptant une posture d'élève de cycle 3, puis à discuter de la pertinence du choix de mots réalisé. Chaque binôme devait sélectionner deux mots « importants », présents sur le support (annexe 2), pour « décrire des polygones ». Ils ont ainsi incarné différentes postures d'élèves. Parmi la quinzaine de mots appartenant au vocabulaire spécifique mathématique, seuls six ont été sélectionnés.

Polygone

Le mot *polygone* a été choisi par sept binômes sur huit. Les justifications étaient multiples et ont permis de cerner différentes postures possibles des élèves.

Certains ont dit avoir choisi le mot pour la difficulté de son orthographe (le « y » que l'on pourrait écrire avec la lettre « i ») ou du nombre de points qu'il pourrait rapporter en jouant au scrabble (rêve de placer ce y sur une case triplant la valeur de la lettre, et si possible en finale d'un mot que l'on croise, valeur 60). D'après ce groupe, ces postures sont typiques des élèves qui ne s'attachent qu'au seul signifiant du mot, sans lien avec le sens mathématique.

D'autres ont dit avoir choisi les mots en fonction du nombre d'occurrences (six occurrences) et / ou sa place dans le titre. Les participants décrivent cette posture comme caractéristique des élèves qui prennent des indices matériels, indépendants du sens du mot, pensant que ces indices de fréquence ou de placement sont significatifs de l'importance du mot dans la leçon.

La plupart ont cependant donné des raisons en lien avec le concept et sont revenus aux critères de reconnaissance du polygone qui conduit à une mise en relation du mot « polygone » avec d'autres mots (« côté », « sommet »). Un retour au support permet aussi de repérer d'autres relations, par exemple dans la phrase : « un polygone est une figure » et donner des noms de polygones particuliers comme « triangle », « quadrilatère », « pentagone », « hexagone » et « octogone ».

Ainsi est établie une hiérarchie entre les mots où le mot « figure » englobe celui de « polygone » qui lui-même contient ceux de polygones particuliers, comme « triangle », « quadrilatère », « pentagone ». On pourrait encore descendre d'un niveau pour « quadrilatère », en y incluant des quadrilatères connus comme le parallélogramme, le rectangle, le losange.

Longueur, équilatéral

Ces mots ont été choisis ensemble par un groupe parce que le concept de longueur est nécessaire pour comprendre le mot « équilatéral ». « Equilatéral » leur a semblé difficile à retenir par les élèves. Le retour au support permet de relier le mot équilatéral à « côté » : « un polygone équilatéral a tous ses côtés de même longueur ». Pour faciliter la mémorisation de ce mot, les participants ont suggéré de le mettre en relation morphologique avec « quadrilatère » où l'on retrouve l'élément « latère » et d'expliciter le sens de « later » (« côté » en provenance du latin) et « équi » (« égaux » en provenance du latin), soit « côtés égaux », sous-entendu en longueur.

Sommets, côtés

Ces mots ont été choisis par deux groupes, parce qu'ils figurent parmi les mots permettant de décrire un polygone. On le retrouve dans la phrase : « [Le polygone] a autant de sommets que de côtés ». Certains participants ont relevé que le mot « côté » était le plus employé dans le support, avec treize occurrences, alors que le mot « sommet », d'égale importance, n'apparait que deux fois.

Ces mots ont fait surgir des conjectures quant au sens de l'élément « gone », présent dans différents mots. En effet, on pourrait penser que « gone » signifie « côté », puisque le manuel met

systématiquement en avant le nombre de côté des polygones. Pourtant le nom du « triangle », qui a trois côtés, met en évidence ses « angles ». Dire d'un triangle qu'il a trois angles ou dire d'une figure qu'elle a trois sommets ou trois côtés revient, dans ce contexte, à décrire une même figure (au sens générique de triangle, sans entrer dans des considérations de type triangle rectangle, équilatéral, etc.).

Un participant germanophone indique qu'en allemand scolaire, les polygones sont tous nommés par le terme « Eck » qui signifie « coin » en allemand. Par exemple *Viereck* (*quadrilatère* en français) signifie littéralement « quatre coins ». En allemand, le nom usuel des polygones indique, de façon cohérente et limpide, le nombre de leurs « coins », autre mot évoquant les « sommets » dans ce contexte. La langue française est moins cohérente, et utilise tantôt l'angle, avec deux dénominations « angle » ou « -gone »[11], tantôt le côté dans « quadrilatère ».

Les participants ont ajouté que, quelle que soit la langue, une caractéristique essentielle des « polygones », celle d'être une figure plane fermée, n'apparait pas explicitement dans leurs désignations.

Rectiligne

Ce mot a notamment été choisi par un groupe parce qu'il contient un mot familier « ligne » et commence comme le mot connu « rectangle ». La phrase « dans un polygone, chaque côté est rectiligne » leur a semblé difficile à interpréter pour un élève. Le groupe s'est donc interrogé sur la formation de ce mot, de composition mixte, puisqu'il est construit à partir de l'élément « rect- » provenant du latin et du mot français « ligne ». Une traduction littérale de « rect- » renvoie au mot « droit »[12]. Le support précise « chaque côté est rectiligne » (annexe 2). Un côté « rectiligne » serait donc une « ligne droite » (à l'opposé de ligne courbe).

Le groupe a aussi constaté la polysémie du mot « ligne » qui n'a pas un sens particulier autonome en mathématiques, au contraire du mot « courbe » ou « droite ». Une participante de langue hispanique a précisé qu'un même mot (línea) est utilisé pour désigner une ligne et une droite (ce qui correspondrait au mot « courbe » dans l'usage mathématique en français). Les participants se sont aussi interrogés sur sa relation avec le mot *segment* présent dans le support (annexe 2) et ont conclu que le côté d'un carré pouvait aussi s'appeler « segment » (de droite).

En adoptant tour à tour la posture d'élève (par le choix des mots et les justifications possibles) et la posture d'enseignant (par une réflexion sur les difficultés prévisibles des élèves à comprendre les concepts en jeu), les enseignants ont expérimenté une démarche qui vise à engager les élèves dans une attitude de recherche, dont la première étape sera pour eux le choix des mots. Parmi tous les choix de mots par les élèves, l'enseignant orientera la suite du travail sur des mots plus directement en lien avec les concepts mathématiques visés et donc aux concepts (Camenisch, Petit, 2014).

1.3 Concepts mathématiques

Certains participants ont adopté la posture de l'élève qui n'a pas compris l'enjeu de la sélection et qui choisit un mot en se centrant soit sur la seule tâche (choisir un mot), soit sur la seule forme du mot (signifiant). Pour que les élèves se centrent davantage sur le signifié, ils doivent clairement et explicitement les mettre en relation avec les apprentissages mathématiques réalisés.

La situation et l'objet de l'apprentissage doivent donc être explicitement présentés aux élèves, à savoir qu'ils doivent apprendre et connaitre des mots qui leur permettent de parler des mathématiques. C'est notamment en rappelant l'objectif de la tâche à tout moment, et en faisant expliciter les choix, toujours ramenés aux concepts qu'ils représentent, à travers des tâches déjà réalisées et en s'appuyant sur les

[11] Etymologie : du grec *gonia* qui signifie « angle ».

[12] Cette traduction ne donne évidemment pas le sens précis de ce mot polysémique. Le contexte permet cependant d'émettre des conjectures sur un sens mathématique adapté dans ce support.

supports utilisés, en analysant les relations entre les mots, que les élèves intègrent progressivement cette démarche pour faire un choix de plus en plus éclairé.

Le lien avec la discipline et la « communauté discursive » (Bernier, 2002) qui l'utilise doit être mis en évidence pour que les élèves s'attachent au sens spécifique mathématique. La force du collectif n'est pas négligeable. En renvoyant à l'ensemble du groupe les justifications de ce choix, ce dernier sera questionné et validé. Ce mot permet de mieux comprendre les mathématiques ? Pourquoi ? En quoi ? Tel est le questionnement global auquel la classe doit répondre collectivement. Il vise à créer ainsi un consensus dans la classe sur les mots clés liés au concept. Une telle posture d'engagement des élèves génère aussi une part affective, où les mots choisis par les élèves prennent une consonance particulière, justement par leur choix, qui peut contribuer à leur enracinement dans la mémoire.

Ce travail aboutit à une trace écrite pour favoriser la mémorisation du mot dans son ensemble, à la fois signifiant (son orthographe, sa prononciation) et signifié (son lien avec les mathématiques dans ce contexte d'apprentissage). Les mots ainsi retenus et validés par la classe seront présentés progressivement de manière hiérarchisée, dans des schémas, des tableaux ou d'autres représentations non linéaires afin de les mettre en réseau de sens.

1.4 Concepts lexicaux : relations sémantiques

Au niveau du lexique, cela permet aussi d'aborder, en leur donnant du sens, des concepts lexicaux sémantiques. L'objectif n'est alors pas d'enseigner ces notions, dans des leçons de « vocabulaire » déconnectées des situations d'apprentissage, mais bien de les utiliser, au plus proche des séances, ici de mathématiques, où elles sont utiles pour mieux comprendre les mots. L'engagement des élèves dans un processus de recherche nous semble plus important, et plus motivant dans des séances ancrées sur des documents véritablement utilisés en classes dans lesquels les élèves auront été acteurs de leurs choix, plutôt que sur des exercices formels décontextualisés.

La mise en relation des mots mobilise ainsi la notion d'hyperonymie entre le mot « polygone » et d'autres mots. L'hyperonymie[13] est une relation hiérarchique entre un terme de niveau supérieur (l'hyperonyme) et un terme de niveau inférieur (l'hyponyme). Cette compréhension des relations de hiérarchie entre les mots favorise une meilleure représentation du signifié. Comprendre qu'un polygone est une figure, le met en relation de sens avec toutes les autres figures connues. Donner des exemples de polygones, permet là aussi d'étendre sa compréhension par des exemples reconnus. La chaine de l'hyperonymie peut d'ailleurs s'étendre, en particulier pour les quadrilatères (rectangle, carré, losange, etc.) et les triangles (quelconque, rectangle, équilatéral, etc.).

Ces relations sémantiques peuvent être rendues plus évidentes par un schéma :

[13] On parle aussi à l'école de « nom générique » ou de « nom spécifique ».

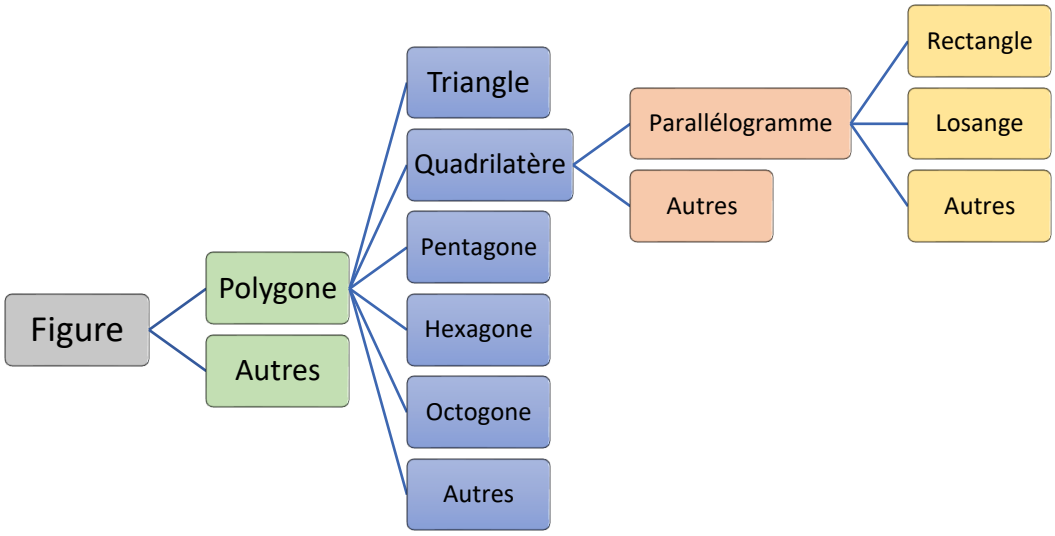
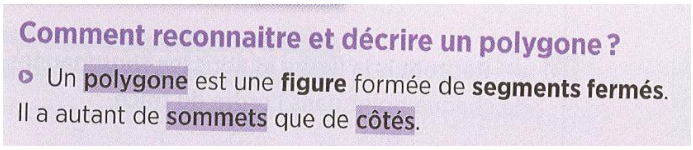


Figure 3. Représentation des hyperonymies sous forme de schéma

Cette mise en relation des mots met aussi en évidence la notion de synonymie. Deux mots sont dits synonymes, dans un contexte donné, lorsque leurs signifiés sont proches et renvoient au même concept dans ce contexte. Dans l'extrait ci-dessous, un « segment fermé »[14] renvoie au même concept que celui de « côté ».



Comment reconnaitre et décrire un polygone ?

Un **polygone** est une **figure** formée de **segments fermés**.
Il a autant de **sommets** que de **côtés**.

Figure 4. Extrait de *J'aime les maths*, CM1, p. 126.

« Segment fermé » peut donc être considéré comme synonyme de « côté » dans ce contexte.

Utiliser des mots synonymes pour renvoyer à un même concept revient à proposer une reformulation par un autre mot, susceptible d'être mieux connu, et donc de le raccrocher à un concept déjà présent. Ainsi « sommet » peut être rapproché du mot usuel « coin » souvent utilisé à l'école maternelle, peut-être plus parlant pour les élèves, terme qui sera ensuite peu à peu abandonné.

Enfin, certaines confusions conceptuelles découlent de la polysémie de certains mots. Un mot polysémique est un mot qui a plusieurs sens possibles, et donc plusieurs signifiés. Il s'agit donc de bien distinguer le sens spécifique mathématique, dans le contexte d'apprentissage, des autres sens courants, s'ils sont connus des élèves. Les termes de *figure, sommet, côté* sont utilisés dans le langage courant, mais prennent un sens spécifique en mathématique. Certains mots polysémiques ont des sens différents en mathématiques selon le concept auquel ils renvoient. Les mots « droite », « carré » ou « longueur » peuvent renvoyer à des concepts différents, chacun selon le contexte mathématique dans lequel il est rencontré. Par exemple, la longueur d'un rectangle peut tout à la fois désigner un segment ou la mesure d'un segment. Le mot « longueur » désigne aussi une grandeur. La prise décision de l'élève lui impose une démarche réflexive où le contexte d'apprentissage d'un mot est lié aux concepts mobilisés.

Une démarche engageante autour du vocabulaire spécifique mathématique consiste alors à collecter des mots au fur et à mesure de leur rencontre au cours des apprentissages en mathématiques, en faisant opérer et argumenter ce choix par les élèves, de mettre en évidence leurs caractéristiques lexicales et

[14] La différence entre un segment ouvert et un segment fermé est relatif à la non prise en compte de ses extrémités. Trois segments ouverts disposés sous forme de triangle ne constitueraient pas un triangle car il manquerait les trois sommets du triangle.

d'en garder une trace écrite pour les consulter si besoin. Les collections qui en résultent peuvent alors devenir l'objet d'un travail plus explicite portant sur la sémantique ou la morphologie lexicale.

2 Classer le vocabulaire spécifique

Le classement reste un des moyens d'approcher la compréhension de concepts lexicaux (mots, éléments de mots, hyperonymie, etc.) dans ce vocabulaire spécifique mathématique. Ainsi, les mots collectés peuvent être organisés en fonction de critères de classement sémantiques ou morphologique.

Les participants, répartis en quatre groupes, devaient organiser des mots du support (annexe 2) en fonction de critères imposés, différents selon les groupes. Pour cela, ils devaient éventuellement sélectionner les mots appropriés à partir d'étiquettes fournies (annexe 3) et proposer une organisation sur une affiche. Les participants devaient ensuite présenter et expliciter leur classement.

2.1 Classement sémantique

Classement libre

La consigne était : « Classez les mots selon un critère que vous définirez ».

Dans les classes, ce type de classement conduit le plus souvent à un classement sémantique (Petit, Camenisch, 2007b), où les élèves vont classer les mots en fonction du concept (signifié) auquel il renvoie.

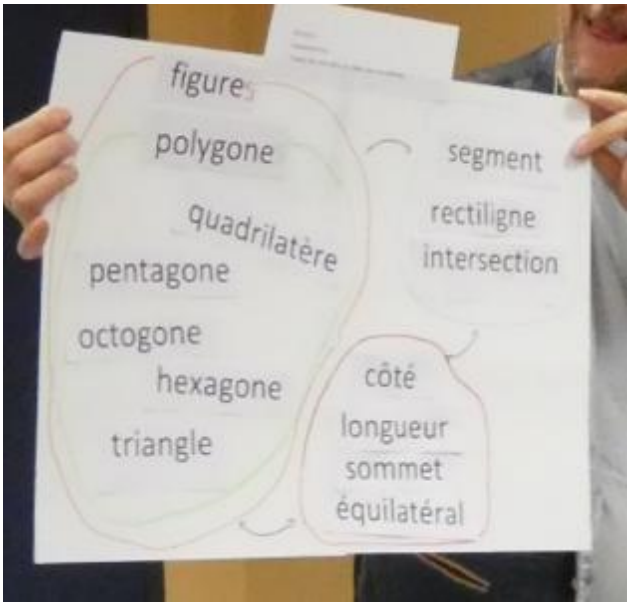


Figure 4. Classement libre

Ce groupe a retenu trois classes (figure 4, ci-dessus), présentées sous formes de patates. La première utilise un des mots, « figures » comme titre et propose un ensemble des polygones, ce qui constitue de fait un emboitement d'hyperonymes. La seconde contient les mots qui « caractérisent les propriétés qui permettent de définir les objets qu'on étudie », les figures. La troisième contient des mots qui ont moins de « consistance mathématique » mais qui permettent de manière transitoire de décrire ou d'expliquer d'autres mots. Ainsi le groupe explique que « segment » est un préalable pour introduire et comprendre le mot « côté ». Le jeu des flèches montre que les élèves peuvent s'emparer de ces termes pour expliciter l'un ou l'autre concept.

Organisation sémantique

La consigne était : « Organisez les mots entre eux en fonction de leurs relations de sens ». Le classement sémantique était donc contraint. Il n'aboutit pas à la même répartition que précédemment, explicitement indiquée par des titres.

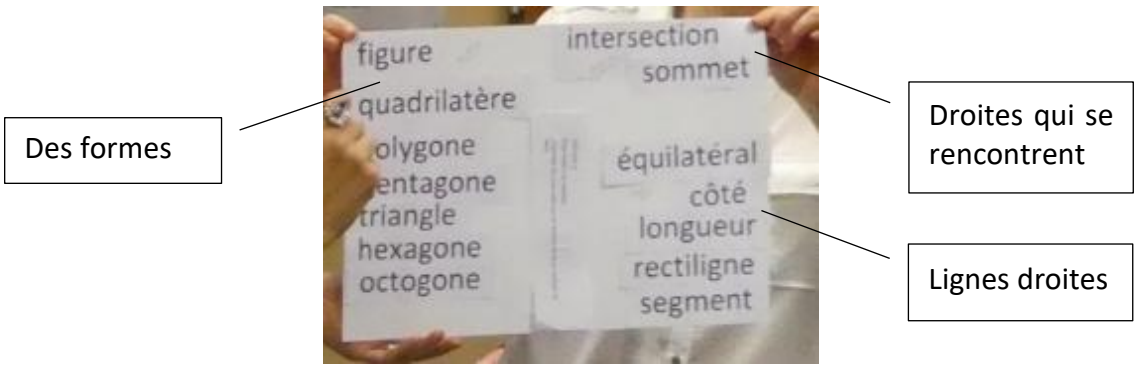


Figure 5. Organisation sémantique

Le groupe a proposé un classement en regroupant les formes, le terme figure, en tête, semble avoir un rôle générique. Le terme « forme » englobe cependant le mot « figure » sans le hiérarchiser explicitement par rapport aux figures particulières.

2.2 Classement morphologique

Classement selon les éléments communs

La consigne était : « Classez les mots qui ont des éléments[15] communs ». Le critère de classement donné était explicitement morphologique.

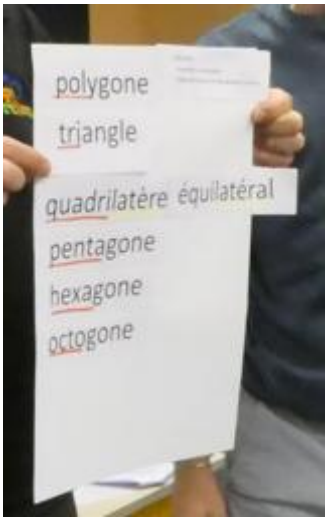


Figure 6. Classement morphologique 1

Le groupe explique que leur premier classement mettait ensemble les mots en « gone » et ceux en « later ». Puis, ils ont décidé de classer en fonction de la première partie du mot, soulignée en rouge, qui avait un sens commun, c'est-à-dire qu'ils renvoyaient à l'expression d'une quantité, en réalisant un « classement ordonné » croissant. Et ils ont souligné en jaune les deuxièmes parties de mots qui contiennent « later ». Ce classement morphologique était donc partiellement sémantique, puisque les mots sont aussi regroupés en fonction du sens des éléments. Ils ont estimé que ce classement écartait cependant trop de mots pour être pertinent.

Processus de formation

La dernière consigne était différente : « Classez ensemble les mots qui ont été formés de la même manière ». Cette consigne visait à prendre en compte l'ensemble des mots, en s'intéressant davantage au processus de formation, qu'à des éléments de formation communs.

[15] Si le terme « élément de mot » est utilisé en linguistique, le terme synonyme « formant » est plus fréquemment utilisé. La consigne a été explicitée oralement.

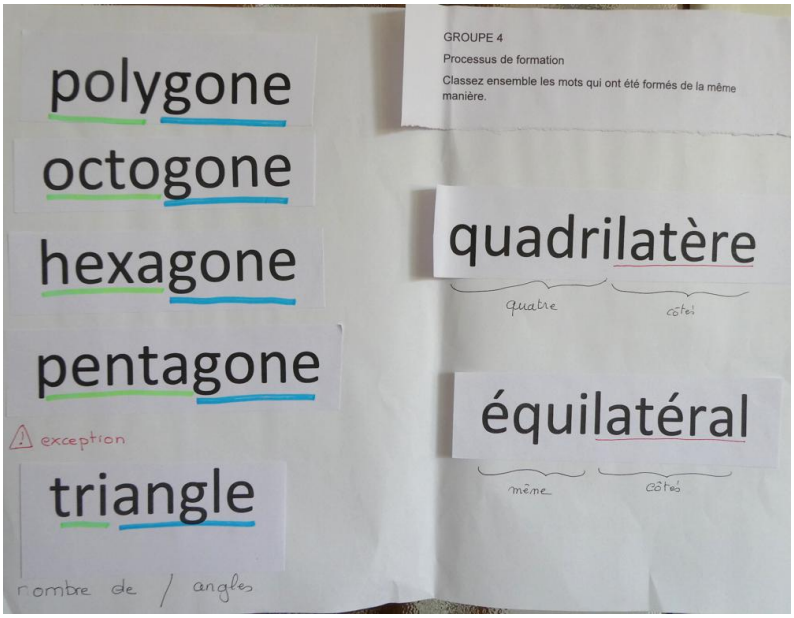


Figure 7. Classement morphologique réalisé par un groupe 2

Le groupe a sélectionné les mêmes mots que le groupe précédent, en distinguant les signifiants qui « voient » les figures du point de vue des angles et ceux qui les « voient » du point des côtés. Ils n'ont donc pas pris en considération le processus de formation des mots, mais l'ont pris en compte dans des mots où apparaissaient des éléments de mots communs.

La consigne qui imposait de classer en fonction de « la manière dont les mots sont formés » ne suffit pas à dépasser les cas particuliers et notamment à s'abstraire du sens pour n'observer que les processus de formation.

2.3 Les principaux processus de formation des mots

Comprendre la manière dont les mots sont formés donne des clés pour observer tous les mots et déceler les éléments de sens susceptibles d'éclairer le sens global du mot. En effet, s'il existe des mots simples, comme « figure » par exemple, qui ne sont pas décomposables en morphèmes, une majorité de mots de la langue française sont construits à partir de morphèmes, ou éléments de mots qui ont du sens. On distingue essentiellement deux processus de formation : la dérivation et la composition.

Dérivation

Ainsi le mot « longueur » est formé par dérivation par adjonction du suffixe « -eur » au radical « long(u)[16] ». Le radical est souvent un mot qui existe indépendamment dans la langue française. Le suffixe permet de changer de classe grammaticale (*long* est un adjectif, *longueur* est un nom) et apporte parfois des nuances de sens. Ainsi à partir d'un mot de base, il est possible de fabriquer d'autres mots, qui lui sont reliés du point de vue du sens. Le sens du mot peut aussi être modifié par l'adjonction d'un préfixe, comme nous l'avons vu précédemment pour le verbe « représenter » (partie 2.1).

Composition savante

La composition savante utilise des éléments de mots qui proviennent d'une langue ancienne, le grec, comme dans « pentagone », ou le latin comme dans « quadrilatère ». Contrairement au processus de dérivation où le radical est souvent un mot français immédiatement reconnaissable par son signifiant (*long*, *large*, etc.) et associé à un signifiant connu, les morphèmes associés dans la composition savante demandent une connaissance préalable. Ce processus de formation est donc « opaque » dans la mesure

[16] Nous reprenons la présentation des éléments de mots tels qu'ils apparaissent dans le Dictionnaire *Le Robert Brio*, où les lettres entre parenthèses mentionnent les variantes.

où les élèves ne le perçoivent pas et associent un sens global à chaque mot, comme s'il n'était pas construit (Petit, Camenisch, 2007b). Ainsi, en rencontrant un nouveau mot comprenant l'élément « gone » (par exemple dans dodécagone), ils ne l'identifient pas d'emblée comme un polygone, tout comme ils ne perçoivent pas le sens de « dix » dans « déca ».

En langue allemande, nous l'avons vu (partie I.1.2) le processus est souvent transparent puisque le mot « pentagone » se dit, à l'école[17], « Fünfeck », littéralement « cinq coins », même si le mot global est nouveau, une partie de son sens est immédiatement accessible par la compréhension du sens de ses éléments.

Les processus de formation peuvent aussi se combiner en français. Comme nous l'avons vu précédemment pour le mot « rectiligne » (I.1.2), un élément savant peut s'agglutiner à un mot français. De même, un mot de formation savante peut se dériver, comme « équilatéral » où le suffixe adjectival « -al » est ajouté aux éléments « équi » (égal) et « later- » (côté).

Pour donner accès au sens des éléments de mots issus du grec ou du latin et donc permettre aux élèves de se former une représentation, même approximative, des concepts mathématiques concernés, les élèves français doivent d'une part, prendre conscience de ce processus de formation, d'autre part mémoriser progressivement le sens des éléments récurrents qui aident à se représenter les concepts. Or le processus de composition savante est souvent enseigné tardivement, en classe de CM2, et moins travaillé que le processus de dérivation.

Une analyse en synchronie[18] de ces mots permet de comprendre que certains mots sont formés d'éléments qui apportent des renseignements sur leur sens. La morphologie prend ainsi son ancrage sur la forme des mots et leur composition (leur signifiant), mais elle donne aussi des indices sur le sens des mots si l'on comprend comment ils sont formés. Ainsi, l'analyse des mots, en reliant forme et sens, permet par exemple de comprendre que les mots qui comprennent l'élément « later » impliquent la notion de « côté ». Développer chez les élèves une telle conscience morphologique et donc, construire avec eux un bagage d'éléments de mots issus du grec ou du latin, récurrents dans des mots mathématiques, pourrait faciliter d'une part l'émission de conjectures sur le sens des mots (un mot avec « later » va attirer l'attention sur les « côtés »), d'autre part la mémorisation de mots nouveaux (une partie du mot est déjà connue).

Un classement morphologique lexical, des mots rencontrés dans le cadre d'apprentissages en mathématiques, peut conduire à l'apprentissage, en contexte, de ce processus de composition (Petit, Camenisch, 2007b). On peut supposer qu'une telle approche morphologique économise à terme la mémoire, puisqu'un certain nombre de ses éléments se retrouvent dans plusieurs mots.

En mathématiques et en sciences, les mots de composition savante abondent. Comprendre ce processus de formation donne des clés aux élèves pour mieux comprendre les concepts mathématiques et de mieux mémoriser les mots qui les désignent. Dans nos recherches (Petit, Camenisch, 2007b ; Petit, 2014), nous avons pu constater qu'après un travail portant sur la morphologie des mots de composition savante en classe de CM2, les élèves ne se trompaient plus dans la reconnaissance de polyèdres à plusieurs faces, et étaient même capables de fabriquer des mots (justes) afin de nommer des polyèdres (énnéadécaèdre) en fonction du nombre de leurs faces. Etendu à un vocabulaire scientifique non mathématique, les élèves se sont montrés capables, à partir d'un lexique réduit à ses éléments « savants », de décrire ou de dénommer des animaux fantastiques. Les élèves ne s'étaient pas seulement approprié le processus de formation,

[17] Les mathématiciens allemands utilisent aussi le terme *Pentagon.*

[18] Une analyse en synchronique consiste à étudier les mots de la langue française tels qu'ils sont à l'instant présent sans tenir compte de leur évolution. Les mots sont alors formés d'éléments auxquels on attribue un sens.

mais étaient capables de déduire le sens des éléments et de les réutiliser, soit en se fabriquant un glossaire d'éléments de mots, soit en mémorisant le sens de ces éléments.

Cette approche « synchronique » par la compréhension du sens des éléments qui les composent et par une approche comparative des mots s'oppose à une approche diachronique, plus savante, qui s'intéresse davantage à l'évolution des mots depuis l'étymon grec ou latin.

La posture synchronique ne nécessite *a priori* aucune connaissance du latin ou du grec, mais pioche dans les mots des éléments significatifs, qui lorsqu'ils sont fréquents, finissent par être mémorisés et conduisent les élèves à associer bon nombre d'éléments issus du latin ou du grec à des mots français, qui permettent alors d'émettre des conjectures sur le sens des concepts véhiculés par ces éléments de mots.

L'analyse en synchronie considère que tout mot français, directement importé d'un mot latin ou grec et composé dans une de ces langues est composé en français. Ainsi, dans une perspective synchronique, *quadrilatère*, qui est une importation directe du latin *quadrilaterus*, est formé des éléments *quadr(i)* (quatre) et *later* (côté).

III - APPROCHER LES CONCEPTS PAR UN TRAVAIL SUR LES MOTS

Nous stipulons qu'un travail explicite sur la formation des mots peut donc permettre aux élèves d'approcher les concepts mathématiques, parce qu'il en éclaire le sens. Un travail lexical dans la classe de mathématique nécessite donc, pour l'enseignant, de mieux connaitre la formation des mots, afin de pouvoir en faire bénéficier ses élèves dans des activités spécifiques (Camenisch, Petit, 2014).

La dernière activité de l'atelier visait donc à partir d'un mot issu d'un autre support mathématique à analyser le mot d'un point de vue morphologique et à proposer des activités susceptibles d'approcher le sens des concepts véhiculés par ces mots.

1 Une analyse morphologique pour approcher le sens des mots

Chaque groupe dispose d'un support différent issu d'un manuel de mathématiques (supports reproduits en annexe 4) et d'étiquettes avec un ou deux mots dont le sens mathématique peut s'approcher ou s'éclairer par une analyse morphologique. Les groupes doivent choisir un des mots à leur disposition, le découper en morphèmes et proposer un travail sur la morphologie pour éclairer le concept mathématique en jeu.

Pour pouvoir analyser la formation des mots de manière scientifique, chaque groupe devait utiliser des sources fiables convergentes, réalisée par des linguistes[19], qui découpent les mots en morphèmes élémentaires et les associent à un mot français. Les groupes avaient donc à leur disposition des outils comme *Le Robert Brio* (Rey-Debove, 2004), *Le Robert méthodique* (Rey-Debove, 1982) ou le *Dictionnaire étymologique du français* (Picoche, 2008). Toutes les décompositions réalisées par les groupes sont donc attestées par les dictionnaires consultés.

Les mots présélectionnés étaient, selon nous, des mots essentiels dans la compréhension de certains concepts et riches du point de vue morphologique, voire sémantique (mots polysémiques).

Multiplier[20]

Le groupe, armé de ces ouvrages fiables, a décomposé le verbe en trois éléments : MULTI-PL-IER. Ce découpage allait à l'encontre d'une représentation souvent véhiculée et bien ancrée, sans doute liée à l'étymologie latine du mot, à savoir le verbe *plicare* (plier), où multiplier consisterait à plier.

[19] En effet, les ressources disponibles en ligne ou sur Wikipédia ne sont pas toujours avérées.

[20] Annexe 4, 2.

La consultation du *Robert Brio* a permis au groupe de décomposer le mot en synchronie en un élément MULTI- qui signifie[21] en français « plusieurs », un élément -PL- qui signifie « fois » (annexe 5-1). Une analyse comparative en synchronie permet d'émettre la conjecture que la désinence verbale -IER signifie « faire » (*gracier*, c'est faire grâce, *étudier*, c'est faire des études, *privilégier*, c'est faire/donner un privilège). Littéralement, *multiplier* signifie alors « réaliser plusieurs fois ».

Un travail possible avec des élèves peut être conduit à partir d'une analyse comparative avec d'autres mots construits avec les mêmes éléments (dont certains sont opportunément fournis par le *Robert Brio*). Ainsi, croisées avec le contexte dont sont issus les mots « triple » et « quadruple », des conjectures sur le sens de l'élément -PL-, dans ces mots, peuvent être faites par les élèves, à savoir que le « triple » c'est « trois fois » et « quadruple » c'est « quatre fois ». Le sens de l'élément MULTI- peut se retrouver par comparaison dans les mots « multicolore » et « multicoque ».

Rectangle, triangle[22]

Le groupe a choisi d'analyser le mot « rectangle » et a proposé le découpage RECT-ANGLE. RECT se traduit par « droit ». « Rectangle » signifie ainsi littéralement « angle droit », ce qui nécessite de s'interroger sur le sens de « angle droit » dans le concept de « rectangle ».

Le groupe a de manière pertinente relevé la polysémie du mot « rectangle » qui risquait de poser des difficultés pour la représentation du concept nouveau. Dans le support, le mot « rectangle » était utilisé comme un adjectif dans le groupe nominal « un triangle rectangle ». Or les élèves connaissent déjà le nom « rectangle ». Le sens des éléments peut être rendu plus explicite dans un rappel de la définition du rectangle : *le rectangle est un quadrilatère particulier avec quatre angles droits*. Ce travail préalable permet de distinguer un autre emploi du mot « rectangle », utilisé comme adjectif, qui qualifie une autre figure, un triangle. *Un triangle rectangle est donc un triangle qui a un angle droit*. Un travail sur la morphologie peut donc permettre de différencier les concepts en fonction de la classe grammaticale du mot.

Décimal, dixième, centième[23]

Le groupe a choisi le mot « décimal » et, en s'appuyant sur le dictionnaire *Le Robert Brio*, l'a découpé en trois éléments : DEC-IM-AL. L'élément DEC- vient de « deca » qui signifie « dix » en grec, et l'élément -IM- (annexe 5-2) renvoie à une quantité exprimée par l'élément qui précède. Cet élément -IM- a aussi donné le suffixe « -ième ». Littéralement DECIM veut dire « dixième ». Le suffixe -AL est un suffixe adjectival. Le mot est effectivement utilisé comme adjectif et qualifie le mot « fraction ». Une fraction décimale est donc une fraction qui peut exprimer le produit d'un découpage successif en « dixième ».

Distance, diamètre[24]

Le dernier groupe a choisi le mot « distance », qui a été décomposé en DI-ST-ANCE, où DI- renvoie à l'éloignement, la séparation, -ST- signifie « être debout » (que l'on retrouve aussi dans les mots « statue », « statique », « station » ou les verbes anglais « to stand » ou allemand « stehen »), et où -ANCE est un suffixe nominal. Le mot « distance » décrit, en quelque sorte, « le fait de se tenir au loin ».

Le mot « distance » est un mot fréquemment utilisé en mathématiques et cette compréhension « littérale » peut permettre de le comprendre plus finement.

[21] Le dictionnaire *Le Robert Brio* indique la signification de ces éléments, c'est-à-dire leur traduction en français.

[22] Annexe 4, 3.

[23] Annexe 4, 4.

[24] Annexe 4, 1.

Dans le document ce mot est utilisé pour définir le cercle comme étant « l'ensemble des points situés à égale distance d'un point appelé le centre du cercle ». Le cercle se définit donc par les points situés « loin » du centre, de manière égale.

2 Des éléments de mots éclairants ?

Décomposer les mots en éléments significatifs peut contribuer à comprendre, partiellement, le lien entre le mot et le concept. Tout le sens du mot n'est pas donné, mais la mémoire peut se raccrocher au mot lui-même pour reconstituer le concept travaillé dans la classe de mathématiques.

Pour la pratique de classe, on ne peut qu'encourager à entamer une collecte d'éléments de mots, d'en garder une trace consultable comme aide-mémoire, car de nombreux éléments de mots sont récurrents. Les élèves disposent alors d'une stratégie qui peut être réinvestie dans tous les contextes d'apprentissage (Camenisch, Petit, 2007a).

Conclusion

Du point de vue de la formation des enseignants, une approche lexicale permet de s'intéresser aux mots qui représentent des concepts essentiellement abstraits, aux relations syntaxiques ou sémantiques qu'ils tissent avec d'autres mots en contexte mathématique et aux processus de formation qui les gouvernent. Ce regard de linguiste sur les mots favorise une autre approche des concepts mathématiques et permet de les éclairer en reliant les formes des mots aux sens véhiculés par les morphèmes qui les constituent.

Une telle approche ne s'improvise pas, elle demande d'avoir la curiosité de regarder les mots autrement et de se former à des connaissances lexicales actualisées. Cela nécessite également d'avoir recours à des outils pour décomposer les mots, comme le dictionnaire *Le Robert Brio* (2004) par exemple.

Les activités mises en place dans le cadre de cet atelier ont permis de mettre en œuvre des démarches variées : mise en relation entre des textes, des dessins et des mots ; inventaire du vocabulaire spécifique mathématique ; explicitation du sens de mots issus de ce vocabulaire à partir du contexte et de la morphologie lexicale ; mises en relations sémantiques des mots ; classement des mots en fonction de critères multiples ; analyse de la formation des mots en vue d'expliciter des concepts mathématiques. Toutes ces démarches, intellectuellement engageantes, peuvent être transposées en classe à l'école élémentaire : collecter le vocabulaire spécifique, le classer en fonction de critères variés, dûment explicités, mettre en évidence les relations syntaxiques et sémantiques entre les mots qui renvoient au concept, analyser les mots d'un point de vue morphologique, se constituer un répertoire de mots et d'éléments de mots. Ce type de démarche conduit les élèves à développer une attitude active et réflexive à la rencontre de mots nouveaux.

Les élèves disposent alors de moyens pour se décentrer de la seule forme des mots (orthographe, prononciation) pour se faire une représentation plus éclairée des concepts mathématiques véhiculées par les mots. Emettre des conjectures portant sur le sens de nouveaux mots à partir d'éléments de mots collectés ou mémoriser est une posture qui contribue à l'émergence des concepts.

La réflexion sur le développement de stratégies de compréhension des mots et de leurs concepts a simplement été entamée dans cet atelier. On pourrait aussi s'interroger sur l'ensemble des mots mathématiques qui gagneraient à être travaillés lexicalement à l'école primaire.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Bernier, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie, 141*, 77-88.

Camenisch, A., Petit, S. (2014). *Des contextes vers la langue : une double interaction entre apprentissages disciplinaires et apprentissages lexicaux*, CSP (ressource en ligne). Consulté le 01/09/2024.

https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/CAMENISH_-_MCF_-_PETIT_-_PU_-_CSP_Contribution_373907.pdf

Camenisch, A., Petit, S. (2008). Un temps pour la poésie en mathématiques : Guillevic. *Bulletin vert APMEP, 477*, 507-511. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAA/AAA08060/AAA08060.pdf

Camenisch, A., Petit, S. (2007a). Mieux approcher les concepts mathématiques par une meilleure connaissance du lexique, Dans *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école. Actes du 33e colloque COPIRELEM*, 207-213. Paris : ARPEME.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Lausanne : Peter Lang.

Guillevic (1967). *Euclidiennes,* Paris : Gallimard.

Mallarmé, S. (1897). *Divagations*, Paris : Eugène Fasquelle.

Petit, S., Camenisch, A. (2007b). La formation savante des mots en mathématiques. *Bulletin vert APMEP, 470*, 311-332. https://bibnum.publimath.fr/AAA/AAA07036.pdf

Petit, S. (2014). Nominalisation et contextes disciplinaires au cycle 3 de l'école primaire, dans J. Goes (éd.), *NominalisationS,* 197-227. Arras : Artois Presses Université.

Picoche, J. (dir.) (2008). *Dictionnaire étymologique du français*, Paris : Le Robert.

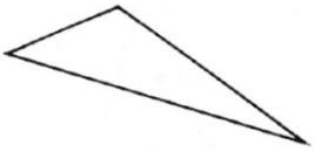
Rey-Debove, J. (dir.) (2004). *Le Robert Brio*. Paris : Le Robert.

Rey-Debove, J. (dir.) (1982). *Le Robert Méthodique*. Paris : Le Robert.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels », *Recherche en didactique des mathématiques, 10*, 133-170.

ANNEXE 1 : POÈMES DE GUILLEVIC PROPOSÉS

triangle scalène



Bon pour danser,
Virevolter

Sur ma base, sur mon sommet,
Sur mes côtés, mes autres angles.

C'est que je suis toujours
Agité, tiraillé,

Par des angles, par des côtés
Assemblés au hasard
Et sans égalité.

ellipse



Détrompe-toi : je sais
Que ce n'est pas facile
D'avoir ton équilibre,

Avec cette pression
En chacun de tes points
D'un extérieur informe,

Toi qui n'as pas en toi
De lieu où t'appuyer,

Tiraillée que tu es
Sur ton parcours entier

Entre deux centres qui s'ignorent
Ou qui s'en veulent.

parallélogramme



On pourrait m'aplatir,
Aussi me redresser.

Je n'ai pas d'idée fixe.

Que deviennent aigus
Mes deux angles obtus,
Je ne tremblerai pas.

Mais s'il me faut passer,
Un instant de raison,
En forme de rectangle,

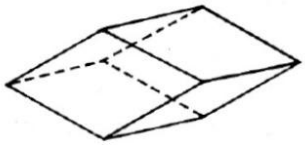
Alors j'ai peur,
Car un rectangle
Est autre chose.

Comme si ma surface
Pouvait ne plus m'appartenir,

Comme si quelque vent
M'ouvrait sur le volume,

Si mes angles veillaient
Sur quelque chose d'autre
En moi-même que moi.

rhomboèdre



Pour se guérir de son malaise,
Le losange s'est projeté
Dans son pareil, son parallèle

Et s'est lié à lui
Par des droites soumises
Où s'en vont ses regards

Que l'autre lui renvoie.

ANNEXE 2 : SUPPORT POUR INTERROGER LE VOCABULAIRE

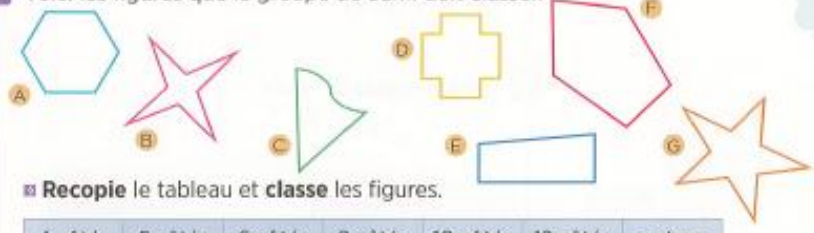
Extrait de *J'aime les maths*, CM1, Belin, 2016, page 126

Identifier et décrire un polygone

Cherchons ensemble

Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici les figures que le groupe de Sami doit classer.





Recopie le tableau et **classe** les figures.

4 côtés	5 côtés	6 côtés	8 côtés	10 côtés	12 côtés	autres
...	...	...	...	...	...	...

Retenons ensemble

Mots à retenir
polygone • sommets • côtés • équilatéral

Comment reconnaitre et décrire un polygone ?

- Un **polygone** est une **figure** formée de **segments fermés**. Il a autant de **sommets** que de **côtés**.
- Les polygones ont des **noms différents** suivant leur **nombre de côtés**.

Le triangle	Le quadrilatère	Le pentagone	L'hexagone	L'octogone
3 côtés	4 côtés	5 côtés	6 côtés	8 côtés





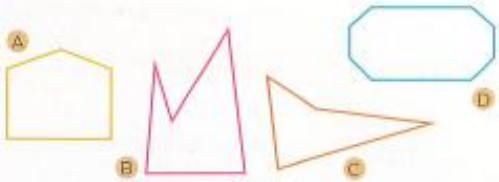
- Un polygone **équilatéral** a tous ses **côtés de même longueur**.



Triangle équilatéral
AB = BC

Je sais faire

2 **Recopie et complète le tableau.**



Polygone	...	...	...	...
Nombre de côtés	...	...	...	...
Nom	...	...	...	...

3 **Recopie et complète les définitions.**

a. Un ... est une figure fermée.
b. Un polygone ... a tous ses côtés égaux.
c. Un ... est un polygone à 5 côtés.

4 **Écris VRAI ou FAUX.**

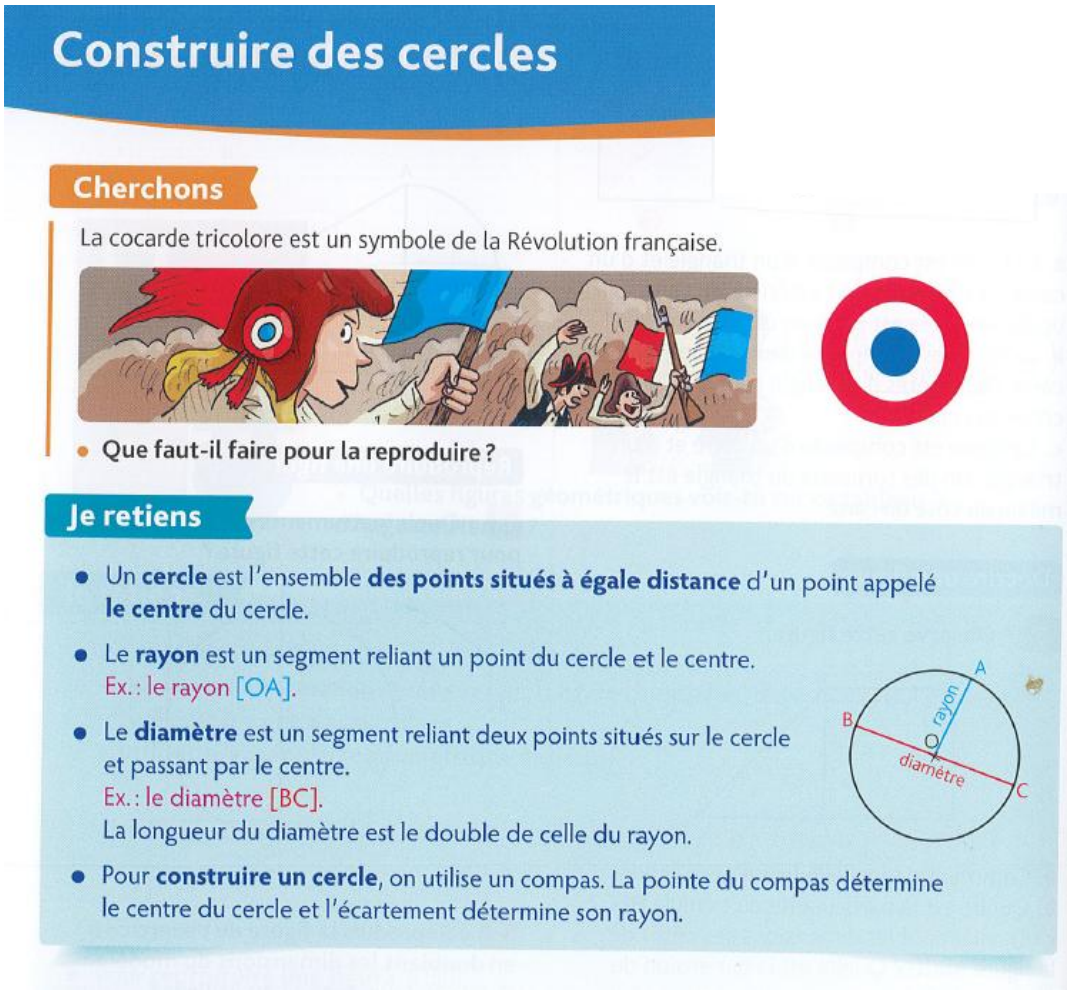
a. Un sommet est à l'intersection de deux côtés.
b. Tous les côtés d'un polygone ne sont pas rectilignes.
c. Un octogone possède 10 côtés.
d. Le polygone ABC peut être un hexagone.

ANNEXE 3 : LISTE DES MOTS À CLASSER

côté
équilatéral
figure
hexagone
intersection
longueur
octogone
pentagone
polygone
quadrilatère
rectiligne
segment
sommet
triangle

ANNEXE 4 : SUPPORT POUR UNE ANALYSE MORPHOLOGIQUE

1 *Les nouveaux outils pour les maths*, CM1, Magnard, p. 162.



Construire des cercles

Cherchons

La cocarde tricolore est un symbole de la Révolution française.

Je retiens

- Un **cercle** est l'ensemble **des points situés à égale distance** d'un point appelé **le centre** du cercle.
- Le **rayon** est un segment reliant un point du cercle et le centre.
  Ex. : le rayon [OA].
- Le **diamètre** est un segment reliant deux points situés sur le cercle et passant par le centre.
  Ex. : le diamètre [BC].
  La longueur du diamètre est le double de celle du rayon.
- Pour **construire un cercle**, on utilise un compas. La pointe du compas détermine le centre du cercle et l'écartement détermine son rayon.

2 *J'apprends les maths avec Picbille*, CE1, Retz.

67 Le signe x (« multiplié par ») comme symbole de la commutativité

Dessine 6 fois 4 jetons.

Ici, en tout, j'ai dessiné ..... jetons.

Dessine 4 fois 6 jetons.

Ici, en tout, j'ai dessiné ..... jetons.

Dessine 6 rangées de 4 jetons.

Ici, en tout, j'ai dessiné ..... jetons.

Que remarques-tu ? Saurais-tu l'expliquer en utilisant la boite ci-dessous ?



Et si tu dessinais 50 fois 3 jetons et 3 fois 50 jetons, qu'observerais-tu ?

J'ai appris

Dans 6 fois 4, il y a le même nombre que dans 4 fois 6.
On le voit bien quand les groupes qu'on forme sont des rangées.
Ce nombre s'écrit **6 x 4** (« 6 multiplié par 4 »)
ou **4 x 6** (« 4 multiplié par 6 »).

3 *J'aime les maths*, CE1, Belin, 2016, page 124 .

J'aime les maths, CE1
Belin, 2016

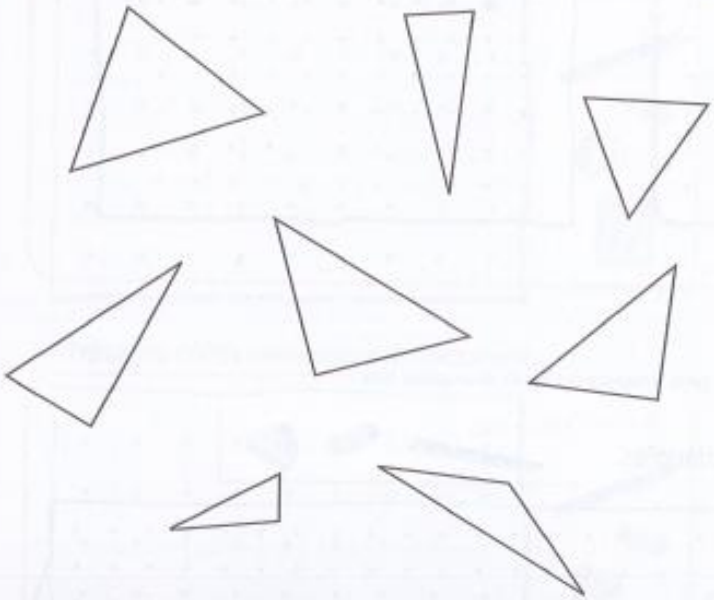
Décrire, reconnaitre et tracer un triangle rectangle

Cherchons ensemble

Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide p. 82

1 Voici les triangles que Lisa et Hugo doivent décrire.
• **Colorie** les triangles en respectant leur portrait.







Je suis rouge, j'ai 2 côtés de même longueur et un angle droit.
Je suis orange, j'ai 3 côtés de même longueur
Je suis bleu, j'ai un angle droit et 3 côtés de longueurs différentes.
Je suis vert, j'ai 3 côtés de longueurs différentes.



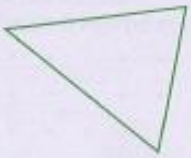
Pistes de différenciation dans le guide p. 82

Retenons ensemble

Comment décrire et reconnaitre un triangle rectangle ?
• **Complète** avec les mots à retenir.

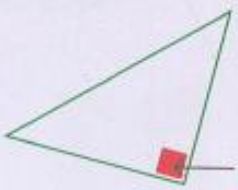
Les mots à retenir
angle droit, rectangle, triangle

Pour décrire un _____
on compte ses **côtés** et ses **sommets**.



Un triangle a **3 côtés** et **3 sommets**.

Pour reconnaitre un **triangle** _____,
on vérifie qu'il a un _____.



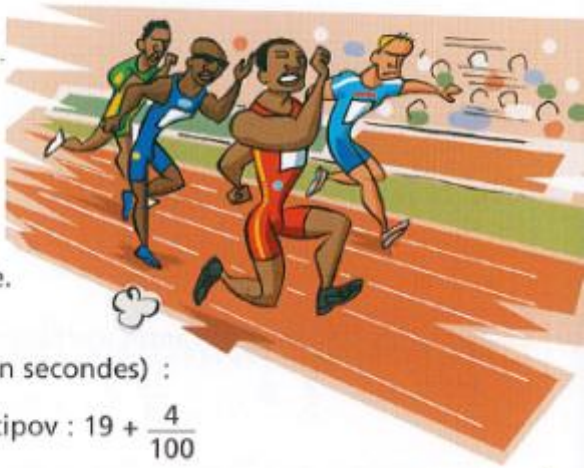
angle droit

4 *Euro Maths*, CM2, Hatier, p. 40.

Fractions décimales et nombres décimaux (les écritures à virgule)

Objectif : continuer à se familiariser avec l'addition des fractions décimales et la convention d'écriture des nombres décimaux.

DÉCOUVERTE



1 Dans une réunion d'athlétisme, sur le 200 mètres, le temps de passage au 100 mètres d'Alonso est de 10 secondes et 7 centièmes de secondes. Il parcourt les 100 derniers mètres en 9 secondes et 85 centièmes de secondes. Campbell a couru le 200 mètres en 19 secondes et 5 dixièmes de seconde.

a. Lequel des deux est arrivé avant l'autre ?

b. D'autres athlètes arrivent dans les temps suivants (en secondes) :

Santos : $20 + \frac{75}{100}$ Jones : $19 + \frac{6}{10} + \frac{5}{100}$ Antipov : $19 + \frac{4}{100}$

Donne l'ordre d'arrivée des cinq athlètes.

c. Avant cette réunion, le record du monde était de 19 secondes + $\frac{3}{10}$ secondes + $\frac{2}{100}$ secondes. Ce record a-t-il été battu ?

2 Prépare les phrases qui vont être dites au micro pour annoncer les résultats de ce 200 mètres.

3 Sur le panneau d'affichage du stade, les temps en secondes sont inscrits en écriture décimale.

Remplis le tableau d'affichage en rangeant les athlètes du premier au cinquième par leur temps.

Place	Nom	Temps
1		
2		

ANNEXE 5 : QUELQUES NOTICES DE DICTIONNAIRE

Nous reproduisons ci-dessous soit complètement, soit des extraits de quelques notices du dictionnaire *Le Robert brio* (2004).

1 *Le Robert Brio*, p. 1777.

-(U)PL- Elément qui signifie « nombre de fois » exprimé par la base numérique. **1**. Sous la forme **-UPLE** il apparait dans : centuple, (centupler), décupler, quadruple (quadrupler, quadruplés), quintuple (quintupler, quintuplés), septuple, sextuple. **2** […] **3**. Sous les formes **-PL-** et **-PLIC-,** on le trouve dans les mots décupler, triple (triplement, tripler, triplé, triplés), multiple (multiplier, démultiplier), […]

2 *Le Robert Brio*, p. 613.

–(ÉS)IM- Elément qui signifie « relatif à la quantité (exprimée par la base) ». Celle-ci est un mot cardinal ou un nom. SYN **-ième**. Il apparait dans les mots : centésimal, infinitésimal, millésime (millésimé), centime, décimal (duodécimal), décimer, régime. […].

UNE CONSTRUCTION DES FRACTIONS DE L'UNITE, A TRAVERS LA SITUATION ERMEL *BANDE-UNITE* REVISITEE

Catherine THOMAS
PRAG, INSPE de Strasbourg, Université de Strasbourg
IREM de Strasbourg, COPIRELEM
catherine.thomas@unistra.fr

Résumé
En appui sur la première séance de la situation *Bande Unité* de la ressource ERMEL, cet atelier permet, dans un premier temps, de réfléchir aux liens entre le concept sans doute flou de fraction et ceux de nombre rationnel et d'écriture fractionnaire. Il propose dans un second temps une construction des fractions à partir du concept d'unité fractionnaire, en particulier en faisant vivre la situation ERMEL aux participants, puis en les faisant analyser des productions d'élèves. On retrouvera dans la brochure de l'IREM de Strasbourg, *Introduire les fractions à l'école primaire, ou comment réussir en classe la situation Bande unité de la ressource ERMEL*, parue en 2024, une analyse complète de cette situation, dont est issu cet atelier.

Cet atelier propose de s'appuyer sur la célèbre situation d'ERMEL *Bande unité*[1] pour débuter un enseignement des fractions rigoureux d'un point de vue mathématique, et dont la finalité première est la construction des nombres décimaux. Il est issu des travaux du groupe IREM de Strasbourg *Enseigner avec la ressource ERMEL*, et fait constamment référence à la brochure éditée par ce même groupe, dont l'objectif est la prise en main par les enseignants de la situation *Bande unité* (Anglard, Kieffer, Metter, Seyfried, Urvoy, et Thomas, 2024). La brochure contient non seulement la description détaillée de toute la séquence visant à construire les fractions à l'école élémentaire, mais également les développements mathématiques et didactiques qui sous-tendent cette construction. Elle détaille en particulier les éléments du processus d'institutionnalisation en œuvre tout au long de la séquence, dont le principal est le concept d'unité fractionnaire (Chambris, 2024), qui reste implicite dans la situation originelle.

L'atelier a ainsi débuté par une réflexion sur les conceptions personnelles autour du mot fraction et s'est attaché à prouver, en revenant sur le concept de transposition didactique (Chevallard, 1985), que l'ambiguïté même de ce mot pouvait être l'une des sources des difficultés de son enseignement. Les participants ont ensuite vécu une adaptation de la première séance de la situation *Bande unité*. Un premier travail de groupe, portant sur une analyse didactique de cette séance, a permis de dégager un concept non ambigu et mathématiquement rigoureux, celui d'unité fractionnaire ; un second travail de groupe a conduit les participants à analyser quelques productions d'élèves et mis en valeur les points d'appui comme les difficultés inhérentes à cet enseignement. Nous avons conclu sur la double ouverture, à construire, d'une part vers les nombres décimaux, et d'autre part, vers les nombres rationnels.

Le public était composé de formateurs du premier et du second degré, ainsi que de chercheurs en didactiques des mathématiques.

Les figures et tableaux de ce compte-rendu sont pour la plupart issus du diaporama support de l'atelier. Merci à Sylvia Coutat dont la prise de notes lors de l'atelier nous a été précieuse pour rédiger ce compte-rendu. Merci à Julien Anglard, membre de notre groupe IREM, pour la rédaction de l'annexe 6.

[1] Par fidélité, nous avons choisi de conserver le titre originel/historique même s'il eût été préférable d'appeler cette situation *Bande **de longueur** unité* ou *Bande **étalon***. En effet, l'unité de longueur n'est pas la bande elle-même, qui est un objet matériel, mais la longueur de celle-ci. La bande joue donc le rôle d'étalon. Ceci doit être clair pour les enseignants (et peut-être aussi pour les élèves).

I - FRACTION : LES CONCEPTIONS PERSONNELLES

1 Les sondages et leurs résultats

Pour débuter l'atelier, nous avons demandé aux participants d'écrire sur une feuille de papier une définition du mot *fraction*. Il était annoncé que cette définition ne serait pas commentée lors de l'atelier, mais qu'elle devrait être mise à l'épreuve lors du sondage qui suivrait. On trouvera en annexe 1 les définitions de 21 participants (nous n'avons pu récupérer la totalité des réponses des 31 participants à l'atelier). Nous commenterons davantage ces réponses après avoir présenté le sondage et ses réponses, mais nous pouvons d'ores et déjà constater la variété des propositions et la difficulté que la plupart ont eu à produire une définition rigoureuse d'un point de vue mathématique.

Nous avons ensuite fait passer un sondage composé de trois parties de huit items chacune, soit en tout vingt-quatre questions. Pour chaque question, on pouvait répondre par OUI, NON ou HUM, la dernière réponse signifiant au choix : « je ne sais pas », « j'hésite », « je ne peux pas répondre », … Les huit premiers items, constituant la première partie du sondage, étaient proposés sous forme d'une question : « A votre avis, et selon la définition que vous avez écrite, est-ce que … est une fraction ? », où « … » était remplacé huit fois de suite par un objet visuel (voir tableau 1). Les huit items suivants constituant la deuxième partie du sondage, proposaient les mêmes huit objets, mais en posant une question différente : « A votre avis, est-ce que … est une écriture fractionnaire ? ». Les huit derniers items consistaient à poser cette fois-ci la question : « A votre avis, est-ce que … est un nombre rationnel ? » pour chacun des huit objets. Les questions étaient proposées par écrit, sous forme d'un diaporama, nous insistons sur le fait qu'elles n'étaient accompagnées d'aucune oralisation.

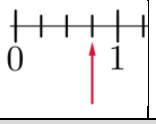
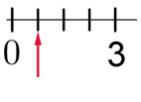
Partie 1. A votre avis, est-ce une fraction ?							
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
3	trois quarts		$\frac{3}{1}$	0,75	$\frac{\pi}{4}$		
Partie 2. A votre avis, est-ce une écriture fractionnaire ?							
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Partie 3. A votre avis, est-ce un rationnel ?							
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8

Tableau 1. Les questions du sondage réparties en trois parties

Notre objectif, en proposant ce sondage, était d'entamer une discussion sur ce que l'on entend par *fraction*, de clarifier les rapports entretenus entre cette notion et celles, sans aucun doute moins ambiguës, d'*écriture fractionnaire* et de *nombre rationnel*, ainsi que de mettre en évidence qu'il pouvait y avoir un malentendu entre les fractions du premier degré et celles du second degré. Il n'était pas question de cherche « la bonne réponse ».

Le tableau 2 synthétise les réponses des participants à ces 24 questions. Les pourcentages de la colonne « Consensus » correspondent au pourcentage de la réponse majoritaire à chaque question. Nous avons grisé les cases où ce pourcentage est supérieur à 80%, ce que nous avons estimé être un « consensus » sur la réponse. Par exemple, et sans surprise, 91% des participants considèrent que « 3 » n'est pas une écriture fractionnaire.

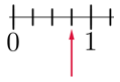
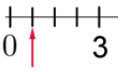
		Fraction ?				Écriture fractionnaire ?				Nombre rationnel ?			
		OUI	NON	HUM	Consensus	OUI	NON	HUM	Consensus	OUI	NON	HUM	Consensus
Q1	3	13	9	0	59%	1	20	1	91%	19	2	1	86%
Q2	trois quarts	15	4	3	68%	4	14	4	64%	20	1	1	91%
Q3		11	8	3	50%	3	18	1	82%	15	3	4	68%
Q4	$\frac{3}{1}$	21	1	0	95%	20	2	0	91%	21	0	1	95%
Q5	0,75	9	10	3	45%	1	20	1	91%	21	0	1	95%
Q6	$\frac{\pi}{4}$	6	14	2	64%	19	2	1	86%	2	20	0	91%
Q7		10	11	1	50%	3	18	1	82%	12	7	3	55%
Q8		9	10	3	45%	3	18	1	82%	11	5	6	50%

Tableau 2. Les réponses des participants au sondage

2 Discussion

La discussion a commencé dès les premières questions du sondage, et s'est poursuivie ensuite, le temps nécessaire pour soulever toutes les ambiguïtés circulant autour du concept de *fraction*. Sans être exhaustif, nous pouvons relever quelques éléments saillants de cette discussion.

On peut tout d'abord constater (tableau 2) qu'il n'y a pas consensus à la toute première question : « 3, est-ce une fraction ? » : 59 % des participants répondent « OUI », 41 % « NON ». Au cours de la discussion, il est vite apparu que les formateurs du second degré sont ceux qui répondaient majoritairement « OUI », alors que ceux du premier degré répondaient « NON ». Les premiers identifiaient plus volontiers *fraction* et *nombre rationnel*, tandis que les seconds assimilaient plutôt *fraction* à *écriture fractionnaire*. Mais, dans tous les cas, il était consensuel que, dans la définition même d'une *fraction*, il semblerait y avoir les deux idées qui coexistent, celle de *rationnel* défini à partir d'un couple d'entiers, et celle de son *écriture*. On peut retrouver cette double identité, mais surtout la difficulté à l'exprimer, dans les définitions premières des participants (annexe 1).

La question de la représentation s'est ainsi vite imposée, et on a convenu que selon que l'on regardait le signe, ou la signification que ce signe renvoyait, la réponse n'était pas nécessairement la même. Ce que l'on voit, est-ce un nombre ou est-ce une représentation d'un nombre ? La question se pose de façon saillante pour les fractions, mais il en est de même pour 3, par exemple. Est-ce un chiffre ou un nombre ? Dans le cas de 3, la réponse dépend du contexte, et ne fait en général pas débat dans un public de spécialistes. En revanche, il a fallu poursuivre l'analyse des questions pour aller plus loin dans le cas des fractions, et nous avons convoqué la théorie des registres de représentation sémiotique[2] (Duval, 1993) pour pouvoir apporter des réponses plus précises.

[2] On trouvera dans la brochure IREM (Anglard & al., 2024, op.cit.) un résumé de la théorie des registres de représentation sémiotique adapté à un public d'enseignants du premier degré.

Au cours de la discussion, un consensus assez rapide s'est fait sur la troisième partie du sondage, si l'on s'attache, non au signe mais à sa signification : c'est que l'on dispose d'une définition mathématique claire d'un nombre rationnel. Toutefois, l'item 7 (le disque) reste problématique pour beaucoup. Il s'agit d'une représentation classique de la fraction « trois quarts », sans que l'on puisse dire s'il s'agit d'un nombre. Beaucoup d'informations sont implicites, en particulier la nature de l'unité : est-ce le disque ? l'aire du disque ? une part de ce disque partagé en quatre parts égales ? mais « égal » en quel sens ? Chevallard et Bosch (2002) rappellent que la fraction d'un objet matériel n'est pas définie, et Adjiage (1999) montre que les objets géométriques tels que les disques ne peuvent pas constituer un registre de représentation des fractions au sens de Duval. Ces remarques ne valent pas pour l'objet « droite graduée » qui, en étant informé correctement (deux entiers pour définir l'unité, un nombre entier de subdivisions, une flèche), constitue sans ambiguïté un registre complet des nombres rationnels (op. cit.). C'est pourquoi les participants ont fini par se mettre d'accord sur le fait que l'item 8 (la position de la flèche sur la droite graduée) représente bien/est un nombre rationnel.

Si l'on regarde l'écriture fractionnaire comme un registre de représentation sémiotique, reconnaissable par son écriture verticale (une écriture chiffrée au numérateur, un trait de fraction, une écriture chiffrée au dénominateur), alors le consensus est quasiment parfait. Nous avons finalement convenu pour l'item 6, que $\frac{\pi}{4}$ était bien une écriture fractionnaire, puisqu'elle se manipule avec les règles inhérentes à ce registre, sans être pour autant une fraction au sens commun. De même, la discussion a permis d'évacuer *trois quarts* (item 2) en tant qu'écriture fractionnaire.

3 Synthèse

Nous souhaitions amener les participants à la conclusion suivante :

- un *nombre rationnel* est défini sans ambiguïté dans le champ des mathématiques savantes ; ainsi, tous les items à l'exception des items 6 et 7, représentent/sont des nombres rationnels ;
- on peut définir *l'écriture fractionnaire* également sans ambiguïté comme un registre d'expression sémiotique au sens de Duval ; ainsi seuls les items 4 et 6 proposent des écritures fractionnaires ;
- pour autant, *trois quarts* est sans doute une fraction sans être une écriture fractionnaire, *3* est un rationnel sans être une fraction (en tout cas, pas au sens commun, nous ne sommes pas parvenus à nous mettre d'accord), $\frac{\pi}{4}$ est une écriture fractionnaire sans être un rationnel ; concernant les items 3 et 8, il dépend de chacun de considérer les nombres représentés comme des fractions ou non.

Il ne s'agissait pas dans cette première partie de l'atelier d'être d'accord sur tout, bien au contraire, il s'agissait de prouver que la notion de *fraction* demeurait ambigüe et dépendait davantage des conceptions personnelles de chacun que d'un savoir commun, mathématiquement défini. Nous avons donc conclu de la façon suivante :

- une fraction et un nombre rationnel, ce n'est pas la même chose ;
- une fraction et une écriture fractionnaire, ce n'est pas la même chose.

Cette première partie s'est donc terminée sur une question : qu'est-ce qu'une fraction ? La deuxième partie de l'atelier, un peu plus théorique, s'est attachée à exposer la réalité du concept de *fraction* dans les mathématiques, en suivant le fil conducteur de la transposition didactique.

II - LES FRACTIONS ET LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

La transposition didactique est l'un des premiers concepts développés par Chevallard, qu'il définit ainsi : « travail permettant de transformer le savoir savant en savoir à enseigner, puis en savoir enseigné » (Chevallard, 1985). Le savoir savant, produit par les chercheurs en mathématiques, spécialistes de la discipline, est en constant mouvement. Il se diffuse à travers des articles de revues scientifiques, des

colloques entre savants, des livres d'auteurs, ... Parfois, il devient nécessaire de structurer ces savoirs en une somme dont deux exemples parmi les plus célèbres sont *les Éléments* d'Euclide et la *Théorie des ensembles* de Bourbaki. Il devient alors un savoir institutionnalisé, destiné à une diffusion plus large. Cependant, ce savoir savant ne peut être enseigné en l'état, en particulier à des élèves débutants. Il est donc nécessaire de l'adapter. Des choix sont effectués, qui dépendent de la société dans laquelle on souhaite diffuser ce savoir. C'est principalement le rôle du ministère de l'éducation nationale d'effectuer de tels choix. Les programmes et les manuels sont les manifestations concrètes de cette première transposition. La didactique des mathématiques, discipline récente, a pour objet en particulier d'étudier les effets de cette transposition, voire dans l'idéal, d'y contribuer. Il revient aux enseignants d'effectuer une seconde transposition, celle du savoir effectivement enseigné dans les classes. Là encore, les chercheurs en didactique jouent un rôle majeur en étudiant les programmes, les manuels, les connaissances des élèves, la nature de leurs difficultés, contribuant ainsi à éclairer la communauté éducative, en particulier dans un contexte de massification des enseignements. La figure 1 schématise rapidement ces deux transpositions.

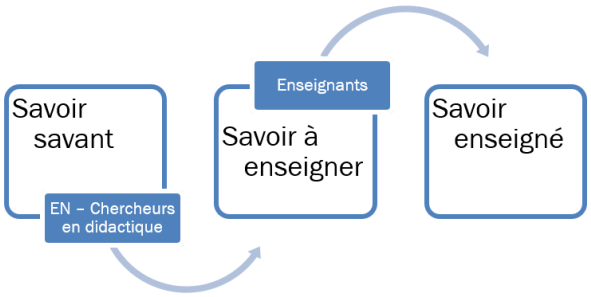


Figure 1. Illustration de la transposition didactique

Il est donc naturel, pour répondre à notre question et déterminer le savoir à enseigner, puis enseigné, à propos des fractions, de commencer par chercher du côté du savoir savant.

1 Le savoir savant

Nous trouvons les définitions suivantes du mot *fraction* dans divers dictionnaires français[3] de mathématiques :

> *Étant donnés deux polynômes à une variable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle fraction rationnelle le symbole P(x) over Q(x) […] classe d'équivalence […]* (Warusfel, 1966)
>
> *Fractionnaire (Nombre) : voir Rationnel (Nombre).* (Collectif, 1973)
>
> *Fraction (Usuel) Synonyme de nombre rationnel, c'est-à-dire d'élément du corps $\mathbb{Q}$ des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$. Pour des raisons pédagogiques, on appelle parfois fraction le couple (p,q) d'entiers représentant le rationnel p/q.* (Bouvier et Georges, 1979)

Nous ne prétendons bien-sûr pas avoir fait le tour de la question mais il saute aux yeux que, sur trois dictionnaires, seul le dernier comporte une définition du mot *fraction*, et encore, avec la mention « usuel » pour signifier qu'il ne s'agit pas réellement d'un objet mathématique. Le premier définit, non la *fraction*, mais la *fraction rationnelle*, comme un **symbole** exprimant le quotient de deux polynômes. Le deuxième définit, non la *fraction*, mais le *nombre fractionnaire*, donc un **nombre**, qu'il renvoie au *nombre rationnel*. Quant au troisième, il donne deux définitions d'une fraction qui semblent se contredire. La première est « synonyme de nombre rationnel », autrement dit, elle n'a pas d'existence propre en mathématique, elle pourrait tout aussi bien disparaître. L'existence de la seconde est justifiée « pour des

[3] Il est fort probable que des dictionnaires de mathématiques anglo-saxons ou asiatiques produiraient des définitions différentes, mais nous évoluons dans le contexte de la société française, et nos programmes sont conditionnées par les mathématiques savantes françaises. Chambris (2008) envisage de (re)créer un savoir savant plus adapté à l'enseignement élémentaire, sous la forme de *traités de référence*, mais ce n'est pas le propos ici de le développer.

raisons pédagogiques ». Nous pouvons donc imaginer là un effet de la première transposition, et proposer cette définition comme « savoir à enseigner » : une fraction serait un couple d'entiers.

A la suite de cette présentation des définitions, nous avons donné la parole aux participants, qui se sont finalement s'accordés pour rejeter la définition « couple d'entiers », car elle gomme la relation fondamentale entre les deux nombres de ce couple. Il faudrait convoquer la notion de classe d'équivalence, que l'on retrouve d'ailleurs dans la première définition, auquel cas on retrouverait la définition d'un nombre rationnel. Or, nous cherchons à différencier les fractions des nombres rationnels.

Lors de cette discussion, il est apparu un fort contraste entre les conceptions des formateurs du premier et du second degré : les premiers considéraient plutôt les fractions comme des nombres issus d'un fractionnement, alors que les seconds les envisageaient comme une expression d'un nombre rationnel, voire comme ce rationnel lui-même, défini à partir d'un couple d'entier. Ils étaient donc plus à l'aise pour discuter les définitions proposées par les dictionnaires, tandis que les premiers ne trouvaient pas de moyen de relier ces définitions à leur enseignement. On leur donne d'ailleurs raison sur ce point, et l'on note à nouveau qu'il semble y avoir une grande différence entre le concept de *fraction* du premier et du second degré. Nous avons conclu en posant la question de la transposition d'un concept aussi peu défini mathématiquement.

2 Le savoir à enseigner

La transposition en savoir à enseigner peut se faire à différents niveaux. Nous présentons dans un premier temps deux définitions issues l'une du dictionnaire des mathématiques élémentaires de Stella Baruk, que nous estimons relever d'une première transposition puisqu'il s'adresse résolument aux enseignants du premier et du second degré. La seconde est issue d'un manuel d'arithmétique du début du XX^{e} siècle, l'équivalent d'un manuel actuel de CE1. Nous présentons ensuite succinctement quelques éléments des programmes actuels[4] du cycle 3, afin d'exposer comment l'institution dévolue à l'enseignement propose de construire les fractions et les relier aux autres notions mathématiques du programme, en l'occurrence les nombres décimaux d'une part, et les nombres rationnels d'autre part.

2.1 Deux définitions du savoir à enseigner

> *Une fraction est un nombre entier d'unités rompues, ou unités rationnelles, ou quantièmes*. (Baruk, 1992)
>
> *On appelle fraction une ou plusieurs parties de l'unité divisée en un nombre quelconque de parts égales.* (Arithmétique, cours moyen, s.d.)

On peut constater dans ces deux définitions que la fraction n'est pas associée à la notion de nombre rationnel, mais qu'elle est définie à partir de la notion **d'unité**, *rompue* ou *divisée*, en référence à la signification même de *fractionnement*. Ces deux définitions sont très proches de celle que nous donnons à l'issue de la première partie de la situation *Bande unité*, en appui sur le concept d'*unité relative* développé par Chambris (Chambris, 2022, 2024 ; Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021).

2.2 Dans les programmes et les ressources officielles du cycle 3

Ce que l'on trouve de plus proche d'une définition dans les ressources officielles explicite plutôt un moyen d'obtenir une fraction plutôt qu'une réelle exposition de ce que c'est. Par exemple, dans le document *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* (Éduscol, 2016), on peut lire :

> *Lorsqu'on coupe une unité en un nombre entier de parts égales et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction.*

C'est un bon exemple de transposition du savoir savant, où l'on retrouve à la fois le concept d'unité et la notion de fractionnement en « parts égales ». Pour construire le lien avec le concept savant de *nombre*

[4] A l'heure où nous écrivons (juillet 2024), les projets des nouveaux programmes, proposant une première rencontre des fractions dès le CP à partir de partages d'objets du plan, sont reportés *sine die*.

rationnel, qui n'apparaît actuellement que dans les programmes du cycle 4, on adjoint au mot *fraction* des qualificatifs ou des expressions variées, collectées dans la figure 2, que l'on peut trouver dans diverses ressources, en particulier dans le document sus-cité.

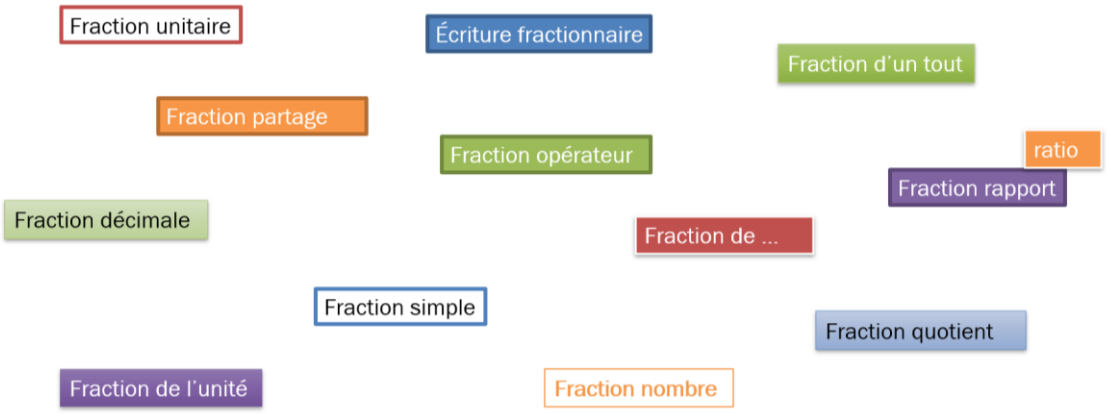


Figure 2. Différents qualificatifs adjoints au mot fraction

Toutes ces expressions ne font généralement pas l'objet de définitions[5], et le lien à faire entre elles reste le plus souvent à la charge de l'enseignant dans le cadre de la seconde transposition. On peut s'interroger alors sur la part des conceptions personnelles de ce dernier dans les savoirs qu'il souhaite transmettre. Par ailleurs, une analyse de la programmation actuelle peut expliquer la différence des conceptions personnelles sur les fractions entre le premier et le second degré : la finalité de l'enseignement des fractions ne semble pas être la même. En effet, dans la programmation du premier degré, ou plutôt du cycle 3, qui comprend la classe de sixième, les fractions sont introduites dans l'objectif de construire les nombres décimaux, par l'intermédiaire des fractions décimales. Il n'y est pas fait mention des nombres rationnels. On peut lire par exemple dans le programme du cycle 3 :

> *Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée*. (MENJS, 2020)

Toutefois, dans les repères de progressions du cycle 3 on peut lire, pour la sixième uniquement :

> *En période 3, les élèves apprennent que* $\frac{a}{b}$ *est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b*). (MENJ, 2019)

En creux, cette mention implique que les fractions ne sont pas considérées comme des quotients à l'école primaire, ce qui nous confirme dans l'idée que leur vocation première est l'introduction des nombres décimaux. Au cycle 4, en revanche, l'objectif semble être de détacher les fractions de leur conception première de fractionnement de l'unité pour construire les nombres rationnels, en passant par les notions de quotient et de rapport. La figure 3 résume ces deux finalités différentes. Dans la suite de notre exposé, nous focalisons sur la programmation du début du cycle 3 (hors classe de sixième), puisque c'est elle qui actuellement organise la première rencontre avec les fractions. Elle peut se résumer par la liste de la figure 4, interprétation des repères de progression du CM1 et CM2.

Il est donc naturel que les enseignants du premier degré considèrent sans ambiguïté les fractions comme des nombres, et uniquement dans un contexte de fractionnement : on les place sur une droite graduée, comme les nombres entiers ; les fractions décimales sont des cas particuliers des fractions ; les fractions décimales sont des nombres décimaux.

[5] À l'exception notable de *fraction décimale*, qui est définie comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix. Évidemment, cette définition dépend de celle d'une fraction et pose ainsi la même question : une fraction décimale est-elle un nombre (et donc équivalente à un nombre décimal), ou l'écriture d'un nombre ? Ou les deux ?

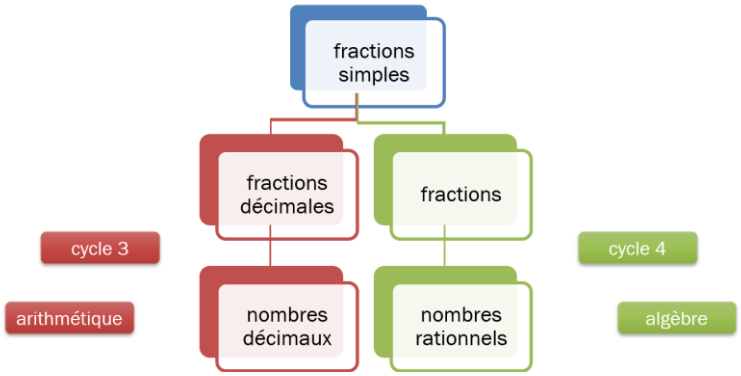


Figure 3. La finalité de l'enseignement des fractions dans les programmes français actuels

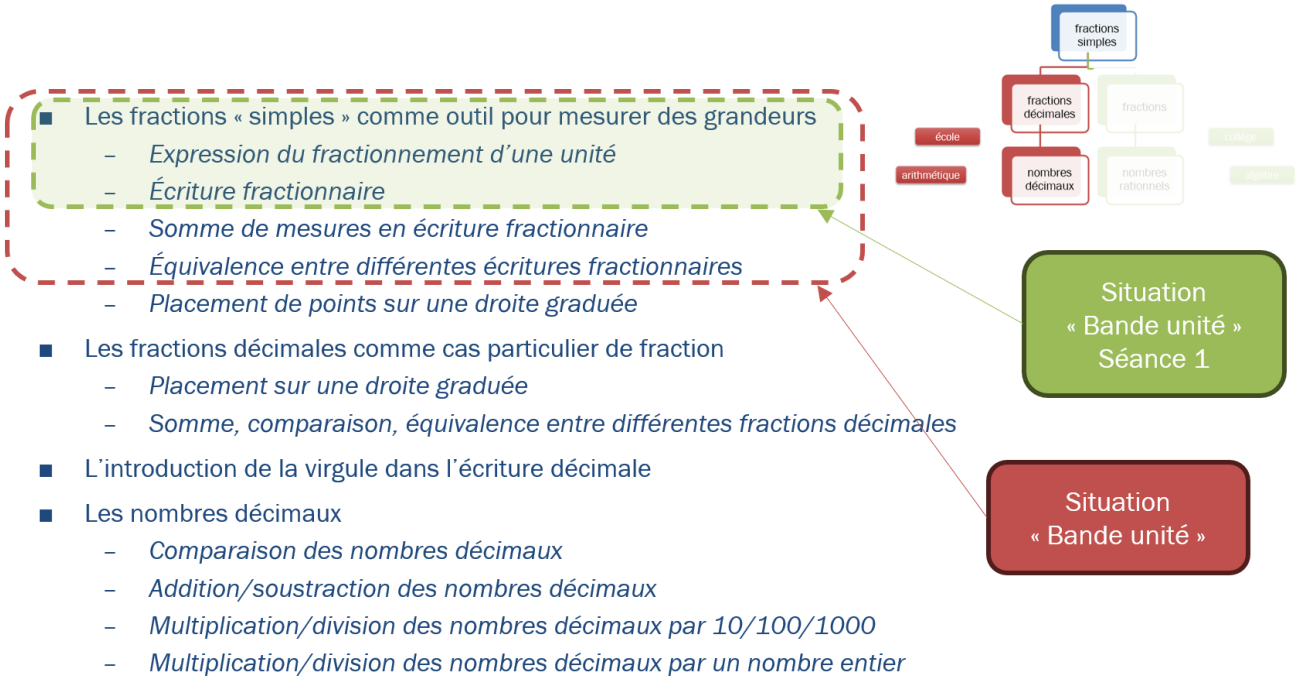


Figure 4. La progression en CM1-CM2 des fractions aux nombres décimaux

C'est aussi comme des nombres que nous allons les introduire, dans le contexte de la mesure de grandeurs, ainsi que le préconisent les programmes, et ainsi que l'introduit la situation *Bande unité*, que nous considérons au niveau du savoir enseigné, donc relevant de la seconde transposition, si tant est que les enseignants respectent les différentes phases de la proposition[6].

3 Le savoir enseigné

Le groupe IREM de Strasbourg *Enseigner avec la ressource ERMEL* a repris dans l'intégralité cette situation (Anglard & al., 2024, op. cit.), dans l'intention de faciliter sa mise en œuvre et d'en préciser certains points, que nous développons rapidement ici, avant de les expliciter plus avant en fin d'atelier.

- les fractions de l'unité sont introduites comme de nouvelles unités de compte, relatives à l'unité principale, que l'on propose d'appeler *unités fractionnaires* (Chambris et al., 2021 ; Chambris, 2024) ;
- l'écriture fractionnaire est une représentation de ces fractions, la langue naturelle en est une autre (ainsi *un quart* est une fraction de l'unité) ;

[6] Nous savons que le savoir enseigné est le savoir **effectivement** enseigné en classe et, que pour y avoir accès, il faudrait se rendre dans les classes pour le vérifier, mais nous développons ici l'idée d'un savoir **idéalement** enseigné. Ce point n'a pas souffert de contestation parmi les participants.

- les fractions, dans leur généralité, sont des multiples de ces fractions unitaires (ainsi *trois quarts* signifie par définition *trois « unités un quart »* ; $\frac{3}{4}$, c'est 3 unités $\frac{1}{4}$, donc $3 \times \frac{1}{4}$) ;
- implicitement, nous considérons que *les fractions ne sont que cela*, et ne sont donc pas équivalentes aux nombres rationnels (il sera démontré en sixième que $\frac{3}{4}$ est également le nombre qui, multiplié par 4, égale 3 et sera donc réinterprété comme le quotient de 3 par 4 ; mais il n'y a pas de raison, dans cet autre contexte, de verbaliser ce signe « trois quarts » et donc de considérer ce nombre comme une fraction ; de même, lorsque l'on considèrera $\frac{3}{4}$ comme un rapport de proportionnalité, « trois pour quatre », équivalent par exemple à $\frac{75}{100}$, il ne s'agira pas non plus de fractions[7]) ;
- ainsi, *on considère les fractions comme l'un des sens, l'une des interprétations attribuées aux nombres rationnels, dans le cas où ils sont exprimés en écriture fractionnaire avec un dénominateur entier,* au même titre que la composition est l'un des sens, l'une des interprétations de l'addition.

La brochure (et la ressource ERMEL avant elle) propose une séquence complète permettant de travailler les fractions dites « simples » (dont les objectifs sont entourés en rouge dans la figure 4). En l'absence de définition, elle interprète « simple » comme constructible par les élèves par pliage de bandes en deux, ce qui permet d'obtenir des demis, des quarts et des huitièmes. Pour des raisons de temps, nous nous sommes concentrés sur la séance 1, dont les objectifs sont entourés en vert dans la figure 4, que nous avons fait vivre aux participants de l'atelier, en l'adaptant à l'âge et aux connaissances du public.

III - LA SÉANCE 1 DE LA SITUATION *BANDE UNITÉ*

1 Brève description de la situation *Bande unité* dans sa totalité

L'objectif de la situation est la découverte des limites des nombres entiers pour mesurer une longueur, et la nécessité d'exprimer autrement une longueur plus petite que l'unité de référence. À travers une situation émetteur-récepteur, les élèves mesurent la longueur d'un segment sans l'outil habituellement utilisé qu'est la règle, mais en disposant d'une bande de papier de longueur étalonnée. Ils sont contraints à expliciter la procédure choisie car ils doivent rédiger un message devant permettre à un autre élève d'identifier, parmi une collection de segments, celui qui a la même longueur que le leur. Cela les conduit à découvrir de nouveaux nombres, plus petits que l'unité : les unités fractionnaires (le demi, le quart et le huitième).

Lors de la séance 1, chaque élève reçoit donc un segment dessiné sur une feuille n°1 et une bande de longueur identique à celle de toutes les autres. Les segments proposés aux élèves sont déclinés en trois formats, il existe ainsi trois versions de la feuille n°1 : version [AB], version [CD] et version [EF] (figure 5). Sur une feuille n°3 (figure 5) sont dessinés six segments parmi lesquels trois ont les mêmes longueurs respectivement que celles de [AB], [CD] et [EF]. Cette feuille sera distribuée aux élèves après l'envoi des premiers messages. Chacun a pour tâche d'écrire un message (sur une feuille n°2 qui leur est distribuée, voir figure 5). Ce message doit permettre à son récepteur, un autre élève, d'identifier, parmi les six segments de la feuille n°3, celui qui a la même longueur que celui possédé par l'émetteur du message. Après envoi des messages, tous les élèves reçoivent la feuille n°3. A l'aide des seules indications écrites par l'émetteur, ils doivent retrouver le segment correspondant et l'indiquer sur le message qu'ils renvoient au récepteur. Ils ont la possibilité d'écrire des remarques ou des demandes de précision. L'émetteur répond éventuellement aux demandes faites, et valide ou non la réponse, immédiatement ou après un deuxième échange.

[7] Dans ce cas précis, on l'oralise d'ailleurs plus volontiers « soixante-quinze pour cent » qui n'a pas la même signification que « soixante-quinze centièmes ».

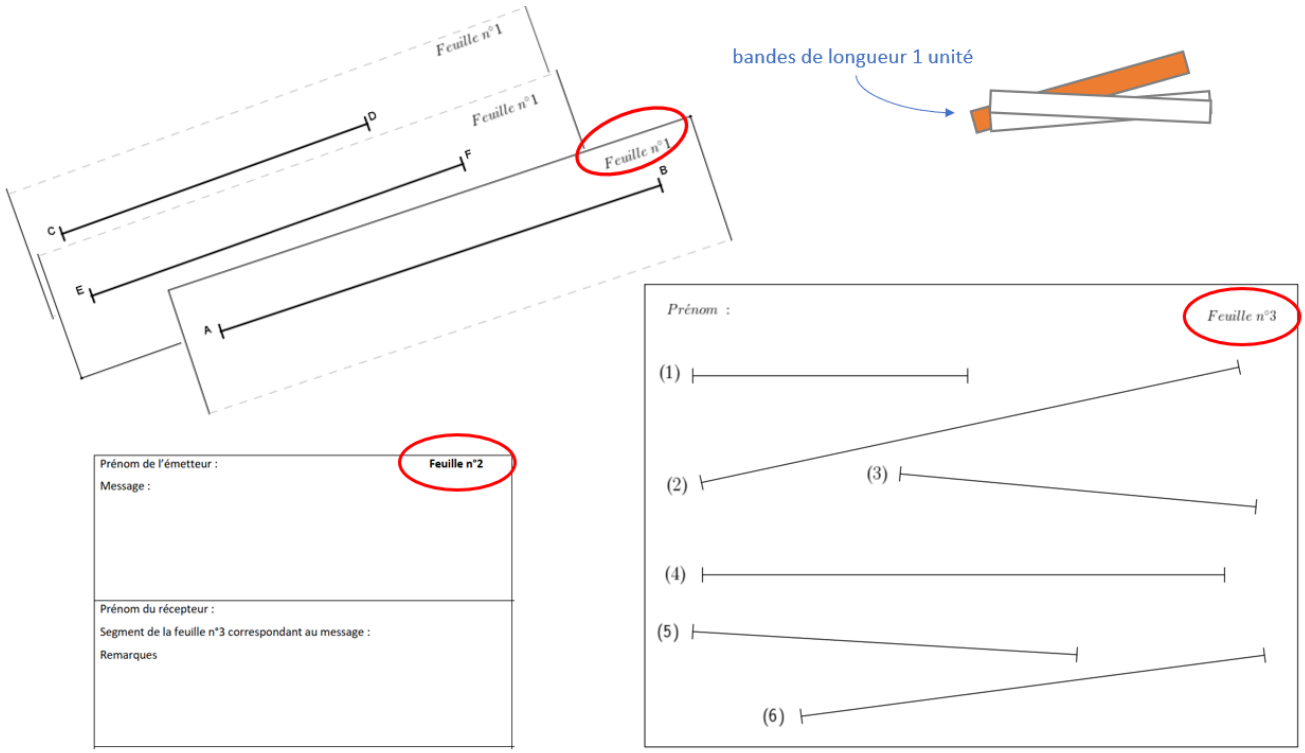


Figure 5. Le matériel « élève » pour la situation Bande unité

Le tableau 3 précise, pour le lecteur uniquement, les longueurs de chaque segment et leur correspondance avec ceux de la feuille n°3. Les longueurs en centimètres sont à titre indicatif pour faciliter le travail de l'enseignant et ne sont évidemment pas communiquées aux élèves.

Les objets	longueur en unité u	longueur en centimètres
bande de longueur unité	$1u$	10 cm
[AB] et segment (2)	$2u+\frac{1}{2}u$	25 cm
[CD] et segment (5)	$1u+\frac{3}{4}u$	17,5 cm
[EF] et segment (6)	$2u+\frac{1}{8}u$	21,25 cm
segment (1)	$1u+\frac{1}{4}u$	12,5 cm
segment (3)	$1u+\frac{5}{8}u$	16,25 cm
segment (4)	$2u+\frac{3}{8}u$	23,75 cm

Tableau 3. Les mesures des longueurs des segments

Une mise en commun est ensuite organisée par l'enseignant qui collecte certains messages en commençant par ceux qui ont échoué. Un débat s'instaure dans la classe afin de pointer la nécessité de définir précisément les longueurs inférieures à l'unité. Un temps d'institutionnalisation permet à

l'enseignant de définir les unités fractionnaires en œuvre dans cette situation, à savoir le demi, le quart et le huitième. Il privilégie l'expression en langue naturelle « un demi », « un quart », « un huitième » à l'écriture fractionnaire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, qui est introduite avec prudence dans un second temps.

La séance suivante (séance 2), est un premier entraînement à l'utilisation de ces unités fractionnaires, en demandant aux élèves de mesurer les longueurs de tous les segments de la feuille n°3, avec les bandes unités[8]. Cette deuxième séance est l'occasion d'institutionnaliser l'écriture fractionnaire des multiples des unités fractionnaires. Par exemple, *cinq huitièmes* est par définition $5 \times \frac{1}{8}$, qui s'écrit $\frac{5}{8}$.

La séance 3 est l'occasion de préparer le placement des fractions sur une droite graduée : en utilisant toujours ces mêmes fractions, il s'agit de placer plusieurs points sur une même ligne, en partant d'un point origine O. En constatant que certaines longueurs sont égales, on établit l'équivalence d'écritures, comme : $\frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}u = 2u + \frac{5}{8}u = \ldots$

Les séances 4 et 5 ont pour objectif d'entraîner les élèves à se passer de l'expérimentation pour manipuler les écritures fractionnaires : sans plus utiliser de matériel, on propose aux élèves de trouver, parmi différentes écritures, celles qui correspondent à des mesures de longueur égales. Il s'agit pour les élèves de parvenir à décomposer une fraction en somme, en particulier en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité. À cette occasion, ils rencontrent de nouvelles unités fractionnaires, comme le tiers et le cinquième, sans les avoir matériellement construites.

Les situations suivantes dans ERMEL, *Droites graduées 1 et 2*, visent la rencontre avec les fractions décimales et l'introduction de la virgule dans l'écriture décimale.

2 Adaptation de la situation au public de l'atelier

Rappelons que l'atelier s'est concentré sur la séance 1 et la construction des unités fractionnaires. Les participants ont été placés autour de six tables de cinq personnes chacune.

Chaque participant a reçu une bande de papier et une feuille numérotée 1 (voir annexe 2), sur laquelle était dessiné un segment (nommé [AB] ou [CD] ou [EF] selon les cas). Tous les segments d'une même table étaient de même longueur, et toutes les bandes de papier de toutes les tables étaient de même longueur. Les tables 1 et 4 travaillaient ainsi avec les segments [AB], les tables 2 et 5 avec les segments [CD] et les tables 3 et 6 avec les segments [EF] (voir tableau 4). Sur chaque table se trouvait également une feuille numérotée 2 (voir annexe 2), destinée à servir de support pour les messages écrits passant d'une table à l'autre. La consigne, donnée à l'oral, était la suivante :

> *Vous avez tous reçu une feuille n°1 sur laquelle est dessinée un segment. Tous les membres d'une même table ont un segment de même longueur mais différents des autres tables.*
> *Sur la feuille n°3 dont vous disposerez plus tard se trouve un segment de même longueur que le vôtre. Il s'agira de trouver lequel. Mais ce n'est pas à vous de le retrouver, mais à un autre groupe, auquel vous aurez envoyé un message écrit, grâce à la feuille n°2 (la montrer).*
> *Pour cela, vous ne disposez de rien d'autre que d'un crayon (un stylo) et de bandes toutes de même longueur. Toutes les tables ont des bandes de même longueur.*
> *Le message, que vous écrirez en commun, ne doit faire référence qu'à des connaissances d'élèves de fin de CE2, c'est-à-dire, théoriquement, sans connaissances sur les fractions autres que quelques expressions comme « la moitié », éventuellement « un demi » ou « un quart ».*

Sur une feuille numérotée 3 (voir annexe 2) sont dessinés six segments dont trois ont les mêmes longueurs que les segments [AB], [CD] et [EF]. Cette feuille était distribuée sur chaque table après réception du message émetteur, afin qu'ils puissent y reconnaître le bon segment. Les participants

[8] La brochure IREM propose une séance 1bis qui reprend la séance 1 à l'identique, en distribuant à chaque élève des segments différents de ceux déjà mesurés.

écrivaient leur réponse sur le message avant de le restituer à la table émettrice pour validation. Nous avons stoppé la situation à la fin de cette validation.

La circulation des messages était prévue de la façon suivante :

Table émettrice	Table 1	Table 2	Table 3	Table 4	Table 5	Table 6
segment à mesurer	[AB] – (2)	[CD] – (5)	[EF] – (6)	[AB] – (2)	[CD] – (5)	[EF] – (6)
Table réceptrice	Table 2	Table 3	Table 4	Table 5	Table 6	Table 1

Tableau 4. Organisation de la distribution des segments et de la circulation des messages

Les raisons de ces choix étaient pragmatiques. Tout d'abord le public étant adulte et informé, la situation elle-même ne présentait pas de difficulté conceptuelle : il s'agissait davantage, en imposant des connaissances d'élèves de CE2, de faire prendre conscience de la difficulté à exprimer ces longueurs sans connaissances formelles des fractions. Pour la même raison, des groupes de cinq personnes ne présentaient pas de problème de gestion, et permettaient aux participants une première occasion de discuter entre eux à propos de la conception du message unique qu'ils devaient fournir à une autre table. Enfin nous n'attendions pas de message erroné, contrairement à ce qu'il se passe dans une classe réelle. Il n'y avait donc pas d'intérêt à organiser une mise en commun telle qu'elle est prévue dans la situation initiale, où l'on commence généralement par les messages non valides (et ils sont nombreux). À la place, nous avons proposé deux temps réflexifs en groupe, le premier portant sur l'analyse mathématique et didactique de la situation, et la seconde sur l'étude d'un corpus de messages effectivement produits par des élèves afin de réfléchir à une mise en commun possible, et un moment d'institutionnalisation construit à partir de ces messages.

3 Les messages des participants

On trouvera en annexe 3 les six messages produits par les participants de l'atelier, ainsi que les réponses produites. Comme prévu, tous les messages ont permis de retrouver le bon segment sur la feuille n°3. Cependant, et bien que nous n'ayons pas fait cette étude lors de l'atelier, il est intéressant de regarder plus en détail les formulations des messages.

La longueur du segment [AB] est la plus simple à formuler (voir figure 6), et l'on retrouve dans les deux cas la même formulation « la moitié », effectivement employée par les élèves eux-mêmes. Ce mot fait partie du langage courant et son sens est connu des élèves.

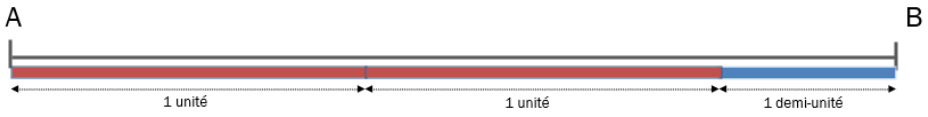


Figure 6. La mesure du segment [AB] ou (2)

La longueur du segment [CD] est déjà plus complexe à exprimer sans connaissance des fractions. Non seulement elle fait intervenir le quart de l'unité, dont le mot n'est pas nécessairement disponible chez les élèves (et que nous n'avions pas autorisé certains participants à employer), mais il existe plusieurs manières de mesurer (voir figure 7), le quart pouvant intervenir plusieurs fois. Ainsi, différentes procédures apparaissent dans les classes, et l'on peut constater que les deux groupes qui travaillaient sur ce segment ont produit deux types de réponses différentes :

- table 2 : « une bande unité entière et la moitié d'une bande et la moitié de la moitié de la bande unité », ce qui correspond à l'expression $1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$;

- table 5 : « tu places l'unité […] tu plies l'unité en 2 puis encore en deux. 3 parties correspondent à la longueur du morceau », ce qui correspond à l'expression $1u + \frac{3}{4}u$.

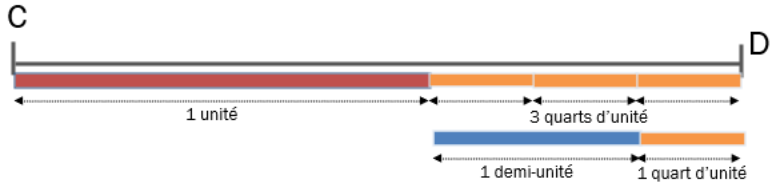


Figure 7. La mesure du segment [CD] ou (5)

On peut noter que, spontanément, la première rencontre avec le quart est comme « moitié de moitié », et non comme « partage en quatre », ce qui correspond à ce que l'on vit effectivement en classe.

La longueur du segment [EF] (voir figure 8) est la plus difficile à exprimer pour des élèves, car il faut plier la bande en deux, puis encore en deux, et encore une fois en deux pour arriver aux huitièmes. De plus, l'imprécision des pliages commence à jouer. Parmi les deux groupes ayant travaillé sur ce segment, on peut noter que le premier botte en touche en n'explicitant pas comment l'on fait pour plier une bande « en 8 parts ». Le deuxième groupe a mis longtemps à trouver la bonne formulation : « pliée en 2, trois fois de suite ». D'ailleurs, chez beaucoup d'élèves, cette formulation leur fait penser que la bande est finalement pliée en 6, et non en 8.

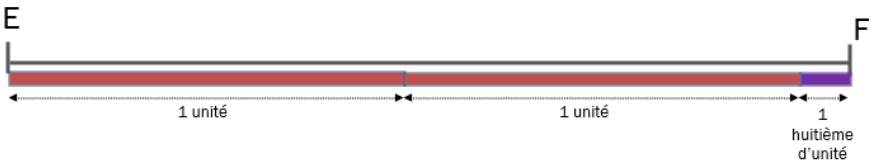


Figure 8. La mesure du segment [EF] ou (6)

D'une façon générale, les participants se sont amusés à écrire ces messages, ce que l'on peut constater à travers divers commentaires. Cette attitude se retrouve chez les élèves qui s'investissent souvent très volontiers dans les situations ERMEL. La difficulté est ensuite, pour le professeur, de tirer parti des diverses actions et formulation des élèves pour institutionnaliser un savoir.

IV - ANALYSE DIDACTIQUE DE LA SÉANCE

Après ces échanges, nous avons alors proposé aux participants un premier retour réflexif, à partir d'une série de questions regroupées en trois points :

- concernant les procédures possibles des élèves : comment réussir la tâche ? comment ne pas la réussir ? peut-on contourner l'objectif ? …
- à propos du savoir en jeu : quel est-il ? comment peut-il émerger ? quel d'début d'institutionnalisation pourrait-on prévoir a priori ? …
- concernant l'organisation didactique : choix opérés ? dans quel(s) but(s) ?…

Chaque groupe devait produire une affiche résumant leurs réflexions, et qui servirait d'appui à une discussion commune. Pour des raisons de temps, nous n'avons pas analysé les affiches groupe par groupe mais, après une dizaine de minutes laissée à la discussion de chaque groupe, nous avons organisé une conversation collective.

1 Les procédures possibles des élèves

Nous le verrons plus précisément en étudiant le corpus proposé, mais il s'agit déjà de réfléchir aux types de message que l'on peut rencontrer, en commençant par imaginer des propositions de caractérisation de la longueur inférieure à l'unité qui mènent à une impasse : « un p'tit bout » ; une « moitié », même si

cette longueur n'est pas égale à une demi-unité ; une mesure évaluée à l'œil en « centimètres » ; une mesure avec la longueur d'un étalon non partagé par l'ensemble de la classe (un pouce, un crayon, etc.) ; une mesure avec la largeur de la bande étalon. Ces propositions, fréquentes, sont l'occasion d'introduire la nécessité d'une caractérisation plus précise de la longueur manquante. On ne manquera pas de commencer la mise en commun par l'un ou l'autre de ces messages.

On peut ensuite se servir de messages plus efficaces, tels que : dessiner un trait dont la longueur correspond à celle du petit bout manquant[9] ; expliquer la procédure de pliage en deux, une ou plusieurs fois, en utilisant du vocabulaire courant, comme « j'ai plié en deux » ; exprimer la longueur qui reste en utilisant des termes liés aux fractions comme *moitié*, parfois *demi*, et même parfois *quart*.

Nous insistons sur le fait que les messages erronés sont attendus, inévitables et souhaités. Sans eux, la nécessité de créer un nouveau concept et des mots pour le dire n'apparaîtrait pas. Lors de l'atelier, nous n'avons évidemment pas eu de message erroné, toutefois nous avons bien obtenu des messages utilisant soit le pliage, en se centrant sur la manipulation de l'objet « bande », soit le report de longueur, en se centrant sur la grandeur en jeu.

2 Le savoir en jeu

Ainsi que nous l'avons déjà dit, le savoir en jeu est évidemment la notion de *fraction*, et plus précisément d'*unité fractionnaire*. Nous présentons dans une diapositive le contenu suivant (figure 9), comme exemple de savoir à enseigner en classe.

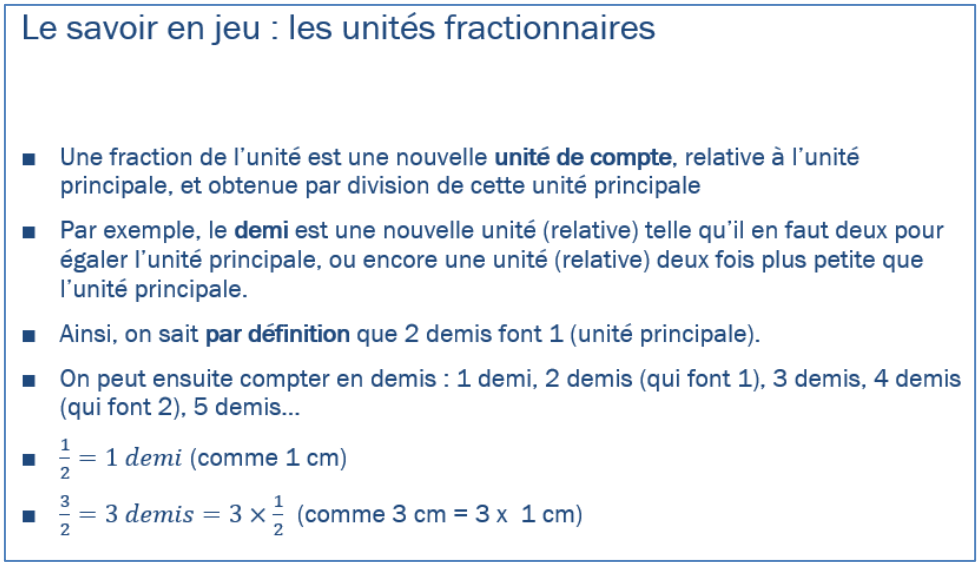


Figure 9. Unités fractionnaires : savoir à enseigner

La notion *d'unité relative à une unité principale* est issue des travaux de Chambris (2021, 2024), et s'étend bien au-delà des fractions. Ici, il s'agit de comprendre les unités fractionnaires comme de nouvelles unités, relatives à l'unité principale, dans un premier contexte de longueur. L'unité principale u, et l'unité relative $\frac{1}{4}u$ sont donc toutes les deux des unités de longueurs.

Nous avons montré différentes propositions d'institutionnalisation[10], telle que celle présentée figure 10.

[9] Cette procédure apparait très souvent, mais peu d'élèves y pensent, ce qui est heureux car elle permet de contourner l'objectif de la situation. Si elle devenait trop fréquente, il suffirait d'interdire les dessins dans les messages à produire.

[10] D'autres propositions, plus développées, se trouvent dans la brochure (*Anglard & al., 2024, op. cit.)*

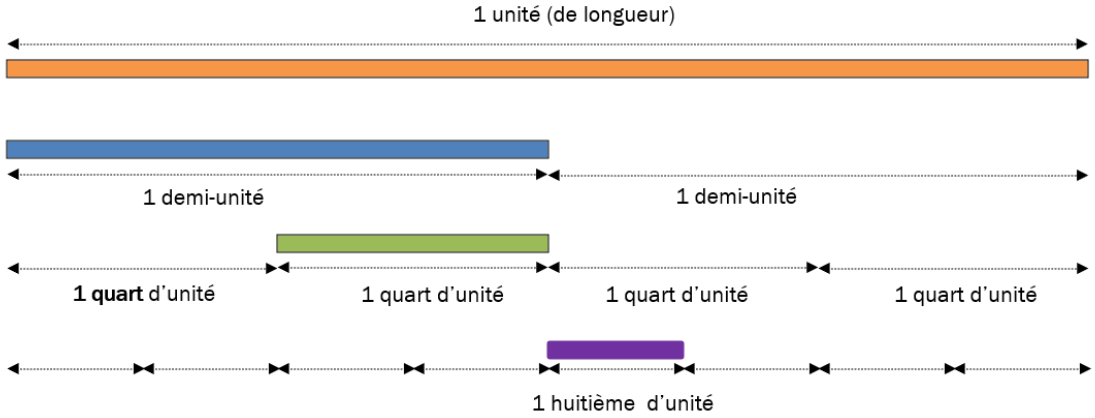


Figure 10. Proposition d'institutionnalisation en conclusion de la séance 1

Cette institutionnalisation s'accompagne d'une verbalisation du type « la longueur 1 quart d'unité est telle que, *reportée 4 fois*, on obtient la longueur 1 unité ». Elle diffère de celle proposée par l'équipe ERMEL, et plus classiquement par les manuels, car elle insiste davantage sur le report de longueur plutôt que sur le partage/pliage de la bande de papier, qui donnerait plutôt un schéma du type de celui de la figure 11, en s'accompagnant d'une verbalisation du type : « on obtient un quart de longueur en pliant la bande unité 4 fois en parties égales ».

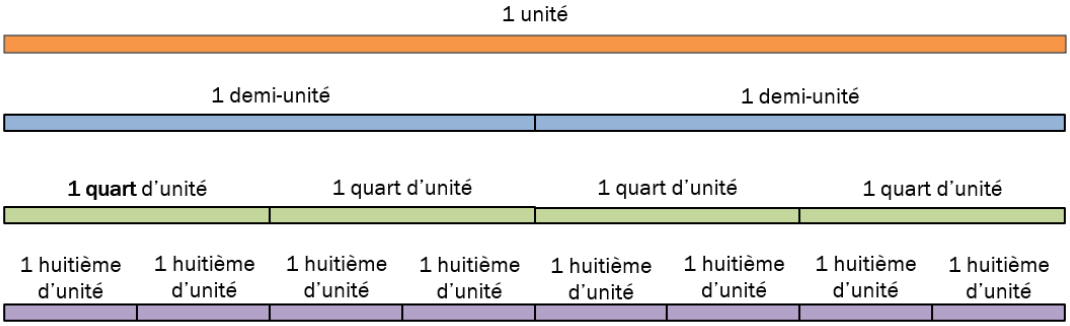


Figure 11. Type d'institutionnalisation plus fréquente, différente de notre proposition

Les participants semblent d'accord pour admettre cette différence, bien qu'elle soit finalement assez subtile. Un groupe propose d'ailleurs un dessin du type de celui de la figure 11. Nous proposons en annexe 4 un tableau synthétisant les différences de conception issues de ces deux représentations, toujours en appui sur les travaux de Chambris (2022, 2024). La discussion s'est plutôt concentrée sur d'autres points présentés dans ce qui suit.

Unité de compte ou unité de longueur ? Comme on mesure, on pourrait dire *unité de longueur*, mais *unité de compte* permet de distinguer les notions d'*unité* et de *tout*. Un *tout* est indépassable alors qu'avec une *unité*, l'on peut compter aussi loin que l'on veut. Ainsi, *5 quarts* vu comme *5 fois l'unité de compte 1 quart* ne pose pas de difficulté conceptuelle. L'usage pourrait être d'utiliser les deux expressions indifféremment.

Quelle différence entre* un *demi et* le *demi ? Le demi est le *nom* de l'unité (fractionnaire), un demi est une *quantité*, une mesure, un nombre de cette unité, comme deux demis ou cinq demis. La différence est la même qu'entre le centimètre, qui est le nom d'une unité de longueur et un centimètre (1 cm) qui est une longueur (le nombre 1 représentant la mesure de cette longueur, l'unité étant le centimètre).

Il pourrait être fructueux ***d'expérimenter les fractions unitaires avec différentes longueurs de bandes étalon***, afin de mettre en évidence le fait qu'un demi est un rapport et non une longueur absolue. Mais cette remarque vaut pour n'importe quelle mesure, qui est toujours relative à l'unité choisie. Ainsi, un demi est toujours sous-entendu un demi de l'unité, et même un demi de l'unité principale, ce pourquoi

c'est une unité relative (à cette unité principale). Mais là encore, c'est vrai pour toutes les mesures, et pour tous les nombres, mêmes les nombres entiers : 2 n'a de sens que par rapport à l'unité 1. La dizaine signifie en réalité une dizaine d'unités (principales).

L'écriture fractionnaire est introduite comme une autre expression des fractions unitaires. $\frac{1}{2}$ et *un demi* sont deux expressions de la même fraction, dans deux registres différents. Ainsi, on distingue bien les fractions de l'écriture fractionnaire.

Cette ***vision des fractions comme un système d'unités***, que l'on pourrait organiser en sous-unités et multiples de ces unités, diffère de la vision d'une fraction comme rapport entre deux nombres entiers. En effet, on reste ici finalement, et pour un temps du moins, dans les nombres entiers, puisque, par exemple, $\frac{5}{8}$ est un nombre entier de fois l'unité $\frac{1}{8}$, plutôt que le rapport entre les nombres entiers 5 et 8. Il ne nous apparaît pas gênant de commencer ainsi, car les égalités entre différentes fractions arrivent très vite et travaillent donc en acte ce rapport. En effet, dès la première séance, on rencontre des égalités du type $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Et nous avons vu qu'en travaillant avec des unités principales différentes, on permettait aux élèves de comprendre qu'il s'agit bien d'un rapport.

3 L'organisation didactique

La réflexion sur l'organisation didactique nous a permis de rendre hommage à Guy Brousseau, qui nous a quitté cette année. Nous livrons ci-après un extrait de la brochure évoquant ce point :

> *La première partie de la situation d'ERMEL Bande unité est organisée autour d'une situation de type émetteur-récepteur, qui contraint les élèves, non seulement à agir, mais également à formuler leurs premières actions en vue d'en communiquer le résultat à leur binôme, sans que l'enseignant ait besoin d'intervenir : il s'agit typiquement d'une double situation d'action et de formulation au sens de Brousseau (1998).*
>
> *Lors de son déroulement, les élèves prennent conscience de la nécessité de préciser la description de la longueur du segment qui leur est attribué. Ils agissent donc afin de mesurer une longueur avec une unité inopérante qu'ils doivent modifier, et ils formulent dans un message, afin de rendre compte de leur mesure. La situation est dite réactive puisque le message reçu par un autre élève va permettre ou non de réussir la tâche (reconnaître le segment parmi plusieurs segments de longueurs différentes), et valider ou invalider le message écrit, toujours sans intervention de l'enseignant.*
>
> *Toutefois, il ne s'agit pas de dire que l'enseignant ne sert à rien d'autre qu'à installer les élèves dans une situation suffisamment riche, limitant ainsi son rôle à celui d'animateur. Bien au contraire, Brousseau a montré que les connaissances construites par les élèves en situation (ici, produire et utiliser une unité plus petite que l'unité initiale pour mesurer une longueur) ne sont pas conservées sans intervention de l'enseignant.*
>
> *C'est pour cela que l'enseignant qui avait un rôle d'observateur et de régulateur lors des phases d'action et de formulation, a maintenant pour responsabilité de faire émerger ce qu'il faut retenir de la situation vécue et transformer les connaissances personnelles des élèves en un savoir institutionnalisé : cette transformation est appelée "processus d'institutionnalisation".*

Il n'y a pas eu de discussion sur ce point.

V - ANALYSE DE CORPUS

Comme il n'était pas prévu que les messages produits par l'assistance soient erronés, nous avons choisi de faire travailler les participants, non sur leurs propres messages, mais sur ceux produits par des élèves en situation réelle que nous avons retranscrits (le corpus figure en annexe 5). Nous avons distribué une retranscription par participant, et un corpus brut par table. Chaque groupe devait produire une affiche à partir de la double consigne suivante :

> *Proposer une catégorisation des messages et un choix pour préparer une mise en commun*
>
> *Quelle synthèse et quelle institutionnalisation est possible à partir de ce corpus ?*

Là encore, des raisons de temps nous ont contraints à écourter le temps de synthèse, au profit d'une prise de connaissance suffisante du corpus. Nous sommes passés de table en table pour discuter avec les participants. Nous avions prévu une synthèse complète des messages, que nous n'avons pas eu le temps de réellement formaliser. On la trouvera donc en annexe 6.

Lors de la mise en commun finale, nous avons focalisé sur une production en particulier (figure 12), qui montre comment il peut être naturel, pour certains élèves, d'utiliser des fractions supérieures à l'unité.

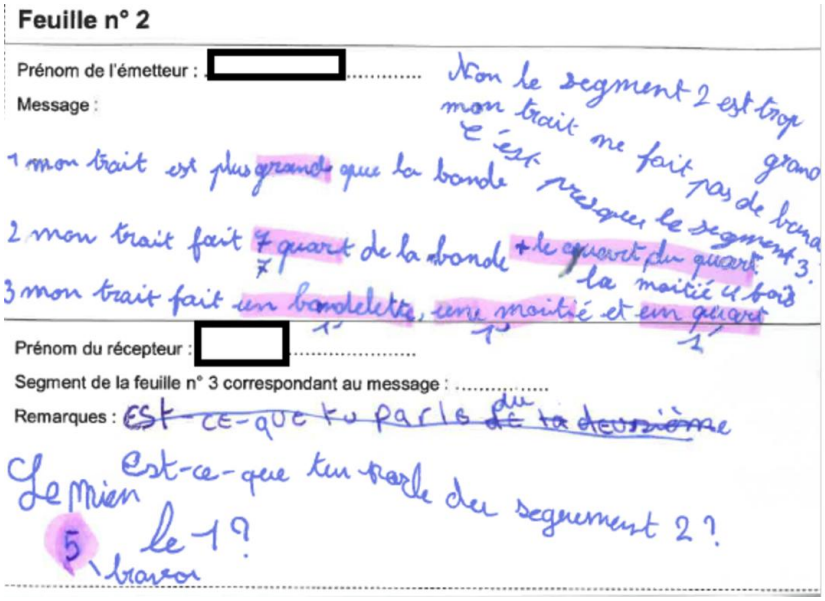


Figure 12. Une production utilisant spontanément la fraction 7 quarts

À la suite de l'étude du corpus, plusieurs points ont été soulevés.

Les participants ont tout d'abord fait le constat que la gestion et la caractérisation de propositions très diverses en temps réel constituent une vraie difficulté : quelle mise en commun peut-on espérer faire à chaud ? L'enseignant peut prendre un temps pour catégoriser les messages des élèves et faire une mise en commun plus tard, par exemple le temps de la récréation, mais il ne peut faire l'économie d'une bonne connaissance *a priori* de la situation, qui lui permet d'anticiper au maximum les productions des élèves. C'est l'occasion de rappeler que les situations ERMEL en général, et celle-ci en particulier, ont été testées un grand nombre de fois, et sont robustes. Leur description détaillée fait apparaître ce qui doit arriver en classe, et ce qui arrive effectivement. Leur étude attentive permet ainsi une bonne anticipation pour l'enseignant qui réalise la situation en classe.

Il est possible aussi de partir avec la question « qui a réussi ? » et « qui n'a pas réussi ? », laissant ainsi davantage l'initiative aux élèves, mais on conseille toutefois de partir de quelques messages erronés pour comprendre en quoi ils sont insuffisants. On cherche ensuite dans les messages qui ont fonctionné s'ils répondent de façon satisfaisante à la demande de précision. Il s'agit d'une négociation à gérer avec les élèves.

Certains enseignants (du premier degré) s'inquiètent avec raison du manque des prérequis nécessaires pour réussir l'activité, en particulier l'habileté à mesurer des longueurs avec un unité non conventionnelle. Ils proposent de précéder la mise en œuvre de la situation *Bande unité* avec une situation de mesures de longueurs impliquant des reports entiers de l'unité. Nous sommes heureux de pouvoir dire que c'est exactement ce que la brochure propose de faire, en soulignant toutefois que cette habileté relève du cycle 2, voire idéalement de la classe de CP.

La ressource ERMEL est difficile, elle demande une prise en main importante, et doit aussi s'appuyer sur les connaissances des élèves, par exemple les connaissances de grandeurs et mesures qui doivent être réinvesties dans cette situation. Mais il faut aussi que les élèves s'adaptent car les postures d'élèves (par

exemple dans les communications) ne sont pas usuelles. Il s'agit très souvent d'un changement, voire d'une rupture du contrat didactique. Là encore, la brochure a réfléchi à la question et en propose une analyse.

VI - CONCLUSION

Nous avons pu constater que la situation ERMEL Bande Unité reste une situation vivante et consistante, même avec un public adulte. Nous l'avons utilisée pour (re)construire une définition d'une fraction que nous espérons plus claire, et plus limitée. Ainsi, à la question : « $\frac{3}{4}$, est-ce une fraction ? », nous répondons finalement : cela dépend du contexte, et dépend donc de la façon dont nous disons ce signe :

- dans un contexte de fractionnement, on dira « trois quarts » et c'est une fraction ; la réponse sera *oui* ;
- dans un contexte différent, tels que les probabilités, la proportionnalité, un problème arithmétique, on pourra dire « trois pour quatre », « trois sur quatre », « trois par rapport à quatre », « trois divisé par quatre », … autant d'interprétations qui ne sont pas des fractions, mais bien d'autres sens attribués aux nombres rationnels ; la réponse sera alors *non* ;
- dans un contexte purement mathématique, de calcul en écriture fractionnaire par exemple, cette question n'est plus pertinente ; il s'agit tout simplement d'un nombre rationnel (ou de l'une de ses représentations) ; la réponse sera alors *hum*.

Nous revenons un instant sur la question 7 du questionnaire, qualifiée entre nous de « part de pizza ». Proposée de cette façon, et sans ambiguïté en ce qui nous concerne, cette représentation n'est pas celle d'une fraction. Sans revenir à la littérature abondante qui expose toutes les difficultés créées chez les élèves à commencer l'enseignement des fractions par des partages d'objets géométriques, nous souhaitons insister sur un point particulier, celui des grandeurs. A la suite de Rouche (1992), puis de Chevallard et Bosch (2002), puis de Chambris (2008, 2022, 2024), nous insistons sur le fait que les fractions, comme tous les concepts mathématiques, sont immatérielles. Les « parts de tarte » ne sont pas les fractions, ce sont des objets matériels, du monde sensible, que l'on peut manger ; en revanche, leur « taille » (leur aire par exemple, mais aussi leur masse, ou leur volume) peut être une fraction d'une taille choisie comme référence (par exemple, l'aire totale de la tarte). Dire « en part égale » sans préciser sur quoi porte l'égalité suggère en général, au moins du point de vue des élèves, « de même forme », « superposable », ce qui pointe bien l'idée que l'on est sur l'objet et non sur l'une de ses grandeurs associées. On sait ensuite à quel point il est difficile de revenir sur cette première construction erronée. C'est pourquoi nous insistons sur le fait qu'il s'agit, dans la situation *Bande unité*, de fractions des longueurs, même si le fractionnement se fait matériellement sur un objet tel que la bande. Afin de concentrer l'attention, non sur les parts que l'on obtient ainsi par pliage, mais sur leur longueur commune, nous insistons sur une définition convoquant le report de longueur, et non le comptage de parts (voir en particulier l'annexe 4). Et c'est également pourquoi nous finirons un jour, si nous l'osons, par changer le titre de cette activité, qui confond, dans son titre, l'objet « bande » et sa longueur « unité ».

VII - BIBLIOGRAPHIE

Adjiage R (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de Doctorat. Strasbourg : Université Louis Pasteur.

Anglard, J., Kieffer, J., Metter, O., Seyfried, S., Urvoy, G. et Thomas, C. (2024). *Introduire les fractions à l'école primaire, ou comment réussir en classe la situation Bande unité de la ressource ERMEL*. Strasbourg : IREM de Strasbourg, S. 201.

Arithmétique. Cours moyen (s.d., probablement vers 1900). Collection d'ouvrages classiques. Par une réunion de professeurs. Tours : Mame et fils.

Baruk, S. (1992). Fraction. Dans *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris : Seuil.

Bouvier, A., et George, M. (1979). Fraction. Dans F. Le Lionnais (Dir.), *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : Presses Universitaires de France.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. Dans H. Chaachoua et al. (eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 1, pp. 169–196). Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Paris : CY Cergy Paris Université.

Chambris, C. (2024). *Commentaires sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2* (révision adressée au CSP du texte adressé à la DGESCO). Conseil Supérieur des Programmes.

Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A.-M., et Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux—Potentialités. Dans H. Chaachoua, et al. (éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques: Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 2, pp. 373–396). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations. *Petit x*, *59*, 43-76.

Collectif (1973). Fraction. Dans *Les mathématiques*. Centre d'Étude et de Promotion de la lecture.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65

MENESR (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3.* Educscol (ressource en ligne). Consultée le 15/09/2024, url : https://eduscol.education.fr/document/16510/download

MENJ (2019). Repères annuels de progression pour le cycle 3. Bulletin Officiel, Note de service n° 2019-072 du 28-5-2019., annexe 23.

MENJS (2020). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). *Bulletin Officiel*, n°31 du 30 juillet 2020, annexe 2

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Paris : Hatier.

Warusfel, A. (1966). Fraction. Dans *Dictionnaire raisonné de mathématiques*. Paris : Seuil.

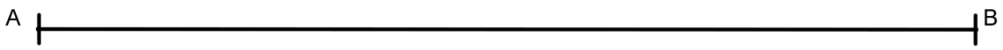
ANNEXE 1 - DÉFINITIONS PERSONNELLES DU MOT *FRACTION*

	Définitions proposées par les participants à l'atelier	Commentaire sur la nature proposée
1	Une fraction, c'est un nombre rationnel, à moins que l'on veuille faire la distinction entre le nombre et ses façons de se présenter (représentations)	nombre/représentation
2	Une façon de désigner un nombre rationnel	représentation
3	- Le terme est parfois confondu avec son écriture - 5 aspects sont à étudier …….comprendre le concept : partie/tout – opérateur – ratio – mesure – quotient	autre
4	On a un souci avec "l'écriture d'un nombre rationnel" : 0,5 / 1/2 / 1/4 Un couple d'entiers représentant un nombre rationnel	autre
5	Un nombre rationnel Un partage/parts égales	nombre
6	1. Expression du rapport entre : - une part et un tout - une partie d'une collection = tout 2. Expression d'un quotient 3. Expression d'un facteur de transfo multiplicative (ou coeff de prop) 4. Expression d'une mesure 5. Expression d'un rapport entre une partie et une autre (ratio + ...)	autre
7	Une fraction est un nombre qui peut être supérieur à 1, inférieur à 1, entier ou non entier. C'est un réel.	nombre
8	Une fraction est un nombre. C'est la taille d'une part. C'est une nouvelle unité fractionnaire. C'est la taille d'une part (quand je dois la prendre n fois pour faire un tout) une unité.	nombre
9	Une fraction est un nombre. Une fraction est une partie d'un tout	nombre
10	Une fraction est un nombre, on l'utilise lorsque l'usage des nombres entiers est insuffisant pour désigner une quantité ou un rang.	nombre
11	Une fraction est un nombre ou une manière d'écrire un nombre	nombre/représentation
12	Une écriture d'un nombre réel	représentation
13	Une fraction a/b, c'est le nombre qui, multiplié par b, donne a	nombre
14	Une fraction est un nombre qui s'écrit a/b tels que : $a \in R$ et $b \in R^*$	nombre/représentation
15	C'est une représentation d'un nombre, écrit sous la forme d'un quotient avec un numérateur et un dénominateur	représentation
16	Une fraction est un nombre qui peut s'écrire sous la forme a/b. Notion introduite pour pallier l'insuffisance des nombres entiers.	nombre
17	Une fraction est une écriture d'un nombre rationnel	représentation
18	C'est un nombre qui, multiplié par un entier, donne un entier *i.e.* solution x de $ax = b$, avec a et b entiers et $a \neq 0$	nombre
19	Une fraction, c'est un nombre rationnel. Mais aussi l'écriture de ce nombre sous la forme d'un quotient de deux entiers.	nombre/représentation

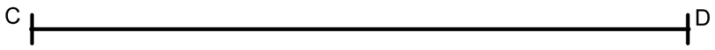
	Définitions proposées par les participants à l'atelier	Commentaire sur la nature proposée
20	Une fraction est un nombre rationnel. Un nombre rationnel est représenté par plusieurs fractions toutes égales les unes aux autres. Le nombre *x* tel que a × *x* = b avec a≠ 0 est la fraction b/a	nombre/représentation
21	Une fraction est l'écriture d'un nombre sous la forme d'un numérateur et d'un dénominateur. Le nombre peut être écrit sous la forme d'une écriture fractionnaire.	représentation

ANNEXE 2 - MATÉRIEL DISTRIBUÉ AUX PARTICIPANTS

$Feuille\ n°1$



$Feuille\ n°1$



$Feuille\ n°1$

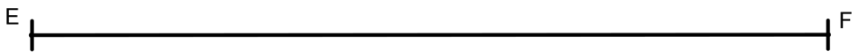
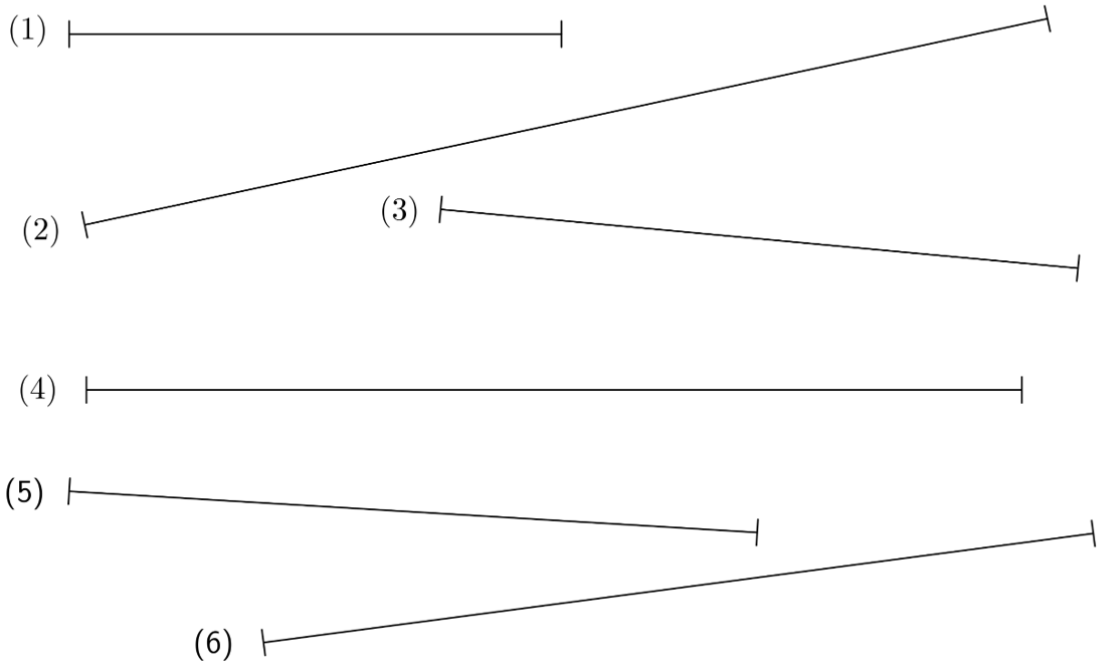


Table émetteur :	**Feuille n°2**
Message :	
Table récepteur :	
Segment de la feuille n°3 correspondant au message :	
Remarques	

Feuille n°3



ANNEXE 3 - MESSAGES DES PARTICIPANTS

Table 1 pour table 2

Prénom de l'émetteur : Diana et ses copains **Feuille n°2**

Message :
Le segment [AB] mesure quasiment 2 unités étalon auquel vous ajoutez la moitié d'une unité étalon

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : segment (2)

Remarques

table 2 pour table 3

Prénom de l'émetteur : **Feuille n°2**

Message :
notre segment mesure 2 bandes unités et une moitié de bande unité.

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques 2



OK !

Table 3 pour table 4

Prénom de l'émetteur : **Feuille n°2**

Message : une bande unité entière et la moitié d'une bande et la moitié de la moitié de la bande unité

~~2 bandes bande~~ deux bandes unité moins une part qui est 4 fois plus petite que l'unité

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques

Table 4 pour table 5

Prénom de l'émetteur : **Feuille n°2**

Message :
Tu places une unité. Il te reste un morceau de quoi !!
Et puis ~~on plie~~ tu plies l'unité en 2 puis encore en deux. 3 parties correspondent à la longueur du morceau.

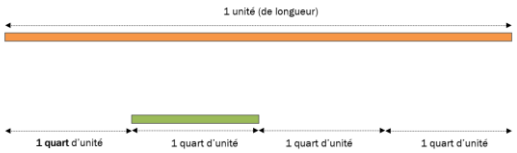
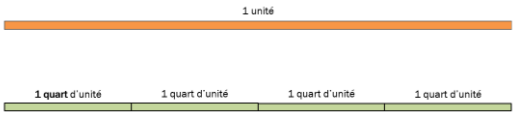
Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : c'est le 5 !

Remarques

Table 5 pour table 6	Table 6 pour table 1
rénom de l'émetteur : **Feuille n°2** Message : 2 bandes unités + 1 part de la bande pliée en 8 parts Prénom du récepteur : Segment de la feuille n°3 correspondant au message : Remarques c'est le segment n°6. ☺	Prénom de l'émetteur : **Feuille n°2** Message : Notre segment mesure 2 B.U et un petit bout de la B.U qui correspond à la B.U pliée en 2, trois fois de suite Prénom du récepteur : Diana et Co. Segment de la feuille n°3 correspondant au message : n°6. Remarques C'était bien, c'était facile

ANNEXE 4 – SYNTHÈSE DES DIFFÉRENCES ENTRE L'INSTITUTIONNALISATION (FIGURES 10 ET 11-

Type d'institution-nalisation	 extrait de la figure 10	 extrait de la figure 11
Verbalisation de « un quart »	la longueur 1 quart d'unité est telle que, *reportée 4 fois*, on obtient la longueur 1 unité	On obtient un quart de longueur en pliant la bande *unité en 4 en parties* égales
niveau des longueurs vs niveau des objets	*un* objet, dont la longueur est reportée 4 fois	*quatre* objets, tous de même longueur
	unité immatérielle divisée par 4	objet matériel partagé en 4
type de raisonnement[11]	raisonnement multiplicatif : on voit le rapport entre deux longueurs 1, c'est 4 × 1/4	raisonnement additif : on compte des objets 1, c'est 1/4+1/4+1/4+1/4
	report illimité, en particulier passage à cinq quart non problématique	l'objet est le tout, difficulté à aller au-delà de 4 parts

[11] Rahaman et Subramaniam (2016) cités par Chambris (2022).

ANNEXE 5 - CORPUS DE MESSAGES D'ÉLÈVES PROPOSÉ AUX PARTICIPANTS (TRANSCRIPTIONS)

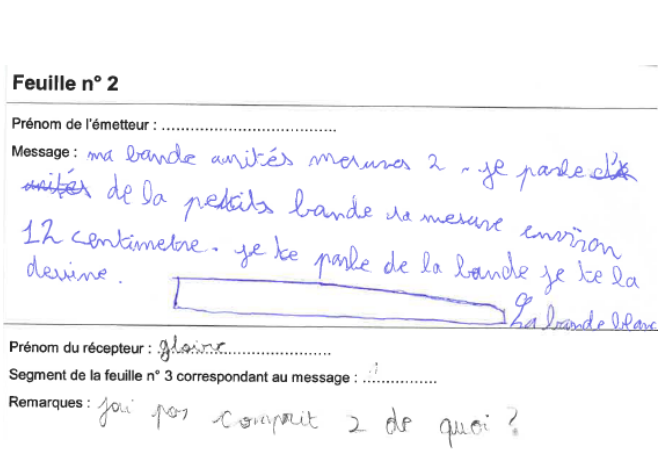
N°	Émetteur message n°1	Récepteur réponse n°1	Émetteur message n°2	Récepteur réponse n°2	Réponse proposée	Retour émetteur
1	Ma bande unité mesure 2.	J'ai pas compris 2 de quoi ?	Je parle de la petite bande de mesure environ 12 centimètres. Je te parle de la bande, je te la dessine (dessin d'un rectangle allongé) la bande blanche	-	2	pas de retour
2	Peux-tu trouver quel segment fait mon segment sur ma feuille ?	Donne-moi des indices parce que ce qu'on fait n'est pas une devinette. Essaie de me donner des indices comme je l'ai fait.	Ok ! Mon premier est un peu plus grand que la bande. Mon deuxième, c'est un segment sur la feuille. Mon troisième, ma bande fait 3 et demi (que ?) mon segment.	-	4	invalidé par l'émetteur
3	La bande de papier ne fait pas la moitié de mon segment	Je ne comprends pas, le message n'est pas assez clair.	J'ai mesuré trois fois avec la moitié de ma bande unité (sans ?) à la fin.	Il n'y a pas de segment (message barré)	pas de réponse	
4	Il faut mettre la bande unité deux fois sur ce segment	Il y a un bout en trop ? Mais je pense que c'est le 6	Désolé, j'ai oublié de te préciser qu'à la fin, il y a un espace vide	-	6	validé par l'émetteur
5	Mon segment fait 19 fois la moitié du car.	Je ne comprends pas ce que ça veut dire, 19 fois la moitié du car mais je crois que j'ai trouvé.	Tu trouves le car de la bande puis tu le plie en deux et tu fais ça 19 fois	-	2	pas de retour
6	Ma bande de papier fait la moitié du segment	Je ne l'ai pas trouvé, ils sont trop petits et d'autres trop grands	Désolé, ça doit [être] un peu plus petit ou plus grand mais je pense que c'est plus grand.	-	6	pas de retour
7	Mon feui à le double de la bonde papier et a la fin j'ai le moitier de la bonde papier.	écris mieux, on dit ma feuille, bande de papier, j'ai la moitier, bande, ...	(suite des messages au dos)	...		
8	1. Mon trait est plus grand que la bande 2. mon trait fait 7 quarts de la bande + le quart du quart 3. mon trait fait 1 bandelette, une moitié et un quart.	Est-ce que tu parles du segment 2 ?	Non, le segment 2 est trop grand. Mon trait ne fait pas de bande. C'est presque le segment 3	-	5	validé par l'émetteur
9	Mon segment fait quasiment la taille de 2 x la barre d'unité	Ton segment est le 1		-	1	pas de retour
10	Mon segment mesure 4 bandes de papier 1/2	Que veut dire 1/2 ?	Cela veut dire "et demi" ! (la moitié)	-	6	pas de retour
11	Mon segment est long mais moyen; consulté avec ma feuille, ça pourrait faire 12 et 1 mm; ma feuille d'unité	Je n'ai pas compris	Mon segment est grand je crois pas 12 cm moi avec ma feuille j'ai cherché et pas trouvé. Il (est) grand, il est grand mon segment mais pas trop mais pas trop	J'ai un tout petit (peu) compris	3	pas de retour
12	Tu commences du point C avec la bande de papier. Après, tu peux écrire le restant du segment dans ta bande ||||	Tu n'as pas écrit comment trouver ton segment. Ecris plus précis !	Sur le segment, tu fais ce que je te dis	-	pas de réponse	
13	Pour trouver mon segment, plie ton papier et mesure trois fois, un petit bout va dépasser.	Est-ce que c'est le bout de la feuille ou du segment ?	Le bout du segment et de peu du segment	Je pense que c'est le segment 3	1 puis 3	Les deux réponses sont invalidées

ANNEXE 6 (ANALYSE DU CORPUS PAR LE GROUPE IREM)

On peut classer les messages d'un point de vue de réussite de la tâche ou non. Même avec ce classement, la diversité au sein de chaque groupe est intéressante et source d'échanges.

Type 1 - Le message ne permet pas de trouver son segment

Utilisation d'une règle imaginaire, reproduite ou inventée.



Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : .....

Message : ma bande unités mesure 2 - je parle de la petite bande la mesure environ 12 centimetre. je te parle de la bande je te la dessine.

La bande blanc

Prénom du récepteur : gloire

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques : jai pas compris 2 de quoi ?



Feuille n° 2

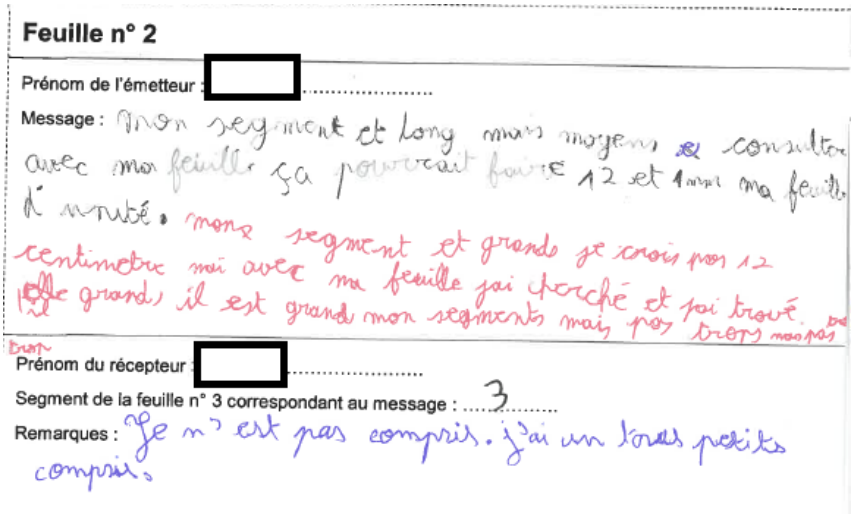
Prénom de l'émetteur : .....

Message : Tu commence du noir avec la bande de papier. après tu peux écrire le restant du segment dans ta bande. Sur le segment tu fais ce que je t'ai dis.

Prénom du récepteur [redacted] .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques : Tu a pas écrit comment trouver ton segment ! écri plus préci !



Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted] .....

Message : Mon segment et long mais moyen si consulte avec ma feuille ça pourrait faire 12 et 1mm ma feuille à mutité. mon segment et grand je crois pas 12 centimetre mai avec ma feuille jai cherché et jai trouvé elle grand il est grand mon segments mais pas trop pas trop

Prénom du récepteur [redacted] .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 3

Remarques : Je n'est pas compris. j'ai un tous petits compris.

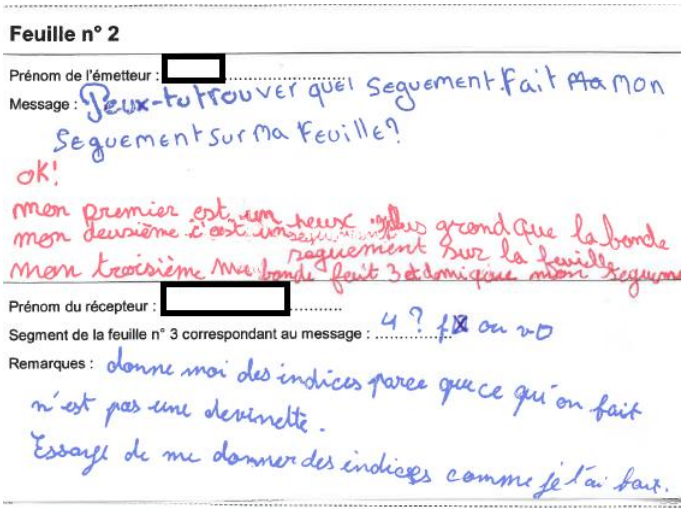
Dans tous ces exemples, il y a une utilisation du centimètre malgré l'absence de règle. Cela vient du fait de chercher une longueur, ou d'avoir utiliser le mot « mesure » pour donner les consignes de la situation a déclencher l'habitude pris des enfants : mesure ← → outil règle.

On peut voir qu'il y a systématiquement un retour de non compréhension de la part du correspondant. L'enfant qui a envoyé le message est contrait de le revoir et de se rendre compte que sa technique n'est pas la bonne. Ce n'est pas parce qu'elle est reconnue comme erronée par l'enseignant, mais bien parce que l'objectif de celle-ci n'a pas été rempli. Cela amène à une reformulation, souvent erronée elle aussi.

Type 2 - le message manque de précision mais peut permettre de trouver le bon segment

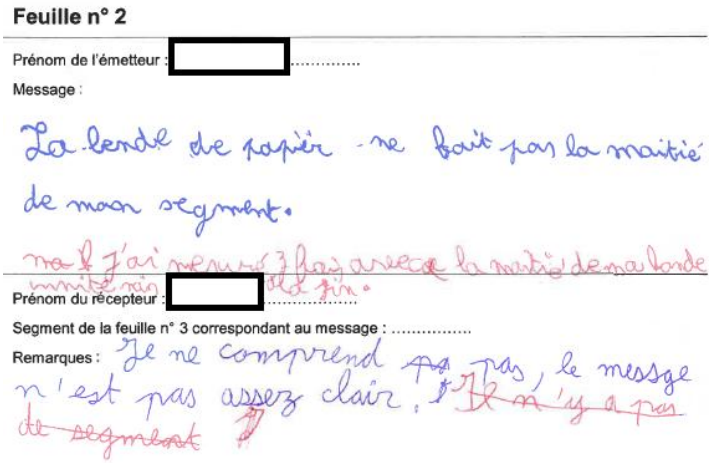


Ici, on a des approximations. Certains élèves ont pu comprendre qu'il fallait plier la bande, mais pas qu'il était possible de la plier encore une fois. On peut observer que le retour fait par le correspondant ne suffit pas à trouver la réponse. Il est cependant clair pour l'émetteur, comme pour le type de production précédent, que son travail ne permet pas à l'autre enfant de trouver le bon segment, et qu'il lui manque donc un élément de langage pour mieux se faire comprendre.



Ici, il faut expliquer ce qui est arrivé à l'émettrice. Elle a commencé par produire une question, qui ne contient aucun indice : elle n'avait visiblement pas compris la consigne. Elle était en échange avec une élève avec un haut niveau de langage qui a pu lui répondre précisément sur ce qui lui manquait pour

comprendre. L'émettrice s'est alors inspirée du message que lui avait envoyé sa réceptrice pour refaire sa production (en rouge). On peut voir que dans sa tête, une devinette est identique à une charade. Toujours est-il que son troisième indice, quoique faux, contient une technique.


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted]

Message : La bande de papier ne fait pas la moitié de mon segment. ma fi j'ai mesuré 3 fois avec la moitié de ma bande jusqu'à la fin.

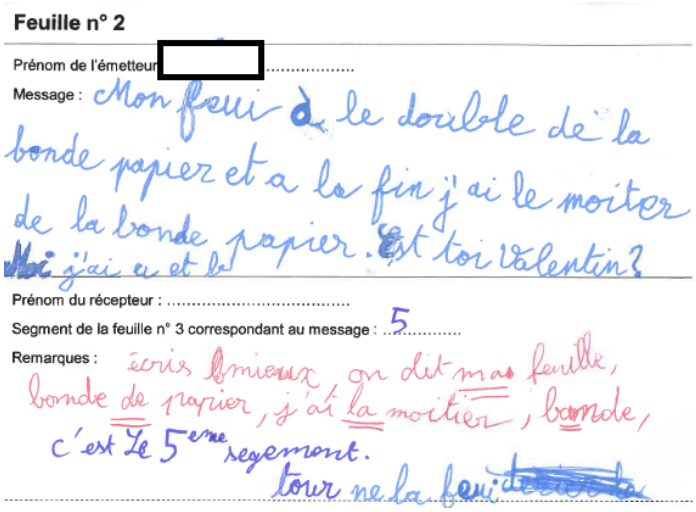
Prénom du récepteur : [redacted]

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques : Je ne comprend pas pas, le message n'est pas assez clair. Il n'y a pas de segment

Ici même chose, l'émetteur s'est inspiré du message qu'il avait reçu pour comprendre la technique de son correspondant.

Type 3 - le message contient toutes les informations pour trouver le bon segment


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur [redacted]

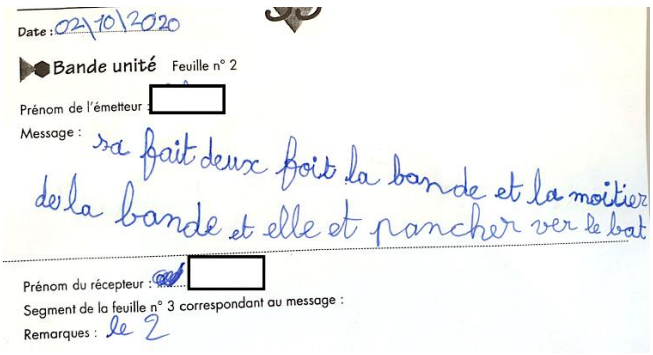
Message : Mon feuil à le double de la bonde papier et a la fin j'ai le moitier de la bonde papier. Est toi Valentin? Moi j'ai eu et le

Prénom du récepteur : .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 5

Remarques : écris mieux on dit mas feuille, bonde de papier, j'ai la moitier, bonde, c'est le 5ème segment. tour ne la feui

L'échec vient de nature sociale de l'échange : le contenu est bon mais le receveur ne veut pas le comprendre. Ce n'est pas forcément en mathématiques que cet échange sera intéressant, mais en EMC. L'émetteur est ici un enfant arrivé en France il y a deux ans, ses difficultés en français sont donc relatives. A l'issue de la séance, son récepteur a été amené à comprendre en quoi sa réponse pouvait être blessante, et s'est senti désolé.


Date : 02/10/2020

Bande unité Feuille n° 2

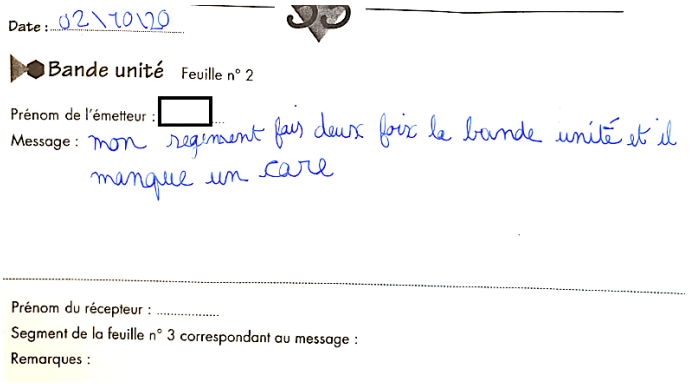
Prénom de l'émetteur : [redacted]

Message : sa fait deux foit la bande et la moitier de la bande et elle et rancher ver le bat

Prénom du récepteur : [redacted]

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message :

Remarques : le 2


Date : 02/10/20

Bande unité Feuille n° 2

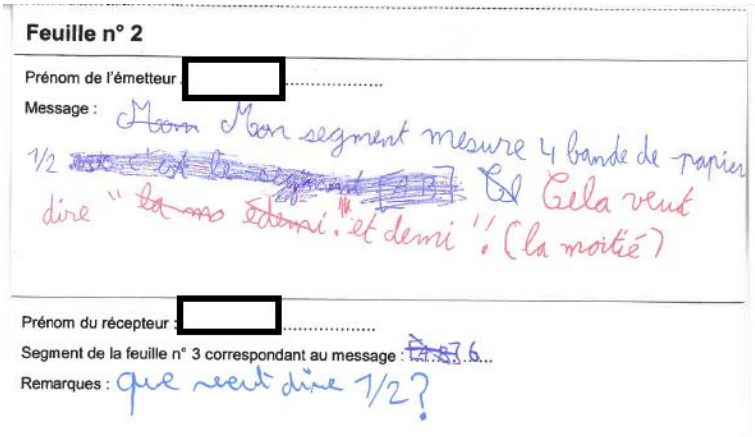
Prénom de l'émetteur : [redacted]

Message : mon regiment fais deux foix le bande unité et il manque un carre

Prénom du récepteur : .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message :

Remarques :


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted]

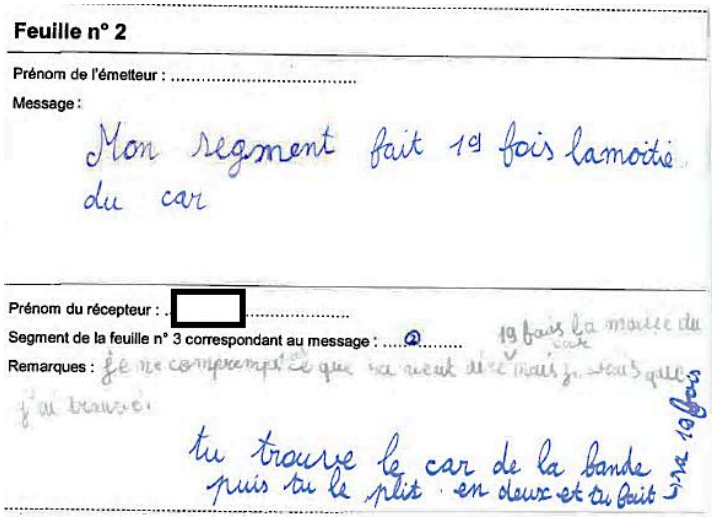
Message : Mon segment mesure 4 bande de papier 1/2 [redacted] Cela veut dire " [redacted] et demi ". (la moitié)

Prénom du récepteur : [redacted]

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 4.8.7.6...

Remarques : que veut dire 1/2 ?

L'émetteur n'arrive pas à se faire comprendre : visiblement, il sait déjà comment écrire un demi. Il est contraint de le reformuler par la réaction de son récepteur.


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : .....

Message :

Mon segment fait 1g fois la moitié du car

Prénom du récepteur : [redacted]

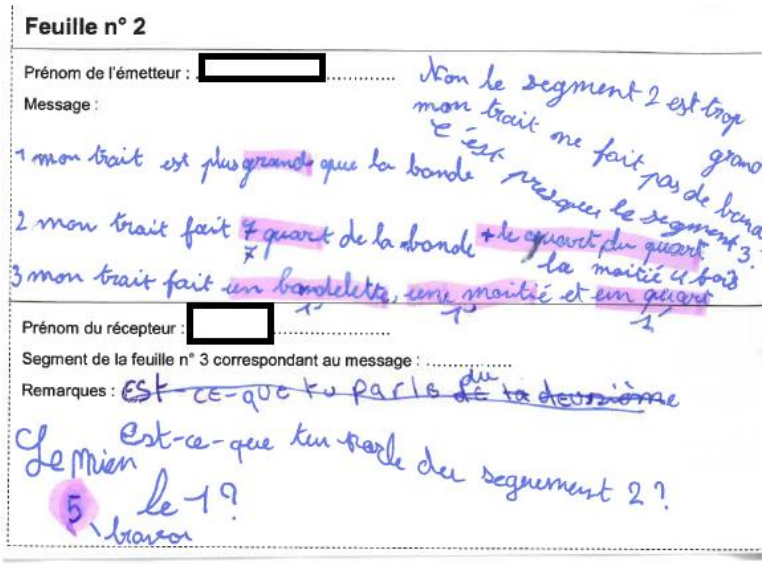
Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 2

Remarques : je ne comprends pas ce que ça veut dire mais je veux que j'ai trouvé.

19 fois la moitié du carré

tu trouve le car de la bande puis tu le plit en deux et tu fait 1 ou 19 fois

L'émetteur écrit en bleu. Il définit ce qui correspond à « moitié du quart » (qu'on appellera huitième plus tard). On peut déjà retenir ce message pour un aspect simple : les nombres rationnels peuvent s'écrire de plusieurs façons différentes. Appuyé par la production suivante :


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted]

Message :

Non le segment 2 est trop grand mon trait ne fait pas de bonne taille c'est presque le segment 3.

1 mon trait est plus grand que la bande

2 mon trait fait 7 quart de la bande + le quart du quart la moitié 4 fois

3 mon trait fait une bandelette, une moitié et un quart

Prénom du récepteur : [redacted]

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques : Est-ce que tu parle de la deuxième

Le mien est-ce-que tu parle des segement 2 ?

5 bravo le 1 ?

LES ABAQUES À JETONS : UN OUTIL PLEIN DE RESSOURCES À METTRE DANS TOUTES LES MAINS POUR LA COMPRÉHENSION DES NOMBRES, DES GRANDEURS ET DES CALCULS.

Vincent BECK
Maître de conférences, Université d'Orléans
Institut Denis Poisson, UMR 7013 & IREM centre-val de Loire
vincent.beck@univ-orleans.fr

Agnès GATEAU
Professeure des écoles, École élémentaire d'Étigny (89).
IREM de Dijon
Agnes.gateau@ac-dijon.fr

Frédéric MÉTIN
Formateur en mathématiques et histoire des mathématiques
INSPÉ / université de Bourgogne & IREM de Dijon
frederic.metin01@u-bourgogne.fr

Sylviane SCHWER
Professeure, Université Sorbonne Paris Nord
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord, UMR 7030 & IREM Paris Nord
schwer@math.univ-paris13.fr

Résumé
L'atelier revisite la mallette pédagogique Cormécouli, développée à partir de manuscrits de comptabilité du Moyen-Âge des villes d'Orléans, Tours et Amboise en montrant comment la décliner localement puis en proposant une étude générale des abaques à jetons en utilisant des extraits de traités arithmétiques des XV^{e}, XVI^{e} et XVII^{e} siècles. Ensuite, nous avons utilisé les abaques de la mallette pour résoudre un des problèmes posés dans cette mallette, en mettant en évidence les algorithmes propres aux systèmes monétaires anciens. L'atelier s'est terminé par une discussion sur les apports d'un tel instrument pour la formation des élèves et des enseignants actuels.

La mallette pédagogique Cormécouli a reçu le prix Jacqueline Ferrand 2024 de la Société Mathématique de France qui récompense tous les deux ans un projet d'innovation pédagogique. La mallette Cormécouli est issue du projet éponyme financé par la région Centre Val de Loire portant sur la création d'une base de données regroupant les comptabilités médiévales des villes d'Amboise, Orléans et Tours. Elle propose une large gamme d'exercices « mathématiques » pour les élèves de cycle 3 allant de problèmes d'applications à des problèmes beaucoup plus ouverts. Les thèmes mathématiques abordés tournent beaucoup autour de la proportionnalité et des grandeurs mais l'utilisation de la numération romaine et des abaques à jetons suppose aussi un travail sur la compréhension des nombres, des grandeurs et des algorithmes de calcul. Ce type de ressource offre également de travailler les mathématiques en interaction avec d'autres disciplines, notamment l'histoire, la géographie, le français, et les arts.

Au-delà de l'objet particulièrement soigné qu'a produit le Centre-Sciences de la région Centre-Val de Loire, ce prix récompense un travail pluridisciplinaire auquel l'ADIREM[1] - à travers quatre IREM Centre-Val de Loire, Dijon, Limoges et Paris Nord – a participé. Cette mallette a été présentée dans des formations continues de professeurs de collège et de référents mathématiques et utilisée depuis sa conception en formation des professeurs des Écoles dans plusieurs masters MEEF[2] premier degré, en particulier ceux d'Orléans et de l'académie de Créteil.

Dans une première partie, nous présentons ce qu'est un manuscrit de comptabilité du Moyen-Âge et l'intérêt pédagogique de sources historiques non « mathématiques » en formation des futurs professeurs des écoles, dont la plupart ont abandonné avec soulagement les mathématiques officiellement en fin de seconde, pour les réconcilier avec une matière vécue souvent comme trop abstraite et « hors-sol ». D'autre part, ce genre de document permet de montrer qu'il n'y a pas d'*Histoire* sans histoire des mathématiques ni d'histoire des mathématiques sans *Histoire*, ce qui est un élément important de la formation des enseignants, à tous les niveaux.

Ensuite nous présentons la mallette, qui n'était pas connue des participants, et décrivons la façon dont Agnès Gateau et sa classe se la sont appropriée, le ressenti des étudiants de Créteil et les échanges avec les participants à l'atelier.

Dans une seconde partie, après avoir expliqué l'usage des abaques à jetons dans le paysage européen et comment s'insère les descriptions des représentations des nombres et des méthodes de calculs avec l'abaque à jetons dans les traités arithmétiques des XV^{e}, XVI^{e} et XVII^{e} siècles, nous utiliserons des extraits de ces traités pour en expliquer le fonctionnement. On découvrira alors que représenter les grands nombres avec l'abaque n'était pas un problème.

En comparant les méthodes de représentation et de calcul avec l'abaque avec les méthodes classiquement enseignées actuellement, il est aisé de mettre en évidence la distinction entre les nombres et les opérations arithmétiques d'une part, leurs représentations et la façon de réaliser les opérations en fonction des moyens dont on dispose. Distinguer les objets, relations et opérations mathématiques de leurs représentations, choisir entre différentes représentations celles qui convient le mieux à la mise en œuvre en fonction du contexte sont deux compétences essentielles pour la compréhension des mathématiques, mais elles restent souvent encore à acquérir au niveau des licences scientifiques et pour nos étudiants de master premier et second degré. C'est donc un point essentiel à asseoir en formation des enseignants.

Dans la troisième partie, les participants sont d'abord invités par groupe de trois ou quatre, à résoudre à l'aide de l'abaque fourni dans la mallette, un des exercices proposés dans cette mallette puis à analyser les différentes méthodes.

I - LES MANUSCRITS DE COMPTABILITÉ DU MOYEN-ÂGE

Dans un premier temps, après un petit voyage bucolique autour de l'abbaye de Cîteaux, un de ses manuscrits du XV^{e} siècle écrit en latin est décrit, il concerne un discours contre les hérétiques Hussites (de 1432-33). Il est conservé sous la cote Ms 233. Sous la même cote, se trouve …

[1] Assemblée des Directeurs des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Il en existe environ un par région académique. Il regroupe des enseignants de la maternelle à l'université, en mathématiques, en sciences (aussi bien physique, chimie, de la vie et de la terre, que humaines ou économiques).

[2] Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation.

1 Un manuscrit de comptabilité conservé à la bibliothèque de Dijon

La bibliothèque municipale de Dijon conserve un ensemble de manuscrits, certains superbement enluminés, de l'Abbaye de Cîteaux. Parmi ceux-ci, l'essai « Contra Hereticos Hussitas » (*contre les hérétiques hussites*), dont le contenu ne présente pas grand intérêt pour nous, contrairement à son contenant. Lors de la restauration de la reliure dans les années 80, le carton de la couverture s'est révélé composé de feuillets disparates, dont une partie contenait des extraits de comptes de dépenses faites pour l'entretien du vignoble du célèbre Clos de Vougeot (qui appartenait à l'Abbaye), datés des années 1435 et 1436.

1.1 Analyse brute d'un extrait

Nous transcrivons, puis analysons l'extrait présenté à la Figure 1.

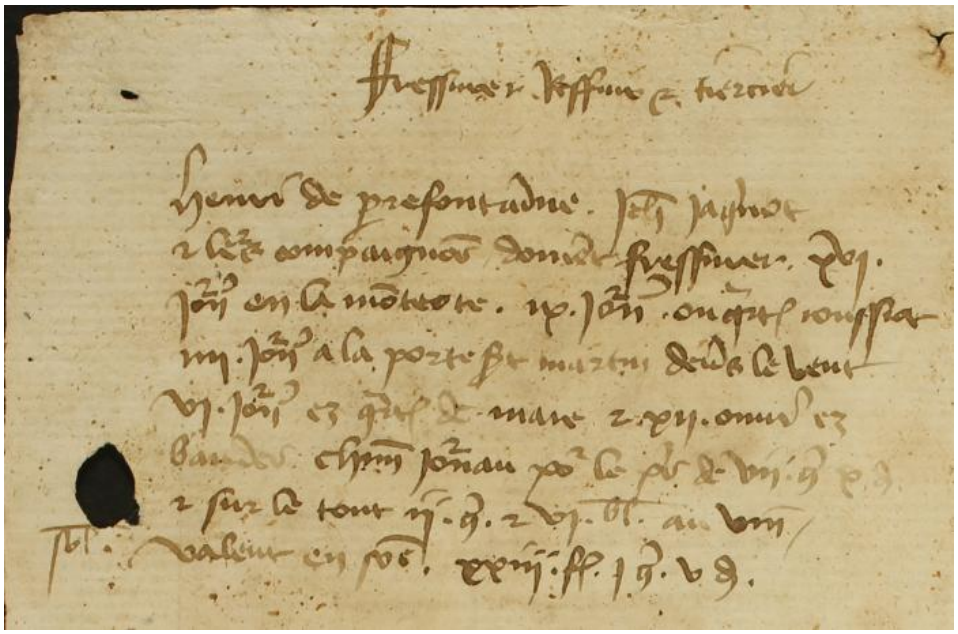


Figure 1. Extrait des comptes des dépenses du Clot de Vougeot, Bib. Mun. de Dijon, Ms 233, photo Éric Juvin.

Le titre comprend trois verbes : Fressurer reffaire & tiercier, qui correspondent à des opérations d'entretien de la vigne encore effectuées de nos jours bien que ce vocabulaire médiéval ait disparu.

Voici la transcription (en orthographe moderne et sans abréviation) des lignes suivantes :

> *Henri de Prefontaine, Jehan Jacquot & leurs compagnons doivent fressurer XVI journaux en la Montiote, IX journaux en quartier, IIII journaux à la porte St Martin dessous le vent, VI journaux ès quartiers de Mare, XII ouvrées ès Baudes chaque journal pour le prix de VII gros X deniers & sur le tout II gros & VI blancs au VIII ; valeur en somme XXIII florins I gros V deniers.*

Notons tout d'abord que les parcelles mentionnées existent toujours dans l'enceinte du Clos de Vougeot, sous des noms quasi inchangés depuis six siècles : Les Montiotes, les Marei, les Baudes. Ensuite, les unités de mesure agraires utilisées sont liées à la quantité de travail pouvant être entreprise par jour (le journal) et par ouvrier (l'ouvrée), cette dernière unité étant toujours utilisée dans les contrats viticoles.

Ce qui est le plus remarquable pour notre propos, c'est l'écriture des nombres en chiffres romains (écriture cursive), qui prouve que les chiffres indo-arabes n'avaient pas complétement pénétré la comptabilité ecclésiastique au bas Moyen-Âge, comme on va le voir dans la suite de cet article.

Par ailleurs, les unités monétaires utilisées ont cours dans plusieurs régions d'Europe. Si le « gros tournois » (équivalent du sou, soit le vingtième de la livre) est d'usage courant dans tout le royaume de France, le florin ne sera frappé en Bourgogne que dans la deuxième moitié du siècle, ce qui indique une

probable origine nordique (le Duc de Bourgogne est aussi Comte de Flandres). Mais les moines de Cîteaux n'ont-ils pas des pratiques indépendantes de celles de la cour de Bourgogne ?

Quoi qu'il en soit, leur connaissance des nombres est savante, et les comptabilités probablement peu divulguées en dehors des monastères, où la lecture et l'écriture sont bien maîtrisées.

1.2 L'écriture des nombres dans les manuscrits du Moyen-Âge

Il faut d'abord avoir en tête que les textes au Moyen-Âge étaient lus à haute voix, et qu'il n'y avait que peu de lecteurs. Les nombres peuvent être soit écrits sous forme de mots – avec des orthographes variant en fonction de l'humeur des scripteurs, car il n'y a pas de normes orthographiques, ce sera le rôle de l'Académie de l'établir – soit avec des chiffres romains ou bien en mêlant les deux. Excepté pour représenter les comptes monétaires eux-mêmes, qui suivent bien le système de représentation de la numération romaine, les nombres mêmes entièrement chiffrés sont des translittérations plus ou moins complètes du nombre lu.

En particulier, les unités du système que sont *vingt*, *cent* peuvent être comptés et non réitérés[3].

On trouve ainsi dans Claustre (2023) pour la date 1427 : « IIII^{C} vint et VII », « IIII^{C} et vint VII », « IIII^{C} XXVII », précédé ou non du mot-nombre *mil* mais pas « CCCCXXVII ». Dans la mallette, on trouve les formes « mil CCCCXXIII » (p. 51 du livre parchemin, chap. *amendes*) et dans le menu du banquet de l'hôtel de ville de Tours en 1479 de la mallette Cormécouli, on trouve par exemple « IIII^{XX} XII *saulcisses »* [Figure 3].

Un tel travail préliminaire d'observation de l'écriture des nombres en formation des enseignants et dans les classes sur une translittération tapuscrite est très intéressante pour revenir – encore et toujours - sur la différenciation de l'objet et de ses représentations. Cela permet d'apporter aux enseignants des éléments de réponses positives aux erreurs des élèves qui écriraient *trois-cents-trois* en chiffres 3003 du genre « au Moyen Âge, tu aurais pu écrire cela dans un texte, avec les chiffres romains III^{c}III mais aujourd'hui, ce n'est plus acceptable, il faut suivre la règle suivante, … ». L'utilisation d'un abaque à jetons *comme au Moyen Âge* devient alors un outil de transition naturel (Daval, Tournès *et al*. 2018).

2 La mallette Cormécouli

La mallette Cormécouli est issue d'un projet éponyme (CORMÉCOULI) en histoire médiévale portant notamment sur la création d'une base de données en accès libre de près de 30000 clichés pour l'ensemble des comptabilités des villes d'Amboise, Orléans et Tours à la fin du Moyen Âge (1358-1502). Cette base permet des recherches thématiques sur les écritures comptables. Le projet comportait également un volet de diffusion vers un public autre que celui de la recherche en Histoire. Pour se faire, les membres du projet ont souhaité s'associer à des enseignants de mathématiques pour construire une ressource scolaire. Les IREM de Dijon, Limoges, Paris-Nord et Centre - Val de Loire se sont retrouvés ainsi à collaborer avec les historiens du projet pour concevoir une mallette pédagogique à destination des élèves de cycle 3. Tout le suivi de ce projet de mallette, notamment la fabrication et la mise en ligne des brochures, des fichiers cartes et mallettes a été coordonnée par Centre Sciences (2023).

[3] C'est-à-dire traités comme des unités de mesure, souvent écrit en exposant : IIIC ou III^{C} au lieu de CCC, IIII^{XX} au lieu de LXXX. Les formes soustractives comme IV sont postérieures aux formes comme IIII.



Figure 2. Les différents éléments de la mallette Cormécouli

La mallette pédagogique (Figure 2) se compose

- du *grand livre* ou *livre parchemin* (en six exemplaires physique) contenant au début des cartes médiévales des villes d'Amboise, Tours et Orléans, puis chacun des huit thèmes (l'organisation d'un banquet, d'un spectacle, d'une procession, la protection militaire d'une ville, l'habillement des soldats, les catastrophes naturelles, la gestion administrative de la ville, l'entretien de la ville) est abordé à partir d'une contextualisation historique illustrée, des fac-similé d'un des manuscrits de comptabilité avec des passages mis en exergue. Ceux-ci-sont repris et transcrits en français contemporain, en conservant l'écriture chiffrée romaine des nombres ainsi que les expressions des unités de mesure. L'on peut, en formation des enseignants, commencer par donner une translittération du texte et demander aux étudiants ou stagiaires de produire un texte accessible à des élèves de cycle 3 (Beck & Schwer, 2023). C'est une belle entrée pour travailler le français et les mathématiques via l'histoire.

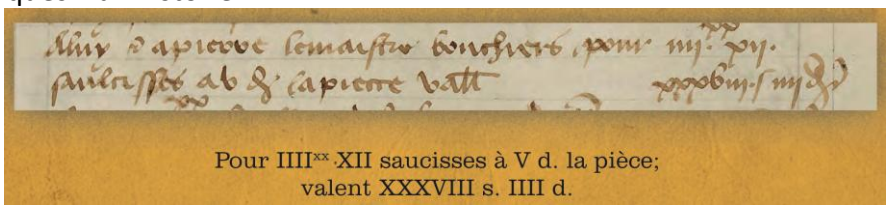


Figure 3. Exemple d'extrait et sa traduction

- De 25 fiches-exercices (en cinq exemplaires physique). Chaque fiche-exercice propose au recto une image médiévale en rapport avec le thème historique et au verso une ou plusieurs questions mathématiques, rédigées en français contemporain avec chiffres indo-arabes et expressions des unités de mesure en toute lettre. Ces questions renvoient à une page – représentée dans une icône - du livre *parchemin* pour permettre d'y répondre.

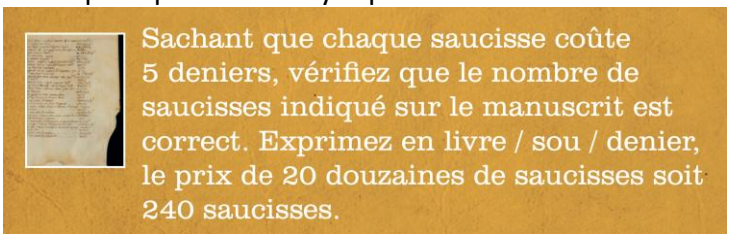


Figure 4. Un exemple de question contenue dans une fiche pédagogique, en rapport avec la figure 3.

La version numérique propose le téléchargement de fiche-exercices vierges pour créer ses propres exercices. Notons que l'écriture des nombres en utilisant les chiffres romains ne sont plus aux programmes du primaire et du collège et qu'en 2021, certains musées ont décider de

substituer ponctuellement l'utilisation des chiffres romains à celle des chiffres indo-arabes dans la notation des siècles et des rois, afin de répondre à une recommandation européenne pour une information « facile à lire et à comprendre ». C'est un point qui a été discuté avec les historiens du projet, qui naturellement, avaient transcrit toutes les expressions de nombres chiffrées en chiffre indo-arabes. Ce sont les mathématiciens qui ont demandé le maintien des chiffres romains[4], comme élément important de l'histoire des mathématiques.

Lors de l'atelier, à partir du titre de la première fiche « Acheter les provisions du banquet organisé en l'honneur des ambassadeurs de la ville de Metz en 1479 », nous sommes revenus sur un point d'histoire de France à partir d'un élément de lexique. En effet, comment se fait-il que la ville de Metz envoie des *ambassadeurs* dans une des villes ligériennes ? Une réponse partielle est donnée dans le *livre parchemin :* en 1479, Louis XI a fait de Tours le cœur administratif du royaume. Il y reçoit donc les ambassadeurs des souverains étrangers. Berceau de la dynastie des carolingiens, l'éclatement de l'empire inclut Metz dans le Saint-Empire-Romain-Germanique. Gouvernée par des évêques exerçant des droits souverains, elle s'émancipe en une république oligarchique en 1234, indépendance qui durera jusqu'au milieu du XVI^{e}. C'est par une recherche documentaire que l'information doit être trouvée, en l'absence d'un animateur compétent sur le sujet…

- D'un guide de l'enseignant (en 2 exemplaires physiques) donnant une description des objectifs pédagogiques de la mallette, une possibilité de mise en œuvre en classe, une vue d'ensemble des exercices (regroupement des exercices suivant les thématiques du programme), une analyse didactique de l'ensemble des fiches-exercices (tâches à réaliser par les élèves et analyse *a priori*) et quelques compléments scientifiques sur l'écriture des nombres en chiffres romains, le fonctionnement d'un abaque et des systèmes monétaires médiévaux parisien et tourangeau.
- De tapis d'abaque (en 25 exemplaires physiques) et leurs jetons (de nombreux sachets physiques) permettant la manipulation en classe pour réaliser les opérations comptables en *deniers*, *sous* et *livres*, système monétaire utilisé par les comptables ligériens.

Une description des activités possibles aussi bien en classe qu'en formation des enseignants a fait l'objet d'une communication dans les actes précédents (Beck & Schwer, 2023).

3 Utilisation de l'abaque dans la classe d'Agnès Gateau

Depuis deux ans, Agnès Gateau a proposé une séance hebdomadaire dans sa classe. Les élèves manifestent beaucoup d'intérêt à manipuler les abaques à l'instar d'autres objets de compte. En cycle 3 de l'école primaire[5], il est facile d'introduire ces outils dans un contexte d'enseignement d'histoire des mathématiques (algorithmes opératoires), d'histoire (Antiquité et Moyen-Âge) ou de géographie (bouliers chinois ou japonais).

Dans un premier temps, il s'agit de comprendre le placement des quantités d'unités qui désignent le nombre : le respect de leur position relative sur l'abaque et le codage par quinaire sont des prérequis à l'activité de calcul.

La classe a choisi de présenter la mallette Cormécouli en tenant un stand lors de la fête de la Science dans la bonne ville de Sens. On y vient de toute l'agglomération dans un espace accueillant des publics scolaires

[4] Des étudiantes du master 1 MEEF PE de Créteil ont essayé de refuser de travailler avec les chiffres romains, en s'appuyant sur ce fait. Rappelons que les programmes sont le minimum attendu, n'interdisent pas d'aller plus loin, surtout si cela aide à la compréhension des concepts à étudier et que les moyens pour y parvenir relèvent de la liberté pédagogique de l'enseignant.

[5] Il s'agit des deux dernières classes de l'école primaire, classes de cours moyen première et seconde année, année 5 et 6 du système anglais, niveau 4 et 5 américain/canadien.

(de la maternelle au lycée) et des visiteurs « libres ». Après avoir renoncé à arborer des huques[6] médiévales (sujet vivement discuté en classe), les élèves ont proposé :

- de transmettre les liens étymologiques entre *bureau* et *bure*, *jeton* et *jeter*, *compte* et *comptoir* ;
- d'initier les visiteurs à la manipulation d'abaque ;
- de proposer la résolution d'exercices sur des fiches.

Il a été décidé de construire un abaque en gravant des lignes sur une planche de bois et de fabriquer des jetons (Figure 5 et Annexe 1). Trois fiches exercices de Cormécouli ont été sélectionnées avec différents degrés de difficulté. Quelques situations simples relevant de l'addition ont été inventées à partir des comptes, les quantités et les prix étant représentés avec des chiffres romains ou arabes (au choix de l'utilisateur) : On achète deux pigeons valant chacun…, des poires au prix de…., une aulne de tissu à … une amende de... Quelle sera la somme à payer ?



Figure 5. Installation de l'abaque et mise en situation pour le visiteur.

Lors de cet événement, les participants ont cherché à utiliser l'abaque et à maîtriser l'usage des échanges avec les jetons. Ils ont aimé transcrire ce compte dans de « fausses monnaies » (les deniers, sous, livres, étaient matérialisés, selon leur valeur, par des disques de diamètres différents et découpés dans des bristols colorés). Peu de visiteurs ont cherché à résoudre les problèmes-fiches en dehors des mini-situations additives inventées. Quelques élèves de la classe se sont sentis frustrés : ils étaient désireux d'en découdre en matière de raisonnement à proposer aux collégiens… Les commentaires exprimés par beaucoup d'adultes font état d'un questionnement du type : « Mais pourquoi est-ce qu'on n'apprend pas l'addition comme cela, c'est tellement plus simple ! »

Il était aisé de mesurer l'aisance de nos élèves utilisateurs-réguliers de Cormécouli par rapport aux visiteurs-novices. Ce constat rend compte de l'enjeu d'une fréquentation régulière avec le matériel. Il montre aussi la nécessité, dans le contrat didactique, d'appréhender la mallette comme une sorte de serrure temporelle dans laquelle le plaisir de côtoyer des époques passées stimule la recherche et la compréhension mathématique.

[6] *« Après chaud temps vient vent de bise, après huques robe de frise » Charles d'Orléans.* Il s'agit d'une sorte de cape avec capuche, portée par les deux sexes.

4 Des mallettes de Corpus Médiéval et de Comptabilités locales

Le terme *cormécouli* est construit à partir du sigle CMCUL, issu du titre *Corpus Médiéval de Comptabilités Urbaines Ligériennes*. La première partie de l'exposé sur le manuscrit d'une comptabilité d'un vignoble de l'abbaye de Cîteaux, dans la région de Dijon, avait comme but pédagogique de montrer que l'on pouvait maintenant disposer de comptabilités, numérisées ou non, urbaines ou non, dans la plupart des régions. Il existe aussi des sources non numérisées dans des bibliothèques, aux archives municipales, départementales, régionales ou nationales. On peut également trouver de quoi travailler les nombres et les mesures dans d'autres types de documents d'époque, comme des actes notariés. Ce projet de mallette cormécouli constitue donc – en plus de la qualité du produit physique, que plusieurs IREM ont acquises pour mettre à disposition des classes et des animations scientifiques – un modèle à décliner, autant que faire se peut, localement. C'est ce sur quoi, certains IREM, comme celui de Dijon ou de Paris Nord (académie de Créteil) sont en train de travailler.

II - PRINCIPE DES ABAQUES A JETONS

L'usage de nombres indo-arabes a mis du temps à s'imposer, plus encore au nord qu'au sud, mais même connu, il n'a pas changé les habitudes de calcul du quotidien.

Au Moyen Âge, trois types de calcul arithmétique, et donc trois types de méthodes ont coexisté : avec les *doigts* pour le calcul digital, les *jetons* pour le calcul avec les abaques et la *plume* pour le calcul « indien ». Abaques et calcul digital firent partie de l'enseignement du calcul arithmétique le plus élémentaire.

Le terme *abaque* viendrait de l'hébreu *abaq* signifiant *poussière*. Il s'agirait d'un cadre dessiné sur le sable ou sur un sol meuble, remplacé ensuite par un une table, une planche ou du tissu, sur lequel sont dessinés des lignes à intervalle régulier, comme les portées musicales, verticalement – dans l'Antiquité - puis horizontalement, chacune représentant un rang de l'échelle de numération ou de grandeurs pertinents. Signalons tout de suite que les abaques n'ont été utilisés que pour le calcul en nombres entiers.

1 Description

La ligne horizontale la plus basse représente le rang des unités. Chaque jeton placé sur cette ligne vaut un. Pour les autres lignes, chacune représente le rang immédiatement supérieur à la ligne qui la précède. Un jeton placé sur une ligne vaut dix fois plus qu'un jeton placé sur la ligne qui la précède, et dix fois moins qu'un jeton placé sur la ligne qui lui succède. Il peut y avoir autant de lignes que nécessaire, les exemples de représentation vont régulièrement jusqu'à 20 lignes, soit le rang des dix-trillion (10^{19}), c'est-à-dire que la représentation des grands nombres est largement couverte d'emblée. Les lignes peuvent parfois être simplement représentée par un jeton chacune. La ligne horizontale implicite est celle qui passe par le centre du jeton.

Dans le système de numération décimale, pour permettre un repérage rapide du rang de chaque ligne si elles ne sont pas étiquetées, celles associées au rang 1000 et à ses puissances sont marquées d'une étoile (Figure 6). De même, pour permettre une lecture immédiate du nombre de jetons, il est d'usage, pour représenter les données initiales et finales, de ne pas mettre plus de quatre jetons par ligne, en utilisant la bande interligne définie avec la ligne juste au-dessus pour y mettre un jeton. Ce jeton vaut cinq jetons de sa ligne inférieure, c'est-à-dire, **la moitié de la valeur d'un jeton de la ligne supérieure**. En revanche, pendant le calcul, la commodité des manipulations l'emporte. On remarquera Figure 6 image de droite, plusieurs décalages, l'un entre les noms de rangs et les rangs, l'autre entre ligne et interligne, erreur due certainement au copiste, qui a dû partir du haut pour écrire les noms de rangs. Il y a neuf jetons dessinés sur une ligne, pour signifier qu'il n'y a que neuf chiffres significatifs par rang – le zéro étant représenté par l'absence de jeton. Ces enluminures nécessitent aussi un décodage pour être compris, car Adam représente dans une seule image, plusieurs niveaux d'explications. Ce qui n'est pas le cas chez Recorde. On trouve également, ce qui est fréquent dans les manuscrits, des erreurs de copistes.

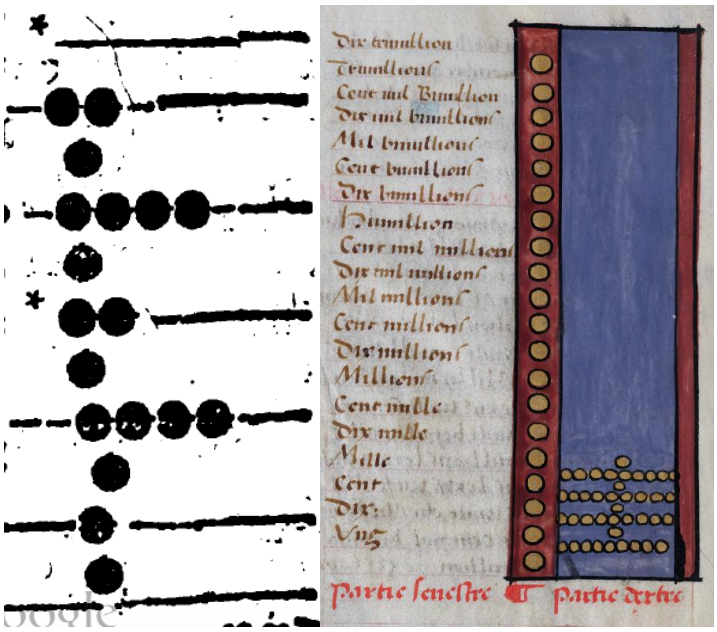


Figure 6. À gauche, représentation de 297 965 par Robert Recorde[7] ; à droite représentation du système de numération décimale par Johan Adam, avec représentation du nombre maximum de jetons par ligne sans la règle de subitisation et sur l'interligne si on applique la règle de subitisation.

Néanmoins, l'enluminure d'Adam nous permet de discuter du problème d'apprentissage et d'enseignement des grands nombres (cf. par exemple Tempier (2018)) en utilisant des abaques à jetons, avec étiquetage des rangs par les mots-nombres correspondants. On peut ajouter « ** » sur les rangs des millions et ses puissances, « * » sur des rangs de mille et de ses puissances non déjà marqués afin de mieux mettre en lumière (i) la correspondance entre l'expression verbale du nombre et sa représentation sur l'abaque et (ii) le fait qu'il suffit de comprendre les différents codages des nombres de un à mille et l'échelle des millions. On remarquera en effet qu'Adam utilise bien l'échelle longue, mais que la série des milliards n'apparait pas – milliard n'apparaissant qu'au XVI[e] siècle. C'est un supplétif à mille-millions/billions/trillions/… Ce n'est pas très compliqué d'introduire la série des milliards dans un second temps.

Des lignes verticales peuvent être ajoutées pour permettre d'introduire des sous-unités ou pour garder certains calculs intermédiaires. Par exemple, l'abaque de la mallette présente à droite de la ligne verticale l'échelle décimale pour représenter les livres monétaires, et à gauche pour représenter les sous-unités sous et deniers.

Le passage de la représentation par les jetons vers la représentation chiffrée indo-arabes comporte

(i) une composante ordinale : l'ordre de haut en bas des lignes correspond à l'ordre de gauche à droite des positions des rangs, du plus grand au plus petit ; celui de bas en haut à celui de droite à gauche des positions de rangs du plus petit au plus grand et

(ii) une composante cardinale : quel que soit le rang, on applique exactement la même méthode. Par exemple, dans l'utilisation systématique du jeton intermédiaire :

- s'il y a un jeton intermédiaire on ajoute à cinq le nombre de jetons de la ligne (pas plus de 4) ;
- s'il n'y a pas de jeton intermédiaire mais au moins un jeton sur la ligne, on l'écrit (pas plus de 9) ;
- s'il n'y a de jeton ni sur la ligne ni intermédiaire on écrit 0.

[7] extrait de *The Grounde of Artes*, publié en 1579 par Robert Recorde, le traité le plus pédagogique que nous avons lu, même écrit en vieil anglais !

Pour le passage inverse, il suffit de remplacer « jeton intermédiaire » par 5. Une réflexion sur l'intérêt du zéro positionnel s'insère naturellement dans cette conversion.

On voit que l'utilisation du jeton intermédiaire développe le travail de décomposition des nombres supérieurs à 5 avec 5 comme terme le plus grand et les compétences en calcul mental.

2 Représentation d'une valeur dans l'échelle des monnaies de compte

Les pièces de monnaies étant composées de métaux, leur valeur réelle varie en fonction du poids et du cours des métaux. Pour établir des comptes, comme pour tout système d'unités de mesure, on utilisait une unité principale est des sous-unités constituant une échelle non décimale, comme tous les systèmes de mesure des grandeurs. La mallette utilise la *livre parisis* (l. p.) ou *livre tournois* (l. t.) comme unité principale, et comme sous-unité le *sou* (s.) le denier (d.) et l'*obole* (ob). L'échelle est la suivante, indépendamment de l'origine parisienne ou tourangelle : **1 l. = 20 s. ; 1 s. = 12 d ; 1 d= 2 ob.**

La disposition des jetons peut varier d'un abaque à l'autre. Figure 7, nous montrons trois exemples différents. L'abaque de la mallette (Figure 2) place les livres à droite de la ligne verticale, les deniers sur la ligne inférieure de gauche et les sous sur la ligne supérieure. Les oboles ne sont pas figurées, bien que présentes dans les manuscrits et exercices. Ce n'est pas un oubli, puisque les interlignes sont utilisées.

Figure 7 gauche, partie droite de l'abaque, il y a trois jetons sur la ligne inférieure et un intermédiaire et un jeton sur la ligne des dizaines soit 18 livres. Sur la partie gauche de l'abaque, sur la ligne inférieure sont les deniers. C'est là que le choix de l'explication de la valeur du jeton interligne prend toute sa valeur. Pour le système décimal, dans lequel le rapport entre les valeurs des jetons d'une ligne à l'autre est de 10 dans le sens croissant, le jeton interligne vaut cinq jetons de la ligne inférieure ou un demi-jeton de la ligne supérieure. Pour le rapport sou/denier, qui est de 12, le jeton interligne vaut six deniers, soit la moitié d'un sou. Au-dessus de la ligne des sous, l'on voit deux jetons placés verticalement. Le rapport livre/sou est de 20. La moitié vaut 10, trop grand pour être subitisé. Il faut donc une seconde division en deux pour être lue facilement. Le jeton du haut vaut une demi-livre ou dix sous, le jeton intermédiaire un quart de livre ou cinq sous. La lecture du compte est donc 18 l. 18 s. et 8 d. Cet exemple permet de constater que 8 se représente sur l'abaque de différentes façons selon qu'il s'agit de livres ou de deniers.

Pour les deux dispositions données par Trenchant, on constate – la disposition D s'appuie sur la description que l'on fait de C : au milieu de chaque ligne horizontale, est dessiné un jeton contenant l'initiale de son rang : la ligne du bas correspond au denier, celle au-dessus au sou, ensuite ce sont les livres qui sont encodées suivant le système décimal. Sont représentés les unités, dizaines, centaines et milliers. Une ligne verticale (appelée potence) les unit. C'est l'utilisation des interlignes et des parties droites et gauches des lignes horizontales qui varie entre C et D. Pour C, les interlignes côté droit sont utilisés par le jeton valant la moitié de ceux de la ligne du dessus. Seule la partie gauche de la ligne des sous est utilisée pour le jeton représentant la deuxième division des livres. Pour D, le rôle des parties gauches et des interlignes sont inversés. Les deux parties représentent la même somme : 3 647l 18 s 9d.

Dans les trois cas, c'est bien la règle de la moitié de la valeur du rang supérieure qui est appliquée partout. C'est un invariant, c'est la règle mathématique qu'il convient alors d'énoncer pour permettre aux élèves de mieux voyager d'un système à l'autre et de comprendre ce qui fait la puissance et la beauté des mathématiques ! Une application immédiate de ce principe est de questionner sur le positionnement des oboles ? La réponse est toujours immédiate : en-dessous de la ligne des deniers !

Nous n'avons plus l'habitude de changer de système pour représenter une grandeur. La plupart des étudiants et stagiaires se trompent dans l'écriture chiffrée ou orale des deniers en disant un denier de moins.

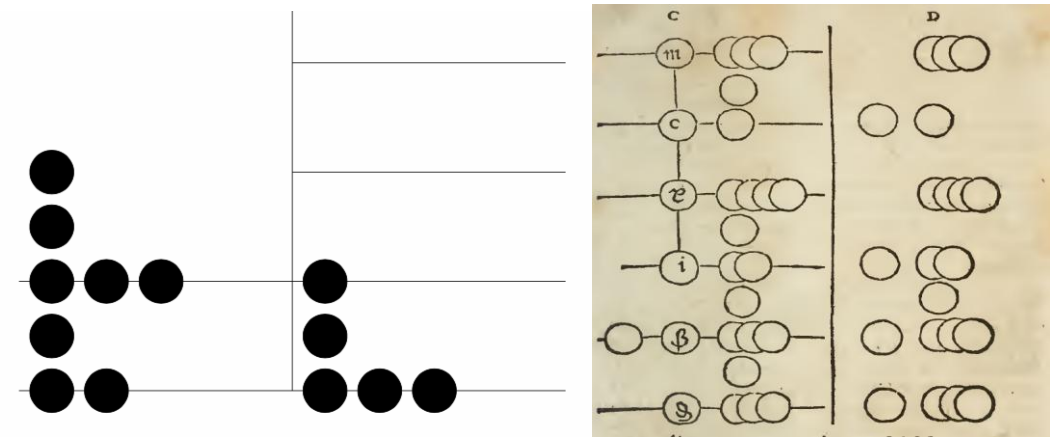


Figure 7. Différents types d'abaques de compte monétaire. À gauche, un exemple de l'abaque de la mallette. À droite, deux exemples de positionnement des jetons du traité de Trenchant

3 Comparaison des nombres et des grandeurs

L'une des activités que l'on fait régulièrement concernant la représentation des nombres, c'est de décrire les méthodes permettant de comparer deux nombres. Nous n'avons trouvé dans les arithmétiques aucune trace de ce problème.

Néanmoins, il est utile de s'intéresser à ce problème si l'on veut pratiquer l'usage de l'abaque dès les petites classes. Le fait de placer les rangs selon la verticale permet de visualiser mieux les ordres de grandeurs. Un autre intérêt de cette activité est de donner une raison d'être aux expressions normées, ici les expressions réduites par l'usage du jeton dans l'interligne. Ces expressions, fondées sur les deux règles (R1) et (R2) permettent de trouver l'égalité ou le plus grand des deux par un parcours visuel top-down soit de façon kinesthésique par utilisation des correspondances biunivoques – bijectives – en enlevant les couples de jetons placés exactement dans la même position.

(R1) moins de la moitié du rapport entre deux rangs successifs (soit 5 pour un rapport décimal ou 6 pour un rapport duodécimal) pour les jetons sur les lignes,

(R2) au plus 1 pour les interlignes

4 Opérations arithmétiques

Dans les traités d'arithmétique, comme celui de Johan Adam, six opérations arithmétiques sont présentées dans l'ordre suivant : addition, soustraction, médiation, duplication, multiplication et division, tout en précisant bien que médiation et duplication sont des cas particuliers de la division et de la multiplication. Ces dernières opérations étant très difficiles à acquérir, contrairement à l'addition et à la soustraction, notamment grâce au support de l'abaque, on peut se limiter pour les usages du quotidien à dominer la médiation - qui est la division par deux - et la duplication qui est la multiplication par deux.

Rappelons que pour les anciens Égyptiens, toute multiplication était réalisée par une succession de duplication d'un des termes et médiation de l'autre s'il était pair ou de son prédécesseur, puis par une addition des valeurs obtenues par duplication correspondant aux médiations des prédécesseurs. De même une division ne nécessitait que de maîtriser ces opérations.

Notons également que la définition commune de la valeur des jetons interlignes pour des rapports pairs entre une ligne et celle qui la précède est la médiation de ce rapport : 5 pour le rapport décimal, 6 pour le rapport duodécimal – passage des sous aux deniers -, 10 puis 5 pour le rapport vigésimal – passage des livres aux deniers. Notons aussi qu'au Moyen Âge, les opérations arithmétiques s'enseignaient déjà par paire d'opérations inverses[8], avec vérification d'une opération par son inverse. Nous avons également

[8] Inverse au sens d'inverser la procédure pour revenir au départ !

discuté de la pertinence de travailler explicitement sur médiation/duplication entre addition/soustraction et multiplication/division.

4.1 Représentation de l'addition et de la soustraction

Selon que l'abaque est prévu pour permettre la représentation de plusieurs nombres ou d'un seul, les difficultés sont différentes. Avec trois espaces, on peut – si l'on a assez de jetons - conserver les données aux côtés du résultat. Les vérifications sont faciles, mais on n'a pas le plaisir de faire *glisser* les jetons. Avec deux espaces, on ne peut conserver qu'une seule donnée. Un seul espace ne laisse en fin de calcul que le résultat. La majorité des abaques n'ont qu'un ou deux espaces. Nous discutons de l'abaque à deux espaces qui permet de discuter du choix de l'ordre de réalisation du calcul, puis de l'abaque à un espace qui est celui de l'abaque Cormécouli, qui justifie la présence de plusieurs personnes autour de l'abaque.

Pour chaque type d'abaque, on peut procéder en deux temps. D'abord on manipule les jetons alignés, puis on applique les règles de réduction pour lire plus facilement le résultat.

4.2 Addition de deux nombres

Le type d'abaque à deux espaces permet de poser les deux premiers termes de l'addition, puis de faire glisser les jetons d'un des termes dans l'espace de l'autre pour obtenir le résultat. Bien sûr, même si Johan Adam ne simplifie pas systématiquement le résultat, il apprend à procéder du bas vers le haut, c'est-à-dire dans l'ordre croissant des rangs. C'est ce que la plupart des personnes font naturellement, sans pouvoir donner une autre raison que « c'est comme cela qu'on nous a appris » ni s'interroger sur le fait que l'on pourrait procéder dans tout ordre aléatoire. Le plus rapide serait de pouvoir le faire simultanément sur toutes les lignes et interlignes, ce qui est possible à plusieurs. De même, on peut faire les réductions dans l'ordre que l'on veut. Un travail sur le sujet en Master MEEF a permis de mettre en évidence le choix des exemples pour pouvoir comprendre que la réponse relève d'un argument de complexité des algorithmes, à savoir, minimiser le nombre de réductions à faire, compte-tenu des retenues. Ce n'est donc pas un ordre conventionnel mais un ordre pratique ! La même question aurait pu apparaitre dans le calcul à la plume – calcul posé. Il nous semple vraiment important dans la formation des enseignants de bien distinguer ce qui relève de la convention et ce qui relève d'une propriété et de les inciter à retransmettre ces informations aux élèves et aux étudiants.

Ce type d'abaque à un unique espace nécessite de poser directement les jetons du second nombre argument à la suite des jetons du premier nombre sont plus propices aux erreurs. C'est pourquoi, les activités de la mallette proposent une mise en situation historique vivante par la mise en équipe des élèves afin de reconstituer la façon dont se déroulaient les opérations de compte au Moyen Âge : « *Des personnes étaient désignées par le Roi pour vérifier les comptes, vous êtes désignés et donc à vous de vérifier les comptes*. » En effet, le calculateur n'est pas seul, une personne lit les nombres, une autre les dispose sur l'abaque pour faire les calculs et une troisième (voire aussi un quatrième) vérifiaient le déroulé des calculs, enfin le scribe reportait les données et résultats sur le livre de compte. En effet, l'exécution des calculs n'en garde pas la trace, imposant une vérification pas à pas pour éviter les erreurs et devoir reprendre tout le calcul. On peut faire l'analogie avec les équipes de dépouillements dans les bureaux des élections.

4.3 Soustraction de deux nombres

La soustraction sur un abaque consiste à poser les jetons du nombre à diminuer, à essayer de reconnaitre dans cette disposition des jetons une « extension » de la disposition des jetons pour le nombre à soustraire.

Ce n'est pas toujours le cas. C'est possible pour 364 – 214, mais pas pour 364 - 224.

100____ooo

o On reconnait bien 214 (en rouge) dans la représentation de 364. Il reste donc 150

10------o

1----oooo

En revanche, je n'ai pas oo sur la ligne des dizaines pour exprimer 224. Je dois donc transformer le o intermédiaire en ooooo sur la ligne D, qui contient alors 6 o

C----ooo

D---ooooоо

U---oooo

Il apparait donc que l'expression conventionnelle n'est pas nécessairement la meilleure écriture pour soustraire.

Pour soustraire, on peut, si l'on a deux espaces, procéder en deux temps, éliminer ligne à ligne tout ce qui est possible, puis procéder aux extensions, comme par exemple pour résoudre 364 – 194

100---ooo -------|-----o il s'agit donc maintenant 100—oo-----| ---- ou 100 –o---|------

o | o o |

10-------o ------| ---oooo de travailler sur 10 ----------| -ooo 10-ooooo|-ooo

1—oooo------|---oooo 1 ----------| ------- 1 --------- | -------

Il est important de noter que celui qui manipule les jetons, même avec dextérité, peut ne pas être en mesure d'expliquer les décompositions qu'il effectue au niveau du nombre. Travailler en équipe de compétences variées permet d'aider à la compréhension des algorithmes efficaces pour l'abaque d'une part et ceux appris à la plume d'autre part, de les comparer et d'expliciter ce qui se passe au niveau du nombre.

4.4 Médiation et duplication

La médiation consiste à trouver la moitié d'un nombre. À chaque fois que sur une ligne il y a un nombre pair de jetons, on en élimine un sur deux. S'il y a un nombre impair, on le passe sur l'interligne qui le précède – dans les systèmes de rapport pair entre les lignes, évidemment. S'il s'agit d'un jeton unité, la question se pose de ce que l'on fait, ou pas, car la plupart des personnes qui se sont exercées sur des nombres assez grands, nécessitant plusieurs alignements impairs de jetons, poseront tout naturellement le jeton sous la ligne des unités, ou dans les sous-unités des grandeurs. C'est souvent le questionnement du formateur qui permettra revenir à l'interprétation.

Pour les abaques comptables, une demi-livre est représentable du côté des sous, un demi-sou se met entre sou et denier, un demi-denier sous la ligne des deniers, et il existe effectivement une unité associée, moitié du denier, c'est l'obole. On reste alors dans les entiers.

La duplication consiste à remplacer chaque jeton par deux jetons. Cela peut alors nécessiter des réductions.

Médiation et réduction, surtout réitérées, peuvent naturellement conduire à ajouter des lignes supplémentaires en-dessous et au-dessus de celles existantes, sans savoir les nommer, simplement en connaissant les rapports entre elles. Nous n'avons pas eu le temps d'approfondir cet apport de l'abaque, mais c'est une entrée royale vers les grands nombres et les nombres fractionnaires et décimaux.

4.5 Multiplication et division

Ces deux opérations sont soi-disant très compliquées à réaliser sur un abaque. Nous avons contesté ce point de vue rapidement après les activités. Nous expliquons ici pourquoi. Comme pour la duplication, multiplier un nombre n par un nombre p, c'est simplement faire de la réécriture. Il s'agit de réécrire le

multiplicateur à la place de chacun des jetons – cela dans n'importe quel ordre ! - , puis si besoin de procéder à des réductions.

Pour la division, il faut retrouver les occurrences disjointes du « dessin » du diviseur indépendamment de la ligne de base, et le substituer à un seul jeton sur cette ligne. S'il reste des jetons, il faut essayer par des expansions de faire apparaitre d'autres occurrences du « dessin » du diviseur, jusqu'à ce que les jetons restant représentent un nombre plus petit que le diviseur ! C'est une animation de l'algorithme d'Euclide.

Johan Adam illustre très bien ses deux opérations (cf Annexe 2).

Au-delà de l'intérêt du travail mathématique pour la compréhension des systèmes de numération de position et du lien fort qui existe entre support de calcul et algorithmes associés, le travail sur les abaques permet également de développer l'esprit de coopération pour produire de bons résultats et, dans un cadre ludique, de compétition entre équipe, qui permet de développer des techniques de calcul mental par exemple pour aller plus vite.

Parmi les étudiants du master MEEF premier degré, ce ne sont pas toujours les licenciés en mathématiques ou en informatique qui se sentent le plus à l'aise avec l'abaque, dès qu'on les force à quitter leur zone de confort, donnée par la connaissance des algorithmes appris.

III - ACTIVITÉ PROPOSÉE

Les participants étaient regroupés par 4, avec deux abaques et une bonne poignée de jetons. Nous avons proposé aux participants de travailler sur le problème suivant, dérivé d'un des items de la liste des achats du banquet présenté Figure 3. La demande était :

> *A l'aide de l'abaque donc sans papier, trouver le nombre de saucisses à V deniers/pièce, sachant que la dépense avait été de XXXVIII sous IIII deniers.*

Chaque groupe commence à placer les jetons sur l'abaque. Beaucoup placent trois jetons à la place des dizaines de sous, sans réduire en livre. La procédure consistant à tout traduire en *deniers* pour ensuite passer en décimal et utiliser le côté *livres* pour compter les saucisses est proposée, c'est fastidieux et plusieurs erreurs de calcul sont faites à cause du jeton interligne de valeur 6 entre *sou* et *deniers.* Il apparait alors le besoin de réfléchir à des stratégies plus efficaces.

Une procédure proposée consiste à traduire successivement 1, 5 et 10 *sous* en *saucisses* et *deniers* en utilisant le calcul mental, puis à traduire ces équivalences en geste sur l'abaque, selon un tableau de proportionnalité (et conversion). Les deniers accumulés sur la ligne (et en-dessous) sont ensuite convertis en saucisses.

Une procédure experte, reposant sur une connaissance intime du système d'unités monétaires consiste à utiliser la commutativité pour calculer en saucisses 5 sous et 5 livres : 5 sous valent à 5 fois 12 deniers ou de façon équivalentes 12 fois 5 deniers, soit 12 saucisses et de même 10 sous valent 24 saucisses et 1 livre vaut 4 fois 5 sous soit 48 saucisses. Il nous faut aussi utiliser l'équivalence d'un sou, et constater que les 6 deniers générés par les 3 sous complètent bien les 4 déjà posés pour faire un nombre entier de saucisses.

Mise en commun

Pour une première manipulation de l'abaque, le problème est apparu assez difficile, et les manipulations, « naturelles » pour des élèves, fastidieuses. On s'interroge alors sur la première séance de présentation d'un abaque auprès des élèves pour aider les élèves à bien maîtriser l'outil.

Bien évidemment, la première séance doit être consacrée à travailler du côté de la numération décimale, comment représenter les nombres et les comparer, à partir des expressions orales, chiffrées indo-arabes, puis si l'on peut avec les chiffres romains. L'énigme proposée correspond à une activité de fin d'année.

C'est pour éviter les manipulations fastidieuses que des méthodes plus expertes sont apparues. Il est nécessaire de faire sortir les étudiants et les élèves de leurs procédures habituelles, pour les motiver à réfléchir et rechercher ou demander des méthodes expertes.

IV - CONCLUSION

L'abaque à jetons offre de multiples possibilités d'exploitation, en classe comme en formation des enseignants. C'est un support idéal pour travailler toute l'arithmétique et les calculs sur les grandeurs dans un contexte historique qui peut permettre de découvrir une période qui s'étend du Moyen Âge jusqu'au bord du XIX^{e} siècle, tout autant que l'histoire locale, ou encore des traités d'arithmétique avec les jetons et qui peut donner des idées de progression comme médiation et duplication avant d'aborder multiplication et division. Ce sont également des mines d'exercices pour développer les compétences en calcul mental. Comme l'a pratiqué Agnès Gateau dans sa classe, c'est aussi prétexte à travailler l'histoire des mots, la géographie, l'art et le travail manuel, puisque la classe a construit son abaque et ses propres jetons.

Un tel projet pluridisciplinaire, insufflé par l'utilisation de la mallette Cormécouli, décliné localement, favorise la motivation des élèves à résoudre des problèmes, d'autant plus que le regroupement par quatre, attribuant des rôles différents à chacun, permet à chacun de trouver sa place et de développer toutes les compétences attendues en mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

V - REMERCIEMENTS

Nous remercions grandement nos collègues Thomas Garcia (INSPE Aix-en-Provence), Edith Momont-Rakotomanana (INSPE de Lille-Douai) et Ingrid Turban (Conseillère pédagogique, Nîmes) pour leur prise de notes pendant l'atelier qui ont largement enrichi ce texte.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Beck V. & Schwer S. (2023) Numérations, calculs et grandeurs : utilisation de l'abaque pour rendre visible les concepts communs. Dans *Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves. Accompagner les professeurs.* Actes du 50e Colloque COPIRELEM (257-276). Paris : ARPEME.

Claustre, J. (2021) *Faire ses comptes au Moyen Âge*. Les mémoires de besogne de Colin de Lormoye. Paris : Les Belles Lettres.

Daval N., Tournès D., Tiennot L., Guillotin M.-J., Dugain C., Trémoulu M., Grondin A., Grondin S. (2018) De l'abaque à jetons au calcul posé. Dans Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3. De l'abaque à jetons au calcul posé. Dans Moyon M., Tournès D. *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3.* 38-63. PARIS :ARPEME, Ressources et formation.

Boisseuil D. (2019) CorMéCoULi, https://cormecouli.univ-tours.fr/ consulté le 13 juillet 2024

Centre Sciences (2023), https://www.centre-sciences.org/ressources/cormecouli-corpus-medieval-des-comptabilites-urbaines-ligeriennes consulté le 13 juillet 2024

« Comptes des dépenses faites pour le vignoble du Clos de Vougeot en 1435 et 1436 », ms 233, Bibliothèque municipale de Dijon.

Tempier F. (2018) Des pistes pour enseigner les grands nombres au cycle 3. *Petit x*, IREM Grenoble. 41-66.

VII - ANNEXES

1 Les monnaies de l'école



Figure 8 Avers : monogramme de l'école, Revers : double tamponnage d'un motif pour donner l'impression « croix » (gravures réalisées par les élèves dans le cadre d'un projet annuel Imprimerie).

2 Multiplication illustrée par Johann Adam

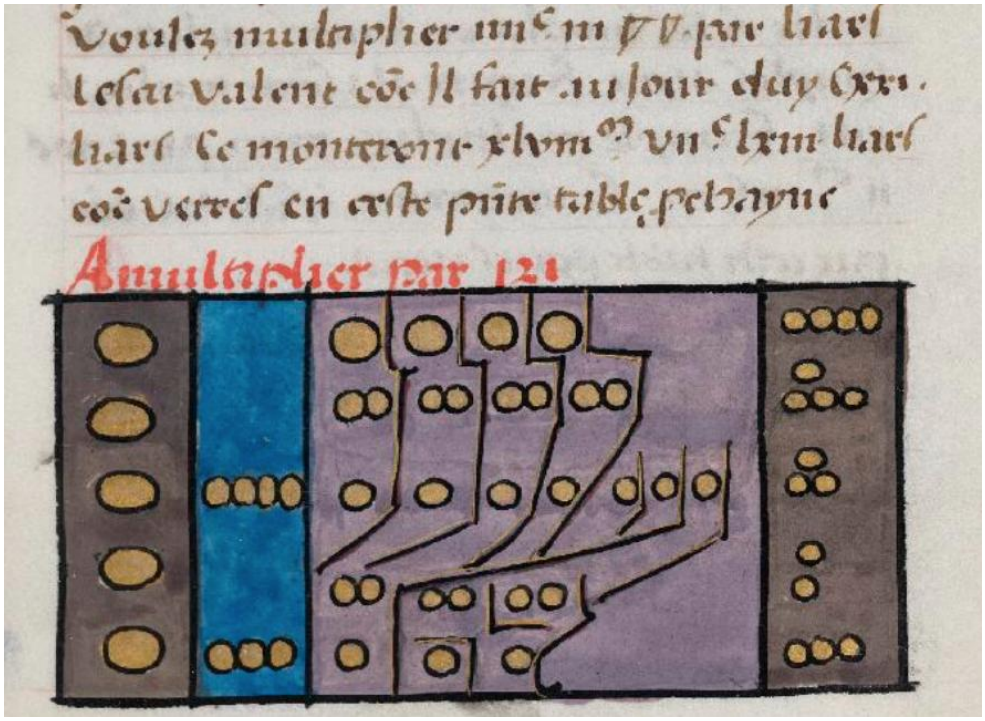


Figure 9. Multiplication de 403 par 121 (Folio 16)

On voit clairement sur la figure 9 que chaque jeton placé dans la partie bleue où est représenté 403 est remplacé par la représentation de 121, en considérant le rang du jeton substitué comme celui de l'unité.

Le principe est très simple. Il suffit donc de remplacer chacun des 7 jetons de 403 par les 4 jetons de 121 en respectant la même configuration à une translation près vers la gauche des jetons. On constate qu'Adam reproduit en fait la façon usuelle de calculer à la plume, car il commence par les jetons des rangs les plus hauts, comme cela se faisait à l'époque.

Pour la division, de 48 763 par 121, on peut, sur la représentation réduite, éliminer un jeton sur la 5^{e} ligne (celle du haut), deux sur la 4^{e} ligne et 1 sur la 3^{e} ligne de l'espace de droite représentant le dividende et mettre un jeton sur la 3^{e} ligne du résultat (partie bleue supposée vide). Ensuite, il faut revenir à la forme non réduite (comme pour la soustraction) pour continuer à retrouver ce motif trois fois entre les 3^{e} et 5^{e} lignes, que l'on élimine au profit de 3 nouveaux jetons sur la 3^{e} ligne bleue et encore ce motif 3 fois entre les 1^{e} et 3^{e} lignes que l'on supprime au profit de 3 jetons sur la 1^{e} ligne. On retrouve bien 403 !

DONNER DU SENS À LA MESURE DE GRANDEURS AU CYCLE 3 : ANALYSE DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE ET DE FORMATION

Pascal SIRIEIX
Conseiller pédagogique départemental 91
Pascal.sirieix@ac-versailles.fr

Résumé
Dans le document Éduscol « grandeurs et mesures au cycle 3 », il est précisé que l'enseignement des grandeurs et leurs mesures doit permettre aux élèves de comprendre le sens des mesures de grandeurs qu'ils rencontrent à l'école (MEN[1], 2016). C'est l'objectif visé par les trois situations d'apprentissage, présentées dans cet atelier, qui proposent de revisiter la notion d'unité de mesure en cycle 3 et de construire les formules de calcul de périmètre, d'aire et de volume.
Ces situations, qui mobilisent la grandeur « longueur », utilisent du matériel courant dans les classes : des cubes (de matière et de dimensions variées) et des boites (de dimensions variées ou dont deux des dimensions sont représentées).
L'intervenant propose d'abord une revue de littérature permettant d'identifier les concepts et relations en jeu dans la construction de la notion d'unité de longueur. Puis, pour chacune des grandeurs explorées (périmètre, aire et volume intérieur d'une boite), les participants réalisent une analyse *a priori* des situations en tenant compte du matériel autorisé (procédures et savoirs en jeu, notamment ceux relatifs à la notion d'unité).
L'intervenant présente alors quelques observations réalisées lorsqu'il a fait vivre ces situations en classes de cycle 3.
Les échanges relevés lors de l'atelier visent à évaluer l'intérêt et les limites des situations proposées et d'envisager des adaptations pour la classe et pour la formation.

I - INTRODUCTION

Dans cette introduction je reviendrai sur le contexte général relatif à la mise en œuvre des situations présentées dans cet atelier.

1 Des formations d'enseignants

La situation « périmètre » présentée dans cet atelier a été proposée en formation académique des Référents Mathématiques de Circonscription (RMC)[2]. Il leur était demandé d'en faire une analyse *a priori* se limitant, faute de temps, à l'identification des procédures possibles des élèves et les savoirs (concepts et relations) liés à la notion d'unité de longueur.

La situation « volume » présentée dans cet atelier a été proposée en formation initiale (M2)[3] et lors de formations départementales des RMC au cours desquelles il s'agissait de leur présenter un outil de formation clé en main qu'ils pouvaient ensuite utiliser pour mener des animations pédagogiques dans le cadre de la formation continue des Professeurs des Ecoles (PE). Durant ces formations, les participants

[1] MEN : Ministère de l'Éducation Nationale

[2] RMC : Référent Mathématique de Circonscription : dans notre académie, ce sont des enseignants formateurs missionnés pour animer des formations appelées « constellations » inspirées des lessons studies

[3] M2 : Master MEEF 2ème année

passaient à différents ateliers illustrant les différentes étapes d'une progression sur les contenances et les volumes et devaient pour chacun d'eux identifier les compétences visées, les procédures possibles des élèves et les savoirs à institutionnaliser.

2 Un enseignement face à des élèves

2.1 Les classes concernées par mes interventions

Pour savoir si ces situations proposées en formation d'enseignants étaient adaptées à la classe, j'ai souhaité les tester auprès d'élèves de cycle 3. À cette occasion, j'ai créé la situation « aire » afin qu'on puisse travailler sur les trois grandeurs en lien avec la grandeur « longueur ».

Les trois situations ont donc été testées dans les classes de deux écoles d'une même ville de l'Essonne. Cela concernait :

- 3 classes de CM1 : CE2/CM1 (16 CM1) ; CE1/CM1 (16 CM1) ; CE1/CM1 (17 CM1).
- 2 classes de CM2 : CM2 (25 CM2) ; CE2/CM2 (20 CM2).

Au total 49 élèves de CM1 ont pu vivre les situations « périmètre » et « aire » et 45 élèves de CM2 ont pu vivre les situations « volume ».

2.2 Contexte de mes interventions

Les interventions ont eu lieu dans des classes dont les enseignants étaient accompagnés en constellation[4] par leur RMC. Cette constellation travaillait sur la question : « Comment donner du sens et faire progresser les élèves dans le domaine des grandeurs et mesures ? ».

Compte tenu de la structure des classes (doubles niveaux), les enseignants s'occupaient des élèves de cycle 2 et ne pouvaient pas être réellement observateurs des séances que je menais avec leurs élèves. Ainsi la RMC, présente lors de mes interventions, prenait des notes (traces écrites, photos, films) pour moi et pour débriefer ensuite avec les PE qu'elle accompagnait.

Chaque intervention, auprès d'élèves inconnus, a duré une heure. Ces interventions ponctuelles ne s'inscrivaient pas dans le cadre d'une séquence d'enseignement.

2.3 Lien avec les programmes actuels

Dans le tableau 1 ci-dessous sont listées les connaissances et compétences des programmes relatives aux trois grandeurs citées.

Grandeurs Niveaux	Périmètre	Aire	Volume et contenance
CM1	Pour travailler la notion de longueur. Mesure de périmètre (ficelle ou report d'une unité ou report de longueur sur un segment de droite avec compas). Calcul du périmètre d'un polygone par addition des longueurs.	Comparaison de surfaces. Différenciation aire et périmètre. Mesure de l'aire en faisant appel à une aire de référence. Utilisation d'une unité de référence (réseau de quadrillage ou cm², dm², m²).	Comparaison d'objets selon leur contenance. Mesure de contenance en cL, dL et L + relations. Découverte 1 L est la contenance d'un cube de 10 cm d'arête. Relation entre unités de volume et de contenance.
CM2	Formule de calcul du périmètre du carré et du rectangle *.	Utilisation d'une unité de référence : le cm².	Idem CM1

[4] Constellation : regroupement de plusieurs enseignants encadrés par un RMC pour travailler sur une question qui les préoccupent

6ème	Calcul de périmètres simples ou complexes. Formule de la longueur d'un cercle.	Utilisation des multiples et sous-multiples du m². Formule de calcul de l'aire d'un triangle quelconque et du disque.	Mise en relation unité de volume et de contenance (1L = 1 dm^3, 1000L = 1 m^3). Formule de calcul du volume d'un cube et d'un pavé droit *.

Tableau 1. Lien entre les situations proposées et les connaissances et compétences des programmes du cycle 3

Les compétences et connaissances repérées en rouge sont celles qui sont potentiellement travaillées dans les situations proposées.

Lors de mon expérimentation, les connaissances et compétences repérées par un * ont été abordées avec des élèves du niveau de classe précédent (d'où la flèche).

II - NOTIONS ET RELATIONS EN JEU DANS LA CONSTRUCTION DU CONCEPT D'UNITÉ

L'atelier présenté a un double objectif. Il s'agit tout d'abord d'évaluer l'intérêt et les limites des situations proposées pour travailler la notion d'unité en formation. Il s'agit ensuite d'évaluer les intérêts et les limites d'une adaptation de ces situations pour la classe.

Si, en formation d'enseignants, les situations proposées visaient à faire appréhender la notion d'unité de mesure, cette notion complexe est également à faire construire chez les élèves.

Je souhaite, dans cette partie, définir la notion d'unité de mesure et justifier mon choix de travailler sur sa construction.

1 La notion d'unité de mesure

1.1 Définitions

L'unité de mesure est une valeur de grandeur choisie arbitrairement pour mesurer des grandeurs de même espèce dont on va dénombrer les reports.

L'unité est portée par un objet nommé « étalon ».

Déterminer la mesure, c'est chercher le rapport entre une autre valeur de grandeur de même nature et cette unité. La mesure s'exprime avec un nombre associé à une unité et la valeur d'une grandeur peut être exprimée selon différentes mesures.

1.2 Une notion importante

Mon intention, dans cet atelier, est de proposer un objet (un cube) pour lequel, selon la grandeur travaillée, il faudra considérer des étalons différents (longueur d'une arête, face, cube) comme porteurs de l'unité de mesure. Il s'agit de faire comprendre qu'il n'y a pas d'unité privilégiée pour les grandeurs continues. Tout étalon peut donc être utilisé pour porter l'unité choisie arbitrairement pour mesurer une grandeur donnée.

Cela pourrait être rapproché de ce qu'on peut faire, en numération, lorsqu'on travaille concrètement avec du matériel multibase ou de façon plus abstraite avec les écritures chiffrées. En effet, et en conformité avec les programmes de mathématiques (MENJ[5], 2024), l'élève doit savoir associer différentes représentations d'un même nombre et notamment être capable d'exprimer un nombre à l'aide des unités de numération. L'élève doit alors être capable de prendre en compte soit l'unité, soit la dizaine, soit la centaine… comme unité (de numération) pour exprimer la quantité d'une collection. Une plaque de cent

[5] MENJ : Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse

peut alors être regardée comme une centaine mais aussi comme un groupement de dix barres/dizaines ou comme un groupement de cent unités.

Cette capacité à changer de regard sur un objet, et donc sur l'unité à considérer pour la mesure, est celle que j'ai souhaité travailler dans cet atelier. J'émets l'hypothèse que travailler avec des unités de mesure de grandeur différentes concourt à mieux conceptualiser la notion d'unité et notamment d'unités de numération.

2 Les notions en jeu

C'est en appui sur une revue de littérature que je vais à présent présenter les notions en jeu dans la construction de la notion d'unité de longueur.

2.1 La notion de report de l'unité

Clements et Stephan (2004), cités par Macdonald (2011) montrent que la notion d'itération de l'unité est loin d'être innée chez les élèves qui ne pensent pas instinctivement à reporter un instrument pour mesurer une longueur supérieure à celle que ce dernier peut mesurer.

Selon Kamii (2006), la majorité des élèves de CM1 de son étude ne semblent pas avoir acquis la notion de report d'unité.

Horvath & Lehrer (2000) mais aussi Koehler & Lehrer (1999), cités par Lehrer (2003) montrent que des élèves de CP ou de CE1 peuvent avoir compris qu'on peut reporter un étalon pour déterminer la mesure d'une longueur sans avoir conscience de la procédure à mettre en œuvre. Des reports avec chevauchements ou espaces entre les étalons utilisés peuvent donc être effectués par ces élèves.

Lors d'une expérimentation que j'ai menée en classe en 2019 auprès de 144 élèves du CE1 au CM2, j'ai observé que, lorsqu'ils ont le choix entre deux ou trois réglettes/unités pour donner une estimation de la longueur d'un segment, 79,9% des élèves testés choisissent de reporter mentalement l'unité qui nécessite le moins de reports. J'ai également relevé que lorsqu'on propose aux élèves une réglette/unité plus longue que la longueur d'un segment dont on veut estimer la mesure de sa longueur, 90% des élèves testés rejettent cette réglette/unité qu'ils jugent « trop grande ». Enfin, 18,5% des élèves testés déclarent rejeter une unité quand ils pensent qu'elle ne permettra pas d'obtenir un nombre entier de reports « ça ne va pas tomber juste ! ».

Il sera intéressant de regarder les procédures mises en œuvre par des élèves de CM2 lorsqu'ils doivent reporter réellement une unité.

2.2 La notion d'unité constante

Miller (1984) ou encore Lehrer et al. (1998), cités par Lehrer (2003) constatent que les élèves de CP et de CE1 éprouvent des difficultés à utiliser des unités identiques. Ainsi, lors d'un mesurage, ils peuvent utiliser librement des étalons de tailles différentes et compter chacun comme étant des unités égales pour mesurer une longueur.

Copeland (1979), cité par Boulton-Lewis et al. (1996), explique cette pratique en relevant que les élèves peuvent utiliser des étalons différents afin que le nombre d'étalons reportés tombe pile en coïncidant avec la fin de la longueur du segment à mesurer.

Il sera intéressant de voir si cette difficulté persiste encore chez des élèves de cours moyen.

2.3 La notion d'unité commune puis conventionnelle

L'intérêt d'utiliser une unité commune devrait apparaitre lors des mises en commun à partir du constat que selon l'unité choisie, les élèves n'obtiennent pas la même mesure.

2.4 La notion d'additivité

Hiebert (1984) a montré que, dès le CP, les élèves reconnaissent que la longueur totale d'un objet est la somme des longueurs de ses parties. Par conséquent, les élèves de cours moyen devraient être en mesure de comprendre la notion de périmètre.

3 Les relations en jeu

Il existe également des relations en jeu dans la construction de la notion d'unité de longueur. C'est en appui sur une revue de littérature que je vais à présent présenter ces relations.

3.1 La relation d'équivalence

Rouche (1992) écrit que pour effectuer un mesurage avec une seule baguette disponible, l'enfant doit accepter l'idée qu'une baguette peut être comparée à elle-même, ce qui est matériellement impossible. Pour qu'un enfant puisse concevoir qu'un objet (baguette) puisse être ajouté à lui-même (mis bout à bout), il faut qu'il admette qu'un objet semblable existe. Des tâches de comparaison directe de bandes de papier, de tri de bandes pour regrouper celles ayant une taille identique, de construction d'une bande de même taille qu'une bande donnée… contribuent à construire cette relation d'équivalence.

L'utilisation de cubes de matière et de couleur différentes devrait nous permettre de nous assurer de la maitrise de cette relation d'équivalence pour les élèves de cours moyen.

3.2 La relation inverse ou de proportionnalité inverse

Il existe une relation inverse (ou de proportionnalité inverse) entre la taille de l'unité choisie et le nombre d'unités pour mesurer la grandeur (périmètre, aire ou volume) de cet objet. Plus l'unité choisie est longue (grande, volumineuse) et moins le nombre d'unités nécessaires au mesurage est important. C'est ce qui explique l'intérêt des sous-unités. Il est en effet plus compréhensible de dire qu'un objet mesure 1 mètre plutôt que 1 000 millimètres.

Hiebert (1981 ; 1984) constate que les élèves de CP associent des nombres plus grands avec des objets plus longs (par exemple, on propose 2 baguettes, l'une mesure 1 m et l'autre 2 m. On demande de montrer celle qui mesure 100 cm et celle qui mesure 2 m. Les élèves ont tendance à associer celle de 100 cm à la baguette la plus longue). Pour eux, mesurer, c'est dénombrer et c'est le nombre d'unités comptées qui détermine si un objet est plus long qu'un autre.

Toutefois, Carpenter & Lewis (1976) ou encore Lehrer, Jenkins & Osana (1998), cités par Lehrer (2003) montrent que de nombreux élèves de CP et de CE1 peuvent comprendre qu'un dénombrement effectué avec des unités plus petites donne un nombre plus important qu'un dénombrement effectué avec des unités plus grandes.

Si c'est le cas, des élèves de CM devraient être en mesure de formuler cette relation.

3.3 La relation entre les unités

Lorsqu'on utilise au moins deux unités différentes (par exemple, la mesure de la longueur de l'arête d'un gros cube et la mesure de la longueur de l'arête d'un petit cube) pour effectuer un mesurage, on utilise un système d'unités. Notre système décimal établit les relations qui lient ses unités par un rapport de 10 entre deux unités successives du système.

Dans le cadre des situations proposées, il est possible de juxtaposer, de réagencer les cubes porteurs des unités pour constater la relation qui lie les deux unités mises à disposition. Cela permettra de comparer les mesures obtenues ou de pallier le manque d'unités d'un certain ordre en les substituant par un groupement d'unités d'un ordre inférieur.

III - LA SITUATION PERIMETRE

Pour rappel, cette situation a d'abord été conçue pour, en formation, mettre en évidence ce qui caractérise la notion d'unité. Puis elle a été testée en classe.

1 Présentation de la situation

1.1 La situation

Chaque binôme a une barquette qui contient 10 grands cubes emboitables en plastique rouge de 2 cm d'arête, 10 grands cubes en bois de 2 cm d'arête et 10 petits cubes emboitables en plastique multicolores de 1 cm d'arête. Un rectangle de 16 m x 6 cm est également fourni (cf. Annexe 1).

Il s'agit, l'unité étant la longueur de l'arête d'un cube, de donner la mesure du périmètre du rectangle (qui est présenté comme le tracé du contour d'une boite).

Les élèves doivent noter leur résultat et leur procédure sur une feuille. L'usage d'un double-décimètre est interdit et les dimensions du rectangle et des cubes ne sont pas données.

1.2 La consigne de travail des participants

Il est demandé aux participants de l'atelier :

- de lister des procédures possibles chez des élèves de cycle 3 au regard du matériel proposé ;
- d'identifier les difficultés à anticiper ;
- d'identifier les savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés.

2 L'analyse *a priori*

2.1 Les variables choisies

La consigne de la situation : Il s'agit de déterminer la mesure du périmètre d'une surface plane convexe et polygonale par mesurage (et/ou calcul) à l'aide d'une unité. Le matériel autorisé permet la mise en œuvre de plusieurs procédures (dont certaines favorisent la construction de la formule de calcul du périmètre) mais ne permettent pas l'introduction des unités usuelles.

La compréhension de la notion de périmètre (grandeur dont la mesure correspond à la somme des longueurs des côtés d'un polygone) ainsi que de la notion d'arête (ligne d'intersection de deux surfaces d'un solide) constituent des prérequis.

Le rectangle : C'est un polygone particulier. Il a notamment quatre angles droits qui peuvent constituer un obstacle à la réalisation de la tâche (oubli de dénombrement d'unités dans les angles). Ses dimensions ont été choisies en relation avec celles des cubes. Les mesures de ses longueurs et largeurs peuvent être données par un nombre entier d'unités/longueur d'arête d'un cube.

Les cubes : Utiliser un objet en trois dimensions dont il ne faut prendre en compte que la longueur d'une arête peut constituer un obstacle à la compréhension de ce qu'est l'étalon (l'arête du cube) et l'unité de mesure (la longueur d'une arête du cube).

Les matières et les couleurs donnent l'occasion de tester la compréhension du principe d'abstraction. À noter que les cubes en bois ont été découpés à la main. Leur imperfection peut constituer un obstacle à la construction de la relation d'équivalence.

Les cubes en plastique sont emboitables et ont donc des picots qui, selon leur disposition, pourraient démontrer ou non que les élèves maitrisent la notion d'unité constante.

Les arêtes des grands cubes en plastique ont même longueur que celles des grands cubes en bois. Les arêtes des grands cubes sont deux fois plus longues que celles des petits cubes en plastique (la longueur de 2 arêtes de petits cubes est égale à la longueur d'une arête d'un grand cube). Cette variable peut aider à la compréhension de la relation entre les unités.

Si on prend une seule sorte de cube, le nombre (10) est insuffisant pour « paver » le périmètre du rectangle. Si on considère que tous les grands cubes sont équivalents, le nombre (20) est insuffisant pour « paver » le périmètre extérieur mais suffisant pour paver le périmètre intérieur du rectangle. Si on prend tous les cubes, le nombre (30) est suffisant pour « paver » le périmètre extérieur du rectangle. Il faudra alors mettre en relation les unités pour exprimer la mesure du périmètre dans une unité constante.

2.2 Les procédures possibles

Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées les procédures possibles des élèves dont certaines ont été proposées par les participants à l'atelier et d'autres par les élèves en classe. Il est difficile d'être exhaustif car certaines procédures peuvent se mêler.

Procédures possibles	Difficultés/erreurs possibles	Savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés
Pavage de la surface du rectangle	Il va manquer de cubes.	Confusion entre périmètre et aire.
Juxtaposition de cubes de dimensions différentes	On peut compter pour 1 des unités différentes.	Notion d'unité constante. Système d'unités et relations qui les lient.
Juxtaposition de petits cubes de couleurs différentes	Il va manquer des cubes.	Relation d'équivalence pouvant être validée par une juxtaposition de 2 cubes.
Juxtaposition de gros cubes de matières différentes		Relation d'équivalence pouvant être validée par une juxtaposition de 2 cubes.
Juxtaposition de cubes en plastique sans tenir compte des picots	La mesure est faussée.	Notion d'unité constante.
« Reconstruction » d'un rectangle à l'extérieur du rectangle	La mesure est faussée.	Notion d'origine de la mesure.
Dénombrement des cubes	La mesure est faussée. Confusion entre l'objet qui porte l'étalon (le cube) et l'étalon (longueur d'une arête du cube).	Notion d'unité.
Juxtaposition de gros cubes sur le périmètre intérieur	Le nombre de gros cubes fournis est suffisant pour couvrir tout le périmètre. La gestion du dénombrement des unités dans les angles peut être problématique.	Notion d'équivalence.
Juxtaposition des cubes sur le périmètre extérieur	Il va manquer des cubes ce qui génère une situation problème.	
Espacement des gros cubes pour que le nombre de cubes soit suffisant	La mesure est faussée.	Notion de report de l'unité sans espacement.
Juxtaposition de tous les gros cubes puis ajout de 4 petits cubes	On risque de compter 1 pour des unités différentes.	Notion d'unité constante. Système d'unités et relation qui les lie.

Procédures possibles	Difficultés/erreurs possibles	Savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés
Report d'une unité avec marquage des repères	On risque de créer des espacements liés aux repères. C'est plus long avec les petits cubes.	Notion de report d'une unité constante sans espace. Relation inverse (c'est plus long avec le petit cube / j'obtiens une mesure plus importante avec un petit cube.
Report à l'aide de 2 unités sans marquage des repères	On risque de se perdre dans le dénombrement. C'est plus long avec les petits cubes.	Notion de report d'une unité constante. Relation inverse (c'est plus long avec le petit cube / j'obtiens une mesure plus importante avec un petit cube).
Juxtaposition de cubes de dimensions équivalentes sur un ½ périmètre	On risque de se tromper dans la formule en faisant une multiplication (confusion avec aire)	Vers la formule de calcul du périmètre d'un rectangle.

Tableau 2. Procédures possibles des élèves, difficultés possibles et savoirs potentiellement mobilisés

3 Retours sur la mise en œuvre en classe

3.1 Les résultats

Sur les 17 groupes observés, 11 groupes ont trouvé le bon résultat. Ces groupes ont :

- mis 18 gros cubes le long du périmètre intérieur puis dénombré (cf. Annexe 2 A) ;
- mis 11 gros cubes le long d'un demi-périmètre extérieur puis ils ont calculé : addition, voire addition et multiplication (cf. Annexe 2 B) ;
- mis 10 gros cubes le long d'un demi-périmètre intérieur puis ils ont calculé : multiplication par 2 (cf. Annexe 2 C).

Les groupes qui n'ont pas trouvé le bon résultat ont :

- mis 18 gros cubes le long du périmètre intérieur et ont compté les cubes. L'unité cube a été confondue avec l'unité longueur de l'arête d'un cube (cf. Annexe 2 D) ;
- mis 18 gros cubes le long du périmètre intérieur et ont fait des erreurs de dénombrement probablement dans les angles (cf. Annexe 2 E) ;
- reporté, juxtaposé deux cubes sans marquer les reports sur la feuille et ont fait des erreurs de dénombrement (cf. Annexe 2 F).

3.2 Les savoirs en jeu qui ont pu être institutionnalisés

La mise en commun est l'occasion de revenir sur la distinction entre périmètre (longueur du contour du rectangle) et aire (mesure de sa surface).

Notion d'unité constante : Aucun groupe n'a placé les picots de telle sorte que ceux-ci auraient pu fausser la mesure. Quatorze des dix-sept groupes observés n'ont utilisé qu'un type de cubes (les grands). Trois groupes ont utilisé des gros cubes et des petits cubes. Ceux-ci ont compté « un » pour chaque longueur d'arête quel que soit le cube utilisé. Cela nous a fourni l'opportunité de revenir sur la nécessité d'utiliser une unité constante lorsqu'on effectue un mesurage.

Notion de report de l'unité sans espacement : Aucun groupe n'a espacé ses cubes. Ce savoir, qui semble acquis, n'a donc pas été institutionnalisé.

Relation d'équivalence : Plusieurs élèves ont juxtaposé les grands cubes en bois et en plastique pour vérifier l'équivalence des longueurs des arêtes (cf. Annexe 2 G). Il a été possible d'institutionnaliser qu'on

peut remplacer un étalon par un autre s'ils portent la même unité (même longueur d'arête) et ce, quelles que soient la matière ou la couleur.

Relation inverse : Un groupe n'a utilisé que deux gros cubes qu'ils ont reportés alternativement sur le périmètre sans marquer les reports au crayon. Aucun groupe n'a procédé ainsi avec un ou deux petits cubes. Les élèves ont pu justifier ce choix en expliquant qu'avec les petits cubes cela aurait été trop long. Dans cette classe, il a alors été possible de constater que plus l'étalon est grand (long) et plus le nombre de reports (donc la mesure) est petit.

Relation qui lie les unités : Les différences de résultats obtenus lors du mesurage, nous ont amené, lors de la mise en commun, à rechercher des explications. Les élèves ont pu constater, par superposition, qu'en juxtaposant deux arêtes de petits cubes, on obtient la même longueur qu'une arête de gros cube (cf. Annexe 2 H). Si on compte en unité longueur d'une arête de gros cube, il faut donc compter « un » pour deux arêtes de petits cubes. Nous en avons conclu que si on utilise des unités différentes, il faut rechercher la relation qui les lie.

Formule de calcul du périmètre : Lors de la mise en commun, nous avons pu constater qu'on n'est pas obligé de mesurer tout le périmètre. La mesure d'une longueur et d'une largeur du rectangle suffisent. Plusieurs formules de calcul sont apparues.

- P = 8u + 3u + 8u + 3u = 22u → addition
- P = (8u + 8u) + (3u + 3u) = 16u + 6u = 22u → addition qui regroupe les termes identiques
- P = (2 x 8u) + (2 x 3u) = 16u + 6u = 22u → P = (L x 2) + (l x 2)
- P = (8u + 3u) x 2 = 11u x 2 = 22u → P = (L + l) x 2

IV - LA SITUATION AIRE

Pour rappel, cette situation a été proposée uniquement en classe. Il s'agissait, dans l'optique de présenter cet atelier, de proposer une situation qui utilise également des cubes. Je ne l'ai jamais proposée en formation.

Cette situation a été proposée à la suite de la situation « périmètre », durant la même séance d'une heure. Très rapidement, j'ai pu me rendre compte que la notion d'aire, et donc son approche par un travail sur la grandeur, n'avait pas été abordée dans les classes où je suis intervenu.

1 Présentation de la situation

1.1 La situation

La classe est partagée en deux groupes de binômes. Chaque binôme a soit une barquette qui contient 10 grands cubes en bois de 2 cm d'arête, soit 10 petits cubes emboitables en plastique multicolores de 1 cm d'arête.

Deux rectangles sont également fournis. Le rectangle A a pour dimensions 12 cm x 4 cm alors que le rectangle B a pour dimensions 8 cm x 6 cm (cf. Annexe 3).

Il s'agit, l'unité étant la surface d'une face de cube, de trouver, en utilisant le moins de cubes possible, quel rectangle a la plus grande aire. Les élèves doivent noter leur résultat et leur procédure sur une feuille.

1.2 La consigne de travail des participants

Il est à nouveau demandé aux participants de l'atelier :

- de lister des procédures possibles chez des élèves de cycle 3 au regard du matériel proposé ;
- d'identifier les difficultés à anticiper ;
- d'identifier les savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés.

2 L'analyse a priori

2.1 Les variables choisies

La consigne de la situation : Il s'agit de comparer deux surfaces planes (représentations d'une face de chaque boite) à l'aide d'une unité (surface d'une face d'un cube).

La liste du matériel proposé favorise la mise en œuvre de plusieurs procédures mais obère le travail de certains concepts liés à la notion d'unité : relation d'équivalence et unité constante (qui est imposée). La relation inverse et la relation qui lie les unités du système seront à construire durant la mise en commun.

La compréhension de la notion d'aire (grandeur relative à une surface plane) constitue un prérequis.

La deuxième partie de la consigne (en utilisant le moins de cubes possible) est ambigüe et peut constituer un obstacle. Les élèves peuvent l'oublier ou l'interpréter comme : « Utiliser un seul cube », « Faire avec les dix cubes pour les deux rectangles », « Réutiliser des cubes déjà utilisés en les déplaçant à un autre endroit ».

Les rectangles : Ce sont des polygones particuliers. Ils ont notamment leurs côtés opposés qui sont égaux deux à deux, ce qui peut faciliter l'accès à la formule de calcul de leur aire.

Leurs dimensions, qui ne sont pas données, ont été choisies en relation avec celles des cubes. Les mesures de leurs longueurs et largeurs peuvent être données par un nombre entier d'unités/surface d'une face d'un cube.

Leur mesurage s'impose pour répondre à la consigne et pouvoir constater que, bien qu'ils aient des formes différentes, ils ont tous les deux la même aire.

Les cubes : Utiliser un objet en trois dimensions dont il ne faut prendre en compte que deux dimensions peut constituer un obstacle à la compréhension de ce qu'est l'étalon (la face du cube) et l'unité de mesure (la surface d'une face du cube).

Les cubes en plastique sont emboitables et ont donc des picots qui, selon leur disposition, pourrait démontrer ou non la maitrise de la notion d'unité constante.

Les arêtes des grands cubes sont deux fois plus longues que celles des petits cubes en plastique (la longueur de 2 arêtes de petits cubes est égale à la longueur d'une arête d'un grand cube). L'aire d'une face d'un grand cube est donc quatre fois plus grande que celle d'un petit cube. Cette variable peut permettre le travail de la relation entre les unités.

Quel que soit le type de cube utilisé, le nombre (10) est insuffisant pour paver la surface des rectangles. Toutefois, avec les gros cubes, il est possible d'entamer le pavage de la surface puis d'estimer à vue le nombre d'étalons manquants. Cela est beaucoup plus compliqué avec les petits cubes. L'insuffisance du nombre de cubes et le fait de devoir utiliser le moins de cubes possible devraient conduire à trouver des procédures mobilisant le calcul et donc de donner l'occasion de construire la formule de calcul de l'aire d'un rectangle.

2.2 Les procédures possibles

Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées les procédures possibles des élèves dont certaines ont été proposées par les participants et d'autres par les élèves en classe. Il est difficile d'être exhaustif car certaines procédures peuvent se mêler.

Procédures possibles	Difficultés/erreurs possibles	Savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés
Juxtaposition de cubes ou report de cubes sur le périmètre	Confusion entre périmètre et aire.	Notion d'aire.
Utilisation de tous les cubes disponibles pour paver la surface puis dénombrement en prenant en compte les cubes manquants	Il va manquer 2 gros cubes et 38 petits cubes. Estimation des petits cubes manquants très difficile.	Relation d'équivalence.
Utilisation du nombre de cubes nécessaires pour paver une L et une l puis dénombrement et calcul	Avec les grands cubes, je peux utiliser 7 GC pour rectangle A et 6 GC pour rectangle B. Avec les petits cubes, il va manquer 5 petits cubes pour rectangle A (mais on peut en réutiliser 3 de la largeur). Il va manquer 3 petits cubes pour rectangle B (mais on peut en réutiliser 3 de la longueur)	Vers la formule de calcul de l'aire d'un rectangle.
Utilisation de 2 cubes pour reporter sans marquer les reports sur une L et une l en dénombrant au fur et à mesure	Bien maintenir l'un des 2 cubes à chaque report. Erreur dans le dénombrement ou le calcul. Confusion possible dans l'unité reportée (arête, face, cube ?).	Notion de report de l'unité sans espace ni chevauchement. Vers la formule de calcul de l'aire d'un rectangle. Notion d'unité d'aire (surface).
Report d'un seul cube sur une L et une l, en marquant les reports puis dénombrement ou calcul	Erreur dans le dénombrement ou le calcul. Espacement entre les reports. Confusion possible dans l'unité reportée (arête, face, cube ?).	Notion de report de l'unité sans espace ni chevauchement. Vers la formule de calcul de l'aire d'un rectangle. Notion d'unité d'aire (surface).
Report d'un seul cube en dessinant son contour puis dénombrement ou calcul sur quadrillage	Espacement entre les reports. Confusion possible entre l'unité cube et l'unité face de cube.	Notion de report de l'unité sans espace ni chevauchement. Vers la formule de calcul de l'aire d'un rectangle. Notion d'unité d'aire (surface).

Tableau 3. Procédures possibles des élèves, difficultés possibles et savoirs potentiellement mobilisés

3 Retours sur la mise en œuvre en classe

3.1 Les résultats

Quatre binômes sur neuf ont trouvé la bonne mesure avec des gros cubes. Ceux qui ont réussi ont :

- pavé une longueur et une largeur des rectangles puis calculé le nombre d'unités en additionnant ou multipliant. Ce faisant ils ont approché la formule de calcul de l'aire d'un rectangle (cf. Annexe 4 A) ;
- pavé une partie des rectangles et estimé à vue le nombre total d'unités (cf. Annexe 4 B). Ce faisant, ils ont également respecté la consigne « avec le moins de cubes possible » ;
- reporté l'unité face de cube en marquant les contours puis dénombré les unités tracées (cf. Annexe 4 C).

Ceux qui n'ont pas trouvé la bonne mesure :

- ont pavé l'extérieur des rectangles et ont donc obtenu une mesure plus grande ;

- ont mis 6 cubes dans la longueur et 1 cube dans la largeur. Puis, ils ont dénombré ces cubes et multiplié par 2 (donc 7 unités x 2).

Aucun des binômes qui utilisaient des petits cubes n'a trouvé la bonne mesure de l'aire. La tâche était plus complexe car elle nécessitait de réutiliser des cubes déjà posés (cf. Annexe 4 D). Plusieurs binômes ont associé les petits cubes par deux pour reconstituer la même longueur d'arête que celle d'un gros cube. Ils ont alors reporté leur étalon en marquant les reports (cf. Annexe 4 E). Ils ont probablement réutilisé la relation qui liaient les unités pour le périmètre, relation erronée pour l'aire. Ce faisant, ils en ont oublié l'unité (face d'un cube).

Les mises en commun se sont attachées à rechercher les raisons de ces erreurs pour pouvoir revenir sur les savoirs relatifs à la notion d'unité de mesure.

3.2 Les savoirs qui ont pu être institutionnalisés

Durant la mise en commun nous sommes revenus sur la distinction entre périmètre (longueur du contour du rectangle) et aire (mesure de sa surface).

Notion d'unité constante : Aucun groupe n'a placé les picots de telle sorte que ceux-ci auraient pu fausser la mesure. L'étalon étant imposé, ce savoir n'a pas nécessité d'être institutionnalisé.

Notion de report de l'unité sans espacement : Aucun groupe n'a espacé ses cubes. Ce savoir, qui semble acquis, n'a donc pas été institutionnalisé.

Relation d'équivalence : Je ne suis pas revenu sur ce savoir institutionnalisé lors de la situation « périmètre » qui venait juste d'être vécue.

Relation inverse : Les élèves ont pu constater qu'il fallait davantage de petits cubes que de grands cubes pour paver les rectangles. Il a alors été possible de constater que plus l'étalon est grand (plus l'aire de l'étalon est grande) et plus le nombre de reports de l'étalon (donc la mesure) est petit.

Relation qui lie les unités : Les différences de résultats obtenus lors du mesurage, nous ont amené, lors de la mise en commun, à rechercher des explications. Les élèves ont pu constater, par superposition, qu'en juxtaposant quatre faces de petits cubes, on obtient la même surface que celle d'un grand cube (cf. Annexe 4 F). Si on compte en unité surface d'une face d'un gros cube, il faut donc compter « un » pour quatre faces de petits cubes. Nous en avons conclu que si on utilise des unités différentes, il faut rechercher la relation qui les lie pour ne pas fausser la mesure.

Formule de calcul de l'aire : La mise en commun a débouché sur le constat qu'on n'est pas obligé de paver toute la surface des rectangles. On peut paver uniquement une longueur et une largeur du rectangle. La formule de calcul de l'aire est ainsi apparue.

- Aire du rectangle 1 = 2 x 6u gros cube (ou 6 x 2u gros cube) = 12u gros cube.
- Aire du rectangle 2 = 3 x 4u gros cube (ou 4 x 3u gros cube) = 12u gros cube.

Se pose ici la question de l'introduction de la notation « u^2 » que nous n'avons pas introduite dans les classes.

Les élèves ont constaté que les deux rectangles avaient la même aire mais aucun élève n'a exprimé sa surprise de constater que deux rectangles de formes différentes pouvaient avoir la même aire. Un travail de comparaison d'aires en amont aurait été intéressant pour donner davantage de sens à ce constat.

V - LA SITUATION VOLUME

Les deux situations présentées dans ce chapitre ont été vécues en formation et en classe de CM2. Pour des raisons de gestion du temps, la situation « les perles » a juste été évoquée lors de l'atelier.

1 Présentation de la situation préalable « les perles »

J'ai souhaité, dans un premier temps, que les élèves puissent manipuler d'autres objets que des cubes.

Si les cubes peuvent, selon leurs dimensions et celle de la boîte, s'insérer sans espace dans celle-ci, ce n'est pas le cas avec les perles. Inévitablement, la mesure obtenue par les élèves sera inexacte et différente selon les groupes.

Cette situation a trois objectifs. Tout d'abord, elle contribue à définir la contenance d'une boîte comme son volume intérieur. Ensuite, elle vise à faire percevoir les limites de l'utilisation de grandeurs discrètes pour déterminer la contenance d'une boîte. Enfin, elle facilite la dévolution de la situation « volume avec des cubes » proposée dans la foulée.

1.1 Présentation de la situation

Chaque binôme a une barquette avec quelques perles de taille identique dedans. Une réserve de perles est accessible au fond de la classe.

Une boite « 1 » en papier cartonné est également fournie (cf. Annexe 5).

Il s'agit, l'unité étant la perle, de mesurer la contenance (ou le volume intérieur) de la boite 1. Les élèves peuvent, si besoin, prendre d'autres perles, dans la réserve. Ils doivent noter leur résultat et leur procédure sur une feuille.

1.2 Les procédures mises en œuvre

Le nombre de procédures possibles est assez limité, ce qui permet une mise en commun rapide.

Procédure 1 : Remplir la boite en y déversant les perles en vrac puis ressortir les perles pour les compter (une à une ou par paquets).

Procédure 2 : Dénombrer les perles au fur et à mesure qu'on remplit la boite en vrac (cf. Annexe 6 A).

Procédure 3 : Dénombrer les perles au fur et à mesure qu'on remplit la boite de façon ordonnée (cf. Annexe 6 B).

Procédure 4 : Disposer les perles de façon ordonnée sur un étage de la boite puis dénombrer (calcul possible) les perles sur un étage puis calculer le nombre de perles présentes sur tous les étages.

Toutes ces procédures nécessitent de se mettre d'accord sur le moment où on considère que la boite est remplie. Généralement les élèves tentent de refermer la boite pour vérifier qu'il n'y a pas trop de perles ou s'ils peuvent en ajouter.

1.3 Les savoirs qui ont pu être institutionnalisés lors de la mise en commun

Nous avons relevé les résultats de tous les binômes. La mesure du volume intérieur de la boite a pu être exprimée par un encadrement : 40 unités/perles < volume de la boite 1 < 50 unités/perles.

Nous avons recherché une explication au fait que de nombreuses mesures différentes aient été obtenues par les binômes. Les élèves ont évoqué des erreurs possibles dans le dénombrement et des différences liées à la façon dont sont disposées les perles, en vrac ou bien rangées. Leur disposition laisse plus ou moins d'espaces dans chaque boite, ce qui influe sur le résultat de la mesure.

Nous en avons conclu que les perles ne constituent pas une unité très fiable pour mesurer le volume intérieur d'une boite et qu'il vaut mieux utiliser des unités qui ne laissent pas d'espaces entre elles. Les cubes par exemple ou, encore mieux, les fluides (eau, sable).

2 Présentation de la situation « volume »

2.1 Présentation de la situation

La situation

Chaque binôme a une barquette avec 10 gros cubes en bois et 10 petits cubes en plastique dedans.

La boite « 1 » en papier cartonné est fournie aux binômes « 1 » et une boite « 2 », d'une contenance plus grande, est fournie aux binômes « 2 ».

Une réserve de cubes est installée en fond de classe (cf. Annexe 7).

Il s'agit, consigne a), de trouver, en utilisant le moins de cubes possible, le volume intérieur de sa boite en unités cubes en bois.

Puis il s'agit, consigne b), de trouver, en utilisant le moins de cubes possible, le volume intérieur de sa boite en unités cubes en plastique.

Enfin, consigne c), tous les binômes doivent calculer le volume intérieur en unités cubes en plastique d'une boite, non fournie, dont le volume est de 192 unités/cubes en bois.

Les élèves doivent noter leur résultat et leur procédure sur une feuille.

La consigne de travail des participants

Il est à nouveau demandé aux participants de l'atelier :

- de lister des procédures possibles chez des élèves de cycle 3 au regard du matériel proposé ;
- d'identifier les difficultés à anticiper ;
- d'identifier les savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés.

2.2 L'analyse a priori

Les variables choisies

Les consignes de la situation : Pour les consignes a) et b), il s'agit de déterminer la mesure de la contenance (ou du volume intérieur) de pavés droits par mesurage à l'aide d'une unité donnée et/ou par calcul.

La partie de la consigne (en utilisant le moins de cubes possible) est ambigüe et peut constituer un obstacle. Les élèves peuvent l'oublier ou l'interpréter : « Utiliser un seul cube », « Réutiliser des cubes déjà utilisés en les déplaçant à un autre endroit ».

Pour la consigne c), il s'agit de calculer le volume intérieur d'une boite qui est donné dans une autre unité.

La compréhension des notions de longueur, de largeur, de hauteur et de pavé droit constitue un prérequis.

Les boites : Ce sont des pavés dont les dimensions de chaque grandeur sont des nombres entiers de centimètres.

Boite 1 : 6 cm x 8 cm x 4 cm ; Boite 2 : 8 cm x 12 cm x 4 cm.

La boite 3 n'est pas fournie. Ses dimensions (12 cm x 16 cm x 8 cm) nécessiteraient pour sa construction une feuille cartonnée plus grande qu'une feuille au format A4. Sa construction pourrait être pertinente pour la validation.

Leurs dimensions, qui ne sont pas données, ont été choisies en relation avec celles des cubes. Les mesures de leurs longueurs, largeurs et hauteurs peuvent être données par un nombre entier d'unités/cubes.

Les cubes : Les cubes en plastique sont emboitables et ont donc des picots qui, selon leur disposition, pourraient démontrer ou non la maitrise de la notion d'unité constante. Les petits cubes en plastique sont de couleurs différentes.

Les arêtes des grands cubes sont deux fois plus longues que celles des petits cubes en plastique (la longueur de 2 arêtes de petits cubes est égale à la longueur d'une arête d'un grand cube).

On doit utiliser le moins de cubes possible mais une réserve de cubes est mise à disposition des élèves qui ne trouveraient pas d'autres solutions.

Les procédures possibles

Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées les procédures possibles des élèves pour les consignes a) et b). Certaines ont été proposées par les participants et d'autres par les élèves en classe. Il est difficile d'être exhaustif car certaines procédures peuvent se mêler.

Procédures possibles	Difficultés/erreurs possibles	Savoirs relatifs à la notion d'unité pouvant être institutionnalisés
Disposition ordonnée des cubes sans espace (cf. Annexe 8 A)	Prise en compte que d'un seul étage.	Confusion aire/volume.
Disposition non ordonnée des cubes avec espace (cf. Annexe 8 B)	Erreur dans la mesure.	Notion de report sans espace.
Remplissage de toute la boite à l'aide de cubes pris dans la réserve	Nombre de cubes très important (surtout pour les cubes en plastique) qui peut engendrer des erreurs de dénombrement.	
Remplissage d'un étage complet à l'aide de cubes pris dans la réserve puis calcul (nombre de cubes x le nombre d'étages)	La visualisation des 4 étages en unités petits cubes peut être difficile.	Vers la formule de calcul du volume d'un pavé droit (addition ou multiplication).
Remplissage d'une longueur, d'une largeur et d'une hauteur puis calcul	Parfois pas facile d'insérer les cubes dans la boite. Emboiter les petits cubes. Risque de ne pas compter 2 fois les cubes dans les angles pour déterminer le nombre de cubes total d'une grandeur.	Vers la formule de calcul du volume d'un pavé droit (multiplication).
Report d'un cube sur une longueur, une largeur et une hauteur avec repérage des reports	Prise en compte des 3 dimensions. Maniabilité de la boite. Difficile de voir l'unité (face d'un cube). Risque de ne pas compter 2 fois les cubes dans les angles.	Notion d'unité.

Tableau 4. Procédures possibles des élèves, difficultés possibles et savoirs potentiellement mobilisés

2.3 Retours sur la mise en œuvre en classe

Les résultats

Pour la consigne a), 12 binômes sur 15 ont trouvé le bon résultat que ce soit pour la boite 1 ou la boite 2. Ces binômes ont mis plus ou moins de gros cubes dans la longueur, la largeur et la hauteur. Pour limiter le nombre de cubes utilisés, ils ont réutilisé des cubes déjà posés dans l'une des dimensions (cf. Annexe 8 C).

Les 3 groupes qui n'ont pas trouvé le bon résultat ont :

- pavé un seul étage et ont confondu le volume avec l'aire ;
- fait une erreur de calcul (tables de multiplication) ;
- tenté de reporter un seul cube en marquant les reports. Les élèves se sont ensuite trompés/perdus dans le dénombrement des reports (cf. Annexe 8 D).

La consigne b), qui nécessitait d'utiliser les petits cubes, rendait la tâche plus complexe. Je n'ai retrouvé que les feuilles de 7 binômes. Sur ces 7 binômes, 4 ont trouvé le bon résultat que ce soit pour la boite 1 ou la boite 2. Ces binômes ont mis plus ou moins de petits cubes dans la longueur, la largeur et la hauteur. Ils ont dû réutiliser des cubes déjà posés dans l'une des dimensions (cf. Annexe 8 E).

Les 3 groupes qui n'ont pas trouvé le bon résultat ont :

- mal estimé visuellement le nombre d'étages ;
- tenté de reporter un seul cube en marquant les reports. Les élèves se sont ensuite trompés/perdus dans le dénombrement des reports.

Par manque de temps, la consigne c) a été réalisée collectivement.

Les savoirs qui ont pu être institutionnalisés

La mise en commun nous a permis de revenir sur la notion de volume.

Notion d'unité constante : Aucun groupe n'a placé les picots de telle sorte que ceux-ci auraient pu fausser la mesure. L'étalon étant imposé, ce savoir n'a pas nécessité d'être institutionnalisé.

Notion de report de l'unité sans espacement : Compte tenu des dispositions des étalons (perles puis cubes) proposées par les élèves, nous avons pu institutionnaliser le fait qu'il faut disposer les étalons sans espace afin de ne pas fausser la mesure.

Relation d'équivalence : Je ne suis pas revenu sur ce savoir qui semblait être acquis déjà au CM1.

Relation inverse : Même si la situation s'y prêtait, ce savoir n'a pas été institutionnalisé car nous ne l'avons pas évoqué lors de nos échanges.

Relation qui lie les unités : Lors de la mise en commun relative à la consigne c, nous avons pu constater, par la manipulation, qu'il faut 8 cubes en plastique pour avoir le même volume qu'un cube en bois (cf. Annexe 8 F). Il faut donc multiplier par 8 le nombre de cubes en bois pour trouver le nombre de cubes en plastique nécessaire pour remplir la boite 3. On peut également dire que quand on double les dimensions d'un cube de 1u d'arête, on doit multiplier par 8 (2u x 2u x 2u) la mesure du volume du cube.

Formule de calcul de l'aire : La mise en commun a permis de constater qu'on n'est pas obligé de remplir une boite de cubes pour déterminer son volume en unités/cubes. On peut rechercher combien il faut de cubes sur la longueur (L), la largeur (l) et la hauteur (h) de la boite puis effectuer le calcul : L x l x h.

On a pu également déterminer que pour trouver le nombre de cubes d'1 cm d'arête contenus dans un cube multibase (millier) de 10 cm d'arête, on pouvait multiplier L x l x h, ce qui faisait 10u x 10u x 10u donc 1 000 unités/cubes.

VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

1 Discussion

À travers le travail mené lors de l'atelier, les participants ont découvert les trois situations. Ils en ont identifié collectivement les potentialités et les limites qui sont évoquées dans cette partie.

1.1 L'objet cube

La pertinence de l'utilisation d'un objet en 3D, le cube, pour mesurer le périmètre ou l'aire a été discutée. Un participant a suggéré l'utilisation de bandes ou d'allumettes pour le périmètre, puis de carrés plastifiés pour l'aire, comme étalons porteurs de l'unité utilisée. Il lui a été objecté que, d'une part, les cubes sont des objets plus faciles à manipuler que des objets en 2D plastifiés, et d'autre part qu'on s'éloignerait de l'intention initiale de l'animateur de l'atelier si on utilisait des objets en 2D. La notion d'objets en 2D est par ailleurs discutable lorsqu'on prend en compte l'épaisseur du papier ou d'une allumette.

Le fait d'utiliser un seul objet pour travailler trois grandeurs a également été débattue. Pour certains participants, cela peut être source de confusion pour la compréhension des différentes grandeurs. Pour d'autres, il a semblé pertinent d'exercer le regard des enseignants et des élèves sur la distinction entre l'objet, l'étalon et l'unité de mesure au regard de la grandeur étudiée. De même, il semble pertinent de ne pas associer un objet à une grandeur (par exemple, le carré pour les aires, le cube pour les volumes) ce qui peut constituer un sur-étayage pouvant être source de difficulté pour les élèves.

Enfin, il a été évoqué que la face carrée d'un cube utilisée comme étalon pourrait laisser penser aux élèves que l'unité de l'aire est forcément un carré. De même l'objet cube utilisé comme étalon pourrait laisser penser aux élèves que l'unité de volume est forcément un cube. Ces remarques s'entendent et il conviendrait, en formation, de préciser aux enseignants formés qu'il faudra proposer également des étalons d'autres formes pour effectuer des mesurages d'aire (triangles par exemple) au cours de leur séquence.

1.2 Le potentiel de ces situations

Le potentiel des situations proposées a été relevé par les participants. Je ne reviendrai pas ici sur ce qui a été traité dans les sous-parties « les savoirs qui ont pu être institutionnalisés ».

Les situations proposées pourraient faire l'objet de séances spécifiques ayant un objectif bien ciblé (travail d'une notion ou d'une relation relative au concept d'unité).

Il est important de préciser que les situations ne peuvent pas être enchainées comme ce fut le cas dans l'expérimentation que j'ai menée et qu'elles doivent s'intégrer dans des séquences construites.

On peut toutefois interroger le transfert de ces situations qui seraient vécues sur deux années de la scolarité des élèves.

1.3 Des propositions de réajustement

Les consignes

La consigne « en utilisant le moins de cubes possible » proposée dans les situations « aire » et « volume » a également été discutée. Il a été suggéré de se limiter, dans un premier temps, à la première partie de la consigne. La proposition d'une nouvelle recherche qui utiliserait le moins de cubes possible constituerait alors une différenciation pour les élèves ayant trouvé rapidement la réponse à la première partie de la consigne. Afin de lever l'ambigüité de la formulation « en utilisant le moins de cubes possible », une reformulation de la consigne a été proposée « vous ne pouvez pas utiliser tous les cubes mis à votre disposition ».

Une autre proposition des participants a été de proposer une seule consigne du type « avec un seul cube, déterminez quel rectangle a la plus grande aire ». Cette consigne permettrait d'aller plus rapidement vers la construction de la formule de calcul de l'aire du rectangle mais obérerait certaines procédures qui mettent en évidence les notions et relations relatives à la construction du concept d'unité.

Le matériel

Les cubes en bois fabriqués de façon artisanale pourraient être remplacés avantageusement par des cubes en bois usinés. Découpés de façon plus régulière, ils illustreraient de façon plus rigoureuse les notions d'unité constante et d'équivalence. Ils peuvent aussi être remplacés par des cubes usinés en plastique.

Au sujet des picots présents sur les cubes en plastique, un rapprochement a été fait avec l'objet Polydron © pour lequel une abstraction est également nécessaire pour voir l'objet géométrique derrière l'objet tangible. Il a été relevé que les élèves de cycle 3 sont capables de faire ce genre d'abstraction.

Les supports

Les dimensions des rectangles doivent être « vérifiées » après la photocopie de façon à ce qu'il n'y ait aucune ambiguïté sur le nombre de reports des étalons.

Si on maintient la double consigne « avec le moins de cubes possible », une feuille de résultats pourrait être proposée aux élèves. Sur cette feuille on demanderait d'indiquer dans une colonne le nombre de cubes utilisés et dans l'autre le résultat du mesurage.

Dans un second temps, en prolongement des situations, il pourrait être pertinent de prévoir des rectangles, ou des boites, dont au moins l'une des dimensions ne correspondrait pas à un nombre entier de reports des unités portés par les étalons fournis par les gros cubes. On pourrait ainsi inciter à déterminer la mesure à l'aide du système d'unités fourni (gros cube et petit cube).

Les notations

Pour une meilleure compréhension, il a été rappelé l'importance de qualifier les nombres dans les écritures mathématiques (ex. « 2 x 3u = 6u » au lieu de « 2 x 3 = 6u »).

2 Conclusion

Les situations proposées lors de cet atelier ont permis de revenir sur les notions et relations nécessaires à la construction de la notion d'unité de longueur relevées dans la revue de littérature présentée.

L'expérimentation menée en classes de CM a été l'occasion de comparer les procédures identifiées par les participants et celles mises en œuvre par les élèves.

Les échanges entre les participants ont confirmé les potentialités des situations présentées et ont contribué à envisager des ajustements pour une mise en œuvre plus efficiente en formation ou en classe.

BIBLIOGRAPHIE

Boulton-Lewis, G. M., Wilss, L. A., and Mutch, S. L. (1996). An analysis of young children strategies and use of device for length measurement. *Journal of mathematical behavior 15,* 329-347.

Hiebert, J. C. (1981). Cognitive development and learning linear measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 12 (3),* 197-210.

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *Arithmetic Teacher, Vol. 3 (7),* 19-24.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better. *Teaching Children Mathematics, Vol. 13 (3),* 154-158.

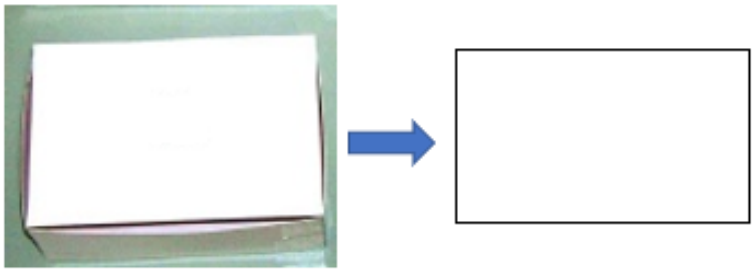
Lehrer, R. (2003). Chapitre 2 Developing understanding of measurement. Dans J., Kilpatrick, W.-G., Martin et D., Schifter. *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (179-192).

Macdonald, A. (2011). Young children's representations of their developing measurement understandings. *Mathematics: traditions and [new] pratices,* 482-490.

MENJ (2024). Programme de mathématiques du cycle 2. Consultée le 05/06/2024. Url : https://www.education.gouv.fr/media/194205/download

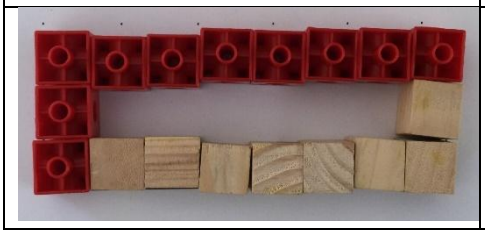
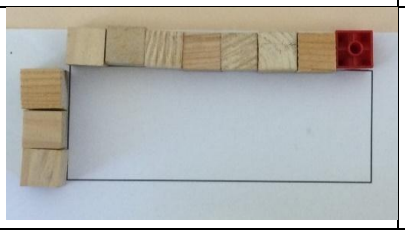
Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Editions Didier Hatier.

ANNEXE 1 LE MATÉRIEL DE LA SITUATION « PERIMETRE »

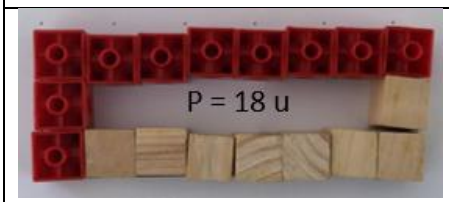
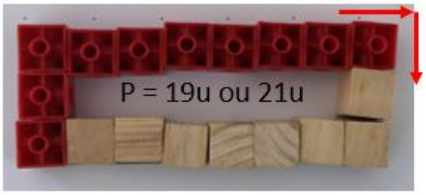
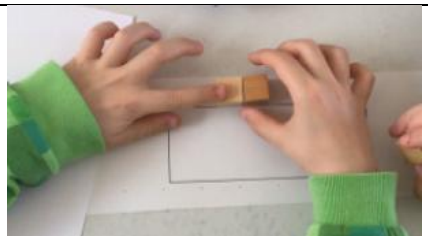
Un rectangle (contour d'une boite) L = 16 cm ; l = 6 cm	Les cubes : 10 gros cubes en bois de 2 cm d'arête, 10 gros cubes en plastique de 2 cm d'arête, 10 petits cubes en plastique de 1 cm d'arête
	

ANNEXE 2 RÉPONSES DES 17 GROUPES DE CM1 – « PERIMETRE »

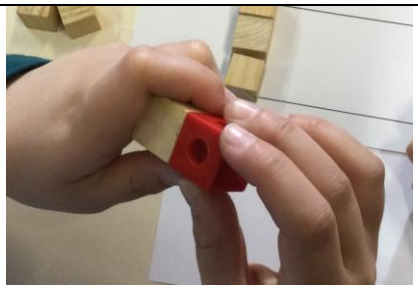
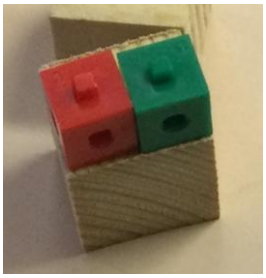
Les procédures ayant abouti à une réponse correcte

Annexe 2 A (Périmètre intérieur / 18 cubes)	Annexe 2 B (Périmètre extérieur / 11 cubes)	Annexe 2 C (Périmètre intérieur / 10 cubes)
		

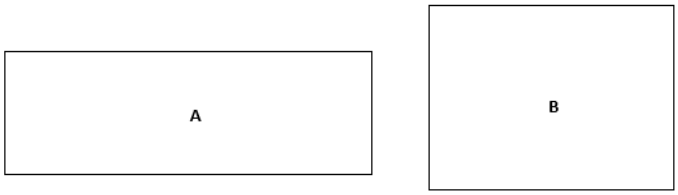
Les procédures ayant abouti à une réponse erronée

Annexe 2 D (Confusion objet et unité)	Annexe 2 E (Erreur de dénombrement dans un ou plusieurs angles)	Annexe 2 F (Report de 2 cubes juxtaposés sans marquer les repères)
		

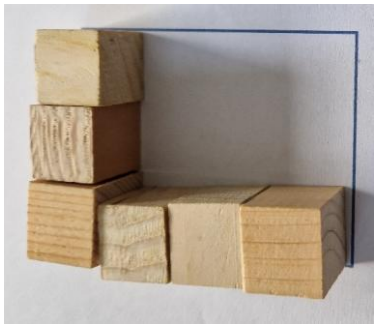
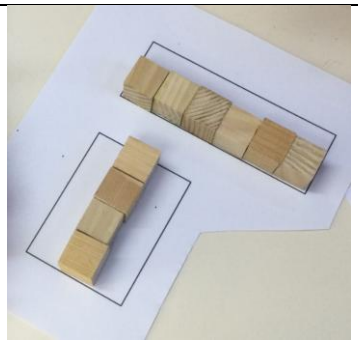
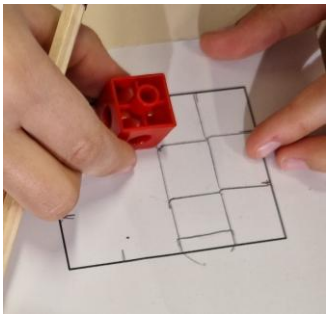
Des savoirs construits en actes

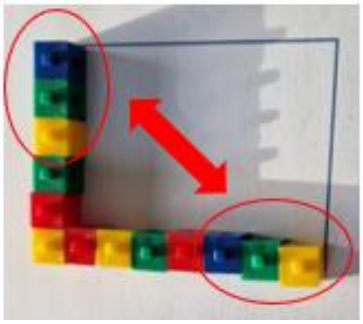
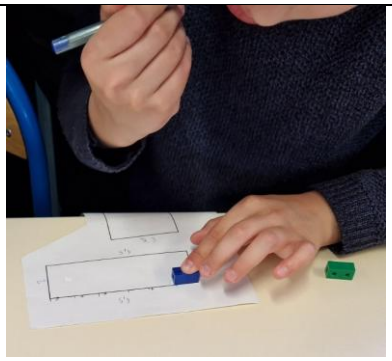
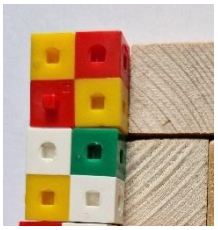
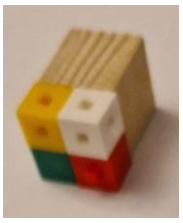
Annexe 2 G Relation d'équivalence	Annexe 2 H Relation qui lie les unités
	 

ANNEXE 3 LE MATÉRIEL DE LA SITUATION « AIRE »

Deux rectangles (contours de boite) A : L = 12 cm ; l = 4 cm B : L = 8 cm ; l = 6 cm	Des cubes Binômes 1 : 10 grands cubes de 2 cm d'arête Binômes 2 : 10 petits cubes de 1 cm d'arête
	 

ANNEXE 4 RÉPONSES DES 17 GROUPES DE CM1 – « AIRE »

Annexe 4 A Pavage d'une longueur et d'une largeur et multiplication (formule)	Annexe 4 B Pavage d'une partie des rectangles et estimation des unités manquantes	Annexe 4 C Tracé des contours des faces pour obtenir un quadrillage
		

Annexe 4 D Pavage d'une longueur et d'une largeur avec réemploi de cubes	Annexe 4 E Report de 2 petits cubes assemblés et tracé des reports	Annexe 4 F Relation qui lie les unités
		 

ANNEXE 5 LE MATÉRIEL DE LA SITUATION « VOLUME : LES PERLES »

Une barquette par binôme avec des perles dedans	Une boite « 1 » 6 cm x 8 cm x 4 cm	Une réserve de perles dans une boite au fond de la classe
		

ANNEXE 6 ILLUSTRATION DES PROCEDURES MISES EN ŒUVRE

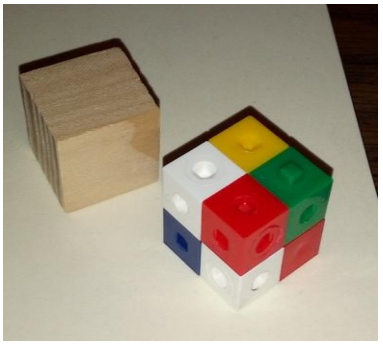
Annexe 6 A Remplissage « en vrac » de la boite	Annexe 6 B Remplissage « ordonné » de la boite
	

ANNEXE 7 LE MATÉRIEL DE LA SITUATION « VOLUME : LES CUBES »

Les cubes : 10 gros cubes en bois de 2 cm d'arête et 10 petits cubes en plastique de 1 cm d'arête	Les boites 1 ou 2 Boite 1 : 6 cm x 8 cm x 4 cm Boite 2 : 8 cm x 12 cm x 4 cm	Les réserves de cubes au fond de la classe
		

ANNEXE 8 ILLUSTRATION DES PROCEDURES MISES EN ŒUVRE

Annexe 8 A Remplissage de toute la boite sans espace	Annexe 8 B Remplissage de toute la boite avec espace	Annexe 8 C Disposition de gros cubes sur chaque dimension (*dans les faits, des cubes sont réutilisés*)
		

Annexe 8 D Report d'un seul cube	Annexe 8 E Disposition des petits cubes sur chaque dimension (*dans les faits des cubes sont réutilisés*)	Annexe 8 F Relation qui lie les unités
		

CO-CONSTRUCTION D'UNE NOUVELLE SITUATION PROBLÈME EN MATERNELLE : LE JEU DES TROIS BANDES

Cécile Allard
MCF, UPEC
LDAR, IREMS de Paris, LéA Ecrainum
cecile.allard@u-pec.fr

Florence Quinton
Professeures des écoles
REP+ Elsa Triolet, Champigny-sur-Marne, IREMS de Paris, LéA Ecrainum

Michella Kiwan-Zacka
MCF, UPEC, IREMS de Paris, LéA Ecrainum
LDAR
michella.zacka@u-pec.fr

Delphine Tempier
PRCE, UPEC, IREMS de Paris, LéA Ecrainum
delphine.tempier@u-pec.fr

Ingrid Poisson
PREC, CPC, Correspondante LéA
ingrid.Leconte@ac-creteil.fr

Audrey Brulé, Emilie Job, Elsa Jouy, Marie Nouyrigat, Ingrid Poisson, Charlotte Ramtane, Isabelle Theulle, Céline Touzain,
Professeures des écoles
REP+ Elsa Triolet, Champigny-sur-Marne, IREMS de Paris, LéA Ecrainum

Résumé : Nos travaux s'inscrivent dans des recherches collaboratives et portent sur la réduction des inégalités scolaires à l'école maternelle en GS en mathématiques (Allard &al., 2022 et Mamede & al., 2023). Notre projet consiste à identifier et à lever le plus possible certains malentendus lorsque les élèves résolvent des problèmes mathématiques à l'école maternelle entre le savoir en jeu et la tâche proposée. Depuis 2021, nous travaillons avec plusieurs enseignantes du réseau d'éducation prioritaire renforcée Elsa Triolet de Champigny sur Marne. Nos différents temps de travail nous ont conduits à créer un jeu : le jeu des trois bandes qui se décline sur une année scolaire de GS et varie selon différentes contraintes ou variables didactiques. Ce jeu proposé en Rep+ conduit les élèves à mobiliser différentes connaissances sur les nombres (comparaison, estimation…) et en résolution de problèmes (partage équitable et inéquitable, transformation d'état...). Les excellents résultats aux évaluations nationales de CP et de Mi-CP sont des indicateurs, selon le MEN de réduction des inégalités scolaires. Nous en avons d'autres que nous expliciterons.

I - INTRODUCTION

L'objectif de cet atelier est de montrer comment le travail collaboratif avec des enseignants nous a amenées à co-construire une nouvelle situation d'apprentissage puis à identifier les conditions favorables au processus d'institutionnalisation en classe maternelle (5-6 ans). Le travail au sein du LéA 2 Tem[1] (2019-2023) puis du LéA ECRAINUM[2] (2023-2026) et du groupe IREM Maths en Mater[3] (2020-2026) se développe avec une équipe de 20 enseignants d'école primaire, dont 6 enseignantes de maternelle exerçant en Réseau d'Éducation Prioritaire Renforcée[4]. Notre recherche vise à comprendre comment réduire les inégalités scolaires selon l'hypothèse qu'une des clés réside dans un processus d'institutionnalisation dont les étapes sont identifiables et non « improvisées » (Allard, 2015). Le travail collaboratif avec les enseignantes du LéA ECRAINUM s'est construit sur un temps long et en parallèle du groupe IREM Maths en Mater. Nous appliquons dans nos collectifs les quatre principes développés dans Allard, Horoks et Pilet (2022) dont les deux principaux sont : installer un climat de confiance, co-élaborer en produisant une ressource.

Nous allons, dans une première partie, présenter notre cadre théorique. Puis, nous montrerons comment le travail collaboratif a participé à la création d'une nouvelle situation d'enseignement-apprentissage déclinée sur un temps long en jouant sur des variables didactiques. Enfin nous montrerons comment la force du travail collaboratif participe à la création d'un cercle vertueux susceptible de réduire certains écarts entre les élèves issus de milieux favorisés et défavorisés.

II - APPUIS THÉORIQUES

1 Réduire les inégalités en appui sur des situations d'apprentissages robustes

L'entrée dans le travail collaboratif porte sur la reprise et l'analyse des situations proposées par l'équipe d'enseignants et de chercheurs du COREM[5] (1973-1998) pour des élèves de Grande Section[6] (5-6 ans).

Nous rappelons que la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSD) (Brousseau, 1998)[7] s'est construite selon l'hypothèse que l'élève construit des connaissances en se confrontant à des situations problématiques qui lui renvoient de l'information sur ses actions, ce qui lui permet d'adapter ses connaissances et ses actions pour les situations ultérieures (Hersant, 2022, p. 5). La TSD s'est également construite en tenant compte de la dimension collective et culturelle des apprentissages en ciblant un élève type dit « générique » ce qui est souvent source de difficultés lorsque les enseignants de REP+ mettent en place les situations créées.

La TSD a développé cinq situations pour assurer des conditions favorables à l'émergence et l'apprentissage de nouveaux savoirs : la dévolution, les situations d'action, les situations de formulation, les situations de validation et l'institutionnalisation. La dévolution et l'institutionnalisation est davantage du côté de l'enseignant qui choisit les situations, pense et prépare le milieu dans lequel les élèves vont agir, chercher, formuler et organise son enseignement pour exposer les connaissances et faire les liens entre connaissances anciennes et nouvelles.

---

[1] LéA 2 TEM : LéA 2 territoires en mathématiques. https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/anciens-lea/2tem-reseau-decoles-de-champigny-94-et-beynes-78

[2] LéA Ecrire raisonner avec les nombres. https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/ecrire-et-raisonner-avec-les-nombres-ecrainum

[3] https://irem.u-paris.fr/maths-en-mater

[4] REP+ : réseau d'éducation prioritaire renforcée. Les REP regroupent les collèges et les écoles rencontrant des difficultés sociales plus significatives que celles des collèges et écoles situés hors éducation prioritaire. - Les REP+ concernent les quartiers ou secteurs isolés qui connaissent les plus grandes concentrations de difficultés du territoire

[5] Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques : https://ardm.eu/guy-brousseau/guy-brousseau.com/index.html

[6] http://ddm.joel.briand.free.fr/

[7] https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/guy-brousseau/

Margolinas (2021) à ce propos explique « *Par exemple, à l'école maternelle, le professeur qui souhaite construire le savoir « cardinal d'une collection finie montrée » en s'appuyant sur une séquence de situations que nous appellerons « séquence voiture-garage » (Briand et al., 2004) doit d'abord construire avec les élèves un enjeu relatif à une collection de voitures et une collection de garages : pouvoir faire la correspondance terme à terme entre une collection de voitures et une collection de garages sans qu'il reste une voiture sans garage ou un garage sans voiture. Ce faisant, il construit un milieu matériel (en référence à la structuration du milieu, voir Brousseau (1986b) et Margolinas (2004)) et un enjeu qui pourront rester stables alors que les situations vont changer (situations d'action, de formulation, de validation et divers changements de variables), ce qui va produire une évolution des connaissances ».*

Le collectif auquel nous appartenons et au sein duquel nous travaillons est constitué d'enseignantes expérimentées, formées, soucieuses de réduire les inégalités scolaires. Travaillant en REP+, elles cherchent à s'éloigner d'une vision essentialiste des « élèves de REP+ ». Elles indiquent vouloir maintenir un niveau d'exigence scolaire élevé, en réfléchissant sur ce qui est nécessaire d'enseigner pour que les élèves apprennent. Pour autant, leur détermination est mise à rude épreuve à l'annonce des résultats des évaluations nationales d'entrée en CP, les résultats ne reflètent pas d'après elles ce que leurs élèves savent faire. Cette déception nous a conduit à penser l'articulation entre les séquences proposées et les items des évaluations nationales.

Les trois premières années de notre travail collaboratif, les enseignantes ont été formées à mettre en place ces cinq situations dont nous faisions l'hypothèse qu'elles sont des conditions indispensables pour assurer des apprentissages en mathématiques et par conséquent améliorer les résultats des évaluations nationales. Lors de ces trois premières années, nous avons repris l'ensemble des situations élaborées au COREM[8] en ayant une vigilance particulière sur la validation et l'institutionnalisation. Nous avons également mis l'accent sur le rôle de l'écrit pour mémoriser ou garder une trace de l'activité, puis de l'écrit pour « penser » afin de réduire l'impact de la matérialité des apprentissages (Hersant, 2022).

Parallèlement, nous élaborions une nouvelle situation qui visait également la construction du nombre à l'école. Les différents temps de regroupement portent également sur l'étude de courts moments de classe, dans lesquels nous cherchons à débusquer ce qui résiste aux élèves et/ou ? ce qui parait difficile aux enseignants.

2 La construction du nombre à l'école maternelle : une première approche des mathématiques.

La construction du nombre à l'école maternelle est l'objet de l'enseignement et de l'apprentissage des élèves sur les trois années du cycle 1. Hersant (2022) pose la question des conditions pour faire des mathématiques à l'école maternelle. Elle rappelle que c'est « *le lieu de la première rencontre des élèves avec l'école et, en particulier avec les apprentissages mathématiques. (…) cette école est parfois aussi déjà un lieu de création des premières inégalités scolaires, y compris dans les apprentissages mathématiques* ». Par ailleurs, Hersant (*ibid*.) ajoute que les objectifs des programmes français sont si généraux qu'ils n'aident pas à anticiper ce que l'on peut dire aux élèves pour les aider en cours d'activité, ni à prévoir ce que l'on peut dire, de façon réaliste, à un élève de maternelle sur ce qu'il est en train d'apprendre et qui pourra lui être utile pour les situations ultérieures.

Au regard de l'antériorité de ces travaux, nous devions dans le LéA ECRAINUM et dans le groupe IREM « Maths en Mater » prendre en considération les difficultés à formuler des savoirs à l'issue de tâches réalisées avec du matériel : la décontextualisation est alors très difficile à cause de la matérialité des apprentissages et du jeune âge des élèves. Alors, nous comprenons d'autant mieux le besoin des enseignants de choisir des situations concrètes, car elles semblent faciliter les formulations des savoirs, même si elles sont souvent trop contextualisées. Des phrases comme *« tu as mis trois voitures bleues et trois voitures jaunes, il y a autant de voitures sur chaque parking, il y a la même*

[8] Corem : COREM : Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (archives vidéos du COREM disponibles sur http://visa.ens-lyon.fr/visa, archives « papier » disponibles au *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau* http://www.imac.uji.es/CRDM/)

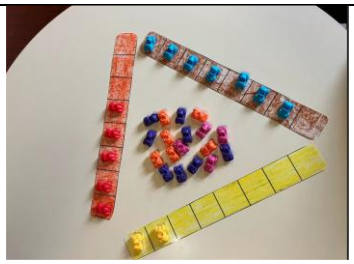
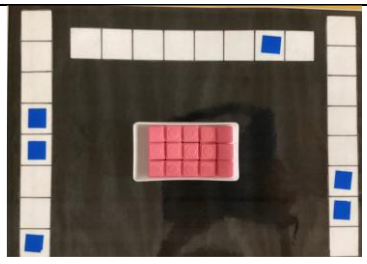
chose, la même quantité, c'est pareil ! » semblent plus faciles à formuler, plus proche du langage « naturel » que *« tu as mis la même quantité, le même nombre d'objets dans chaque collection ».* Pour construire le nombre à l'école, les élèves sont amenés à constituer des collections. D'un point de vue institutionnel, l'enseignement des entiers naturels est présenté – au moins depuis les programmes de 1947 – à partir de collections d'objets. Robert (1972, p. 17) souligne que « *les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous pareils, de même nature, et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement*. ». De plus, la tâche, présente dans les programmes, qui consiste à construire deux ou trois collections ayant autant d'objets nécessite de construire des collections équipotentes pour lesquelles ni la nature des objets ni la répartition de ces objets ne sont des critères pertinents.

D'un point de vue mathématique, construire les entiers naturels, *« c'est mesurer cet objet "collection", mais "la collection" n'est pas un objet matériel. C'est en soi un objet de la structure mathématique et le domaine de ces objets est ce qui permet d'assigner une structure d'espace mesurable. Nous dirons que si le sujet ne dispose pas de moyen de déterminer l'objet "collection", il ne peut en concevoir un mesurage ».* (Briand, 1999, p. 12). C'est pourquoi des tensions vont exister entre la compréhension du concept et les moyens matériels mis en œuvre.

III - CO-CONSTRUIRE UNE NOUVELLE SITUATION D'APPRENTISSAGE

Nous avions présenté aux enseignantes comment nous pouvions travailler selon des cycles itératifs sur plusieurs années en testant et ajustant les propositions dans plusieurs classes. Il fallait alors déterminer une première tâche à explorer. Nous[9] avons retenu la proposition d'une d'entre elles. Celle-ci avait pour rituel de demander aux élèves de sa classe de se placer sur les 3 bancs du « coin regroupement » de manière à ce qu'il y ait autant d'élèves sur chaque banc. Dans cette tâche, l'enseignante ne maitrisait pas le nombre d'élèves présents, se posait alors la question du reste (élève(s) sans place assise), quand le nombre d'élèves n'était pas un multiple de 3. De plus, l'enseignante se confrontait à des résistances d'élèves qui ne souhaitaient pas s'asseoir à côté d'un camarade ou pas au milieu d'un banc… Mais ce problème correspond à des critères qui sont souvent mis en avant par les enseignants : c'est un problème concret, qui relève de la vie courante de la classe, plus à même de donner du sens aux apprentissages mathématiques. Résoudre ce problème implique pour de jeunes élèves (5-6 ans) de longs temps de concertation qui dépassent les enjeux mathématiques.

L'analyse des difficultés par l'enseignante des élèves à se détacher des situations selon le critère de la vie courante a conduit le collectif à préférer laisser de côté ce critère à proposer une situation équivalente avec des bandes de papier, qui sont comme des « bancs », et des voitures pour réduire la dimension émotionnelle du placement des élèves. L'abandon rapide du « problème de la vie courante », source de malentendus, associé à une tâche qui a un intérêt dans la construction du nombre, a contribué à établir un premier consensus au sein du groupe.

Consigne commune : placez les pions pour qu'il y en ait autant sur chaque bande	
	

[9] « Nous » indique les chercheuses et les enseignantes, nous sommes un collectif genré féminin.

Essai 1 : bandes de couleurs différentes et voitures, il est possible d'avoir un reste ou de compléter toutes les bandes.	Essai 8 : bande fixe, gommettes et cubes de couleurs différentes, les gommettes et les cubes sont considérés comme des pions (ce qui compte ce sont les places occupées quelques soient la nature des objets).

Figure 1 : Évolution du choix du matériel dans le jeu des trois bandes

Du point de vue des apprentissages mathématiques, nous voyons des potentialités offertes par ce jeu pour la construction du nombre. En effet, pour partager équitablement une collection en trois sous-collections, deux procédures sont envisageables :

- Une procédure de distribution puis une comparaison terme à terme de tous les éléments des sous-collections ;
- Une procédure de dénombrement en complément ou non de la première procédure et de comparaison des cardinaux. Cette procédure est associée à une démarche d'essais-ajustements pour équilibrer les trois sous-collections.

Il est possible de faire intervenir d'autres variables pour amener à conceptualiser davantage les partages avec ou sans reste, les comparaisons de collections, ou bien encore les déplacements de pions d'une bande à une autre pour obtenir des partages. Ainsi, ce problème entraine les élèves à résoudre un premier problème de partage en appui sur des procédures en cours de construction. Nos pistes de travail se sont alors précisées.

1 La situation d'action modifiée : des contraintes à expliciter davantage

Nous avons également été témoins de stratégies gagnantes pour les élèves alors qu'elles ne participaient pas, selon nous, à la construction du nombre comme :

- Remplir toutes les cases quand le nombre de jetons le permet.
- Se limiter à des petites quantités (de 1 à 3 jetons) placées de la même façon sur les bandes.

Ces stratégies, bien que minoritaires, nous ont conduites à proposer moins de jetons que de cases (moins de 24) et à positionner des gommettes qui sont comme des pions fixés pour éviter une comparaison pilotée par la disposition spatiale plutôt que par le dénombrement.

La consigne se précise et devient : *« Vous devez placer autant de cubes, la même quantité sur chaque bande »* et précise *« attention vous devez placer le plus de cubes possibles ».* Une fois cette situation largement travaillée en classe, le collectif s'accorde également sur ce qu'il y a à institutionnaliser en pointant ce qu'il y a à apprendre et à désapprendre : *« pour réussir, il faut qu'il y ait autant de cubes, le même nombre de cubes, ce qui compte c'est la quantité ce n'est pas la couleur des objets ou des bandes ».* Nous employons le mot désapprendre à bon escient, en effet les élèves de ces classes en Petite section et Moyenne section ont réalisé de nombreuses tâches de tris ou de dénombrement avec des objets de couleurs. Ils ont appris à compter des objets de couleurs identiques, à trier selon la couleur, à se ranger dans des groupes de travail selon la couleur : la couleur est un levier pour des activités mathématiques et d'organisation du groupe classe et devient par conséquent un indice pour les élèves pour orienter leur activité.

La situation des 3 bandes amovibles de couleur a donc été conservée dans la suite du projet comme préliminaire à la situation du jeu des trois bandes. La situation construite du jeu des trois bandes a pour objectif d'utiliser les différentes fonctions du nombre (dénombrer, comparer, anticiper) toute l'année en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- Les bandes amovibles ou collées
- La disposition des gommettes (image 2)

- Le nombre de bandes (3 et 4 jusque 6 bandes et 24 pions, 6 bandes 30 pions)
- Présence ou non d'un reste (image 1)
- Le nombre de couleurs
- Le nombre de pions (et qu'il soit inférieur aux nombres de cases pour éviter le remplissage)
- Le partage pris en charge par les élèves ou bien déjà réalisé et il faut ajuster (image 3)

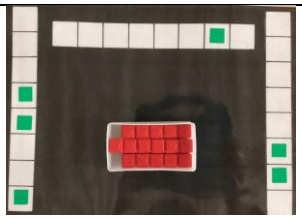
		
Cas 1 : sans gommette et 12 jetons (pas de reste)	Cas 2 : Gommettes (6) placées et 16 jetons, reste égal à 1	Cas 3 : Gommettes et cubes placés : déplacer des jetons pour qu'il y ait autant de pions sur chaque bande

Figure 2 : les situations d'action analysées en regroupement

Les observations en classe et les nombreuses vidéos ont participé à l'identification de procédures et des connaissances à mobiliser pour réussir la tâche. Nous décrivons ici les procédures les plus courantes.

Dans le cas 1, assez peu d'élèves distribuaient un à un les jetons sur chacune des 3 bandes. La plupart d'entre eux posent la même quantité (3 ou 4) sur chaque bande[10], puis complètent. Ils comptent et recomptent chacune des collections. Le rôle de la mémoire ici n'est pas négligeable puisqu'ils doivent retenir la mesure de la quantité pour la bande 1, puis la 2 (comparer), puis la 3. Les élèves sont très persévérants et comptent et recomptent jusqu'à épuisement des cubes jaunes.

Dans le cas 2, deux procédures principales avec des variantes :

- L'une consiste d'abord à rééquilibrer chacune des bandes soit en ayant 3 pions sur chaque bande mais aussi 4 (si l'enfant pense qu'il faut distribuer des pions sur chaque bande), puis la procédure du cas 1 émerge. La présence d'un reste est gérée soit en le posant sur une bande (donc il n'y en a pas autant sur chaque bande), soit en le cachant (!), soit en demandant à l'enseignant si c'est possible.
- L'autre consiste à distribuer des cubes en remplissant les trous entre les gommettes, si bien qu'ici, puisqu'il y a 5 pions sur la bande de gauche, les élèves mettent 5 pions sur la bande de droite puis 5 sur la bande du haut. Ils comptent (ou pas) et ajustent avec le reste des cubes à placer.

Dans le cas 3, les pions sont déjà placés comme après un essai réalisé par un élève. La tâche consiste à déplacer des pions pour répondre à la question analogue *« déplacez les pions pour qu'il y ait autant de jetons sur chaque bande ».* Une contrainte supplémentaire a été ajoutée : le nombre de déplacements des pions est limité, ici, à trois. Cette variante va davantage orienter le travail vers la validation.

Les enseignantes proposent alors toute l'année le jeu des 3 bandes en jouant sur les cas et les variables didactiques.

Dans les classes maternelles ordinaires, en France, les enseignants demandent, dans le meilleur des cas, à leurs élèves, ce qu'ils ont appris lors de leurs ateliers. Les élèves répondent souvent en exposant ce qu'ils ont fait. À la question qu'avez-vous appris en jouant au jeu des bandes, les élèves de l'année 1 (3 ans) répondent « on a joué avec des pions, on a perdu ou on a gagné », ou bien « on a appris à compter ». Leurs réponses ne sont pas étonnantes…

Margolinas (2021) cite Brousseau (1998, p. 59*) qui explique* : *« Au sujet de l'institutionnalisation, l'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle. (ibid., p. 60) L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence a-didactique et ce qui est d'origine didactique. Il ne distingue pas aisément, nous l'avons montré, dans les connaissances qu'il rencontre en situation, celles qui sont visées par le professeur et celles qui ne le sont pas. »*.

[10] Attention, les cubes ne sont pas proposés « rangés » mais en vrac, la photographie a été faite pour l'article et nous avons laissé les cubes bien rangés !

L'un des enjeux du processus d'institutionnalisation est de s'appuyer sur l'activité des élèves pour produire des textes contribuant à une formulation des savoirs. Ainsi, lors de la réalisation d'autres tâches mobilisant les mêmes savoirs, les élèves sont alors conduits à les formuler. Alors, le processus d'institutionnalisation peut être décrit selon les étapes suivantes : les élèves produisent des connaissances en acte, l'enseignant pointe les connaissances visées, les élèves identifient les savoirs qui seront alors réinvestis, tout d'abord dans des situations proches.

Afin de favoriser ce processus, nous avons utilisé de courts films d'élèves lors de la situation d'action, ou des photos des résultats d'une action. C'est ainsi que Luca est amené à commenter la production d'un de ses camarades et de la corriger sans pour autant déplacer des pions. Lors de la situation de formulation, Luca reprend des termes utilisés lors des différentes phases d'institutionnalisation.



Figure 3 : Luca au tableau : illustration

Dans l'extrait suivant qui reprend les échanges entre un élève et son enseignante, nous avons noté en gras tous les mots que Luca reprenait de phases antérieures. Luca dénombre les pions de chaque bande, mémorise les quantités et les compare. Il est ensuite capable, avec le soutien de son enseignante, de mettre des mots sur ses procédures. Il avait également noté que son enseignante proposait plusieurs formulations « 5 c'est plus que 6 et 6 c'est moins que 5, 6 c'est un de plus que 5. », il est probable qu'il utilise ces formulations qui correspondent au déroulement de sa pensée. Enfin, il valide son résultat en rappelant qu'après le déplacement, il y a la même quantité sur chaque bande.

Florence : A-t-on autant de pions sur chaque bande ?

Luca : (dénombre les pions) Un, deux, trois quatre cinq (bande de droite). Un deux trois quatre (bande du haut) Un deux trois quatre cinq six (bande de gauche). Quand je mets mon doigt sur du rouge, ça fait du rouge sur mon doigt.

Florence : donc il y en a 5, 4 et 6. La question est « est ce qu'il y en a autant sur chaque bande »

Luca : non,

Florence : fais-moi une phrase

Luca : Non il n'y **en a pas autant sur chaque bande.**

Il y en six ici, moins ici, et moins ici (en montrant les bandes), **cinq c'est moins que six.**

Florence : Alors comment vas-tu faire ?

Luca Attends ce n'est pas ce que je voulais dire 5 **c'est plus petit que** 6, 4 **c'est plus petit que 6 et 6 c'est plus grand que 4.**

Florence : Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire pour en avoir autant sur chaque bande ?

Luca : On enlève n'importe lequel de ces pions (en montrant la bande 6).

Florence : d'accord, qu'est-ce qu'on fait avec ce pion ?

Luca : On le met sur cette bande (en montrant la bande du 4) et ça fera **autant** sur chaque bande. 5 ici, 5 ici et 5 ici.

Figure 4 : échanges entre Luca et son enseignante lors d'une situation de formulation.

IV - DU TRAVAIL EN CLASSE AUX ÉVALUATIONS NATIONALES

Nous rappelons que nous avons proposé aux élèves de nombreuses situations développées au sein du Corem (la valise de toutou, le jeu de la file, le bon panier…), et d'autres encore extraites de la ressource Ermel GS.

Nous savions que les élèves de ces classes en fin d'année étaient performants sur des tâches mettant en jeu la relation « autant que ». L'ensemble de l'équipe a été très déçu lors des résultats des évaluations CP notamment sur celle-ci dont voici la consigne orale.

« *Je vais vous lire un problème avec une question. Pour répondre : entourez le bon nombre sur la ligne. Pour vous aider : vous pouvez écrire et dessiner dans le cadre. Si vous n'y arrivez pas, ce n'est pas grave. Nous allons faire un exemple ensemble.*

6 poules veulent couver 1 œuf chacune. Il y a seulement 3 œufs. Combien d'œufs doit-on ajouter pour que chaque poule couve un œuf ? »

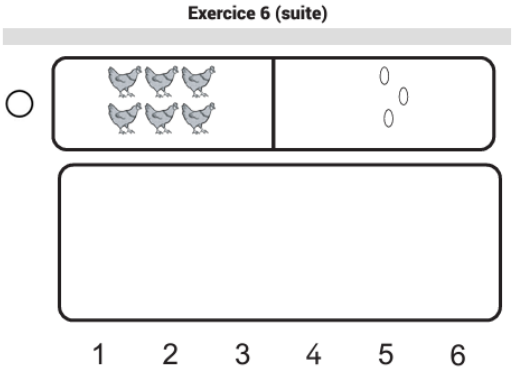


Figure 5 : extrait évaluation CP

Ces évaluations sont passées 15 jours après la rentrée des classes de septembre. La pertinence didactique de cet item nous a questionné : comment la donnée 3 va-t-elle être traitée ? En effet, la bonne réponse est 3 mais il y a 3 œufs de dessinés, cela rend impossible de distinguer les élèves qui ont juste car ils ont trouvé le complément à 3 pour faire 6 de ceux qui dénombrent le nombre d'œufs. Par ailleurs, les élèves qui entourent 6 ont bien compris la notion de « autant que » mais n'ont pas tenu compte du complément.

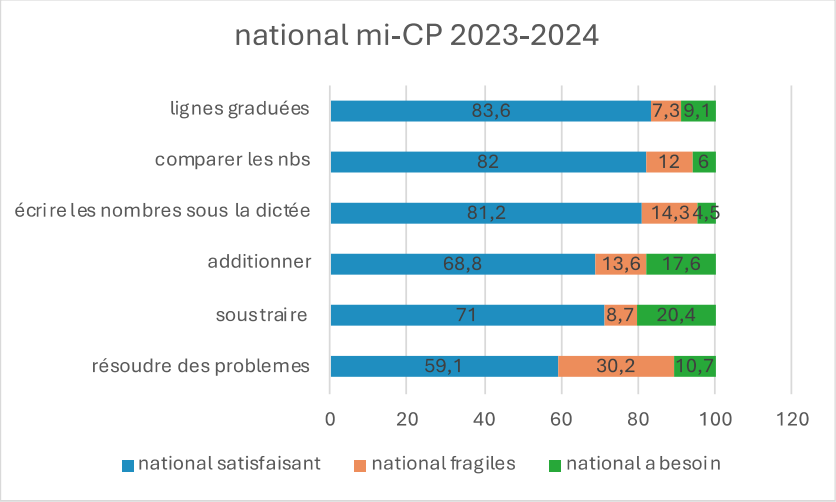
Nous avons assisté à ces passations et avons observé les élèves que nous avions suivis en classe de GS.

Ces observations et les discussions qui ont suivi se sont conclues en émettant les hypothèses suivantes :

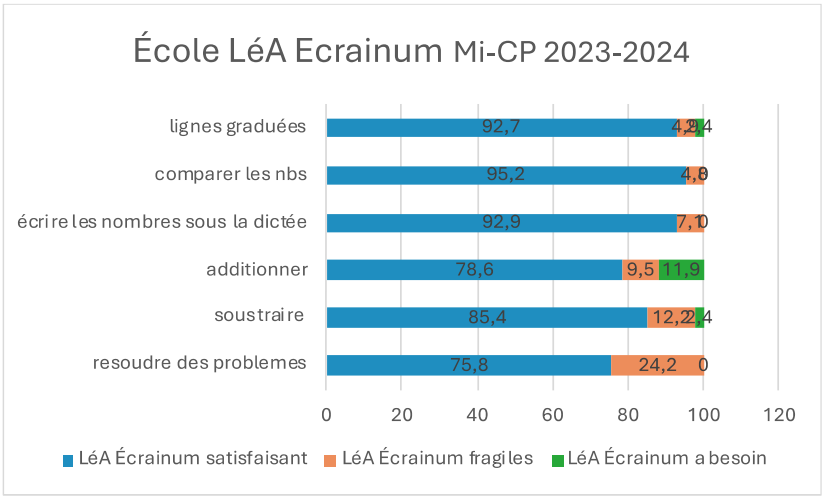
- nos élèves savent réaliser ces tâches mais le format de la tâche est trop éloignée de ce qu'ils ont fréquenté (hypothèse admise).
- Nous devons conduire les élèves à mobiliser davantage l'écrit pour réaliser des tâches mathématiques.

Ces deux hypothèses nous ont conduites l'année suivante à projeter davantage les situations vécues en classe à l'aide d'un vidéo projecteur pour montrer et apprendre aux élèves le sens de représentations graphiques pour « entourer, barrer, relier ». Nous avons davantage proposé des situations de communications écrites et d'auto-communication écrites. Les résultats aux évaluations CP l'année suivante ont davantage correspondu aux attentes des enseignants[11] en étant au même niveau de performance que le niveau national, ce niveau a par ailleurs été maintenu lors des évaluations de mi-CP.

Par exemple pour l'Item résoudre des problèmes, le LéA Ecrainum obtient le score de 75.8 contre 59.1 au national.



[11] Nous trouvons que la plupart des items des évaluations CP sont assez mal conçues toutefois ces évaluations sont des outils de pilotage et les enseignantes sont sensibles à ce que cela renvoie du travail qu'elles ont fourni avec leurs élèves.



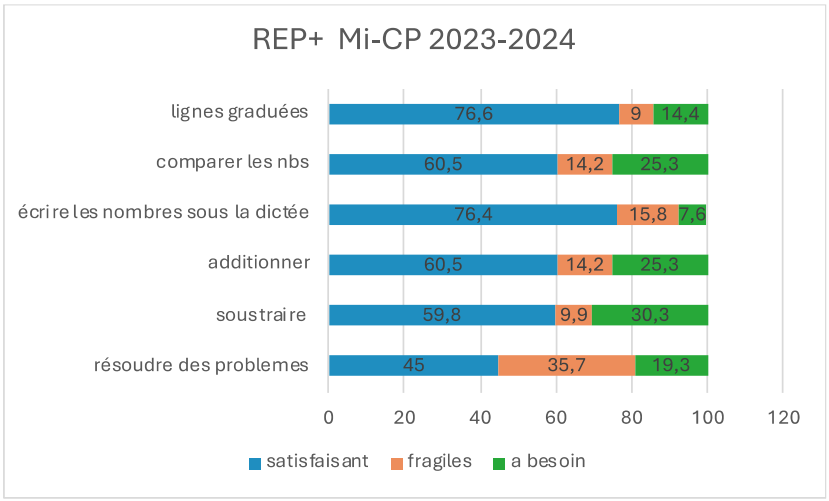


Figure 6 : résultats aux évaluations de mi-CP

V - CONCLUSION

Depuis 2018, nous nous attachons à proposer des tâches pour lesquelles les réponses des élèves ne sont pas immédiates. Nous avons dû discuter et expliquer souvent aux enseignantes certaines des situations-problèmes proposées par l'équipe entourant Brousseau. Plusieurs décennies après leurs élaborations, ces situations et celles que nous avons créées sont des leviers forts pour que les élèves apprennent. Certaines données révèlent que ces apprentissages constituent bien des moyens de réduire les inégalités scolaires.

En effet, les résultats obtenus par les élèves du LéA ECRAINUM aux évaluations nationales à l'entrée du CP indiquaient une très forte progression entre 2022-2023 et 2023-2024 et 2024-2025 (les cohortes qui étaient en grande section de maternelle les années précédentes), confirmée par le point d'étape au mi-CP notamment pour l'item « résolution de problèmes ». Dans cette REP+, les élèves ont obtenu de meilleurs résultats que la moyenne nationale du secteur Public hors éducation prioritaire.

Même si nous pouvons être critiques envers les évaluations nationales, les résultats indiquent une réelle réduction des inégalités d'apprentissage. Et cette réduction induit, à son tour, de nouveaux effets sur les pratiques, dans un cercle vertueux. En effet, les enseignantes de CP ayant accueilli la cohorte des GS de notre étude témoignent d'un ensemble de caractéristiques nouvelles de ces élèves, comme une plus grande facilité à rentrer dans les situations de résolution de problèmes ou à argumenter pour comparer leurs procédures. Elles déclarent, en outre, que cela les amène à proposer des tâches complexes qu'elles auraient évitées les années précédentes, et qu'elles prennent conscience de l'importance des phases d'institutionnalisation inscrites dans un processus. Ce travail collaboratif a convaincu les enseignants voire les chercheurs que la réduction des inégalités passe par la proposition de contenu robuste et par le développement d'un processus d'institutionnalisation fort ponctué par des étapes de formulation par l'enseignant avec reprise par les élèves.

VI - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

Dans un premier temps, nous avons discuté des items des évaluations nationales afin de montrer quelles tâches étaient évaluées. Nous avons montré une vidéo d'Afizah en train de jouer au jeu de la marchande et avons demandé aux participants de lister les connaissances en jeu (comptage de deux en deux en oralisant, surcomptage, reconnaissance et lecture des nombres).

Puis nous avons distribué le matériel (les bandes et les jetons) pour que les participants puissent proposer des problèmes à partir de ce matériel et d'en réaliser des analyses à priori. À la suite des échanges, nous avons exposé nos choix en les illustrant à l'aide d'une vidéo.

Nous avons ensuite montré un court extrait vidéo pour que les participants puissent identifier ce qui guide les procédures des élèves dans un premier temps. Certains ont exprimé leur étonnement face à l'importance de la disposition spatiale pour les élèves. Les discussions ont également porté sur les couleurs, certains estimant qu'il fallait les neutraliser. Nous avons argumenté qu'au contraire les élèves avaient besoin de se confronter à cela pour mieux construire le concept de quantité.

Nous avons ensuite demandé « quelles sont vos propositions pour faire vivre une situation de communication au sens de Brousseau ? » à partir du jeu des bandes. Des participants nous ont demandé de revenir sur la définition des situations de communication.

Nous avons ensuite montré plusieurs vidéos de classe afin d'illustrer et de discuter sur un développement possible du processus d'institutionnalisation à l'école maternelle.

En guise de conclusion, nous avons pu mettre en évidence des conditions identifiées qui contribuent au processus d'institutionnalisation et expliquent la réduction des inégalités scolaires au sein du LéA : des enseignants formés qui ne s'arrêtent pas face aux difficultés sociales, qui résistent et ne montrent pas les réponses dès la première rencontre

avec le problème et ne demandent pas aux élèves d'appliquer une procédure qu'elles auraient explicitement dévoilée. Les enseignantes reformulent, gardent des traces, et s'appuient sur de courtes vidéos pour offrir une dimension collective au processus d'institutionnalisation. Ainsi, les élèves s'appuient sur les formulations des enseignantes, ils sont confiants et ils bénéficient de nombreux essais grâce à la progression spiralaire. Nous soulignons que le dispositif Rep+ est bien investi, et rend possible des temps de concertation et de réflexion qui contribuent à établir des progressions communes en tenant compte de 4 fonctions du nombre (anticiper/calculer, désigner, indiquer un rang, comparer).

BIBLIOGRAPHIE

Allard, C. (2015) *Étude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire. Le cas de l'enseignement des fractions*. Université de Paris VII, Paris.

Allard, C. Horoks, J. Pilet, J. (2022) Principes de travail collaboratif entre chercheur·e·s et enseignant·e·s. Le cas du LéA RMG, *Éducation & Didactique, 16/1*, p. 49-66. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.9644

Allard, C., Mamede, M. (2023) Étude des conditions nécessaires pour favoriser l'exercice de la vigilance didactique des formateurs en formation initiale ciblée sur les liens entre apports théoriques et pratiques en classe ». *Annales de didactique et de sciences cognitives, Numéro thématique 1*, p. 341-376. https://doi.org/10.4000/adsc.1949

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Hersant, M. (2022) Faire des mathématiques à l'école maternelle. À quelles conditions ? ». *Grand N, 110*, p. 5-19.

Mamede, M. & Allard, C. (2023) Étude des pratiques d'enseignantes débutantes à l'école maternelle en mathématiques. Difficultés d'apprentissage ou d'enseignement. Dans H. Durler et P.Losogo (dir.). *Former aux inégalités scolaires. Pratiques et recommandations pour la formation des enseignant·e·s*. Neuchâtel : Alphil, p. 241-269.

Margolinas, C. (2021) Construire des points de vue d'élèves : Des défis théoriques et méthodologiques pour la recherche en didactique des mathématiques. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A-C Mathé, Pressiat, A., Schneider, M., Vandebrouck, F. (Éds), *Nouvelles perspectives en didactique : Le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (Vol. XXe école d'été de didactique des mathématiques, pp. 19-48). Grenoble : La Pensée Sauvage.

UN ENVIRONNEMENT VIRTUEL AU SERVICE DES CONNAISSANCES SPATIALES DE REPÉRAGE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Sylvia COUTAT

Chargée d'enseignement, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, DIMAGE

Sylvia.Coutat@unige.ch

Jean-Luc DORIER

Professeur ordinaire, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, DIMAGE

Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Sabrina MATRI

Post doctorante, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, DIMAGE

Sabrina.Matri@unige.ch

Résumé

Les connaissances spatiales (Marchand, 2020) sont essentielles dans le contexte scolaire pour leurs relations avec les connaissances géométriques (Berthelot & Salin, 1999) mais aussi dans nos déplacements au quotidien. Ces connaissances sont aujourd'hui fortement mises en relation avec les technologies (Duroisin, 2015). Dans le cadre du projet de recherche SPAGEO[1], une ingénierie didactique a permis de tester plusieurs situations d'apprentissage impliquant un environnement virtuel. Les apports de la technologie ont permis de décliner ces situations selon des choix de valeurs de variables didactiques. L'enjeu de l'atelier sera d'étudier dans quelle mesure les divers choix affectent les connaissances des élèves et peuvent orienter certaines stratégies.

Développer les connaissances spatiales en s'appuyant sur le macro-espace dans le cadre scolaire n'est pas toujours aisé, il en est de même dans le cadre de la formation des enseignants. Quelques interventions dans les colloques COPIRELEM ont permis de mettre en lumière certaines situations de formation qui exploitent le méso-espace (Masselot & Zin, 2008; Rabatel & Martinez, 2018; Simard, 2022). Si le macro-espace est difficilement accessible, les nouvelles technologies apportent de nouvelles potentialités comme le macro-espace virtuel accessible à travers des environnements virtuels. C'est à l'aide d'une technologie numérique développée dans le cadre de la recherche SPAGEO[2] que cet atelier a permis d'illustrer comment un macro-espace simulé peut agir sur les connaissances spatiales des élèves de CE1-CE2 et CM1. Avant d'entrer dans la description des moments clés de cet atelier nous revenons sur quelques travaux autour des connaissances spatiales en didactique et en psychologie cognitive. Les situations vécues par les participants permettront de présenter l'environnement virtuel et son utilisation en classe. Nous conclurons par quelques résultats en lien avec cet atelier et la recherche SPAGEO.

[1] Acronyme pour SPatial Abilities and GEOmetry) financé par le Fonds National Suisse (Subside no 100019_188947 Sept 2000 – Aug 2024. https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/

[2] Rethinking the links between spatial knowledge and geometry in primary education through a virtual environment, financed by the Swiss National Science Foundation (Subside no 100019_188947 Sept 2000 – Aug 2024).

I - REPÉRAGE DANS LE PLAN ET L'ESPACE – QUELQUES APPORTS THÉORIQUES

1 En didactique des mathématiques

Les connaissances spatiales et les connaissances géométriques sont souvent associées. Si les savoirs géométriques découlent de savoirs savants identifiables, cela est moins évident pour les savoirs spatiaux. Les premiers travaux en didactique des mathématiques remontent aux années 90 avec les travaux de Brousseau et ceux de Berthelot et Salin. Plus récemment, Marchand a complété les réflexions en s'appuyant sur des travaux anglo-saxons. Nous présentons brièvement ces différents travaux.

1.1 Les connaissances spatiales

Selon Berthelot et Salin (1992, 1999), les connaissances spatiales ont un rôle important dans le développement des connaissances géométriques. En effet, les connaissances spatiales sont définies comme les connaissances qui permettent d'anticiper et de contrôler les effets de ses actions sur l'espace. Outre la reconnaissance des objets géométriques, les connaissances spatiales entrent en jeu lors de description de positions d'objets ou de déplacements. Clements (1999) définit les connaissances spatiales à l'aide de deux composantes. La composante *orientation* se rapproche de la définition de Berthelot et Salin. La composante *organisation* concerne le développement des images mentales (Marchand, 2006) concernant les relations entre les objets de l'espace. Finalement Marchand (2020) propose une définition des connaissances spatiales qui s'appuie sur la définition de Berthelot et Salin et l'enrichit des travaux de Clements avec le développement et la coordination des images mentales.

Pour travailler ces connaissances de repérage dans le plan, différents espaces peuvent être mobilisés.

1.2 Les espaces de travail

Brousseau (1983) considère trois espaces différents propices aux développement des connaissances spatiales et des connaissances géométriques. Le micro-espace est de la taille d'une feuille de papier ou du bureau des élèves ; cet espace permet une visibilité immédiate de l'ensemble des objets et de leurs relations par l'élève qui est extérieur à cet espace. Le méso-espace est un espace plus grand, comme une salle de classe, qui contient l'élève. Là encore les objets et leurs relations sont appréhendables mais peuvent nécessiter que l'élève se tourne pour percevoir l'espace dans sa totalité. Enfin, le macro-espace est un espace bien plus grand (l'école, un quartier, une ville, …) qui contient l'élève. Les objets et leurs relations sont accessibles par déplacements de l'élève. Dans ce cas, il est nécessaire de faire des recollements des images perçues pour obtenir une représentation complète de l'espace.

Ces travaux en didactiques des mathématiques s'accordent sur la nécessité d'introduire explicitement dans l'enseignement primaire des objectifs relatifs aux connaissances spatiales, en particulier dans le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets (Berthelot & Salin, 1999).

2 En psychologie cognitive

D'autres travaux ont été développés en parallèle dans le cadre de la psychologie cognitive. Ces travaux ne considèrent pas les connaissances relativement à des savoirs ou des référentiels institutionnels en lien avec l'éducation. Ils prennent plutôt en compte le développement de l'enfant dans sa perception du monde et le développement de ses représentations mentales de l'espace, ses représentations spatiales.

2.1 Cadres de références

Selon Piaget et Inhelder (1948) l'enfant développe sa représentation de l'espace en agissant sur cet espace. Cela lui permet d'évoluer dans l'espace et, par ses mouvements et déplacements, il appréhende son propre corps d'une part et sa relation avec l'espace d'autre part. La prise en compte de son corps dans l'espace passe par exemple par la prise en compte d'un autre point de vue que le sien. La représentation de l'espace évolue

progressivement et selon Burgess (2006) l'humain se représente l'espace à l'aide de différents point de vue. Un point de vue égocentré est un point de vue pour lequel le sujet est au centre et définit les objets et leurs relations selon son point de vue, il s'agit d'une vue à la 1re personne. Dans un point de vue allocentré, l'espace est représenté depuis l'extérieur, avec un système de coordonnées par exemple, ou comme une carte.

2.2 La carte mentale

Tolman (1948) développe le concept de carte cognitive qu'il définit comme une représentation mentale de l'environnement. Ses travaux sont complétés par ceux de Siegel et White (1975) qui se sont concentrés sur le développement cognitif des connaissances spatiales chez les enfants. Ils proposent un développement en trois phases : points de repère, itinéraires et configuration. Les points de repères sont des objets de l'environnement perçus et reconnus. Un point de repère peut être global (vu de loin) ou local (déplacement plus précis). Les itinéraires sont une succession ordonnée de points de décision reliés entre eux par des portions de chemin au long desquels se trouvent différents points de repères (Duroisin, 2015, p.19). Ainsi, une fois que l'enfant maitrise quelques points de repère il établit des connexions entre eux sous forme d'itinéraires. Enfin, la configuration est une représentation globale de l'environnement, dans laquelle les relations entre les points de repères sont codées et avec laquelle de nouvelles routes peuvent être construites entre différents points de repères. Le travail de Siegel et White a cherché à décrire comment ces types de connaissances se développent progressivement chez les enfants en fonction de leurs expériences de déplacement et d'interaction avec l'espace.

II - LES AMBITIONS DE L'ATELIER

À partir des constats émis en didactiques des mathématiques, il est essentiel de promouvoir le méso-espace et le macro-espace à l'école. Comme il est difficile de déplacer la classe dans des grands espaces extérieurs, les environnements virtuels se présentent comme des alternatives intéressantes. De plus, si on considère les usages des technologies numériques dans notre quotidien voire dans nos déplacements, il semble pertinent de les introduire en classe d'une part pour combler certaines lacunes de l'école (accès au macro-espace et développement des connaissances spatiales), d'autre part pour familiariser les élèves à leurs usages. Enfin, selon Chen et Stanney (2002) les représentations de l'espace (ego et allo centrés) identifiés dans les interactions avec un environnement réel se retrouvent dans les interactions avec un environnement virtuel.

Le projet SPAGEO s'est développé autour de trois équipes de recherche : une équipe de didactique des mathématiques, une équipe en psychologie cognitive et une équipe spécialisée dans les technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage. La recherche menée dans le cadre de ce projet a permis le développement d'une ville virtuelle et d'une ingénierie didactique, le tout expérimenté avec une centaine d'élèves de CE1 suivis en CE2 puis en CM1. Cette ville virtuelle est accessible sur PC (pas de casque immersif).

En appui sur les travaux présentés précédemment, nous avons identifié deux situations fondamentales associées aux connaissances spatiales : une situation fondamentale autour des lieux (qui vise les connaissances des points de repères) et une autre autour des chemins (qui vise les connaissances des itinéraires). Ces deux situations se déclinent en situation d'enseignement et d'apprentissage selon des choix spécifiques de valeurs de variables didactiques (Dorier, 2010). Pour cet atelier, nous avons proposé aux participants de vivre certaines situations afin de les sensibiliser à des effets spécifiques liés aux choix didactiques. Ainsi nous avons pu travailler autour de la question de l'exploitation d'un environnement virtuel pour développer les connaissances spatiales tout en s'adaptant aux connaissances des élèves. Cela est passé par des échanges autour de l'identification de variables didactiques, des différentes valeurs disponibles et des conséquences de certains choix sur l'activité de l'élève. Ces différentes observations sont devenues une entrée pour une analyse didactique et une explicitation des variables didactiques. Cela permet de hiérarchiser les différentes situations proposées, aussi bien en fonction des « difficultés » que des connaissances en jeux.

III - DES MISES EN SITUATIONS

L'environnement virtuel que nous avons utilisé est encore en développement. Certaines situations préparées en amont n'ont pas pu être travaillées car non compatibles avec les ordinateurs présents dans la salle. Nous présentons ici quatre situations qui ont permis de répondre en grande partie à nos attentes.

1 Exploration libre

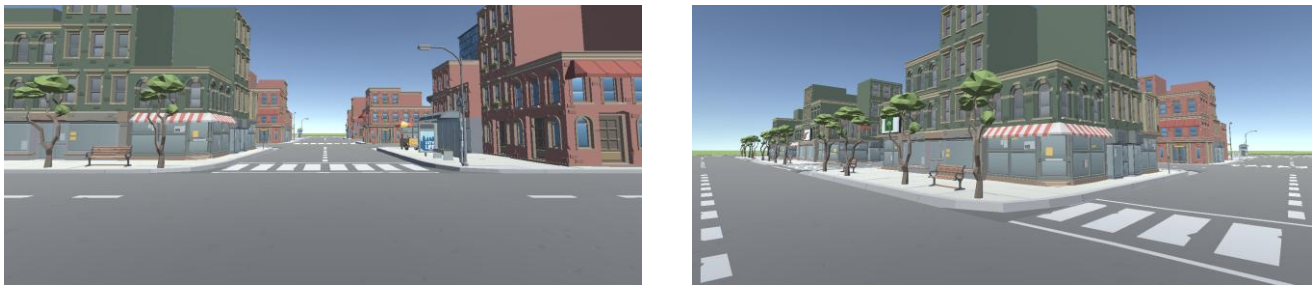
Une première tâche consiste à se déplacer dans la ville afin d'explorer les différents quartiers qui la composent, la consigne étant : « je vous laisse vous promener librement dans la ville afin de la découvrir. Nous pourrons échanger ensemble sur ce qui vous a surpris ou ce que vous avez remarqué. » Si cette première appréhension de la ville peut être intéressante dans le cadre d'une formation, elle est moins appréciée des élèves qui ont souvent besoin d'un but dans l'exploration. Il est alors possible de leur demander de recenser tous les marchands de glaces ou boulangerie ou stand de hot-dog qui sont dans la ville. Cette exploration est accessible via la version web de l'environnement (https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/spageocity-fr.html).

Cette première découverte de la ville permet de mettre en évidence des choix globaux de conception et de développement de la ville virtuelle. Ces choix globaux sont le résultat des échanges entre les différents acteurs du projet SPAGEO afin d'être au plus près des contraintes et besoins de chacun. Les contraintes développementales ont aussi orienté certains choix.

Dans le cadre de la formation, cette première exploration de la ville permet aux participants d'en relever quelques spécificités. Voici celles qui ont été discutées dans le cadre de l'atelier :

- Quelques constats concernent l'organisation de la ville. En effet nous avons fait le choix de développer une ville de type américaine, c'est à dire que les routes sont parallèles et perpendiculaires. À partir du plan présenté en annexe, on peut voir que la ville s'assimile à un quadrillage. Nous avons fait ce choix pour différentes raisons. Lorsque les élèves se déplacent dans la ville et se retrouvent à un carrefour, seules trois directions sont envisageables (devant, à gauche ou à droite). Ensuite, lorsque l'élève se déplace sur la route et avance, il peut dire qu'il avance tout droit. Si la route fait une courbe sur la droite ou la gauche, comment des élèves de 7-10 ans peuvent-ils expliciter cette information sans trop d'ambiguïté ? Il nous semble qu'une telle configuration complexifie inutilement les formulations entre les élèves.
- Une remarque qui est apparue rapidement chez les participants concerne le caractère figé de la ville. En effet, quelques voitures sont garées mais aucune ne se déplace sur la route. De plus, on est seul dans cette ville, aucune autre personne n'est présente. Ces choix ont été rapidement fixés lors de nos échanges concernant le développement. Quelques voitures sont présentes mais elles ne se déplacent pas car nous ne voulions pas qu'elles deviennent des points de repères « temporaires » pour les élèves. En effet, lorsque les voitures peuvent se déplacer, une voiture qui est utilisée comme point de repère à un instant T ne désignera pas le même lieu à un instant T' une fois qu'elle se sera déplacée. Nous avons ainsi choisi de ne pas créer d'ambiguïté autour des points de repères. Ensuite, nous avons choisi de ne pas ajouter d'autres personnages dans la ville afin de ne pas distraire les élèves qui pourrait être à la recherche d'interactions dans la ville comme dans les jeux vidéo. SPAGEO City est un environnement à visée d'apprentissage et non de jeux interactifs.
- En plus de ne voir personne, il n'est pas possible de se voir. En effet, la vue choisie dans le développement est une vue 1re personne. Cela a pour but de rendre « immersif » le déplacement dans la ville. Concrètement, lors du déplacement on ne voit pas son corps. Un effet que nous n'avions pas anticipé est que lorsque l'on vise un lieu spécifique, il ne suffit pas de le voir sur l'écran, il faut être sur le lieu, c'est-à-dire que les pieds doivent être à la bonne position. Par exemple lorsque l'on souhaite s'arrêter dans un carrefour, il ne faut pas stopper le déplacement lorsque le carrefour en question apparait sur l'écran comme sur Figure 1-A. En effet si je vois le carrefour, cela ne signifie pas forcément que je suis dans le

carrefour. Ainsi il ne faut pas hésiter à avancer dans le carrefour et tourner pour s'assurer d'être dans le carrefour (Figure 1).



A – Je suis devant le carrefour B – Je suis dans le carrefour

Figure 1. Position devant (A) ou dans (B) un carrefour

Pour se déplacer dans la ville, il est possible d'utiliser les flèches directionnelles du clavier ou une manette de jeu pour avancer, tourner à droite ou tourner à gauche. Il n'est en revanche pas possible de reculer sur une longue distance. Comme l'environnement se veut au plus proche d'un environnement réel, nous avons choisi de ne pas autoriser l'élève à reculer. Lors de pré-tests (Coutat, 2020) nous avions remarqué que lorsque les élèves souhaitaient revenir en arrière ils reculaient plutôt que de faire demi-tour. Il faut reconnaitre qu'un demi-tour est couteux cognitivement parlant, car tous les points de repères se retrouvent inversés (ce qui est à gauche se retrouve à droite après le demi-tour). De plus, dans la plupart des jeux il est possible de reculer. Comme nous souhaitions nous rapprocher des contraintes réelles sans favoriser un environnement de jeu, nous avons choisi de ne pas autoriser l'élève à reculer.

Pendant cette première découverte de la ville, les participants ont identifié différents quartiers de la ville. Afin de travailler avec différents points de repères et pouvoir multiplier les situations (de lieux et ou de chemins), SPAGEO City est découpée en deux principaux quartiers, le quartier centre-ville (Nord-Ouest sur la carte) et le quartier résidentiel (Sud-Est sur la carte). Dans le quartier du centre-ville, une multitude de points de repères est disponible. Il y a des blocs composés de hautes tours (quartier d'affaires) ; des rues avec des vitrines marchandes (quartier commercial) ; des locaux d'habitation (rouge) ; une vieille ville (maisons rouges et en bois). S'ajoutent à ces spécificités de blocs des éléments relatifs à la signalisation (panneaux Stop, feux), des passages piétons, des arrêts de bus. Dans le quartier résidentiel, tous les blocs d'habitation sont identiques (des maisons blanches). Les procédures de repérage utilisant les points de repères uniquement ne sont plus efficaces, il faut les remplacer par des procédures numériques (compter les blocs ou carrefours) et utiliser les points de repères globaux. Les différents espaces de SPAGEO City sont présentés sur la Figure 2 et nous reviendrons sur les choix didactiques opérés dans les prochaines situations.

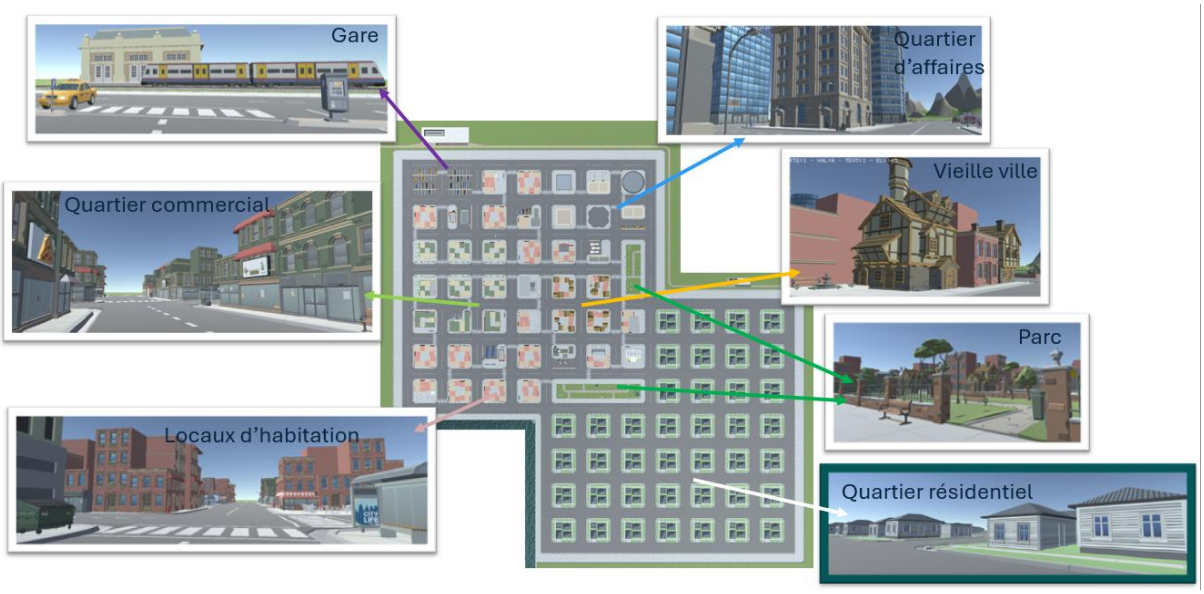


Figure 2. Plan de SPAGEO et des différents quartiers

Parmi les points de repères globaux, nous avons utilisé le soleil, orienté vers le sud. Ce soleil ne se déplace pas ; là encore ce choix a pour but de rendre le soleil fiable lorsqu'il est utilisé comme point de repère. S'ajoutent au soleil un plan d'eau, des montagnes et les tours du quartier d'affaires.

2 Recherche d'un lieu

Après cette première découverte de la ville, la photo du musée (voir fFigure 3) est affichée et les participants doivent se rendre sur ce lieu. Le point de départ lors de l'activité d'exploration de la ville étant ce lieu, tous les participants l'ont forcément déjà rencontré, il s'agit en général de le retrouver. Pour cela les participants ont utilisé différentes stratégies. Certains ont « quadrillé » la ville méthodiquement, parcourant une rue sur toute sa longueur, puis celle qui suit, etc… D'autres ont essayé de se souvenir quand ils étaient passés devant le musée (chronologiquement, c'était plutôt au début de leur exploration). Enfin, d'autres ont cherché des indices spatiaux sur la photo comme la présence des maisons vertes en arrière-plan avec des arbres ou le stand de hot-dog. Le musée fait partie des quelques lieux singuliers répartis dans la ville avec l'hôpital, l'école, la police, la bibliothèque entre autres.



Figure 3. Lieu singulier – Musée

Ces lieux restent minoritaires dans SPAGEO City et les élèves sont plus souvent amenés à travailler sur la reconnaissance de lieux qui se caractérisent par un ensemble de points de repère. Par exemple, le lieu que nous avons proposé aux participants est présenté dans la Figure 4-A. Ce lieu est bien moins reconnaissable que le musée.



A



B

Figure 4. Deux lieux partageant de nombreux points de repères

Pour retrouver ce lieu dans la ville, on peut commencer par le caractériser à l'aide de plusieurs points de repères. Ces points de repères permettent aussi de délimiter le quartier comme par exemple la couleur de la façade qui indique que ce lieu se trouve dans le quartier du centre-ville. En arrière-plan, on peut voir sur la gauche des arbres (présents dans une unique rue de la ville) et sur la droite des maisons rouge. Ces maisons signifient que le lieu est à la frontière du centre-ville. Si on connait bien la ville, on peut reconnaitre sur la droite au fond la station-service qui est un point de repère singulier (une seule station-service dans la ville). Ces points de repères restreignent la zone géographique à explorer. Les éléments qui composent la façade sont aussi des points de repères. Ainsi le store rouge et blanc permet de caractériser la recherche. Attention cependant à ne pas utiliser la seule information « présence d'un store rouge et vert » car, comme le montre la Figure 4-B, une autre façade verte possède un store rouge et blanc mais cette fois-ci le store est sur la droite. Il s'agit alors de relever les points de repères mais aussi les relations entre eux. Pendant leur recherche, certains participants ont trouvé le lieu de la Figure 4-B.

Les différents quartiers de SPAGEO City permettent de varier les points de repères. Certains lieux comme le musée sont des points de repère singuliers. D'autres se caractérisent par une combinaison de points de repères. Dans ce cas, il faut identifier les points de repères pertinents (avec notre exemple le store rouge et blanc) et leurs relations (le store sur la gauche du côté des arbres et du banc).

Dans un premier temps, les participants n'ont pas eu accès à une carte de SPAGEO City, le but étant de favoriser le développement de leur représentation de l'espace et leur propre carte cognitive. Par la suite cette carte a été introduite pour des situations de chemins. Nous y reviendrons dans la prochaine partie. Nous avons cependant pu utiliser la carte dans la recherche d'un lieu. Nous avons demandé aux participants d'indiquer sur la carte la position de la fontaine. Dans ce cas, il s'agit de retrouver la fontaine dans la ville puis d'associer la position dans la vue 1re personne à sa position correspondante dans une vue carte. Dans le cadre de l'atelier, une carte papier était disponible pour les participants. Il est aussi possible de donner un accès uniquement via l'application ; dans ce cas, l'affichage sur l'écran est soit la carte, soit la vue première personne de la ville. Cela permet de mettre en relation les différentes représentations que sont la représentation égocentrée et la représentation allocentrée. Pour valider leur réponse, les participants comparent leurs plans pour savoir s'ils ont ou non la même position de la fontaine. En cas de doute, ils peuvent retourner dans la ville vue 1re personne pour confirmer la position.

Cette validation mise en œuvre dans le cadre de l'atelier peut être complétée par deux autres validations, utilisées dans les situations de recherche de lieux dans la vue 1re personne, que nous avons brièvement présentées. Une première validation est sous la responsabilité de l'environnement qui indique à l'élève si sa réponse est correcte ou non. Une autre validation propose de comparer l'image du lieu à trouver avec l'image du lieu trouvé par l'élève. Cette fois-ci, c'est à l'élève de valider sa réponse.

3 Reproduction d'un chemin

Une fois que les participants se sont familiarisés avec la ville (découverte) et qu'ils ont distingué différents lieux par les points de repère, nous avons travaillé sur la communication d'un chemin.

Tout d'abord les participants ont accédé à un chemin à suivre matérialisé par une ligne fléchée dessinée sur la route (Figure 5).



Figure 5. Un chemin à suivre

De nombreuses discussions ont été nécessaires concernant la matérialisation de ce chemin. Il est important d'indiquer l'orientation du chemin par les flèches car dans le cas où l'élève revient sur ses pas, il doit savoir dans quelle direction se diriger. Dans une première version, les flèches étaient fixes sur la ligne. Cependant certains élèves ont utilisé ces flèches comme unités de longueur. En effet, ils comptaient le nombre de flèches entre deux carrefours de changement de directions. Or, lorsqu'il faut reproduire le chemin, la ligne et ses flèches disparaissent, il devient alors très difficile de remobiliser la longueur des flèches. Dans la dernière version, les flèches ne sont plus fixes mais elles se déplacent dans la direction du chemin. Il n'est plus possible de les compter.

Concernant la communication d'un chemin, plusieurs médias sont possibles. L'émetteur peut échanger directement avec le récepteur oralement. Dans ce cas, les deux élèves peuvent ajuster les informations au cours de l'échange. Il est aussi possible que l'émetteur produise un message écrit. Dans ce cas, le message ne peut être modifié lors de l'utilisation par le récepteur et lors de son élaboration, l'émetteur doit être le plus compréhensible possible. Il doit pouvoir se mettre à la place du récepteur qui n'aura pas la ligne dessinée. Lors de l'atelier, les participants ont produit un message écrit. Le Tableau 1 présente deux messages produits par deux participants de l'atelier.

Lignes d'instruction	Proposition A	Proposition B
1	Tout droit	Aller tout droit,
2	2e à droite (abris de bus juste avant le carrefour à gauche)	Passer 2 passages piétons Tourner à droite (c'est la rue avec les arbres)
3	2e à gauche	Aller tout droit, prendre la 2e à gauche
4	3e à gauche (avant dernière)	Aller tout droit (vers la mer, le lac) Tourner à l'avant dernière route à gauche On se retrouve face aux montagnes
5	1re à gauche	Prendre la 1re à gauche
6	Arrête au 1er croisement	S'arrêter au milieu du 1er carrefour

Tableau 1. Deux messages décrivant un même chemin

Un premier constat que l'on peut faire est que les deux messages utilisent le registre textuel. Une alternative possible était d'utiliser des flèches ou encore de produire un plan. Nous avons rassemblé sur une même ligne les différentes étapes du message. Si on compare les informations de chaque message pour chaque étape, le message B donne plus d'informations que le message A. En effet, pour la 4e ligne d'instruction, l'émetteur A indique « 3e à gauche (avant dernière) » alors que l'émetteur B indique « aller tout droit (vers la mer) / Tourner à l'avant dernière route à gauche / On se retrouve face aux montagnes ». Dans son message, l'émetteur B ajoute des indications qui peuvent servir au récepteur pour confirmer sa position au cours du déplacement. Pour cela il s'appuie sur des points de repères globaux (mer ou montagne). Ces informations confirmatoires sont complétées par une description numérique du chemin, c'est-à-dire qu'ils ont compté les carrefours. Les lieux de décision (changement de direction) sont majoritairement indiqués sans points de repère, de même les directions ne sont pas données par des points de repère (vers le lac) mais par gauche et droite. Pourtant, concernant la ligne 3, il faut effectivement tourner à gauche au carrefour du 24/7. Aucun des deux messages ne s'appuie sur ce point de repère. Par contre pour la ligne 4, il n'y aucun point de repère qui peut aider à reconnaitre le carrefour, ce qui peut inciter à utiliser des points de repères globaux (comme pour le message B).

On voit ici que le chemin peut traverser des carrefours avec des points de repères plus ou moins présents. Ici quelques points de repères ont été utilisés (abris de bus, passages piétons, arbres) mais pas systématiquement. En effet les deux messages s'appuient assez largement sur des descriptions numériques, c'est-à-dire qu'ils ont compté les intersections entre les carrefours de décision. Ces messages pourraient être très proches de messages produits dans le quartier résidentiel où les points de repère sont inexistants (en dehors des points de repère globaux). Cette tâche de description de chemin a été proposée dans le cadre de la recherche SPAGEO aux élèves de CE1 puis aux mêmes élèves alors en CE2 et finalement toujours aux mêmes élèves en CM1. Il se dégagent trois types de messages de par l'utilisation des points de repère : les messages qui utilisent les points de repère pour confirmer des positions, les messages qui utilisent les points de repère pour indiquer les lieux de changement de direction et les messages utilisant les points de repères pour décrire l'environnement tout au long du chemin (Frauchiger et al., 2022; Matri, 2024).

4 Planification de chemin

Après ces différentes situations, la ville devient de plus en plus familière aux participants. Pour finir, nous leur avons proposé deux tâches de planification de chemin. Ces planifications de chemin se sont appuyées sur une liste de course, le but étant de relier les différents lieux indiqués par la liste dans l'ordre. Dans un premier temps, ils ont réalisé la tâche individuellement avec la carte papier à disposition (Figure 6-Chemin A), puis une nouvelle planification a été réalisée collectivement, avec la carte disponible uniquement dans l'application (Figure 6-Chemin B).

Chemin A

Va prendre une baguette chez le boulanger face au café, puis une glace chez le glacier le plus proche.

Tu vas chercher du fromage à la fromagerie et finalement tu vas travailler à la bibliothèque.

Nous allons comparer les chemins, ceux qui auront fait les chemins les plus courts seront les gagnants !

Chemin B

Va prendre des crevettes chez le poissonnier puis des céréales au 24/7 près du bowling. Tu récupères une manette de jeu chez le marchand d'ordinateur puis passe au musée pour prendre un programme.

Finalement retrouve tes amis à l'école.

Nous allons comparer les chemins, ceux qui auront fait les chemins les plus courts seront les gagnants !

Figure 6. Indications pour la planification de chemin

Pour chaque planification de chemin, le travail consiste en l'identification des différents lieux sur la carte ainsi que du point de départ (rond jaune sur Figure 7).



Chemin A



Chemin B

Figure 7. Visualisation des lieux sur la carte

Différents lieux sont à relier, ce sont presque tous des lieux singuliers dans le sens où ils peuvent être décrits par leur nom. Dans le cas où il existe deux lieux identiques dans la ville, il faut rajouter une information pour les distinguer. Cette information s'appuie sur un point de repère (boulangerie face au café, 24/7 près du bowling), ou sur une distance (le glacier le plus proche). Tous ces lieux sont indiqués sur la carte. La deuxième étape consiste à planifier un chemin entre les différents lieux en respectant l'ordre de la liste. Chacun peut choisir son chemin pour relier les différents lieux. Il est possible de demander un chemin le plus court possible. Cela permet d'éviter des chemins qui feraient d'importants détours pour favoriser des lieux singuliers comme lieux de changement de direction par exemple.

Dans le cas du chemin A, la carte papier reste disponible lors des déplacements. Il s'agit alors de garder une correspondance entre la vue carte et la vue 1re personne. On peut se demander si on autorise un crayon qui permet de mettre en évidence les lieux à relier ainsi que de tracer le chemin à suivre. Une fois le chemin entre les différents lieux identifié, la tâche se ramène à une tâche de reproduction de chemin, le chemin étant indiqué sur la carte papier.

Dans le cas du chemin B, les participants n'ont plus la carte papier disponible et la tâche est travaillée collectivement. L'écran de projection affiche soit la vue carte, soit la vue 1re personne de la ville, la bascule entre les deux vues étant à la demande des participants. Comme dans la première version de la tâche, il s'agit d'identifier les différents lieux et de planifier le chemin entre les lieux. Cependant, cette fois-ci il n'est pas possible d'indiquer les lieux ou les chemins sur la carte, toutes ces informations doivent être mémorisées. Cette spécificité résulte du fait que les deux vues ne sont plus disponibles simultanément. Non seulement il faut mémoriser les lieux et les chemins mais les chemins construits dans la vue carte doivent être utilisés dans la vue 1re personne. Lors de l'atelier, les participants ont pu revenir à la vue carte quand cela était nécessaire, c'est-à-dire lorsqu'ils avaient besoin d'informations concernant le chemin à suivre. Cependant, contraindre le nombre de retours à la vue carte oblige les participants à mémoriser des informations et donc à mobiliser des stratégies peu couteuses de mémorisation tout en étant fiables. Par exemple, les informations confirmatoires sont bien moins nombreuses que dans les messages oraux et dans les messages écrits. Lors de cette étape, la carte cognitive devient un support

pour la planification, la mémorisation et la réalisation du chemin. Lorsque la ville est suffisamment maitrisée, il est possible de ne travailler qu'avec la liste des lieux sans utilisation de la carte. Dans ce cas, il s'agit de s'appuyer sur les connaissances de configuration (les connaissances les plus abouties de la carte mentale).

Dans cette tâche il est intéressant de laisser les participants dicter les déplacements à effectuer, cela renseigne sur le type d'informations utilisées pour mémoriser le chemin (des points de repère pour les lieux de changement de direction ou des procédures numériques).

IV - QUELQUES RÉSULTATS

Lors de cet atelier, nous avons pu partager avec les participants différents choix didactiques et les faire réfléchir sur les effets de ces choix sur les connaissances mobilisées. Pour cela les participants ont réalisé différentes tâches. Cela a permis dans un premier temps de revenir sur des choix de conception de la ville, des choix globaux qui ont été discutés en amont du développement et ne sont plus modifiables dans la version actuelle de SPAGEO City. D'autres choix ont été discutés au cours des différentes tâches :

- Les différents points de repères qui sont à mobiliser ou non selon les lieux ou les chemins choisis.
- Les différentes vues de la ville avec la vue 1re personne où les déplacements sont réalisés et la vue carte qui peut être utilisée pour décrire, préparer, accompagner un déplacement.
- L'accès aux deux vues (simultanée ou non, contrainte ou non) est aussi une variable importante qui permet de stimuler le développement de la carte cognitive et la mobilisation d'images mentales.

Ces tâches ont permis d'illustrer différentes situations. Ces situations ont été organisées dans la conception de trois progressions. Une première progression qui n'utilise pas la vue carte et se focalise sur les points de repère (quartier du centre-ville) et la communication (orale ou écrite) de position ou trajet. Une deuxième progression concerne la classe de CE2 avec l'introduction d'une carte papier disponible simultanément à la vue 1re personne et l'exploitation du quartier résidentiel. Finalement, la troisième progression concerne les classes de CM1 où l'ensemble de la ville est accessible, mais les deux vues ne sont plus accessibles simultanément. Deux thèses, une en psychologie cognitive et une en didactique, mettent en valeur des résultats prometteurs et éclairant sur les connaissances de repérage dans le plan et dans l'espace. Dans sa thèse, Matri (2024) analyse finement la communication des élèves dans les différentes configurations testées dans le cadre de la recherche (messages oraux, messages écrits). Si les élèves de CE1 produisent des messages écrits peu performants, leurs messages progressent au cours des trois années de collaboration. Les points de repère sont utilisés non plus comme des informations confirmatoires mais pour indiquer des lieux de changements de direction et des directions. Les messages dans le registre textuel restent majoritaires face aux plans ou schémas fléchés (Frauchiger et al., 2022).

La thèse en psychologie est en cours d'achèvement, cependant quelques résultats sont particulièrement prometteurs. En effet, ces travaux ont, entre autres, permis de mesurer l'effet des séances d'enseignement utilisant SPAGEO (Bénard Linh Quang et al., 2023). La comparaison des performances des élèves ayant bénéficié de SPAGEO avec des élèves ayant travaillé avec les activités ordinaires des moyens d'enseignement romands montrent des progressions plus importantes chez les élèves ayant bénéficié de l'environnement virtuel.

V - POUR LA SUITE

Maintenant que les travaux de recherche ont permis de développer un ensemble conséquent de situations d'enseignement, il s'agit d'adapter cet environnement aux besoins des enseignants. Pour cela nous envisageons des collaborations avec des enseignants pour identifier les contraintes et leurs besoins, dans le but de proposer des séquences d'enseignement adaptées, dans leur contenu et leur durée, au contexte de classe. Une autre dimension doit aussi être prise en compte avec la mise à disposition de données concernant l'activité de l'élève. L'application SPAGEO produit un ensemble de données très complet dont le format actuel ne peut être utilisable par l'enseignant. Il s'agit alors de définir avec les enseignants les données qui leur seraient utiles ainsi que le

format de ces données. Ces données seraient alors une vraie valeur ajoutée pour accompagner les enseignants dans leur diagnostic afin de proposer des aides les plus adaptées à chaque élève (Abboud, 2024).

BIBLIOGRAPHIE

Abboud, M. (2024). L'enseignant de mathématiques aux temps des technologies numériques : Un cadre théorique adaptant la double approche pour étudier son activité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Numéro spécial*, 165-188. https://doi.org/10.46298/rdm.12910

Bénard Linh Quang, S., Berney, S., Maurer, R., & Bétrancourt, M. (2023, juin 26). *Utilisation d'un environnement virtuel en classe, quels effets sur les représentations spatiales des élèves de la 4P à la 6P (7-11 ans) ?* Colloque Piaget-RIPSYDEVE, Genève, Suisse.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* [Université de Bordeaux]. https://hal.science/tel-03872631v1

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, *65*, 37-59.

Brousseau, G. (1983). Étude de questions d'enseignement. L'exemple de la géométrie. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*.

Burgess, N. (2006). Spatial memory : How egocentric and allocentric combine. *TREND In Cognitive Sciences*, *10*(12), 552-557.

Chen, J., & Stanney, K. (2002). A theoretical model of wayfinding in virtual environments : Proposed strategies for navigational aiding. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, *8*(6), 671-685.

Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Éd.), *Mathematics in the early years.* (p. 66-79). Washington, DC.: National association for the education of young children.

Coutat, S. (2020). Environnements virtuels pour développer les connaissances spatiales. *RMé*, *233*, 105-116.

Dorier, J.-L. (2010). L'analyse a priori : Un outil pour la formation d'enseignants – exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire. In COPIRELEM (Éd.), *L'enseignement des mathématiques à l'école : Où est le problème – Actes du XXXVI^e colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques* (p. 1-13). ARPEME.

Duroisin, N. (2015). *Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Étude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans.* Université de Mons, Faculté de psychologie et sciences de l'éducation.

Frauchiger, T., Matri, S., Coutat, S., & Dorier, J.-L. (2022). Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle. In A. Adihou (Éd.), *Colloque Espace mathématique francophone EMF2022 – Cotonou (Bénin)- 12–16. Décembre 2002.*

Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en 3 dimensions ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *11*, 103-121.

Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *40*(2), 135-178.

Masselot, P., & Zin, I. (2008). Exemple d'une situation de formation pour aborder la structuration de l'espace aux cycles 1 et 2. In *Actes du XXXIV^e colloque COPIRELEM* (p. 1-25). ARPEME.

Matri, S. (2024). *Enseigner et apprendre le repérage dans l'espace à l'aide d'une ville virtuelle pour des élèves de 7 à 10 ans à Genève.* [Thèse en Sciences de l'Education, Université de Genève]. 10.13097/archive-ouverte/unige:180584

Piaget, J., & Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Presses Universitaires de France.

Rabatel, J.-P., & Martinez, J.-L. (2018). Quelles traces pour opérationnaliser les apprentissages dans un jeu articulant tangible et numérique ? In ARPEME (Éd.), *Actes du 44e colloque international COPIRELEM - Manipuler, représenter, communiquer : Quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* (p. 159-173). COPIRELEM.

Siegel, A. W., & White, S. H. (1975). The development of spatial representations of large-scale environments. *European Journal of Cognitive Psychology*, *21*(5), 9-55. https://doi.org/10.1016/s0065-2407(08)60007-5

Simard, A. (2022). Former les enseignants de maths en primaire sans table ni chaise avec LEARN-O. In *Actes du 47e colloque de la COPIRELEM - Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.* (ARPEM, p. 594-615).

Tolman, E. C. (1948). Cognitive maps in rats and men. *Psychological review*, *55*(4), 189.

ANNEXE


GARE
PARKING
PARKING
STATION SERVICE
BANQUE
HOTEL
CINEMA
POMPIERS
PARC
24/7
MUSEE
POLICE
24/7
BUS
HOPITAL
BIBLIOTHEQUE
ECOLE
PARC

ORIGINE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION ORALE FRANÇAIS ? SES ENSEIGNEMENTS

Sylviane Schwer
Professeure, IREM PARIS NORD
Université Sorbonne Paris Nord
schwer@math.univ-paris13.fr

Résumé
Le but de cet atelier est de montrer l'intérêt de comprendre et transmettre l'histoire du système de numération française aux élèves pour d'une part de (re)-travailler les concepts fondamentaux de ce qu'est un nombre et ses représentations dans un contexte plurisdisciplinaire (histoire, français, mathématique et politique) ; et d'autre part de donner les outils pour modéliser les systèmes numéraux oraux, les comparer, passer d'un système à l'autre ou au système de position décimal indo-arabe. Deux systèmes très éloignés sont proposés – le maya-yucatèque et le yoruba - pour montrer qu'il faut respecter la signification langagière des mots-nombre et éviter de trop vite passer à l'interprétation arithmétique. L'interprétation arithmétique intervient avec la mise en place d'un tableau de numération revisité par le système oral utilisé.

I - DIRE LES NOMBRES : DU PROTO-INDO-EUROPÉEN AU FRANÇAIS

Nous montrons, dans cette partie, qu'une numération orale est l'expression linguistique d'une approche culturelle du nombre. En tant que tel, c'est un sous-système de la langue qui doit être appréhendé comme tel. Nous choisirons donc d'employer le terme *nombre* pour désigner l'objet, que nous exprimerons alors dans le système de numération décimal positionnel sur l'alphabet des chiffres indo-arabes et *mot-nombre* le terme ou l'expression conventionnelle en langue d'un nombre, si ce terme ou cette expression existe au sein du sous-système. Par exemple, trois et quatre-vingt-deux sont les mots-nombres désignant respectivement les nombres 3 et 82. En revanche, le terme *gogle* définit par Kasner et Newman (1940) pour désigner 10^{100} n'est pas un mot nombre. Le mot nombre pour dire 10^{100} est « dix-mille-sedecillions ».

Nous ne suivrons donc pas le mathématicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) qui qualifie la numération orale d'*arithmétique parlée* dans sa première leçon de mathématiques – intitulée « Sur la numération et les opérations arithmétiques » (Laplace, 1812)- donnée à l'Ecole normale de l'an III (c'est-à-dire en 1795 E.C.) Nous montrerons que les opérations de formation des mots-nombre sont des opérations relevant de pratiques sociales de représentation des quantités et non de pratiques de calculs[1]. Nous ne nous inscrivons donc pas non plus dans la démarche des didacticiens des mathématiques qui interprètent directement les expressions des noms de nombre comme des opérations mathématiques (Mounier, 2012 ; Poisard, Kervran, Surget et Moumin, 2018). Au pire ou au mieux, il est nécessaire de savoir compter des collections d'au plus une vingtaine d'entités. Les cardinalités des collections plus grandes sont produites par des manipulations réitérables abstraites ou concrètes de regroupement/division, de positionnement/adjonction/ suppression.

[1] Pour multiplier, le latin et le français ont des termes propres comme lat. *decuplus*, *decemplex* et fr. d*écupler*. L'expression *n fois* est toujours l'expression temporelle ou picturale d'une itération, ce qui transparaît dans les énoncés où *n fois* opère sur un verbe comme dans « vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage, … » (Nicolas Boileau, l'art poétique (1674)). *N noisettes* ou *n millions* multiplie – au sens de *la multiplication des pains* – noisettes et millions, ce qui correspond bien aussi à une itération.

Toute langue peut être appréhendée comme une structure qui ne comporte qu'un nombre réduit d'éléments de base se prêtant *a priori* à un plus ou moins grand nombre de combinaisons possibles. Chaque langue ne retient qu'une petite partie de ces combinaisons, déterminées par des types particuliers de relations (Benvéniste, 1966). En cela les *mots-nombre* constituent bien un sous-système de la langue, qui comprend un lexique des éléments de base et des règles décrivant les choix possibles de combinaisons ainsi que leurs significations. Le lexique fait partie du vocabulaire, les règles de construction de la grammaire de la langue. Les expressions normalisées des nombres cardinaux sont réputées faire partie des termes les plus rapidement stabilisés dans l'évolution des langues (Mallory et Adams 2006, p. 308), les différences étant essentiellement phonétiques. Les quantités les plus usuelles seront transcrites en des termes les plus souvent utilisés, qui subiront les transformations phonétiques les plus importantes. Voici ce que le grammairien Michel Bréal (1832-1915) en dit lors de sa leçon inaugurale du *Cours de grammaire comparée* au Collège de France, en 1866 :

> *« Parmi les mots qui se sont le plus éloignés de leur forme première, il faut placer sans contredit les noms de nombre. En recherchant l'étymologie de ces mots, on a reconnu qu'ils avaient généralement eu à l'origine une signification concrète. Les uns exprimant la multiplicité de façon générale […] D'autres marquaient des objets naturels rappelant par leur quantité ou leur formation le nombre que l'on voulait désigner […] En rendant les noms de nombres étrangers aux objets qu'ils avaient d'abord désignés, l'altération phonique a aidé l'émancipation de la pensée. Elle a favorisé les premiers pas de l'homme dans la voix de l'abstraction : elle a rendu à l'esprit humain un service analogue à celui que l'algèbre rend au mathématicien, quand elle remplace les noms de nombre par des signes plus abstraits encore. »*

Effectivement, les nombres font partie du quotidien des habitants du territoire « gaulois » depuis fort longtemps, notamment à travers les échanges économiques avec les Romains, bien avant la conquête de la Gaule. Le français est une langue romane, de la grande famille des langues indo-européennes. C'est pourquoi nous commencerons par une étude historique des systèmes de numération du français, en y incluant les éléments essentiels du proto-indo-européen et du latin. Nous pourrons alors expliquer l'ensemble des « irrégularités » du système des noms de nombre pour les nombres de 1 à 1 000. Mais commençons à expliquer comment dire les nombres au-delà de 1 000, puisqu'ils n'appartiennent pas au noyau historique.

1 Dire les grands nombres en français

Nous demandons de lire le nombre 745 324 804 300 700 023 654 321. Ce nombre dépasse ce qu'on appelle, en cycle 3, *un grand nombre,* compris entre dix-mille (10 000) et un billion (1 000 000 000 000).

La question suscite beaucoup d'hésitation, ce qui est quasiment toujours le cas, même en seconde année de licence scientifique ou en master MEEF[2] (premier et second degré) ! Nous donnons en annexe 1 la méthode fournie par Chuquet (1484) qui permet le codage intermédiaire :

745 mille 324 trillions 804 mille 300 billions 700 mille 023 millions 654 mille 321.

il apparait explicitement que si l'on sait dire les mots jusqu'à mille, et que l'on connait la série des millions, la lecture des très grands nombres ainsi que le passage des mots-nombre à l'expression chiffrée ne posent pas plus de problèmes pour les nombres jusqu'au billion, en suivant la méthode décrite par Chuquet (1881). En effet, pour traduire un mot-nombre en chiffres, il faut repérer le premier mot suffixé par « *illion(s)* » qui donne le nombre de blocs de six positions (tableau 1) qu'on doit séparer en deux sous blocs de trois positions. Puis il faut positionner des zéros sur les sous-blocs gauche en absence de *mille* ou du *–illiard*. Nous pensons qu'en travaillant sur un très grand nombre, comme l'exemple de Chuquet, pour lequel il est normal de ne pas savoir le lire, en étudier l'algorithme pourrait être une approche directe ou de remédiation à la maîtrise des grands nombres (Tempier, 2023).

[2] Il s'agit des Master MEEF premier degré de l'INSPE de Créteil et second degré de l'université Sorbonne Paris Nord.

trillions	billions	Millions	(unités)
¤ --- ---	--- ---	--- ---	--- ---

Tableau 1. Le tableau adapté pour un grand nombre en fonction du premier terme lu en illion

Une question émerge, concernant l'absence de *milliard* et une remarque concernant la non universalité du découpage en groupe de 3 chiffres.

1.1 À propos de million et milliard

Million (XIII[e] s.) vient de l'italien *milione* par suffixation de *one* sur *mille* pour signifier *un grand mille*. Rejeté par l'élite intellectuelle française, parmi lesquels les mathématiciens, qui conservaient l'expression latine *mille mille*, ce sont les pratiques des calculs comptables et autres qui l'ont finalement imposés. C'est aussi la base actuelle du système international de numération, dans l'échelle longue.

Milliard est encore plus tardif (début XVIe s.), donc postérieur à Nicolas Chuquet, mort vers 1488. C'est un supplétif de *mille-millions*, *billiard* un supplétif de *mille-billions*, *trilliard* un supplétif de *mille-trillions*, etc. Il y a donc deux systèmes pour dire les grands nombres dans l'échelle longue selon que l'on adopte la série -*illiard* ou non.

1.2 À propos des découpages en blocs

Il semble évident que découper en 3 ou 4 relève de la *subitisation*. On peut aussi penser que regrouper deux blocs de 3 en 6, pour donner l'ordre des millions relève du même procédé que de compter en vingtaine à partir de 60 pour une même raison de subitisation.

En ce qui concerne le choix entre 3 et 4, je n'ai pas eu de réponse. Les Grecs ont le terme *myriade* pour 10 000 que le bas-latin utilise dans le même sens, mais qui est passé en français comme au-delà du dénombrable dès le XVI[e] s. Les Chinois et les Japonais, par exemple, regroupent également les chiffres en groupe de 4.

Le regroupement des chiffres par 3 nous dit que pour être à l'aise pour lire et écrire des nombres, il est nécessaire de maîtriser les dénominations des nombres inférieurs à 1 000. C'est exactement la séquence des nombres communs à toutes les langues indo-européennes.

2 Quelques repères historiques

Les Gaulois sont des Celtes venus du Caucase et de la mer Noire, berceau des Indo-européens. L'invasion celtique du territoire s'étend de 1000 à 800 avant l'ère commune (AEC[3]). Le gaulois a été parlé jusqu'au V° siècle. Privilégiant l'oralité et la mémoire, les Gaulois employaient l'alphabet romain ou grec pour l'écriture en cas de besoin. C'est au IV[e] s. AEC que l'Empire romain prend son essor. Il atteint son apogée au II[e] s. EC. La langue latine s'impose alors sur l'actuelle Italie, la péninsule ibérique, la Gaule, l'Angleterre, les pays longeant le Danube et les provinces d'Afrique. C'est la période du latin classique. Le prestige de Rome en Gaule, ressenti bien avant l'occupation, fait que les classes favorisées et les clercs maniaient parfaitement le latin classique. Le latin reste la langue des transactions écrites, tant commerciales que juridiques, notariales et administratives en France jusqu'au XVI[e] siècle. Le latin populaire des masses laborieuses, esclaves souvent d'origine étrangère ou pauvres non scolarisés, est la langue qui se répand parmi les populations occupées, se transformant peu à peu localement.

[3] Nous adoptons la notation AEC (avant l'ère commune) et EC (ère commune), qui va de pair avec l'adoption du calendrier grégorien comme calendrier « universel » pour les datations.

Au V^e s., le déferlement – dit barbare – met à bas l'Empire Romain d'Occident. Les Francs occupent la Gaule du nord, les Wisigoths le sud, sans toutefois que leurs langues supplantent ces latins populaires. Au VIII^e s., les parlers locaux de Gaule se transforment si profondément que le latin n'y ait plus compris par le peuple. Ces langues se rattachent essentiellement à deux groupes de langues romanes : le groupe d'oïl, au nord, représenté par le français, et le groupe d'oc, au sud, représenté par l'occitan.

Du IX^e s. au XII^e s., au côté des textes savants écrits en latin, coexistent deux langues écrites pour les textes populaires. L'une au nord, d'influence nordique et germanique est le *roman français* ou *vieux français*, l'autre au sud, plus proche des parlers méridionaux est le *roman provençal*. A partir du XIIe siècle, les dialectes se développent, favorisés par le système féodal. Chacun parle son dialecte et comprend ce qu'il lui faut de latin pour les actes officiels. Le régime monarchique impose la langue du roi, le *moyen français*, comme langue de tous les actes officiels - Ordonnance de Villers-Cotterêts (1539). La monarchie absolue norme la langue à travers l'académie française, fondée par Richelieu en 1635, c'est le *français classique*. Mais les réformes linguistiques ne concernent que les affaires de l'état, la Cour, les intellectuels, même si les savants continuent de communiquer en latin. En 1880, 80% des échanges quotidiens se font en patois. La révolution française et le régime républicain imposent le français académique sur tout le territoire et pour tous les usages, afin de garantir une république « une et indivisible ». L'école obligatoire et gratuite s'est employée à faire entrer la grammaire académique dans tous les foyers.

3 Du côté des langues

Les langues romanes, héritées du latin, sont des langues indo-européennes pour lesquelles une proto-langue, qui décrit l'ensemble de leurs caractéristiques communes, a été élaborée. Le système de numération jusqu'à mille fait partie de ce patrimoine commun.

Le Proto-Indo-Européen[4] (PIE, par la suite) est une langue à déclinaison possédant trois genres (*masculin, féminin* et *neutre*), trois nombres grammaticaux pour indiquer la quantité (*singulier*, *duel*[5] et *pluriel)* et huit cas pour indiquer les rôles syntaxiques dans la phrase tel sujet, complément d'objet direct, … Il n'y a pas d'articles. Les voyelles sont soit longues, soit brèves, les syllabes accentuées ou non. Le latin classique a conservé voyelles brèves et longues, l'accentuation, les trois genres et 6 cas. En revanche, il n'a pas conservé le duel. L'ancien français n'a conservé que le nominatif (cas du sujet) et l'accusatif (cas du Complément d'objet direct, appelé cas régime). Le moyen français n'a conservé que le cas régime.

4 Les systèmes de numération PIE et leur dérivation latine

Le système des noms de nombre PIE est purement décimal. Il suffit donc de savoir énumérer oralement jusqu'à 10 et avoir des mots pour les premières unités de compte. Le lexique de base désigne les nombres de 1 à 10 et utilise un connecteur de liaison. Il n'y a pas de mot commun pour dire 1 000, mais sa désignation en grec, latin et indo-iranien dérive d'une origine commune *g^heslo. Ces remarques linguistiques organisent la description du système.

En PIE, 1 se dit de deux façons différentes. Les quatre premiers termes de la série sont variables en genre. le noms de nombre de 10 varie en quantité ; celui de 100, invariable, possède deux types de constructions quand il s'agit de désigner l'unité de compte.

---

[4] Dès le XVIII^e s., a été établie une parenté entre le sanskrit, l'iranien, le grec, le latin, l'allemand, le russe, l'albanais, le celte. Actuellement, la famille des langues parlées indo-européennes se divisent en huit branches : albanais, arménien et les langues balto-slaves, celtiques, germaniques, helléniques, indo-iraniennes, romanes. Les mots du PIE sont précédés de * pour signifier que ce sont des constructions issues de la recherche, sans attestation épigraphique ou manuscrite, ni bien sûr orale.

[5] Le duel marque un groupement de deux entités. Il existe des langues avec triel (pour 3 entités), voire quadriel (pour 4 entités). On rapprochera cette limite de 4 de la subitisation.

4.1 L'unité

La notion d'unité est duale. D'une part elle est discrète et désigne donc une entité parfaitement discernable, indécomposable, unique. D'autre part, elle est continue, désigne le tout, unificatrice de ses parties. De ce point de vue, elle est collective, et peut être rompue, fractionnée. Pour distinguer ces deux sens, le PIE possède deux racines : **oin-*[6] pour l'aspect discret et **s(e)m-* pour l'aspect continu.

Dans l'expression des nombres, **s(e)m* **peut** préfixer 100 et 1000 pour marquer leur qualité d'unité collectivisante. **oin* s'emploie pour l'unité comptée 1 ou unité ajoutée – comme pour dire [21][7].

Le latin a perdu la préfixation de l'expression de 100 et 1000. Il n'a retenu que la forme **oin* qui se dit *un-* et se décline en genre et en cas[8] . Nous représentons dans le tableau 2 les trois genres des formes libres.

4.2 Les noms de nombre du lexique

D'après Vendryes (1937), dans les langues anciennes, la catégorie du collectif a précédé celle du pluriel et était plus générale. C'est pourquoi les quatre premiers mots-nombre pourraient laisser penser qu'ils ont pris place plus tardivement dans le système de numération, puisqu'ils étaient des collectifs décrivant une unité, une paire, une triade, une « quadriade » ou quatuor. Cognitivement, cela se justifie pleinement par le principe de subitisation ! Le latin continue de décliner [2] et [3] mais a rendu [4] invariable (cf. tableau 2). Au-dela, les mots-nombres unitaires sont invariables (cf. tableau 3).

	1	2	3	4
PIE forme libre	**sem ; *oin-os/a/om*	**d(u)w-o/a/oi*	**tr-eyes/isres/i(sores)*	**kwétw-ores/ersres/wor*
PIE forme liée	**oin-*	**dwi-*	**tri-*	**kwétwér-*
Lat. forme libre	*un-us/a/um*	*du-o/ae/o*	*tr-es/es/ia*	*quattuor*
Lat. forme liée	*un/ø/ø-*	*duo/vi/du-*	*tre/tre/tri-*	*quattuor/quadra/quadri-*

Tableau 2. Les mots-nombre pour 1, 2, 3, 4 en PIE et latin classique

Pour 10, deux formes PIE sont suggérées : l'indéclinable *dekm et le déclinable *deknt, possédant un dual et un pluriel pour exprimer les dizaines. La formation des centaines est postérieure à la formation des dizaines, la forme duale ne se distingue pas de la forme plurielle. Dizaines et centaines sont exprimées par suffixation du mot-nombre qui les compte. Pour 1000, deux formes sont concurrentes *t*us-nti qui* pourrait signifier « un gros cent » mais n'est pas la forme utilisée par les langues romanes ni hellènes : *mille* et le préfixe *kilo* dérive de la seconde forme **g^{h}éslo* (cf. tableau 4).

Le latin, bien qu'ayant perdu le duel, conserve cette forme pour [20]. Contrairement au PIE, les dizaines sont invariables et les centaines se déclinent. Leurs formes restent suffixes. [1000] est invariable en genre et cas mais possède une forme plurielle *milia* qui se décline comme un neutre et qui régit en complément de nom le terme compté, comme fr. *millier*. [1 000 000] n'appartient pas au système, il possède une expression périphrastique *decies centena milia* soit *dix fois une centaine de milliers.*

[6] Un tiret placé à la fin d'une expression signifie que ce terme ne peut être employé seul, qu'il est en situation préfixe. Si le tiret précède le terme, celui-ci est en situation de suffixe.

[7] Nous notons [n] pour exprimer la façon de dire le nombre n dans la langue. Pour les formes liées, des indices expliquent la forme utilisée du lexique (cf. Annexe 2). Les collectifs numériques (paire, triade, dizaine, vingtaine, centaine) de n éléments sont exprimés entre chevrons <n>. Par exemple en français [10] s'interprète en français comme *dix*, <10> comme *dizaine*, $[10]_{10}$ comme *–ze*, $[10]_{diz}$ comme *-ante* et $[10]_{diz(3)}$ comme *-ente*. Ainsi, nous considérons que *milliard* et *million* sont des collectifs, contrairement à *dix*, *vingt*, *cent* et *mille*.

[8] Le PIE possède trois genres (masculin, féminin, neutre) et des cas qui permettent d'étiqueter chaque groupe nominal par un suffixe qui dit quel rôle il joue au sein de la phrase (sujet, complément d'objet, de manière, …). Le latin et l'allemand sont des langues avec cas. Le français n'a plus de cas, c'est la position dans la phrase et l'usage de prépositions qui remplacent les cas.

	5	6	7	8	9
PIE libre	**penkwe*	**sweks*	**septm*	**okto*	**newn*
PIE liée	**penkwe-*	**sweks-*	**septm-*	**okto-*	**newn-*
Lat. libre	*quinque*	*sex*	*septem*	*octo*	*novem*
Lat. liée	*quin/quinqua/quin-*	*se/sexa/ses*	*septem/septi/septua-*	*octo/octi/octa-*	*nov/no/nona-*

Tableau 3. Les mots-nombre de 5 à 9 en PIE et latin classique

	10	100	1000
PIE libre singulier	***dekm/***deknt*	*(*sem) *kntom*	*(*sem) *ghéslo ; *tusnti*
PIE liée singulier	***dekm/*deknt***	*ø*	*ø*
PIE liée duel	**-knti*	**-kntom*	*ø*
PIE liée pluriel	**-dk(o)nta*	**-kntom*	*ø*
lat. libre singulier	*decem*	*centum*	*mille*
lat. liée singulier	*-decim*	*ø*	*ø*
lat. libre pluriel	*ø*	*ø*	*milia*
lat. liée duel résiduel	*-ginti*	*ø*	*ø*
lat. liée pluriel	*-ginta*	*-centi/-ngenti*[5]	*ø*

Tableau 4. Mots-nombres des puissances de 10 en PIE et latin classique

4.3 Les règles de construction

Les mots-nombres PIE de [11] à [19] sont des mots composés selon la règle [u]$_{liée}$[10] : **oindekm*, **dwodekm*, … , **newndekm*. Le latin suit la même règle, mais avec une forme modifiée de [10] et de certains mots-unités : *undecim, duodecim, tredecim, quattuordecim, quindecim, sedecim, septemdecim, octodecim, novemdecim*. Aux deux dernières formes, le latin classique préfère largement suivre le modèle de formation étrusque[9]. Les nombres ayant au moins deux chiffres et se terminant par 8 et 9 s'expriment en fonction de la dizaine supérieure dont on prélève 2 ou 1 :

18	19	98	99
duodeviginti	*undeviginti*	*duodecentum*	*undecentum*
[2] ôté de [20]	[1] ôté de [20]	[2] ôté de [100]	[1] ôté de [100]

Tableau 5. Système étrusque pour les nombres à 2 chiffres se terminant par 8 ou 9

Les expressions « régulières » additives qui suivent le schéma PIE vont s'imposer dans le latin médiéval.

Pour exprimer les nombres de dizaines (20-90) (voir tableau 6), le PIE utilise les formes non singulières de [10], soit pour [20], la forme suffixale duelle **-dkmti* et pour les autres la forme suffixale plurielle -**komta*. Le latin suit de près avec la forme duelle *-ginti* et plurielle *-ginta*. Par exemple,

[9] L'étrusque est une langue non IE possédant un système décimal. Elle utilisait ce schéma pour tous les nombres d'au moins deux chiffres se terminant par 7, 8 et 9.

	10	20	30	50
PIE	**dekm*	**(d)widkmti*	**trikomta*	**penkwekomta*
Latin	decem	*viginti*	*triginta*	*quinquaginta*

Tableau 6. Exemples de mots-nombres des dizaines

La formation PIE des centaines (200-900) sont des termes obtenus par concaténation de la forme liée de l'unité et de la forme liée pluriel de 100, soit $[U]_{liée}[100]_{liée}$: **(d)wikntom, *trikntom, *kwétwérkntom, …*newnkkntom.* Le latin suit le même schéma avec des contraintes phonétiques : d*ucenti, trecenti, quadringenti, quingenti, sescenti, septingenti, octingenti, nongenti*.

Quant à la construction des nombres intermédiaires, jusqu'à 100, le PIE produit des expressions complexes de deux types : le schéma analytique **Dizaine Unité(qe)* et le schéma synthétique **UnitéDizaine(qe*) inversé, peut-être le plus ancien.

Entre 20 et 100, le latin offre deux systèmes, l'un de schéma *Dizaine Unité*, l'autre du schéma *Unité et Dizaine,* et un troisième pour les nombres ayant 8 ou 9 en chiffre des unité, issu du système étrusque.

Au-delà, l'ordre des éléments suit l'ordre décroissant des rangs dans les deux langues, par exemple :

438	
PIE	**kwétwrkmtos trikomta okto(qe) *kwétwrkmtos oktotrikomta(qe)*
Latin	quadringenti triginta octoquadringenti octo et triginta *duodequadraginta*

Tableau 7. Différentes manières de dire 438 en PIE et en latin

4.4 Commentaires

Lors de la discussion, nous avons regretté, dès le latin, l'abandon lexical de la différentiation de l'unité discrète servant à compter et indivisible et de l'unité continue, servant à encapsuler et divisible, qui explique des difficultés des élèves à comprendre le sens des différents sens des ensembles de nombres. Les différents emplois du terme « unité » en français dépassent la simple distinction continu/discret : nombre des unités, nombre d'unités, unités de compte, unités de mesure, etc. Il faut vérifier à chaque fois, que le contexte est bien compris.

Un collègue germaniste rappelle qu'en allemand, les unités précèdent aussi les dizaines. Nous allons voir que c'est également ce qui se passe pour les nombres de 11 à 16 en français, et ce que l'on trouve également pour les nombres 13 à 19 en anglais.

Nous attirons également l'attention sur le fait que, bien que la forme étrusque soit celle qui figure principalement dans les grammaires latines, l'examen des textes latins – classiques et post-classiques atteste des trois systèmes. Au XVII^{e} s., les scientifiques qui continuent à écrire leur traité en latin utilise plutôt les formes *octodecim* et *novemdecim*.

Enfin, concernant la structure générale du système, le PIE nous donne un plan d'étude du dire des nombres de 1 à 1 000 : d'abord en deçà de 100 puis au-delà de 100. Pour les nombres de 1 à 99,

- d'abord jusqu'à 20
  - les 9 premiers nombres, avec des formes genrées et de fonctions pour les plus petits
  - le nombre 10
  - les nombres de 11 à 19
  - le nombre 20 utilisant la forme duale de [10]
- les autres multiples de [10] utilisant la forme plurielle de [10] puis la forme duelle
- les nombres intermédiaires de 21 à 99, que l'on devra affiner pour le système français

5 Du latin classique au français

La diffusion de la civilisation romaine s'est faite d'abord par le commerce. L'élite gauloise envoyait ses rejetons dans les écoles romaines, comme les romains envoyaient les leurs dans les écoles étrusques. Puis par imitation, la population abandonne petit à petit les parlers celtes au profit du bas latin, celui des échanges commerciaux, puis celui des soldats-colons.

5.1 Évolution du latin classique vers le bas-latin

Le latin classique dispose de cinq voyelles (i, e, a, o, u) et deux durées : brève ou longue. L'accentuation des mots suit des règles précises. La disparition de l'opposition des durées brèves/longues au III[e] s. génère de nombreuses erreurs de graphies. Ainsi, l'on trouve *vigenti* au lieu de *vigĭnti* pour 20. Certains phonèmes disparaissent, de façon très disparate selon les lieux. Au VI [e] siècle, on écrivait aléatoirement *e* ou *i, o* ou *u, oc* ou *ui*[10] *;* on ne respectait ni l'accord de l'adjectif avec le substantif, ni les genres des substantifs, ni les règles d'utilisation des cas. Les articles, définis et indéfinis, vont naître de l'altération des pronoms pour marquer le genre - qui se réduit à l'opposition masculin/féminin - et le nombre grammatical. Le neutre disparaît. Dans un premier temps le nombre de cas se réduit à deux, le cas sujet (CS) et le cas régime (CR). Enfin le cas régime seul est adopté. Pour certains grammairiens, on assiste à une violation presque continuelle des différentes règles de la grammaire. C'est l'impression que fait aux allophones le système de numération française, avec ses nombreuses irrégularités. La sociolinguistique historique conteste le caractère aléatoire de ces variations en mettant en évidence une évolution de la grammaire qui reste structurée dans sa dynamique, incompréhensibles sans une approche diachronique. Tel est le cas pour le système de numération orale.

5.2 Du bas latin vers le français contemporain

Déclinaisons résiduelles de 1, 2 et 3 en ancien français

L'orthographe est très libre et traduit ce que l'on entend à l'oral. Ainsi, *Le dictionnaire de l'ancienne langue française du IX au XV s.* de Godefroy (1826-1897) donne trente graphies différentes pour 8, une dizaine pour 2. Nous donnons dans le tableau les formes les plus usuelles. Il apparait que dès le moyen français, les formes sont stabilisées (tableau 8).

	cas	1		2		3	
		mas.	fem.	mas.	fem.	mas.	fem.
Ancien français	sujet	*uns*	*une*	*Dui/doi*	*deus*	*troi*	*trois*
	régime	*un*		*deus*		*trois*	
Moyen français		*un*	*une*	*deux*		*trois*	

Tableau 8. Formes les plus usuelles pour 1, 2 et 3

Nous pouvons alors constater que le fait que seul [1] soit genré est dû au choix du cas régime, certainement pas à l'opposition singulier/pluriel, qui est simple corrélation mais pas causalité.

Naissance de l'article et statut de l'unité

En ancien français, le cardinal *uns/un* joue le rôle d'individualisation et de déterminant. À partir du XIII[e] s., il joue le rôle d'article indéterminé singulier. Il prendra également une valeur de quantificateur universel, ce qui ajoute à la confusion : « un enfant est derrière la porte » versus « un enfant est une personne ».

[10] C'est ainsi que *nocte* devient *nuit*, *octo* devient *uit* puis *huit*.

Les nombres de 4 à 19

Leur forme actuelle est également présente dès le moyen français. Notons l'évolution de [11] :

latin *undecim* > bas latin *undece* > ancien français *unze* ou *onze* > moyen français *onze*.

Nous constatons que *-ze* n'est donc pas une simple suffixation mais l'évolution du mot *decim*, ce qui signifie que les nombres de 11 à 16 sont des mots composés de deux radicaux, dont le second est devenu opaque. Cela signifie que la forme unité-dizaine du PIE se retrouve bien dans le système de numération orale français.

17 devrait se dire *septze,* trop proche phonétiquement de *seize.* Il a donc été nécessaire de choisir une autre forme parmi celles disponibles issues du latin. Celle utilisée par les nombres au-delà de 20 a été choisie. On dira donc *dix et sept*, puis *dix-sept*, 18 et 19 seront entrainés dans le même sillage.

Les dizaines

Nous discuterons de 20 et de l'introduction du système vigésimal au paragraphe suivant. Dès le bas-latin la forme en *-ente* pour 30 et les formes en *-ante* pour 40 à 90 sont attestées. La raison du maintien de *-ente* pour trente semble n'être qu'étymologique sans compréhension du rôle simplement euphonique de la voyelle « a » entre une forme liée unité se terminant par une consonne devant *ginta*, ce qui n'est pas le cas de *triginta* :

latin *triginta* > *trienta* > *trenta* > français *trente*.

Il est surprenant que Condorcet (1749 ; cf. extrait en annexe 3) ait maintenu la séquence orthographique *trente/quarante/cinquante/soixante/septante/octante/nonante*. Notons qu'octante est le terme savant, le terme usuel étant *huitante*.

Aux racines de vingt et de cent

Du point de vue phonétique, l'évolution de [20] et [100] depuis le PIE jusqu'au moyen français est bien connue :

PIE**dwi-dekn* > lat. *viginti* > bas-lat. *vinti* > anc./moy. fr. *vint* > fr. cla. *vingt*

PIE **knto* (100) > lat. *centum* > bas-lat. *cent* > anc./moy. fr/ *cent*.

Du point de vue syntaxique, ils ont dès l'ancien français le même comportement : les formes *vint* et *cent* sont les formes singulières, qui s'emploient sans déterminant. Comptées comme nouvelles unités, ce sont des noms, variables en genre et en cas (cf. tableau 9).

pluriel	masculin	féminin
Cas Sujet	*vint, cent*	*vinz, cenz*
Cas Régime	*vinz, cenz*	*vinz, cenz*

Tableau 9. : les formes pluriel de 20 et 100 en ancien français

Il peut être surprenant *a priori* d'analyser 20 et 100 ensemble. Mais, au Moyen-Âge apparaît une numération vicésimale au côté d'une numération purement décimale. Les formes *trente*, *quarante*, *cinquante* et *soixante, septante, huitante* (ou *octante*), *nonante* côtoient *vint et dis*, *deux vinz*, *deux vinz et dis*, *trois vinz, trois vinz et dis, quatre vinz, quatre vinz et dis* … jusqu'à dis neuf vinz et dis. Par exemple L'hôpital des Quinze-Vingts a été créé par Saint-Louis vers 1260 pour abriter 300 aveugles revenus des croisades. Bien évidemment, on ne dit jamais *cinq vingts* mais *cent*. Ce système est encore en usage au XVIII[e]s : « … *trois générations font environ cent et six-vingts ans.* » (Voltaire, lettres philosophiques).

Cent peut se compter également de 2 à 19. Ainsi, Ménage[11], dans ses *Observations* (1672), explique qu'il faut dire *onze cents, douze cents, …, dix neuf cents* et non *mille cent, mille deux cents, …, mille neuf cents »* notamment quand il s'agit de compter de l'argent. Pour les années d'une date, les deux expressions sont admises sauf pour 1100, qui doit se dire l'an *onze cents* et non *mil cent*. Ces expressions s'entendent encore, notamment auprès des personnes âgées.

La règle qui demande l'invariabilité de *vingt* et *cent* quand ils sont suivis d'un autre nom de nombre est arbitraire[12] et récente (XVIII° siècle), et a été abandonnée dans la dernière réforme orthographique.

À la Renaissance, le système décimal revient en force dans les milieux intellectuels, notamment avec la mode à l'italianisme. Les cinq premières éditions du dictionnaire de l'Académie (1694-1798) donnent les deux systèmes.

Dans ses *Remarques sur la langue Française*, le grammairien et académicien Vaugelas (1585-1650) convainc l'Académie d'imposer les formes vicésimales *soixante-dix*, *quatre-vingt*[13], *quatre-vingt-dix* :

> *" septante n'est François qu'en un certain lieu où il est consacré, qui est quand on dit, la traduction des Septante, ou les septante Interpretes, ou simplement les Septante, qui n'est qu'une même chose. Hors de là il faut toujours dire soixante-dix, & quatre-vingt & non pas octante, & quatre-vingt-dix, & non pas nonante. "*

C'est donc un acte politique pour s'opposer à l'italianisme en vogue à l'époque. Dans la réédition de 1738 annotée par Patrus et Corneille (Vaugelas, 1738), il est précisé que

> *« Monsieur Ménage a aussi observé que dans le discours familier il faut dire soixante-dix, quatre vingt, quatre-vingt-dix mais il demeure d'accord qu'en termes d'Arithmétique & d'Astronomie, on dit fort bien, septante, octante, & nonante*[14]*. »*

Rien ne s'opposait donc alors à ce qu'on enseignât l'arithmétique avec la numération décimale pure, comme les autres langues romanes. C'est une des propositions de Condorcet (1794), dans son livre d'enseignement à destination des instituteurs paru à titre posthume, avec approbation du ministère de l'instruction. Ces recommandations n'ont jamais été suivies.

En annexe 3, nous présentons le tableau des mots-nombre de [1] à [100] proposés par Condorcet ainsi que le tableau de la numération turque, qui sont construits exactement sur le même modèle, ce que la notation adoptée met clairement en évidence.

Les nombres intermédiaires entre 21 et 999

C'est le schéma PIE qui est adopté : *centaines (e/et) dizaines (e/et) unités*, séparées ou non par des tirets à l'écrit : 22 s'écrira *vint e deus*, *vingt et deux*, *vingt-et-deux*. La liaison entre dizaines et unités tend à rapidement disparaitre, sauf pour des raisons euphoniques devant un *et onze*, excepté dans [81] et [91] en raison de la micro-césure qui se fait naturellement après les trois syllabes de *quatre-vingt.*

---

[11] Gilles Ménage (1613-1692) est un grammairien, historien et philosophe. Il n'a pas été admis à l'Académie pour s'être permis des railleries à son encontre, en particulier dans son ouvrage *Observations de monsieur Ménage sur la langue françoise* (1672) dédié à … Monsieur le chevalier de Méré, bien connu pour avoir incité Pascal à s'intéresser aux jeux de hasard. Signalons que Ménage est aussi l'auteur d'une *histoire des femmes philosophes* (1690) – dédiée à Anne Dacier (1645-1720) femme savante - qui traite de 65 dames philosophes de l'Antiquité gréco-romaine.

[12] L'arrêté ministériel du 26 février 1901 portant sur les tolérances grammaticales dans les épreuves d'orthographe des examens ou concours offre la possibilité de choisir entre singulier et pluriel dans les noms de nombre en exemplifiant par : « *quatre vingt* ou *quatre vingts-dix hommes*, *quatre cent* ou *quatre cents trente hommes.* » Les règles orthographiques ont néanmoins continué à exiger l'application de la règle.

[13] Au singulier !

[14] Souligné par l'autrice.

Le nombre 1 000

Le latin avait une forme singulière *mille* et une forme plurielle *milia*. Elle devient plurielle en ancien français, *mil* étant la forme singulière. Mais dès le XII^{e} s. les deux formes sont interchangeables. On trouve encore la forme *mil* dans les dates antérieures à l'an 2000 des actes notariés, mais *mille* devient la forme invariable.

II - ACTIVITÉS PROPOSÉES

Un système de numération est composé d'un lexique de base comprenant des mots-nombres simples et des particules permettant la construction des expressions du système – et pour le français actuel, «-» dans la version écrite - à apprendre par cœur, et de règles de construction des autres nombres jusqu'à une certaine limite, dépendant du lexique. Ce lexique peut contenir des mots-nombres construits comme par exemple *onze*, … *seize* si le repérage et le sens de de la terminaison commune « ze » n'a pas été acquise, ou *trente*, *quarante*, *cinquante* et *soixante* avec la terminaison en « -nte ». On rappelle que *zéro* n'est pas un terme du système de numération orale. En revanche, *vingt* fait naturellement partie du lexique car sa construction est unique – issu d'un dual du PIE.

Dans un premier temps, on peut travailler avec un lexique de 23 mots-nombres : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent, mille en cycle 2. Mais il est souhaitable de rapidement réduire le lexique à 13 ou 15 mots – en ajoutant *million* et *milliard* -- si l'on souhaite se restreindre aux attendus du programme – en précisant leurs différentes formes (libre, liées). Par exemple, la forme libre de 10 est *dix*, les formes liées sont *-ze* et *-nte*. Mais pour passer du code linguistique au code chiffré indo-européen, expliquer la valeur de « ze » et « e/ante » permet, dès le cycle 3, de mêler langue et mathématiques. Il est également important de respecter les particules, et la séquence des mots-nombres du lexique, et non de les transformer en opérateur arithmétique. Il peut être nécessaire dans certaines langues de revenir à l'étymologie. En roumain, par exemple, 12 se dit *doisprezece* soit [2]spre[10]. Dans un dictionnaire roumain actuel, *spre* signifie *vers*, qui n'est pas compatible avec le sens de 12. Mais étymologiquement, ce terme vient du latin *super* qui signifie *au-dessus.* Ainsi 12 est visualisé en roumain comme une dizaine sur laquelle on place deux unités, alors qu'en français, *douze* est obtenu comme contraction de *deux-dix* soit deux unités suivies d'une dizaine et non deux dizaines.

On organise aussi le lexique en classes de substitution : deux mots-nombres sont dans la même classe si en substituant l'un par l'autre dans tout mot-nombre le contenant, on obtient également un mot-nombre : *quatre* n'est pas substituable à *cinq* car *cinq-vingt* ne fait pas partie du système actuel de numération orale, contrairement à *quatre-vingt* ; en revanche {sept, huit, neuf} constitue une classe de substitution. Chercher les classes de substitutions du français pour les étudiants en master MEEF est un exercice qui régulièrement pose des difficultés, car le système semble mémorisé mais pas compris en profondeur. Cet exercice constitue un bon moyen d'installer une discussion fondée sur des arguments factuels. On obtient, pour travailler jusqu'à 20 en début de cycle 2 :

Le lexique [1-20] : (i) {un}, {quatre}, {dix}, {onze}, {vingt}, {deux, trois, cinq, six}, {sept, huit, neuf}, {douze, treize, quatorze, quinze, seize} ; (ii) {et} {-}

Une seule règle : dix-{sept, huit, neuf} que l'on représente avec le système de numération chiffré indo-arabes [10]-[u] pour u dans la classe {[7], [8], [9]}.

Ensuite, il convient de remplacer {onze} et {douze, treize, quatorze, quinze, seize} du lexique par la règle de construction de ces mots, $[u]_{pref10}[10]_{10}$ pour u dans la classe {[1]} ou {[2], [3], [4], [5], [6]}.

En annexe 2, nous donnons les différentes formes des mots-nombres du lexique français de France pour compter jusqu'au *undécillion* exclus, ainsi que les préfixes de quotité dans les mots usuels, comme *bicyclette* ou *dialogue* dans lequel *bi* ou *di* signifie 2. Dans *billion*, qui signifie *million de millions* (10^{12}),

c'est « b » qu'on emploie devant la racine *illion* ou *illiard*, d'où la notation $[2]_{PREF\_ILL}$. $[]_{supl}$ signifie supplétif, terme qui ne respecte pas les règles car plus usuel : *cent* est au Moyen-Âge un supplétif de *cinq-vingts* dans le système vigésimal, *mil* est supplétif de *mille*, devenu invariable dans les actes notariés pour certaines dates.

1 Application au passage au système chiffré indo-arabe

À la suite de notre étude historique, il apparait que les tableaux de numération unités/dizaines/centaines (voir par exemple Houdement et Tempier, 2022) doivent être revus pour permettre de passer de [n] à n en suivant ce que dit la langue. C'est bien-sûr pour les dizaines que le travail est le plus important car les mots et « particules » du lexique qui signifie une dizaine ou l'un de ses multiples doivent figurer dans le tableau. J'entends ou je lis une séquence de termes qui contient dix, ou –ze ou -e/ante ou vingt et je sais que cela concerne les dizaines, avec ces règles propres données figure 1.

En reprenant globalement les instructions de Chuquet (1484) « à l'envers », il est facile d'associer au nombre de fois que j'entends -illion autant de colonnes de deux blocs de 3 traits, augmenté d'une colonne, puis de travailler chaque bloc de 3 traits séparément. Il suffit donc de travailler sur les blocs de 3 traits, correspondant au tableau présenté figure 1.

(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	$unité_{ze}$	$unité_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)								
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)								
(vii)								

1* correspond à *cent* et *vingt* non comptés. On ne l'entend pas mais on l'écrit.

dix** et ze** : soit dix soit -ze peut suivre 4 ou 6, soit quatre-vingts ou soixante. Dans tous les autres cas de dizaines, c'est impossible.

Figure 1. Tableau pour traduire un mot-nombre français dans le système indo-arabe

1.1 Utilisation du tableau

Supposons que nous entendions/lisions le nombre de Chuquet *sept-cents-quarante-cinq-mille-trois-cents-vingt-quatre-trillions-huit-cents-quatre-mille-trois-cents-billions-sept-cents-mille-vingt-trois-millions-six-cents-cinquante-quatre-mille-trois-cents-vingt-et-un.*

Nous entendons/lisons trois fois le phonème illion, et quatre fois le phonème mil[15] il faudra donc utiliser huit fois le tableau pour traduire le mot-nombre soit en parallèle, si nous disposons de huit groupes, soit si nous voulons respecter l'ordre d'énonciation ou d'écriture en commençant par le mot-nombre *sept-cents-quarante-cinq,* soit par tout intermédiaire mêlant nombre de groupe et ordre des 3-blocs.

1.2 Fonctionnement du tableau avec un mot-nombre inférieur à mille

La ligne (i) de la figure 1 divise la colonne des dizaines en pluriel et singulier, la ligne (ii) reprend les phonèmes/morphèmes possibles associés. La division de la colonne des unités suit la partition des unités indépendantes de celles des unités des nombres de 11 à 19 qui sont scindées en deux sous-parties : celle associée à –ze et celle associée à dix-, comme décrit ligne (ii). La ligne (iii) indique la liste des chiffres possibles à placer dans la ligne (iv) de la même colonne.

[15] Nous ne traitons pas ici des blocs correspondant à aucun mot-nombre, qui correspondent à 000 ni l'élimination des zéros les plus à gauches du 6-bloc de gauche. Cela se fait de la même façon que sur le dernier exemple.

Remplissage de la ligne (iv)

Cette ligne est le résultat de la translitération du mot-nombre. Elle est soumise à des contraintes représentées par différentes couleurs, qui induisent des raisonnements par cas.

- Pour la colonne *centaines* : Au plus un seul chiffre peut être inscrit.
- Pour le couple de colonnes de *dizaines* un seul chiffre peut être inscrit – impossible d'entendre vingt et –nte. Seuls les deux chiffres 4 et 6 peuvent être suivis d'un chiffre 1 de dizaine ;
- Pour le couple de colonnes de *dizaine*, seul le chiffre 1 peut apparaitre dans l'une des deux colonnes : -ze et dix- ne peuvent cohabiter ;
- Pour les trois colonnes unités, au plus une seule colonne peut recevoir un des chiffres donnés par la ligne (iii).

Maintenant seulement, nous commençons les calculs de codage pour obtenir l'expression chiffrée.

Les instructions de la ligne (v) pour la ligne (vi)

Elles ne concernent que les deux colonnes dizaines. Il faut doubler la valeur de la ligne (iv) dans la colonne vingt(s). Dans les autres colonnes – y compris celle de *-nte* – on réécrit ligne (vi) ce qui est écrit ligne (iv). Il y a au plus un chiffre par colonne restante.

Les instructions pour la colonne (vii)

Il peut y avoir une somme à effectuer entre la colonne des dizaines et celle de la dizaine pour remplir la colonne correspondant au chiffre des dizaines, sinon, s'il y a un chiffre dans l'une des deux colonnes ont le réécrit dans la colonne du chiffre des dizaines. Pour le chiffre des centaines et des unités, on reproduit la ligne (vi). Une case vide de la ligne (vii) est comblée avec un zéro. Dans le tableau 1 construit pour le mot-nombre à chiffrer, tous les zéros placer à gauche du premier chiffre non nul pourront être supprimés.

1.3 Exemples

Chiffrement des trillions du nombre de Chuquet : les tableaux des deux premiers 3-blocs (voir fig. 2) donne 745 324 --- --- --- --- --- ---

sept-cents-quarante-cinq

(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	$unité_{ze}$	$unité_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)	7		4					5
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)	7	4				5		
(vii)	7	4				5		

745

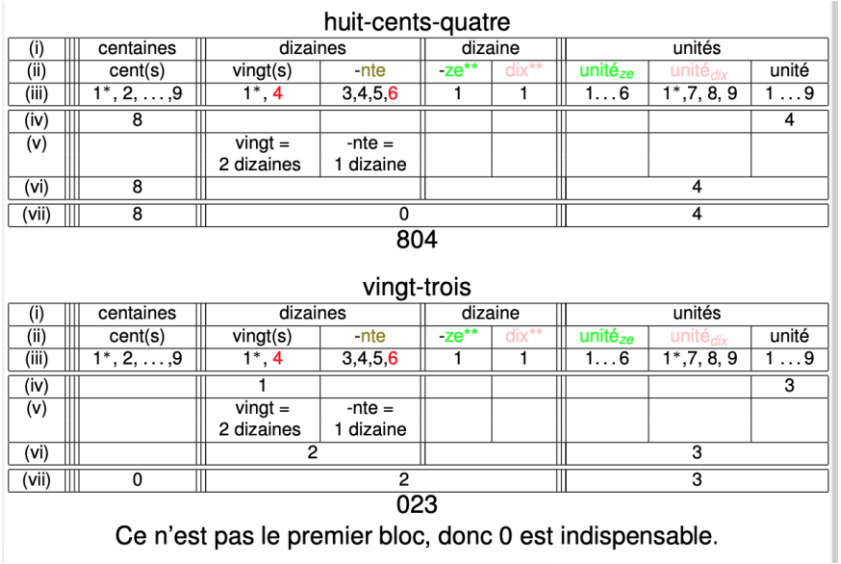
trois-cents-vingt-quatre

(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	$unité_{ze}$	$unité_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)	3	1						4
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)	3	2				4		
(vii)	3	2				4		

324

Figure 2. Les deux premiers 3-blocs du nombre de Chuquet

Celui du 3-bloc suivant et celui du sixième (fig. 3) permet de compléter 745 324 804--- --- 023 --- ---



huit-cents-quatre

(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	unité$_{ze}$	unité$_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)	8							4
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)	8					4		
(vii)	8	0				4		

804

vingt-trois

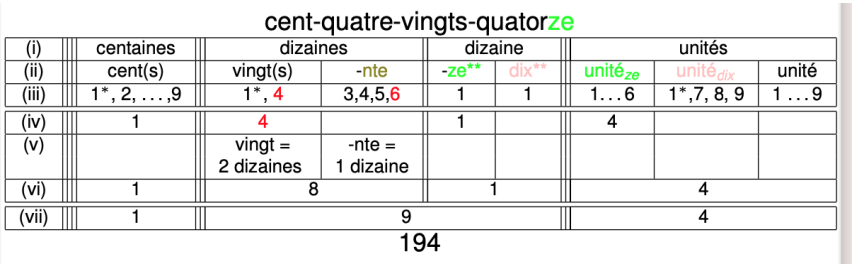
(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	unité$_{ze}$	unité$_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)		1						3
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)		2				3		
(vii)	0	2				3		

023

Ce n'est pas le premier bloc, donc 0 est indispensable.

Figure 3. Le troisième et sixième 3-blocs suivants du nombre de Chuquet

Nous laissons le lecteur terminer le chiffrement du mot-nombre de Chuquet. Nous terminons par un exemple nécessitant l'addition des chiffres des deux colonnes dizaines (fig. 4).



cent-quatre-vingts-quatorze

(i)	centaines	dizaines		dizaine		unités		
(ii)	cent(s)	vingt(s)	-nte	-ze**	dix**	unité$_{ze}$	unité$_{dix}$	unité
(iii)	1*, 2, . . . ,9	1*, 4	3,4,5,6	1	1	1. . . 6	1*,7, 8, 9	1 . . . 9
(iv)	1	4		1		4		
(v)		vingt = 2 dizaines	-nte = 1 dizaine					
(vi)	1	8		1		4		
(vii)	1	9				4		

194

Figure 4.Codage d'un nombre nécessitant l'addition des deux colonnes des dizaines

1.4 Commentaires

L'auditoire semble partagé, quant à la difficulté d'utiliser ce tableau. Il peut être utilisé partiellement. Lu de droite à gauche, il reprend le découpage de l'apprentissage des mots-nombres proposés dans la première partie : d'abord l'apprentissage des mots-nombre pour les nombres de 1 à 9, qui concerne la colonne unité ; puis ceux de 10 à 19 pour la colonne dizaine et la colonne unités ; puis ceux des nombres jusqu'à 59, en ajoutant la colonne « *–nte »* sauf le 6, puis l'on inclut les deux dernières vingtaines de 60 à 99 avec la colonne dizaines, et enfin les centaines.

Le rôle du zéro comme marqueur d'absence d'une unité de compte décimale est bien mis en évidence.

Il peut être aussi utilisé « à l'envers » comme complément à l'apprentissage de l'écriture des nombres en chiffres sans l'utilisation des mots-nombres (cf. Mounier, Grapin et Pfaff, 2020).

2 Application dans deux langues non-indoeuropéennes, avec des schémas de règles originaux

Nous avons proposé à une moitié des participants à l'atelier de travailler sur le système yoruba, et l'autre moitié sur le système maya yucatèque.

Travailler sur un système de numération consiste à trouver le lexique et les règles à partir de la suite numérique dépassant la centaine. Le lexique est constitué des mots courts, que l'on retrouve plus ou moins édulcorés dans les autres mots. Pour faciliter le travail pour le système maya, nous avons

reconstitué les mots sans déformation phonétique (Annexe 4 : ajout de « ca » devant « kal » pour les nombres de 21 à 39 et « y » pour séparer « tu » et une voyelle.).

2.1 Le système yoruba

La numération yoruba (langue africaine) n'a guère posé de problèmes, puisqu'elle possède une interprétation arithmétique évidente, bien que faisant une large part à la soustraction, ce qui en fait un support très intéressant en activité de classe et pour la formation des enseignants.

Les Yorubas forment un groupe ethnique d'Afrique de plus de 15 millions de personnes installées au Nigeria, au Bénin, au Ghana, en Côte d'Ivoire – sous le nom d'Anango – et au Togo. Ils auraient quitté la Haute-Egypte entre le septième et le neuvième siècle. Ce sont essentiellement des citadins et de très habiles négociants. Ils excellaient dans le commerce de l'or, des esclaves et du cacao. L'unité élémentaire de compte monétaire était un petit coquillage appelé *caurie*, que Marco Polo site dans *Le livre des merveille,* paru en 1298. Se conservant très bien, ils constituent le premier étalon monétaire mondial : 40 cauries valent une ligature, 50 ligatures une tête, 10 têtes un sac.

La langue yoruba est une langue d'Afrique de l'Ouest, reconnue comme langue nationale au Bénin, au Nigéria et Togo. Sachant que le déterminant devant se placer après le déterminé, ce qui est compté est toujours à droite de ce qui compte. En revanche les suppléments/ajouts « *le* ou *l'* » et les retraits/déductions « *din* » s'expriment à droite. La liste des mots-nombres proposés est très vite décryptée ainsi que les règles qui sont proches du système étrusque mais avec un énorme avantage pédagogique, il utilise les compléments à 5, 10, 20, …

Jusqu'à 30 puis 4000

La suite numérique est présentée annexe 5. Si l'on se restreint à 30, on pourrait croire que le système est décimal, car le lexique contient les nombres de [1] à [10], [20] et [30]. Mais entre [40] et [180] nous avons bien exprimé des multiples de 20. En revanche, [400] exprimerait bien un multiple de 100, alors que les autres multiples de 200 en expriment bien un multiple. Mais [4000] dit le double de 2000. Les interférences avec le système monétaire caurie privilégient les repères à 5, 10 et 20. On pourrait alors parler d'un système mixte quinaire, décimal et vigésimal, plus précisément autour des unités de compte et leurs multiples. Le nombre de nombres entre deux multiples étant impair, le nombre qui est avant le milieu est ajouté au multiple inférieur, les autres déduits du multiple supérieur. 24 se dit [4]-en-supplément/en-plus-de-[20] et 25 [5]-déduit-de-[30] et 27 [3]-déduit-de-[30].

2.2 Le système maya yucatèque

Les Mayas vivent au sud du Mexique (l'état du Yucatan et sa péninsule), au Guatemala ainsi qu'au Bélise. Le maya yucatèque est une langue amérindienne indigène essentiellement parlé au Mexique (dans les états du Yucatán, Campeche et Quintana Roo) ainsi qu'au Bélise par près de 800 000 locuteurs. La plupart des locuteurs parlent espagnol.

Le système connu maya yucatèque est le système de position vigésimal avec points et traits utilisés par l'administration royale et religieuse pour traiter des grands nombres, notamment pour compter les jours sur une échelle de plusieurs milliers d'années. Le système oral du peuple n'est pas du tout construit de cette façon, mais reste vigésimal. La comptine est présentée annexe 4.

Le lexique n'a pas posé de difficulté, ni le fait que le système soit vigésimal. Néanmoins, nous attirons l'attention sur le fait qu'une méconnaissance de la langue du système peut conduire à des erreurs d'interprétation, comme cela peut être le cas avec [10] qui se dit *lahun,* dans lequel on est tenté de reconnaitre *hun* qui signifie [1]. Il n'en est rien. *Lahun* est bien un élément indécomposable du lexique.

Mais il n'en a pas été de même pour les règles, car c'est une numération dite calendaire, qui a été longtemps considérée comme protractive par suite d'une mauvaise interprétation de la particule *tu(y)* qui

signifie « dans son » et non « vers » (Hoppan et Schwer, 2019). Mais il est possible de trouver l'une ou l'autre de ces interprétations en modélisant le mot nombre à l'aide des [n] et <n> (cf. note 7). Comme 20 est précédé de la quantité 1, il est considéré comme collectif et compté comme unité de compte.

[41] s'écrit *hun-tuy-ox-cal* soit [1]-tuy-[3]-<20>. De même [51] s'écrit *buluc-tuy-ox-cal* soit [11]-tuy-[3]-<20>. De même, [101] s'écrit [1]-tuy-[6]<20> et [111] s'écrit [11]-tu(y)-[6]<20>. Un nombre est donc repéré par rapport aux vingtaines. Comme collectif, il est plus apte à contenir qu'à simplement repérer. [k]-tuy-[n]<20> se dit [k] dans la [n^{e}] [20]taine, comme on pourrait dire « le 4 du 6^{e} mois ».

III - CONCLUSION

L'étude historique des systèmes de numération en langue est un cadre idéal pour un travail pluridisciplinaire. Il permet d'aborder des thèmes importants à la fois pour l'étude de la langue et des mathématiques comme la définition d'un système — son lexique de base ou alphabet, ses règles de construction ou grammaire, son interprétation en contexte -, de bien différencier les objets à étudier - ici les nombres naturels - de leurs représentations - les mots-nombres dans la langue, de démêler ce qui relève de la logique, de l'évolution « naturelle » d'une part de ce qui relève de la norme issue de décisions subjectives ou culturelles. Ce travail nous a permis notamment d'expliquer chacune des « irrégularités » que l'on peut relever dans la comptine numérique de 1 à 100. En reconnaissant que la base naturelle de la numération en français pour les nombres allant jusqu'au milliard est 1000, on comprend également pourquoi tant de personnes ont eu des difficultés à passer des anciens francs aux nouveaux francs, puisque pour des raisons politiques la dévaluation d'un facteur mille a été rejetée au profit d'un facteur 100 : ainsi 10 millions d'anciens francs valaient non pas 10 mille francs nouveaux — simple changement d'unités de compte — mais 100 mille francs nouveaux.

L'étude de la grammaire des mots-nombre nous permet également de dégager un plan d'étude pour l'apprentissage de la numération ainsi qu'un algorithme de traduction entre les systèmes de numération en langue et indo-arabe.

BIBLIOGRAPHIE

Armstrong, R. (1962). *Yoruba Numbers*. Oxford : Oxford University Press

Beltran de Santa Rosa Maria de Lima, P. (1859). *Arte del idioma maya reducido a sucintas reglas, y semilexicon yucateco* (2^{e} éd.). Mexique : Mérida

Benveniste, E. (1966). Lexique et culture, chap. 4 de *Problèmes de linguistique générale*, I. Paris : Gallimard

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la science des nombres : publié d'après le manuscrit fonds français n°1346 de la Bibliothèque nationale de Paris et précédé d'une notice par M. Aristide Marre.* Rome : Imprimerie des sciences mathématiques et physiques

Condorcet N. (1794). *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. Paris : Moutardier.

Hoppan J.-M. et Schwer S. (2021). De la protraction en maya?. *Faits de Langues*, *51*(2), 39-62. https://doi.org/10.1163/19589514-05102004

Houdement, C. et Tempier F. (2022). Familier mais problématique, le tableau de numération. Grand N – n°109, p. 55 à 75. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-109-grand-n/3-familier-mais-problematique-le-tableau-de-numeration-1115711.kjsp

Laplace, P.-S. (1812). Leçons de mathématiques données à l'École normale en 1795. Journal de l'École polytechnique, VII^{e} Cahier, juin 1812. http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_LAPLACE__14_10_0

Kasner, É. et Newman, J.-R. (1940). *Mathematics and imagination*. Rééd. Dover Publications, 2001

Mallory, J. et Adams D. (2006). *The Oxford Introduction to Proto-Indo-European and the Proto-Indo-European World*. Oxford : Oxford University Press

Mounier, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 17, 27-58. https://bibnum.publimath.fr/IST/IST12003.pdf

Mounier, E., Grapin, N. et Pfaff, N. (2020). Lire, écrire les nombres : quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2 ? Grand N, 106, 31-47. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-106-grand-n/2-lire-ecrire-les-nombres-quelle-place-dans-l-apprentissage-des-numerations-au-cycle-2--750635.kjsp

Poisard, C., Kervran, M., Surget E. et Moumin E. (2018). Étudier des numérations orales en classe : quels savoirs mathématiques et langagiers ?. Au fil des maths.
https://publimath.apmep.fr/numerisation/AAB/AAB18009/AAB18009.pdf

Tempier F. (2023). Variations autour d'une situation de comparaison de quantités pour l'apprentissage des unités de numération. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 23, 765–790. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00307-9

Vaugelas (1738). *Remarques de M. de Vaugelas sur la langue française, avec des notes de messieurs Patris et T. Corneille*. Tome 3 (22). Paris :Didot. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65659155/f34.image.r=triacleur

Vendryes, J. (1937). Sur le nombre duel. *C. R. S. de l'Académie des Inscriptions et Belles-lettres* 81(2). 116-128

ANNEXE 1- PAGE MANUSCRITE DE NICOLAS CHUQUET, TRANSLITÉRATION ET TRADUCTION EN FRANÇAIS CONTEMPORAIN[16]

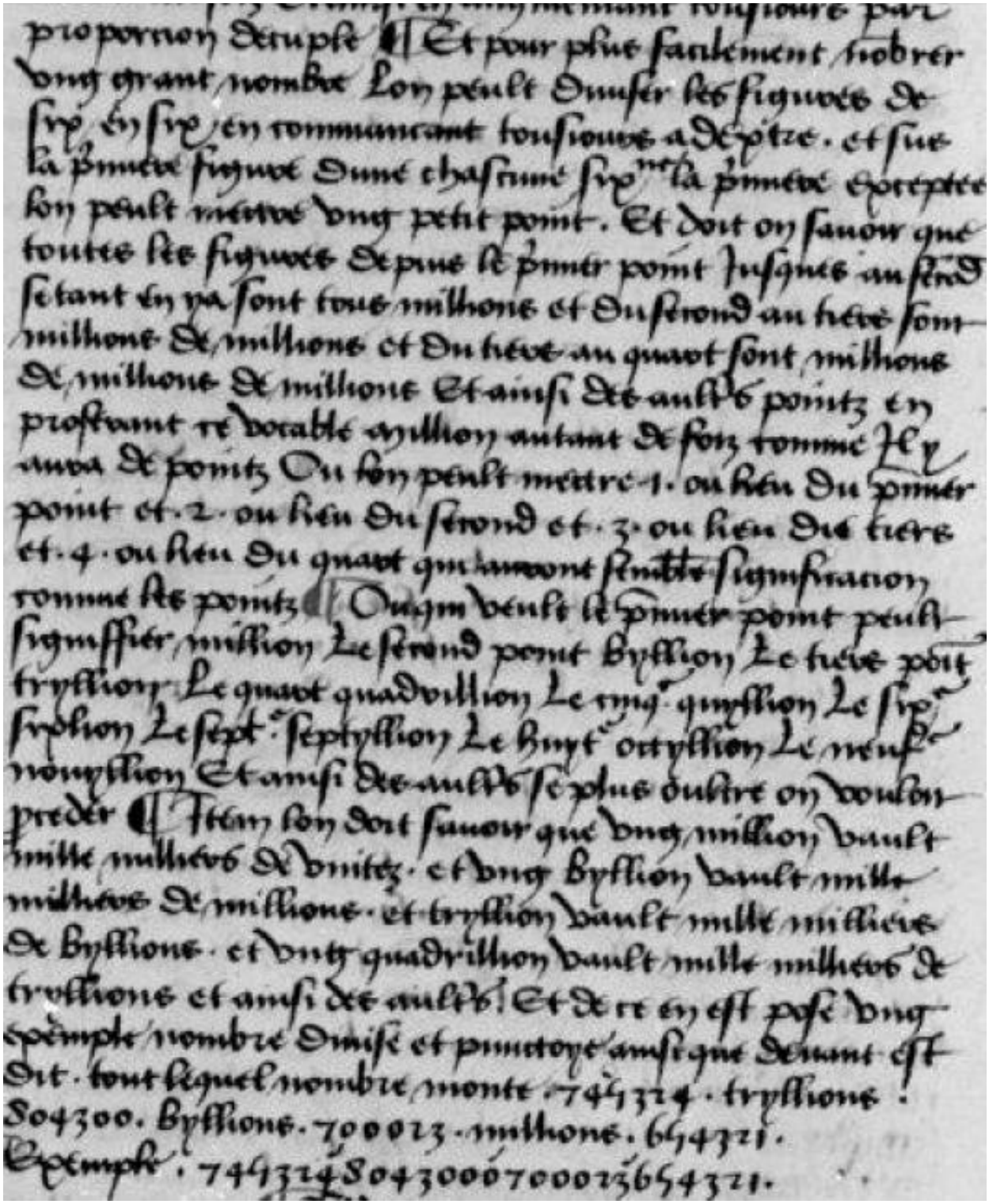


Figure 5. Nicolas Chuquet (1484) triparty en la science des nombres, feuillet 2 recto

[16] Traduction libre de l'autrice. À la suite d'échanges post-atelier avec des collègues, nous avons choisi une traduction permettant de la diffuser en l'état en plus de la traduction littérale commentée dans l'atelier.

Le texte translitéré

Et pour plus facilement nõbrer ung grant nombre l'on peult diviser les figures de six en six en commencant touiours a dextre et sus la ṕmiere figure dune chascune six^ne La ṕmiere exeptee lon peult mettre ung petit point. Et doit on sauoir que toutes les figures depuis le ṕmier point jusques au secõd se tant en y a sont tous millions et du second au tiers sont millions de millions et du tiers au quart sont millions de millions de millions Et ainsi des ault's pointz en proferant ce vocable million autant de foiz comme il y aura de pointz Ou lon peult mettre .1. ou lieu du ṕmier point et .2. ou lieu du second et .3. ou lieu du tiers et .4. ou lieu du quart qui auront semble signification comme les pointz. **O***u qui veult le ṕmier point peult signiffier million Le second point byllion Le tiers poĩt tryllion Le quart quadrillion Le cinq^e quyllion Le six^e sixlion Le sept^e septyllion Le huyt^e ottyllion Le neuf^e nonyllion et ainsi des aultr's se plus oultre on vouloit ∼pceder.* **I***dem lon doit sauoir que ung million vault mille milliers de unitez. et ung byllion vault mille milliers de millions. et tryllion vault mille milliers de byllions. et ung quadrillion vault mille milliers de tryllions et ainsi des ault's. Et de ce en est pose ung exemple nombre diuise et ponctoye ainsi que devant est dit. Tout le quel nombre monte . 745324 . trillions . 804300 . byllions . 700023 . millions 654321.*

Exemple . 745324' 804300' 700023' 654321.

Figure 6. recopie tapuscrite de l'autrice du texte de la figure 4.

Le texte réécrit :

« Et pour plus facilement nombrer un grand nombre, l'on peut diviser les chiffres en bloc de six en commençant toujours à droite et sur chaque premier chiffre de droite de chaque bloc, excepté le premier, l'on peut mettre un petit point. Et il faut savoir que tous les chiffres depuis le premier point jusqu'au second concernent les millions, du second point au troisième point concernent les millions de millions et ceux du troisième au quatrième sont millions de millions de millions. Et ainsi des points suivants en répétant ce terme *million* autant de fois qu'il y a de points. Mais l'on peut aussi mettre .1. au lieu du premier point et .2. au lieu du second et .3. au lieu du troisième et .4. au lieu du quatrième qui auront même signification que les points.

Le premier point signifie *million* ; le second point billion ; le troisième point trillion ; le quatrième quadrillion ; le cinquième quintillion ; le sixième sextillion ; le septième septillion ; le huitième octillion ; le neuvième nonillion et ainsi de suite. De même l'on doit savoir qu'un million vaut mille milliers d'unités, un billion vaut mille milliers de millions, trillion vaut mille milliers de billions, et un quadrillion vaut mille milliers de trillions et ainsi de suite. Ainsi 745324 trillions 804300 billions 700023 millions 654321 représente la division 745324' 804300' 700023' 654321 du nombre 745 324 804 300 700 023 654 321. »

ANNEXE 2 – TABLEAU DES NOMBRES EN FRANÇAIS

	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf
dix	onze	douze	treize	quatorze	quinze	seize	dix-sept	dix-huit	dix-neuf
vingt	vingt -et- un	vingt - deux	vingt - trois	vingt - quatre	vingt - cinq	vingt - six	vingt - sept	vingt - huit	vingt - neuf
trEnte	trente -et- un	trente - deux	trente - trois	trente - quatre	trente - cinq	trente - six	trente - sept	trente - huit	trente - neuf
quarAnte	quarante -et- un	quarante - deux	quarante - trois	quarante - quatre	quarante - cinq	quarante - six	quarante - sept	quarante - huit	quarante - neuf
cinquAnte	cinquante -et- un	cinquante - deux	cinquante - trois	cinquante - quatre	cinquante - cinq	cinquante - six	cinquante - sept	cinquante - huit	cinquante - neuf
soixAnte	soixante -et- un	soixante - deux	soixante - trois	soixante - quatre	soixante - cinq	soixante - six	soixante - sept	soixante - huit	soixante - neuf
soixAnte - dix	soixante -et- onze	soixante - douze	soixante - treize	soixante - quatorze	soixante - quinze	soixante - seize	soixante - dix-sept	soixante - dix-huit	soixante - dix-neuf
quatre-vingt(s)	quatre-vingt -un	quatre-vingt -deux	quatre-vingt -trois	quatre-vingt -quatre	quatre-vingt -cinq	quatre-vingt -six	quatre-vingt - sept	quatre-vingt -huit	quatre-vingt -neuf
quatre-vingt -dix	quatre-vingt -onze	quatre-vingt -douze	quatre-vingt -treize	quatre-vingt -quatorze	quatre-vingt -quinze	quatre-vingt -seize	quatre-vingt -dix-sept	quatre-vingt -dix-huit	quatre-vingt -dix-neuf
cent	cent -un	cent -deux	cent -trois	cent -quatre	cent -cinq	cent -six	cent - sept	cent -huit	cent -neuf

Un et une ; règle des vingts et des cents.

Figure 7. Tableau des mots-nombre en français

	[]	[]PREF_10	[]PREF_DIZ	[]PREF_ILL	[]PREF-langue	[]SUF	[]FEM	[]PL	[]supl
1	un	on-					une		
2	deux	dou-		b-	bi-, di-duo-				
3	trois	trei-	tre-	tr-	tri				
4	quatre	quator-	quar-	(quadr-) quatr-	quadr- quatr- quart-				
5	cinq	quin-	cinqu-	quint-	Quint- cinq-				
6	six	sei-	soix-	sext-	Sext- six-				
7	sept			sept-	Sept-				
8	huit			oct-	Oct- huit-				
9	neuf			non-	non- neuv-				
10	dix			dec-	dec- dix-	-ente $[10]_{diz(3)}$ -ante $[10]_{diz}$ -ze $[10]_{10}$			
20	vingt				vingt-			[]s	
100	cent				cent-			[]s	
10^3	mille				mill-				mil
10^6	million				million-	-illion		[]s	
10^9	milliard				milliard-	-illiard		[]s	

Figure 8. Lexique des mots-nombre en français

Annexe 3 - Comparaison de la numération de Condorcet (1749) et de la numération turque

	1 un	2 deux	3 trois	4 quatre	5 cinq	6 six	7 sept	8 huit	9 neuf
10 dix	11 [10][1]	12 [10][2]	13 [10][3]	14 [10][4]	15 [10][5]	16 [10][6]	17 [10][7]	18 [10][8]	19 [10][9]
20 duante duente	21 [20][1]	22 [20][2]	23 [20][3]	24 [20][4]	25 [20][5]	26 [20][6]	27 [20][7]	28 [20][8]	29 [20][9]
30 triente	31 [30][1]	32 [30][2]	33 [30][3]	34 [30][4]	35 [30][5]	36 [30][6]	37 [30][7]	38 [30][8]	39 [30][9]
40 quarante	41 [40][1]	42 [40][2]	43 [40][3]	44 [40][4]	45 [40][5]	46 [40][6]	47 [40][7]	48 [40][8]	49 [40][9]
50 [5]ante	51 [50][1]	52 [50][2]	53 [50][3]	54 [50][4]	55 [50][5]	56 [50][6]	57 [50][7]	58 [50][8]	59 [50][9]
60 soixante	61 [60][1]	62 [60][2]	63 [60][3]	64 [60][4]	65 [60][4]	66 [60][6]	67 [60][7]	68 [60][8]	69 [60][9]
70 [7]ante	71 [70][1]	72 [70][2]	73 [70][3]	74 [70][4]	75 [70][5]	76 [70][6]	77 [70][7]	78 [70][8]	79 [70][9]
80 octante	81 [80][1]	82 [80][2]	83 [80][3]	84 [80][4]	85 [80][5]	86 [80][6]	87 [80][7]	88 [80][8]	89 [80][9]
90 nonante	91 [90][1]	92 [90][2]	93 [90][3]	94 [90][4]	95 [90][5]	96 [90][6]	97 [90][7]	98 [90][8]	99 [90][9]
100 cent	101 [100][1]	102 [100][2]	103 [100][3]	104 [100][4]	105 [100][5]	106 [100][6]	107 [100][7]	108 [100][8]	109 [100][9]

Figure 9. Numération proposée par Condorcet

	1 bir	2 iki	3 üç	4 dört	5 beş	6 altı	7 yedi	8 sekiz	9 dokuz
10 on	11 [10][1]	12 [10][2]	13 [10][3]	14 [10][4]	15 [10][5]	16 [10][6]	17 [10][7]	18 [10][8]	19 [10][9]
20 yirmi	21 [20][1]	22 [20][2]	23 [20][3]	24 [20][4]	25 [20][5]	26 [20][6]	27 [20][7]	28 [20][8]	29 [20][9]
30 otuz	31 [30][1]	32 [30][2]	33 [30][3]	34 [30][4]	35 [30][5]	36 [30][6]	37 [30][7]	38 [30][8]	39 [30][9]
40 kırk	41 [40][1]	42 [40][2]	43 [40][3]	44 [40][4]	45 [40][5]	46 [40][6]	47 [40][7]	48 [40][8]	49 [40][9]
50 elli	51 [50][1]	52 [50][2]	53 [50][3]	54 [50][4]	55 [50][5]	56 [50][6]	57 [50][7]	58 [50][8]	59 [50][9]
60 altmış	61 [60][1]	62 [60][2]	63 [60][3]	64 [60][4]	65 [60][4]	66 [60][6]	67 [60][7]	68 [60][8]	69 [60][9]
70 yetmiş	71 [70][1]	72 [70][2]	73 [70][3]	74 [70][4]	75 [70][5]	76 [70][6]	77 [70][7]	78 [70][8]	79 [70][9]
80 seksen	81 [80][1]	82 [80][2]	83 [80][3]	84 [80][4]	85 [80][5]	86 [80][6]	87 [80][7]	88 [80][8]	89 [80][9]
90 doksan	91 [90][1]	92 [90][2]	93 [90][3]	94 [90][4]	95 [90][5]	96 [90][6]	97 [90][7]	98 [90][8]	99 [90][9]
100 yüz	101 [100][1]	102 [100][2]	103 [100][3]	104 [100][4]	105 [100][5]	106 [100][6]	107 [100][7]	108 [100][8]	109 [100][9]

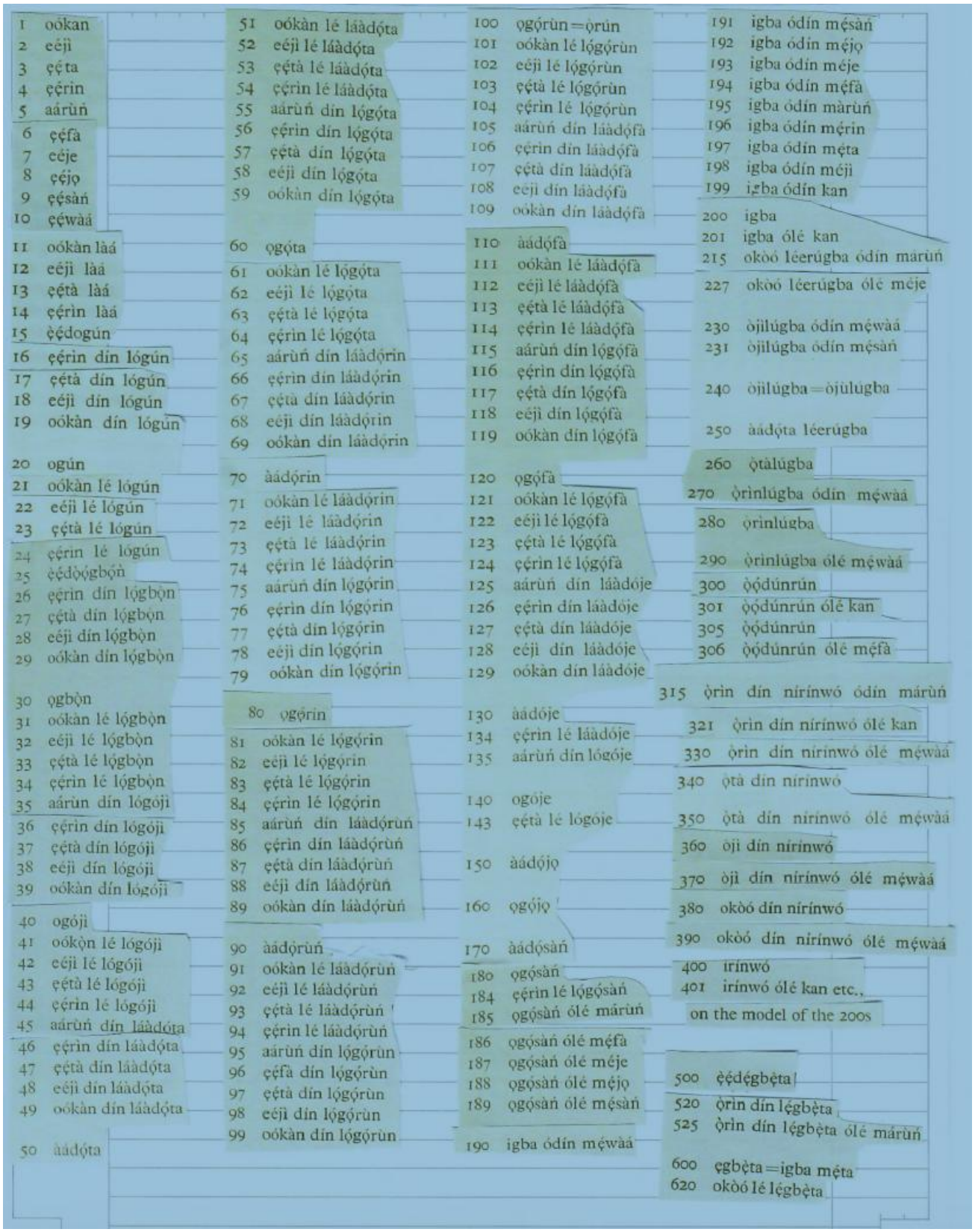
Figure 10. Numération turque

ANNEXE 4 - SUITE MAYA YUCATÈQUE D'APRÈS BELTRAM (1859)

		40	cakal	80	cankal
1	hun	41	huntuyoxkal	81	huntuyhokal
2	ca	42	catuyoxkal	82	catuyhokal
3	ox	43	oxtuyoxkal	83	oxtuyhokal
4	can	44	cantuyoxkal	84	cantuyhokal
5	ho	45	hotuyoxkal	85	hotuyhokal
6	uac	46	uactuyoxkal	86	uactuyhokal
7	uuc	47	uuctuyoxkal	87	uuctuyhokal
8	uaxac	48	uaxactuyoxkal	88	uaxactuyhokal
9	bolon	49	bolontuyoxkal	89	bolontuyhokal
10	lahun	50	lahuntuyoxkal	90	lahuntuyhokal
11	buluc	51	buluctuyoxkal	91	buluctuyhokal
12	lahunca	52	lahuncatuyoxkal	92	lahuncatuyhokal
13	oxlahun	53	oxlahuntuyoxkal	93	oxlahuntuyhokal
14	canlahun	54	canlahuntuyoxkal	94	canlahuntuyhokal
15	holahun	55	holahuntuyoxkal	95	holahuntuyhokal
16	uaclahun	56	uaclahuntuyoxkal	96	uaclahuntuyhokal
17	uuclahun	57	uuclahuntuyoxkal	97	uuclahuntuyhokal
18	uaxaclahun	58	uaxaclahuntuyoxkal	98	uaxaclahuntuyhokal
19	bolonlahun	59	bolonlahuntuyoxkal	99	bolonlahuntuyhokal
20	hunkal	60	oxkal	100	hokal

21	huntucakal	61	huntucankal	101	huntu uackal
22	catucakal	62	catucankal	102	catu uackal
23	oxtucakal	63	oxtucankal	103	oxtu uackal
24	cantucakal	64	cantucankal	104	cantu uackal
25	hotucakal	65	hotucankal	105	hotu uackal
26	uactucakal	66	uactucankal	106	uactu uackal
27	uuctucakal	67	uuctucankal	107	uuctu uackal
28	uaxactucakal	68	uaxactucankal	108	uaxactu uackal
29	bolontucakal	69	bolontucankal	109	bolontu uackal
30	lahuntucakal	70	lahuntucankal	110	lahuntu uackal
31	buluctucakal	71	buluctucankal	111	buluctu uackal
32	lahuncatucakal	72	lahuncatucankal	112	lahuncatu uackal
33	oxlahuntucakal	73	oxlahuntucankal	113	oxlahuntu uackal
34	canlahuntucakal	74	canlahuntucankal	114	canlahuntu uackal
35	holahuntucakal	75	holahuntucankal	115	holahuntu uackal
36	uaclahuntucakal	76	uaclahuntucankal	116	uaclahuntu uackal
37	uuclahuntucakal	77	uuclahuntucankal	117	uuclahuntu uackal
38	uaxaclahuntucakal	78	uaxaclahuntucankal	118	uaxaclahuntu uackal
39	bolonlahuntucakal	79	bolonlahuntucankal	119	bolonlahuntu uackal

ANNEXE 5 - SUITE YORUBA, EXTRAITE DE ARMSTRONG (1962)



1 oókan
2 eéjì
3 ęęta
4 ęęrin
5 aárùń
6 ęęfà
7 eéje
8 ęęjọ
9 ęęsàń
10 ęęwàá
11 oókàn làá
12 eéjì làá
13 ęętà làá
14 ęęrìn làá
15 èédogún
16 ęęrin dín lógún
17 ęętà dín lógún
18 eéjì dín lógún
19 oókàn dín lógún
20 ogún
21 oókàn lé lógún
22 eéjì lé lógún
23 ęętà lé lógún
24 ęęrin lé lógún
25 èédọ́ọ́gbọ̀n
26 ęęrin dín lógbọ̀n
27 ęętà dín lógbọ̀n
28 eéjì dín lógbọ̀n
29 oókàn dín lógbọ̀n
30 ọgbọ̀n
31 oókàn lé lógbọ̀n
32 eéjì lé lógbọ̀n
33 ęętà lé lógbọ̀n
34 ęęrìn lé lógbọ̀n
35 aárùn dín lógòjì
36 ęęrin dín lógòjì
37 ęętà dín lógòjì
38 eéjì dín lógòjì
39 oókàn dín lógòjì
40 ogòjì
41 oókọ̀n lé lógòjì
42 eéjì lé lógòjì
43 ęętà lé lógòjì
44 ęęrìn lé lógòjì
45 aárùń dín láàdọ́ta
46 ęęrin dín láàdọ́ta
47 ęętà dín láàdọ́ta
48 eéjì dín láàdọ́ta
49 oókàn dín láàdọ́ta
50 àádọ́ta
51 oókàn lé láàdọ́ta
52 eéjì lé láàdọ́ta
53 ęętà lé láàdọ́ta
54 ęęrìn lé láàdọ́ta
55 aárùń dín lógọ́ta
56 ęęrin dín lógọ́ta
57 ęętà dín lógọ́ta
58 eéjì dín lógọ́ta
59 oókàn dín lógọ́ta
60 ọgọ́ta
61 oókàn lé lógọ́ta
62 eéjì lé lógọ́ta
63 ęętà lé lógọ́ta
64 ęęrìn lé lógọ́ta
65 aárùń dín láàdọ́rin
66 ęęrin dín láàdọ́rin
67 ęętà dín láàdọ́rin
68 eéjì dín láàdọ́rin
69 oókàn dín láàdọ́rin
70 àádọ́rin
71 oókàn lé láàdọ́rin
72 eéjì lé láàdọ́rin
73 ęętà lé láàdọ́rin
74 ęęrìn lé láàdọ́rin
75 aárùń dín lógọ́rin
76 ęęrin dín lógọ́rin
77 ęętà dín lógọ́rin
78 eéjì dín lógọ́rin
79 oókàn dín lógọ́rin
80 ọgọ́rin
81 oókàn lé lógọ́rin
82 eéjì lé lógọ́rin
83 ęętà lé lógọ́rin
84 ęęrìn lé lógọ́rin
85 aárùń dín láàdọ́rùn
86 ęęrin dín láàdọ́rùn
87 ęętà dín láàdọ́rùn
88 eéjì dín láàdọ́rùn
89 oókàn dín láàdọ́rùn
90 àádọ́rùn
91 oókàn lé láàdọ́rùn
92 eéjì lé láàdọ́rùn
93 ęętà lé láàdọ́rùn
94 ęęrìn lé láàdọ́rùn
95 aárùn dín lógọ́rùn
96 ęęfà dín lógọ́rùn
97 ęętà dín lógọ́rùn
98 eéjì dín lógọ́rùn
99 oókàn dín lógọ́rùn
100 ọgọ́rùn=ọ́rùn
101 oókàn lé lógọ́rùn
102 eéjì lé lógọ́rùn
103 ęętà lé lógọ́rùn
104 ęęrìn lé lógọ́rùn
105 aárùń dín láàdọ́fà
106 ęęrin dín láàdọ́fà
107 ęętà dín láàdọ́fà
108 eéjì dín láàdọ́fà
109 oókàn dín láàdọ́fà
110 àádọ́fà
111 oókàn lé láàdọ́fà
112 eéjì lé láàdọ́fà
113 ęętà lé láàdọ́fà
114 ęęrìn lé láàdọ́fà
115 aárùń dín lógọ́fà
116 ęęrìn dín lógọ́fà
117 ęętà dín lógọ́fà
118 eéjì dín lógọ́fà
119 oókàn dín lógọ́fà
120 ọgọ́fà
121 oókàn lé lógọ́fà
122 eéjì lé lógọ́fà
123 ęętà lé lógọ́fà
124 ęęrìn lé lógọ́fà
125 aárùń dín láàdóje
126 ęęrìn dín láàdóje
127 ęętà dín láàdóje
128 eéjì dín láàdóje
129 oókàn dín láàdóje
130 àádóje
134 ęęrìn lé láàdóje
135 aárùń dín lógóje
140 ogóje
143 ęętà lé lógóje
150 àádọ́jọ
160 ọgọ́jọ
170 àádọ́sàń
180 ọgọ́sàń
184 ęęrìn lé lógọ́sàń
185 ọgọ́sàń ólé márùń
186 ọgọ́sàń ólé méfà
187 ọgọ́sàń ólé méje
188 ọgọ́sàń ólé méjọ
189 ọgọ́sàń ólé mésàń
190 igba ódín méwàá
191 igba ódín mésàń
192 igba ódín méjọ
193 igba ódín méje
194 igba ódín méfà
195 igba ódín màrùń
196 igba ódín mérin
197 igba ódín méta
198 igba ódín méji
199 igba ódín kan
200 igba
201 igba ólé kan
215 okòó léerúgba ódín márùń
227 okòó léerúgba ólé méje
230 òjìlúgba ódín méwàá
231 òjìlúgba ódín mésàń
240 òjìlúgba=òjúlúgba
250 àádọ́ta léerúgba
260 ọ̀tálúgba
270 ọ̀rìnlúgba ódín méwàá
280 ọ̀rìnlúgba
290 ọ̀rìnlúgba ólé méwàá
300 ọ̀ọ́dúnrún
301 ọ̀ọ́dúnrún ólé kan
305 ọ̀ọ́dúnrún
306 ọ̀ọ́dúnrún ólé méfà
315 ọ̀rìn dín nírínwó ódín márùń
321 ọ̀rìn dín nírínwó ólé kan
330 ọ̀rìn dín nírínwó ólé méwàá
340 ọ̀tà dín nírínwó
350 ọ̀tà dín nírínwó ólé méwàá
360 òji dín nírínwó
370 òjì dín nírínwó ólé méwàá
380 okòó dín nírínwó
390 okòó dín nírínwó ólé méwàá
400 irínwó
401 irínwó ólé kan etc.,
on the model of the 200s
500 èédégbèta
520 ọ̀rìn dín légbèta
525 ọ̀rìn dín légbèta ólé márùń
600 ęgbèta=igba méta
620 okòó lé légbèta

MANIPULATION, REPRÉSENTATION DES NOMBRES SOUS DIX : QUELS ENJEUX POUR L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES À L'ENTRÉE DE L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE ?

Anne-Marie RINALDI
MCF, Université Paul Valéry
LIRDEF (EA 3749)
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

Sophie GASTAL
RMC, Académie de Montpellier
Sophie.Gastal@ac-montpellier.fr

Bérengère LAURENT
PEMF, Académie de Montpellier
Berengere.Laurent@ac-montpellier.fr

Anne-Catherine POUSSARD
PE, Académie de Montpellier
Anne-Cathe.Poussard@ac-montpellier.fr

Résumé
Ce texte rend compte du travail proposé en atelier en juin 2024 au colloque de la COPIRELEM. La question de recherche présentée et discutée avec les participants lors de la séance était : étudier si le fait de manipuler des bandes pour calculer (enfants de 5 à 6 ans) et de les représenter est une aide pour établir des relations entre les données d'un problème additif verbal. Le texte reprend des éléments théoriques de la recherche conduite par les animateurs et s'appuie sur des expérimentations menées en classe. Il rend également compte des activités des participants autour de la résolution de problèmes et interroge la place particulière accordée à la restitution des procédures et à l'institutionalisation.

Cet atelier prend appui sur les travaux récents du groupe « Nombres et calcul au cycle 2 » de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des sciences de Montpellier (IRES) qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul et de la résolution de problèmes au tout début de l'école élémentaire en France (CP) donc pour des enfants de 6 à 7 ans. Dans une première partie de ce texte, nous détaillons les fondements théoriques de la recherche et nous introduisons le matériel utilisé en CP, en l'occurrence, un jeu de bandes de mesure allant de une à dix unités. Dans une seconde et troisième partie du texte, nous rendons compte des échanges avec les participants de l'atelier autour de ce matériel et nous discutons certains éléments du dispositif d'enseignement mis en œuvre en CP autour du calcul. Dans la quatrième partie du texte, nous présentons le travail donné en atelier pour engager la réflexion autour de la résolution de problèmes verbaux à l'entrée de l'école élémentaire (CP). Pour finir, nous donnons les

éléments d'analyse retenus par les participants de l'atelier en les confrontant avec les premiers résultats de la recherche.

I - TRAVAUX DU GROUPE AUTOUR DU CALCUL AU CYCLE 2

1 Contexte et présentation de l'équipe

Le groupe IRES a été créé en 2018 et regroupe actuellement six professionnelles : une chercheuse en didactique des mathématiques, une conseillère pédagogique de circonscription, deux référentes mathématiques de circonscription, un professeur maître formateur et deux professeures des écoles. Les premiers travaux de recherche ont porté sur le calcul additif sous vingt, calcul dont la plus grande somme obtenue est vingt. Ils ont fait l'objet d'une présentation en atelier à la COPIRELEM de Toulouse en juin 2022 (Rinaldi et al., 2023).

En septembre 2022, le groupe de recherche a orienté ses travaux autour du calcul sous dix, à l'entrée du cours préparatoire (CP) et testé un ensemble de situations de manipulation dans les classes respectives de deux membres du groupe IRES : deux CP dédoublés en REP+ de la circonscription de Montpellier Ouest. À la rentrée 2023, l'objectif du groupe IRES autour du calcul sous dix s'est poursuivi. C'est ainsi qu'il a été possible de concevoir et mettre en œuvre un dispositif d'enseignement de septembre 2023 à janvier2024 et d'évaluer ses effets sur les apprentissages des élèves. Quatre membres du groupe ont participé activement à ce projet : les deux enseignantes citées précédemment et deux autres enseignantes de la circonscription de Lodève. Par ailleurs, les enseignantes de quatre classes témoins, deux REP+ de la circonscription de Montpellier Ouest et deux classes de la circonscription de Lodève ont concouru à faire avancer la recherche [1].

2 Arrière-plan théorique

Les travaux du groupe de recherche IRES s'inscrivent dans la continuité des travaux de recherche sur le calcul soustractif (Rinaldi, 2013 ; 2021) et sur le calcul sous vingt (Rinaldi, 2022 ; 2022 bis). Les premiers travaux ont contribué à montrer que le fait d'expliquer une technique de calcul soustractif au moyen d'un calcul en ligne et/ou d'un schéma en appui sur une ligne graduée amène à développer les habilités calculatoires des élèves. Les seconds travaux ont cherché à établir que le fait de décomposer les nombres sous vingt est une opportunité pour introduire l'équivalence quantitative. Dans ces deux recherches, deux constantes se manifestent :

- l'utilisation d'un artefact, en l'occurrence une règle cassée ou un jeu de bandes ;
- la mise en évidence de certaines conditions qui rendent possible les apprentissages.

Sur l'utilisation d'un artefact, nous partageons l'idée développée par Radford (2008) que nous apprenons au contact du monde matériel, du monde des objets qui nous entourent mais que pour apprendre à partir de ces objets, il est nécessaire de les utiliser dans des activités et d'interagir avec d'autres personnes qui savent déchiffrer les contenus intellectuels propres à ces objets.

Sur la mise en évidence de certaines conditions qui rendent possible les apprentissages, nous retenons l'importance du rôle de l'enseignant qui selon nous se doit :

[1] Le projet de recherche autour du calcul sous dix a été présenté lors d'une journée de formation départementale mathématique, le 15 mars 2024. Nous remercions Agnès Batton, PRAG doctorante, Formatrice INSPE Versailles site Cergy, Myriam Becqueriaux, CPD Maths du 95 et Caroline Cluzet, CPD Maths du 95 pour leurs contributions afin de proposer un travail en atelier à cette occasion. Le travail présenté ici s'inspire de cette journée de formation.

- de proposer aux élèves des activités riches qui mettent en scène, de manière adaptée, la rencontre avec diverses strates de généralité d'un objet mathématique[2].
- d'accompagner les élèves pour qu'ils expliquent et justifient les techniques qu'ils utilisent. Pour effectuer un calcul, plusieurs techniques sont envisageables. Or chacune de ces techniques, en se référant à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2002) est justifiée par une technologie qui permet en même temps de la penser, voire de la produire.
- de donner avant d'arriver à des écritures symboliques (Vlassis & Demonty , 2019) un ensemble de tâches liées à la manipulation effective où les élèves sont amenés à communiquer à propos de leurs procédures en utilisant un ensemble de signes, et plus précisément un langage oral ou écrit, formel ou informel.

3 Question et hypothèse de recherche

La question de recherche actuelle s'inscrit dans la continuité des travaux antérieurs. Elle porte sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul "sous dix" et sur la résolution de problèmes additifs verbaux. Nous l'avons formulé ainsi :

« En quoi l'apprentissage du calcul additif pour des élèves (6 à 7 ans) associé à la manipulation d'un jeu de bandes mesurant chacune de « 1 à 10 » va outiller l'apprentissage de la résolution de problèmes additifs verbaux et réciproquement ? »

En lien avec cette question, nous faisons l'hypothèse que certaines expressions, gestes et « écritures » contribuent à interpréter ce que le matériel permet de voir, c'est-à-dire les relations entre les bandes et les relations entre les nombres.

Nos deux axes de recherche consistent :

- À identifier les relations que les élèves établissent entre les nombres et / ou les données à travers les manipulations de bandes, les représentations des bandes, les discours associés aux manipulations
- À identifier quelle représentation ou écriture mathématique en lien avec les productions des élèves est institutionnalisée par l'enseignant pour résoudre un problème additif.

II - LE JEU DE BANDES DE « 1 À 10 »

Dans cette partie, nous présentons le travail proposé en atelier autour du jeu de bandes puis les choix effectués par le groupe IRES pour introduire ce même jeu de bandes au cours préparatoire.

1 Travail proposé en atelier

Afin de permettre aux participants de l'atelier de s'approprier le jeu de bandes[3] de « 1 à 10 » (le matériel pour construire le jeu de bandes est proposé en annexe 1), nous avons distribué par binôme une pochette contenant ce jeu de bandes et proposé à chacun de réfléchir aux compétences et connaissances qui peuvent être travaillées en début de CP à partir de ce matériel. Puis, pour engager les échanges, nous avons demandé à chacun de noter des verbes en lien avec les compétences et connaissances évoquées au préalable et dressé grâce à un générateur en ligne, le nuage de mots correspondants (Figure 1).

[2] L'objet mathématique présenté dans cette étude est un nombre entier inférieur à dix. Parmi différentes strates de généralité, nous pensons au fait que ce nombre soit le cardinal d'une collection d'objets discrets, qu'il corresponde à une mesure de longueur et qu'il se décompose additivement sous différentes formes.

[3] Le matériel est constitué de dix bandes coté carreaux et de dix bandes côtés nombres collées recto-verso. Un carreau a la valeur d'une unité de longueur. Tous les carreaux ont la même taille.

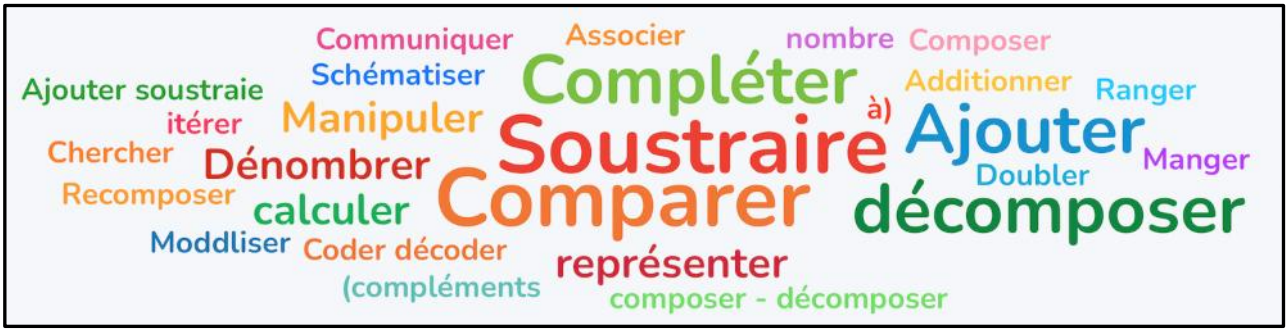


Figure 1. Nuage de mots produit par les participants

Une des compétences énoncées par les participants qui ressort (mot de la figure 1 écrit en grand caractère) et qui est directement identifiable quand on a les bandes en main ou sous les yeux est « **comparer** ». En effet, on peut comparer la longueur de deux bandes en les mettant bord à bord et par exemple l'une sous l'autre ou comparer le nombre de carreaux qui les constitue (en comptant ceux-ci ou en lisant le nombre inscrit sur une face de la bande). On peut dans la continuité **« ranger »** l'ensemble des bandes de la plus petite à la plus grande (mot de la figure 1 sur la droite écrit en petit caractère).

Deux autres compétences ressortent également (mots de la figure 1 écrit en grand caractère) « **compléter** » et **soustraire** ». On imagine qu'on tient par exemple entre les mains les bandes 5 et 8 et qu'on cherche étant donné la bande 5, quelle bande complément il faut « mettre » bord à bord et dans le prolongement de la bande 5 pour obtenir la bande 8. Cela revient également à chercher le complément de 5 à 8 ou à soustraire 5 à 8. **« Ajouter, décomposer, recomposer, calculer »** sont des compétences qui viennent à la suite tout aussi naturellement.

Pour les compétences « **associer, communiquer et représenter** » nous avons fait le choix d'enrichir les échanges lors de l'atelier en évoquant les séquences du dispositif mis en place en CP (Tableau 1).

Séquence 1 : 2 séances	Construction des bandes et représentation
Séquence 2 : 2 séances	Rangement des bandes
Séquence 3 : 3 séances	Recherche de la bande somme
Séquence 4 : 2 séances	Bilan sur les représentations des bandes et sur la recherche de la bande somme
Séquence 5 : 6 séances dont une servant d'évaluation	Résolution de problèmes additifs verbaux

Tableau 1. Dispositif expérimenté en 2023-2024 dans quatre classes de CP

Nous soumettons notre proposition pour la séance 1 de la séquence 1 au paragraphe suivant :

2 Séquence proposée en CP pour construire et représenter les bandes

L'objectif dans un premier temps est d'amener l'élève à observer le matériel distribué (Figure 2) et à installer un lexique commun pour désigner les bandes carreaux et les bandes nombres. Il est important de remarquer que toutes les bandes ont la même largeur, que tous les carreaux ont la même taille. Le fait de préciser que les carreaux ont tous la même taille, permet de choisir un carreau comme unité de longueur et de mesurer la longueur de chaque bande en comptant le nombre de carreaux. Cela permet aussi de comparer directement la taille de deux bandes.

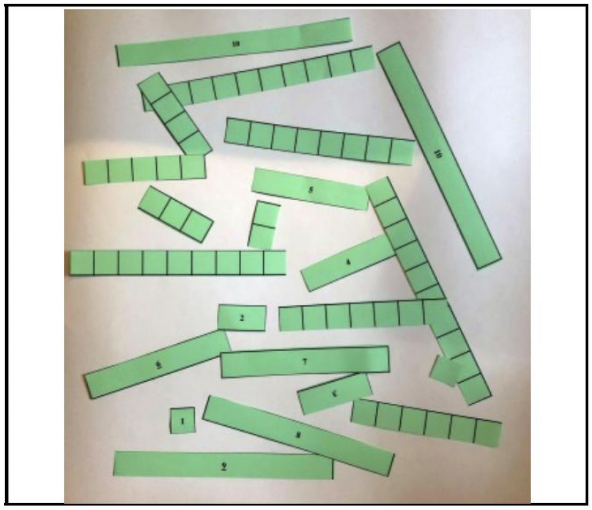


Figure 2. Matériel distibué à chaque élève

Par la suite, l'objectif est que chaque élève construise son propre jeu de bandes de « 1 à 10 » en associant à une bande carreaux, la bande nombre correspondant. La consigne donnée par l'enseignant est la suivante (séance 1, séquence 1):

> *« Vous avez deux sortes de bandes, des bandes avec des carreaux et des bandes avec des nombres. Associer les bandes qui vont ensemble, c'est-à-dire à chaque bande nombre, la bande carreaux qui lui correspond puis coller les deux bandes en les superposant bord à bord. On doit voir les carreaux d'un côté et le nombre de l'autre. »*

Deux techniques sont envisageables, la première s'appuie sur la comparaison de longueur, l'autre sur le dénombrement. Les élèves qui utilisent la première technique ont tendance à ranger d'un côté l'ensemble des bandes carreaux de la plus petite à la plus grande et de l'autre l'ensemble des bandes nombres de la plus petite à la plus grande avant de les associer. Les élèves qui utilisent la seconde technique prennent soit une bande côté carreaux et cherchent le nombre correspondant, soit à l'inverse lisent un nombre et cherchent ensuite la bande carreaux. Dans les deux cas, ils perçoivent que la taille des bandes a de l'importance car s'ils ont lu un « petit » nombre, ils cherchent une petite bande du regard.

Nous nous sommes appuyés sur les travaux de Sensevy (Sensevy, 2016) pour mettre en place le journal des bandes.

> *« Pour cela, le professeur propose une incitation dont la forme et l'objectif mathématiques peuvent varier. Cette incitation est toujours produite dans la finalité de construire des liens entre l'activité collective de la classe au sein de la progression et l'activité collective des élèves au sein du dispositif « journal », elle-même alimentée par l'activité particulière de tel ou tel élève dans son journal.* (Sensevy, 2016, p. 245)

Nous faisons l'hypothèse qu'outre le fait de construire les bandes et les manipuler, il est intéressant que l'élève ait à les représenter. L'objectif de l'enseignant est alors de s'appuyer sur les représentations produites par les élèves pour retrouver parmi ces productions celles qui mettent en avant le fait que le nombre inscrit sur une bande correspond à la quantité de carreaux dessinés au verso de la bande et à la longueur de la bande. C'est pourquoi ,dès la fin de la séance 1 nous avons donné pour consigne :

> *« Choisis une bande et dessine-la des 2 cotés ».*

La figure 3 montre la réalisation de deux élèves dans le journal des bandes.

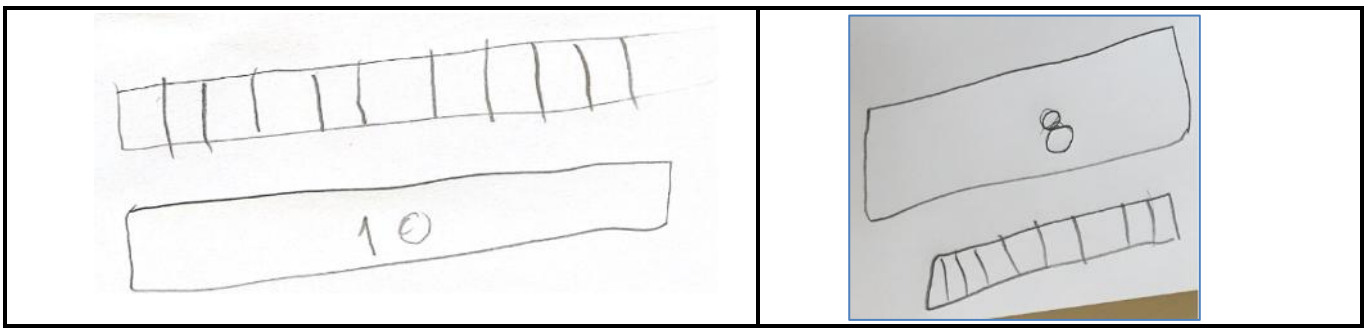


Figure 3. Représentation d'une bande dans le journal des bandes

L'élève dont la production est à gauche a pour intention de représenter la bande 10 des deux côtés. Nous supposons qu'il a tracé en premier la bande du dessus et voulu la partager en dix carreaux de même taille en traçant une à une ses démarcations. A la fin, il recompte et gomme le carreau de trop pour en obtenir 10. Il trace alors la bande 10 en la plaçant sous la bande carreaux et bord à bord. Nous constatons que les deux bandes se superposent : elles ont la même taille.

L'élève de droite quant à lui commence par tracer la bande 8. Il trace alors en dessous la bande carreaux sans chercher à la faire exactement de la même taille. Tout comme son camarade, il trace des traits pour délimiter des carreaux de même taille. Son erreur provient peut-être du fait qu'il a tracé 8 traits ce qui lui donne un total de 9 carreaux. Il ne recompte pas pour s'assurer de l'exactitude de son travail.

En classe, le fait d'échanger collectivement en confrontant toutes les productions (Figure 3), contribue à faire expliciter par les élèves que le nombre indique la quantité de carreaux et que les longueurs des deux bandes coté carreaux et coté nombre doivent être identiques.

III - CALCUL SOUS DIX

Dans cette partie du texte, nous nous intéressons aux compétences **« ajouter, décomposer, recomposer, calculer » évoquées par les participants** (figure 1)**.** Nous exposons et discutons une façon d'exploiter le fait que les bandes soient recto-verso et de longueur donnée avec l'intention de calculer la somme de deux nombres inférieurs à dix. Dans le prolongement, nous nous appuyons sur les manipulations et les écrits des élèves dans le journal des bandes (séquence 3) pour montrer une évolution possible de la représentation des nombres sous dix et de leur somme.

1 Introduction de la bande somme

Dans un premier cas (Figure 4), chaque bande peut être considérée comme une collection d'objets discrets, en l'occurrence une collection de carreaux. A gauche de la figure 4, les bandes 5 et 3 sont toutes les deux face carreaux. Au centre de la figure 4, une des deux bandes est face nombre (la bande 5) alors que l'autre bande est face carreaux (la bande 3). À droite de la figure 4, les deux bandes 5 et 3 sont posées face nombre.

Nous remarquons que pour trouver la somme des deux nombres quand cette somme est inférieure à dix comme évoqué dans Rinaldi (2022 ; 2022 bis) trois techniques de calcul sont envisageables. Nous faisons toutefois l'hypothèse que suivant le niveau de maîtrise des élèves à l'entrée au CP, les élèves privilégieront soit le comptage de un en un quand les deux bandes sont posées face carreaux ; soit le surcomptage si sur l'une des bandes, il y a un nombre et sur l'autre des carreaux ; soit la mobilisation de faits numériques connus quand les deux bandes sont posées face nombre.

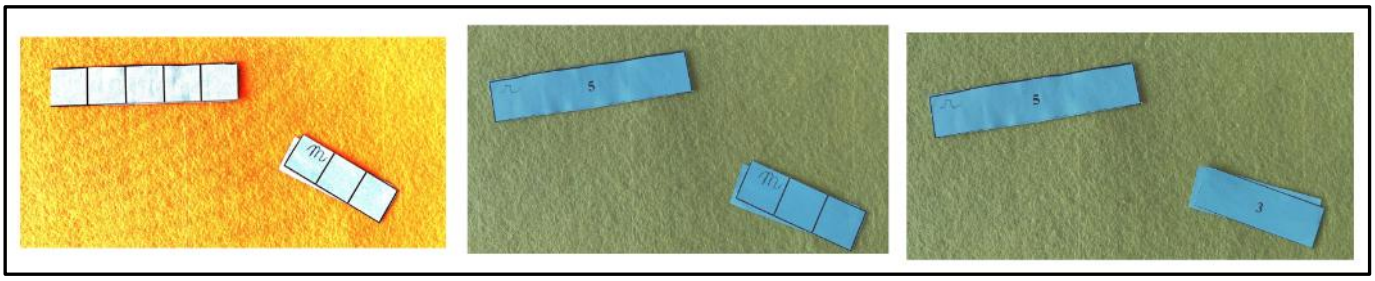


Figure 4. Premier cas : les bandes ne sont pas bord à bord

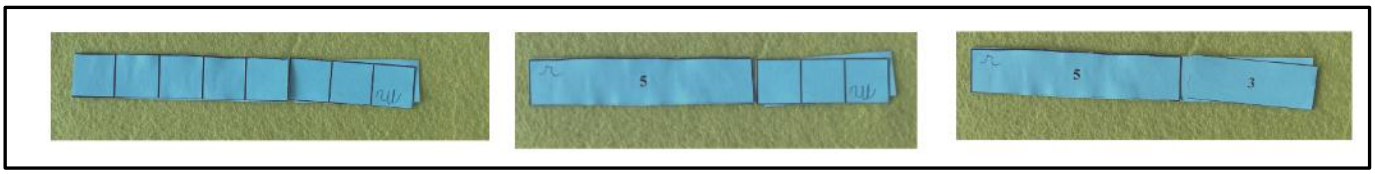


Figure 4 bis. Second cas : les bandes ne sont pas bord à bord

Dans le second cas, si les bandes sont placées bord à bord dans le prolongement l'une de l'autre (Figure 4 bis), les techniques précédentes de calcul sont applicables. En outre, cette disposition particulière des deux bandes donne la possibilité d'évoquer la longueur de chaque bande, en l'occurrence la longueur de la bande 5 et la longueur de la bande 3 et de chercher la longueur de la *bande somme.* Pour des élèves de CP, nous faisons l'hypothèse que grâce à la manipulation (Figure 5):

- Par essai et réajustement, essayer plusieurs bandes jusqu'à ce que les longueurs coïncident pour trouver la bande somme.
- chercher en comptant, surcomptant ou en calculant la longueur de la bande somme et vérifier qu'ils ne se sont pas trompés.

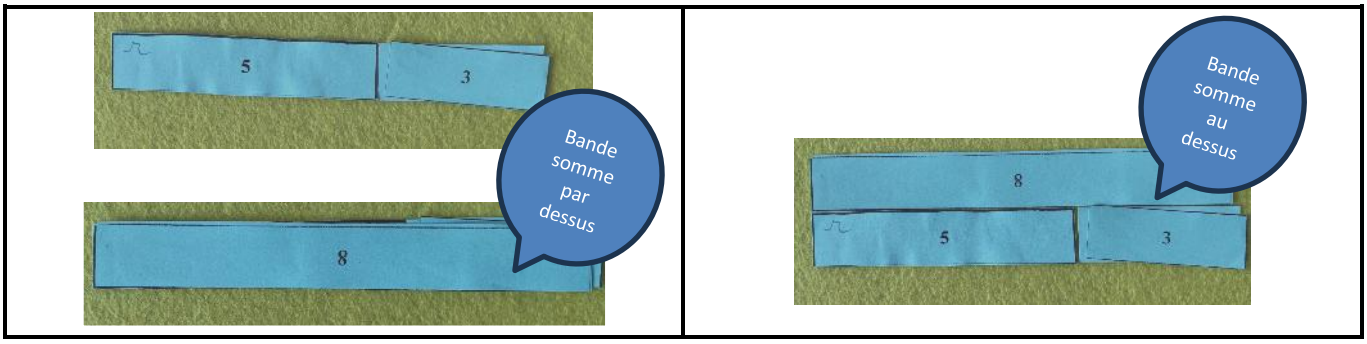


Figure 5. Introduction de la bande somme

Par ailleurs, quand la bande somme est au-dessus comme sur la droite de la figure 5, il est possible d'interpréter la figure par une relation entre les nombres 5, 3 et 8 et de traduire cette relation par une des égalités suivantes : $5 + 3 = 8$; $3 + 5 = 8$; $8 = 5 + 3$; $8 = 3 + 5$; $8 - 3 = 5$; $8 - 5 = 3$; $3 = 8 - 5$; $5 = 8 - 3$.

2 Représentation de la bande somme

Dans un premier temps, les élèves ont cherché deux par deux sans manipuler au préalable mais en calculant à trouver la bande somme de deux bandes posées bord à bord dans le prolongement l'une de

l'autre[4]. Pour finir, ils ont vérifié qu'ils ne s'étaient pas trompés en superposant la bande somme par-dessus les deux autres puis en faisant glisser celle-ci au-dessus ou au-dessous cette même bande (figure 5).

A la suite, chaque élève a ouvert son journal des bandes et reçu pour consigne :

> *Pense à deux bandes, une côté nombre une côté carreaux. Dessine les bord à bord. Dessine la bande somme qu'il faut prendre.*

La figure 6 illustre le travail de deux élèves à la séance 2 de la séquence 3.

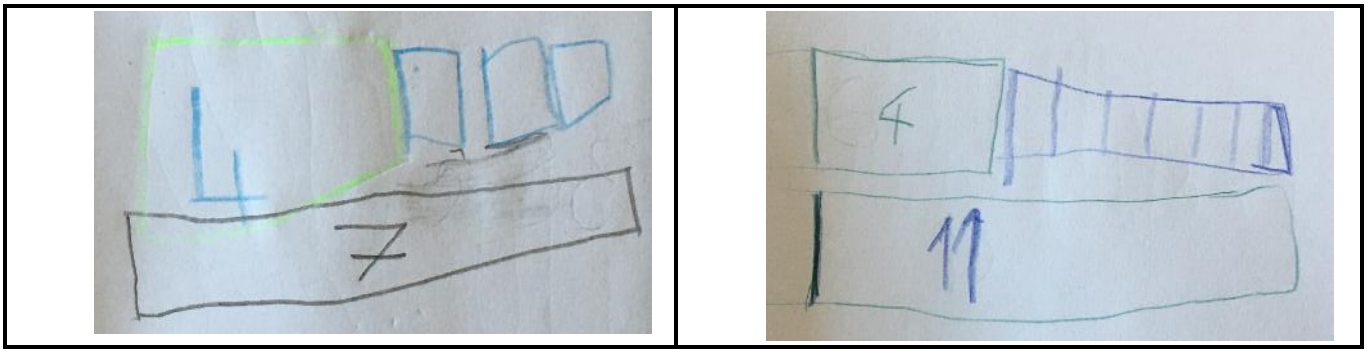


Figure 6. Tracé de la bonde somme dans le journal des bandes

On observe que sur les deux productions, la bande somme est placée au-dessous des deux bandes qui sont dessinées bord à bord et dans le prolongement l'une de l'autre. Ces bandes sommes ont exactement la même taille que la réunion des bandes situées au-dessus. Par ailleurs, les calculs $4 + 3$ et $4 + 7$sont exacts. De plus, le tracé de la bande 3 située à gauche de la figure 6 s'est fait carreau après carreau alors que le tracé de la bande 7 située à droite de la figure 6 s'est fait en traçant une à une les démarcations. La différence de couleur bleu / vert et vert/ violet s'explique par le fait que les deux élèves qui cherchaient dans la phase de manipulation menée au préalable avaient chacun un jeu de bandes de couleur différente (vert/ bleu), et que tour à tour l'un des deux élèves vérifiait son calcul en superposant sur les deux bandes initiales la bande somme qu'il avait prise.

Nous en concluons que les productions réalisées par ces deux élèves - productions qui sont par ailleurs significatives des productions réalisées par l'ensemble des élèves des quatre classes (environ 75 élèves) - sont des représentations qui permettent d'établir une relation entre deux nombres et leur somme et deux longueurs de bande et la longueur de la bande somme.

3 Le choix de l'accolade pour représenter la bande somme

Le journal des bandes, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent a pour fonction de garder une trace proposée par l'élève. Choisir dans l'ensemble des traces produites par tous les élèves de la classe certaines d'entre elles semble alors un moyen efficace d'engager une phase de rappel au sens de Perrin Glorian (1993-1994) :

> *« D'une part il se produit alors une dépersonnalisation des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part il se produit une prédécontextualisation : en reprenant à froid ce qui s'est passé, on élague les détails pour identifier ce qui est important* » (Perrin Glorian, 1993-1994, p. 32).

[4] À la séance 1 de la séquence 3 les deux bandes sont placées côté carreaux, à la séance 2 de la séquence 3 les bandes sont placées l'une côté carreaux et l'autre côté nombre, à la séance 3 de la séquence 3, les deux bandes sont placées côté nombres

C'est pourquoi, les membres du groupe IRES ont choisi de présenter dans chaque classe la production d'un élève suite à la séance 3 de la séquence 3 (Figure 7) afin d'introduire le fait de tracer une accolade pour désigner la longueur de la bande somme.

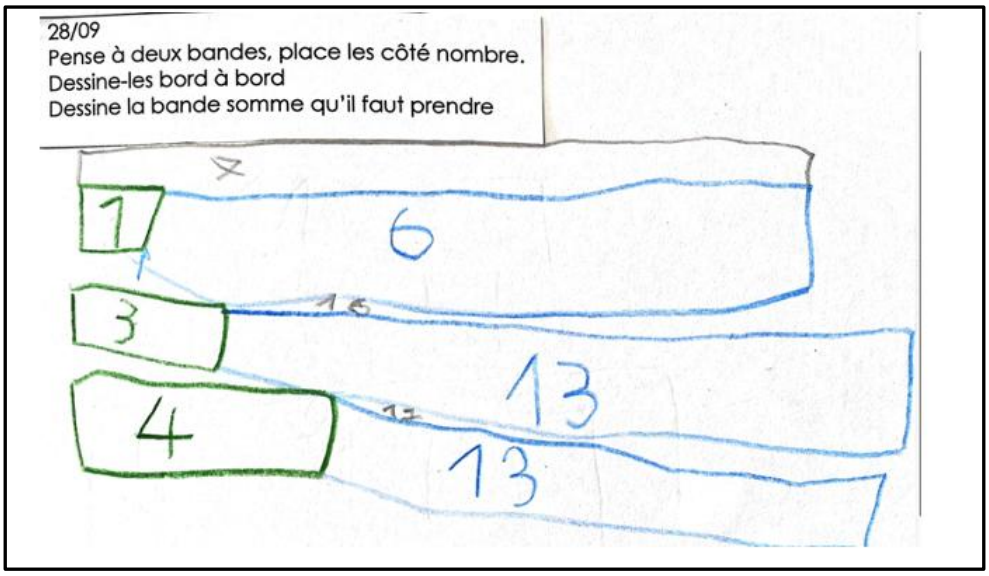


Figure 7. Tracé et absence de tracé de la bonde somme dans le journal des bandes

Sur cette production, la bande 7 qui correspond à la bande somme des bandes 6 et 1 est dessinée. En revanche, par la suite, l'élève n'a plus dessiné de bande somme. Il a juste écrit au-dessus des bandes 3 et 13 et 4 et 13, les nombres 16 et 17. D'où l'idée, pour des raisons pratiques et conventionnelles[5] de remplacer le tracé de la bande somme par le tracé d'une accolade (Figure 8). Notons que la présence de l'accolade est pertinente afin de conserver la notion de longueur qui est propre au jeu de bandes (§ III.2).

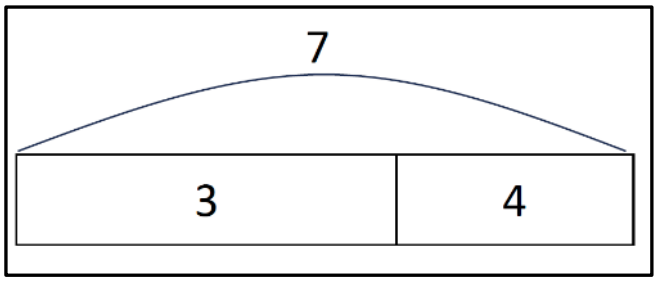


Figure 8. Tracé de l'accolade pour désigner la bonde somme

IV - RÉSOLUTION DE PROBLÈMES VERBAUX

Dans cette partie du texte, nous présentons le travail proposé en atelier autour d'énoncés de problèmes verbaux (Houdement, 2017) reprographiés en annexe 2 ainsi que les éléments de réponse apportés par les participants. Par la suite, nous donnons quelques compléments d'analyse en nous référant à l'expérimentation conduite en CP (Tableau 1, séquence 5).

1 Travail proposé en atelier

Le travail de groupe autour de la résolution de problèmes verbaux a pour premier objectif d'inciter les participants de l'atelier à échanger sur la nature des problèmes proposés au début de CP en pointant la structure mathématique (Vergnaud, 1986), le domaine numérique et la synthaxe d'un ensemble de 21 problèmes regroupés par série (document 1 reprographié en annexe 2). Le second objectif est de s'intéresser plus largement à l'organisation pédagogique d'une séance de résolution de problèmes,

[5] Il est usuel de préciser sur un schéma la mesure d'une longueur par une double flèche ou une accolade.

notamment aux moments de mise en activité, de recherche, de bilan, de correction, voire d'institutionnalisation locale. Les consignes données aux participants sont les suivantes :

1.1 Premier temps

1. D'après vous, pourquoi y-a-t-il trois problèmes par série et un total de 7 séries ?
2. Après avoir pris connaissance de l'ensemble des problèmes et repéré les similitudes entre certains problèmes, vous analyserez plus particulièrement les problèmes marqués en gras dans les séries 1, 2 et 3.

1.2 Second temps

1. Comment les enseignants que vous visitez (ou vous-mêmes si vous êtes professeur des écoles en CP) organisent-ils la « résolution de problèmes » en début de CP ?
2. On considère l'énoncé suivant donné en fin de seconde période de classe en CP (fin décembre) :

   « Il y a 10 enfants. Il y a 7 gâteaux. Combien faut-il ajouter de gâteaux pour que chaque enfant ait un gâteau ? »

Au moment du bilan et de la correction, pourquoi et comment envisager l'utilisation de bandes ou d'un autre matériel ? Quelle production et quelle trace écrite ?

2 Éléments de réponse des participants

2.1 L'analyse des séries de problèmes

Au moment de la restitution, contrairement à ce que nous avions envisagé, aucun groupe de participants sur les six constitués n'a évoqué précisément les similutides ou les différences entre les structures mathématiques des trois problèmes d'une même série. En revanche, un groupe sur six a supposé que le fait d'avoir proposé trois problèmes par série était un moyen de se rapprocher de la multi-présentation au sens de Nguala (2005). L'intention étant alors de proposer trois problèmes avec la même structure mathématique, les mêmes nombres, la même syntaxe, la même organisation énonciative mais trois problèmes qui diffèrent par leurs contextes.

La majorité des groupes (trois groupes sur six) a plûtot cherché à expliquer la présence de série de trois problèmes en se référant à différentes organisations humaines ou matérielles d'une séance d'apprentissage. Nous donnons ci-dessous les hypothèses émises par les participants :

- Proposer à l'élève de résoudre le premier problème en s'aidant de la manipulation ; résoudre le second en s'aidant d'une représentation (dessin, schéma) ; résoudre le troisième « directement »
- Résoudre le premier problème en collectif, le deuxième problème en binôme, le troisième problème tout seul.
- Donner un problème de recherche (à plusieurs), un problème d'application (individuel) et un problème pour « institutionnaliser » une démarche.

Un groupe sur six n'imagine pas que les élèves aient à résoudre les trois problèmes par série mais pense plûtot que sur les trois problèmes, certains élèves peuvent en faire un, deux ou trois. Pour finir, un groupe sur six s'intéresse au nombre de séries et pense que ce nombre correspond au nombre de séances : « Le nombre de séances, au total sept car sept séries, permet de créer des automatismes. Peut-être que les trois premières séances ont vocation à construire un référentiel de problèmes ».

Nous constatons que les hypothèses émises sont variées, que suivant la place de la série dans l'ensemble des sept séries ou du problème dans la série de trois problèmes, les participants pensent que l'objectif d'apprentissage ou encore l'organisation humaine ou matérielle peut varier. Cela confirme selon nous que le fait de proposer trois problèmes par série donne une grande marge de manœuvre à l'enseignant.

Quant à la structure des problèmes en elle-même, force est de constater que tous les participants optent pour analyser les problèmes suivant la classification de Vergnaud [6](Vergnaud, 1986).

Pour compléter ce temps d'échange, nous avons jugé utile de donner et de justifier les choix du groupe IRES quant à la conception de chaque série de trois problèmes. Nous avons précisé que nous avons fait en sortes de proposer:

- des nombres sous dix ;
- des syntaxes proches mais un vocabulaire varié ;
- la même organisation énonciative ;
- des contextes familiers ;
- aucune donnée inutile pour le traitement mathématique;
- mais que contrairement à Nguala (2005) qui a fait le choix de proposer trois problèmes par séries de même structure mathématique, nous avons opté pour proposer deux problèmes sur trois avec la même structure mathématique.

Notre objectif est d'amener l'élève à rencontrer par séance deux types de problèmes et à se familiariser sur l'ensemble des séances à tous les types de problèmes. Nous pensons ainsi lui donner la possibilité, sur une même séance ou d'une séance à l'autre, de réinvestir, suivant la structure du problème, des éléments évoqués lors de la restitution des procédures, du bilan et de la correction individuelle.

2.2 Réflexion autour de la mise en œuvre d'une séance autour de la résolution de problème

La majorité des formateurs qui participent à l'atelier disent ne pas trop observer de séances dédiées à la résolution de problèmes en début de CP[7]. Ils supposent en revanche que les enseignants de CP qui en proposent, le font en atelier dirigé, en groupe, éventuellement en classe entière, avec dans tous les cas l'intention de mutualiser les procédures des élèves et de prendre en compte les erreurs.

Parmi les questions qui font débat, nous retrouvons essentiellement la place de la manipulation. Doit-elle être systématiquement présente et si oui, est-il judicieux de donner en premier lieu un matériel tangible (cubes, …, jetons) ? Les bandes ne sont-elles pas déjà une forme de représentation ? De plus, faut-il ne donner le matériel qu'à certains élèves qui le réclameraient et ne se servir de celui-ci qu'au moment de vérifier la solution apportée par chacun ? Est-il important de proposer une trace écrite suite à une phase de bilan ? Une séance se termine-t-elle par une correction individuelle des productions des élèves? Faut-il dans cette trace écrite privilégier tel ou tel dessin, tel ou tel schéma, telle ou telle écriture mathématique ?

Pour ne pas en rester à des réponses d'ordre général, nous avons présenté un exemple de mise en œuvre d'une séance de résolution de problème au début de CP dans le groupe IRES. La présentation de cette séance fait l'objet du paragraphe suivant.

V - UN EXEMPLE DE RESOLUTION DE PROBLÈME AVEC LE JEU DE BANDES

1 Sur l'expérimentation

Dans cette partie du texte, nous revenons à l'expérimentation conduite en CP par le groupe IRES (Tableau 1). Nous commençons par décrire et préciser certains choix d'ordre pédagogique et didactique en suivant

[6] Annexe 2, série 1, problème 1 : problème de combinaison d'états ; Annexe 2, série 2, problème 3: problème de combinaison d'état ; Annexe 2, série 3, problème 2: problème de comparaison d'états.

[7] Les stagiaires sont rarement en stage en CP.

de façon chronologique le déroulé d'une séance de résolution de problèmes conduite fin décembre 2023 dans une classe de CP puis nous proposons une analyse de cette séance en nous focalisant sur les enjeux de la manipulation et la place de l'institutionnalisation.

1.1 Description d'une séance de résolution de problème en fin décembre

Un groupe de six élèves est en atelier dirigé (Figure 9), pendant que les autres élèves sont en travail individuel et en autonomie sur des tâches de calcul ou de numération. Sur la table, on observe que chaque élève a son journal des bandes ouvert à la page du jour, un crayon à papier et qu'au centre de la table, il y a un jeu de bandes collectif rangé sur un patron (Tableau 1, séquence 2), un tapis et une ardoise.



Figure 9. Atelier dirigé en résolution de problème

Dans la progression, cette séance est la huitième consacrée à la résolution de problèmes verbaux. Les élèves ont déjà résolu l'ensemble des problèmes du document 2. La très grande majorité d'entre eux est capable de trouver la réponse du problème du jour, en se repésentant mentalement ou à l'aide de leurs doigts les relations entre les données. En revanche, l'objectif d'apprentissage de cette séance est d'écrire le calcul qui permet d'obtenir le résultat. Or dans le problème proposé, le nombre solution 3 est le complément de 7 à 10. L'écriture $7 + 3 = 10$, vu que 3 n'est pas placé à droite du signe égal peut poser problème dans le sens où le signe égal n'anonce pas la solution (Rinaldi, 2022).

La consigne donnée par l'enseignante est la suivante :

> *« On va faire 3 problèmes. Comme d'habitude, je réfléchis pendant 30 secondes, j'écris la réponse, j'écris le calcul et si je peux je dessine les bandes. » On pose les crayons. On écoute : Il y a 10 enfants. Il y a 7 gâteaux. Combien faut-il ajouter de gâteaux pour que chaque enfant ait un gâteau ?»*

Avant de retranscrire les échanges qui s'ensuivent, nous précisons que la première phase de « restitution » vise à connaitre les procédures de calcul qui ont permis d'arriver au résultat et à les confronter :

- Enseignante : « Qu'est-ce que tu as trouvé comme réponse ? » Mouad ?
- Élève : « Trois »
- Enseignante : « Wassim ?»
- Élève : « Trois »

Tous les élèves sont appelés un par un par leur prénom et disent chacun leur tour le nombre qu'ils ont trouvé.

- Enseignante : « Qui peut m'expliquer ce qu'il a fait ? »
- Élève : « *Il y 10 enfants. Il y a 7 gâteaux tu rajoutes 3, cela fait 10. »*

L'élève montre avec ses doigts comment il a surcompté. Un autre élève montre avec ses doigts le complément de 7 à 10.

La phase suivante vise à résoudre collectivement le problème en utilisant le jeu de bandes de « 1 à 10 ». Un premier élève reformule l'énoncé et manipule les bandes données de l'énoncé (la bande 7 et la bande 10) et la bande qu'il pense être la bande solution. Un autre élève, à la suite, est chargé de représenter à l'écrit les liens entre les trois bandes et de noter le calcul. Deux cas sont envisageables :

L'élève a trouvé pour réponse erronnée « 17 » auquel cas on peut supposer qu'il va placer bord à bord dans le prolongement l'une de l'autre la bande correspondant aux 10 enfants et celle correspondant aux 7 gâteaux. Cette disposition des deux bandes comme le feront remarquer probablement un élève ou l'enseignant n'est pas pertinente car on ne recherche pas la somme des gâteaux et des enfants.

L'élève a trouvé « 3 » ou un nombre proche inexact car il a fait une erreur de calcul. Il peut comparer le nombre de gâteaux au nombre d'enfants et mettre les bandes bord à bord , l'une sous l'autre. Il peut aussi reformuler l'énoncé en disant qu'il faut avoir un total de 10 gateaux et mettre la bande 3 dans le prolongement de la bande 7 ou la bande 7 par-dessus la bande 10 . Représenter la situation amène à utiliser une accolade(Figure 8) introduite dans les séances de calcul pour signifier le fait que 10 est la somme de 7 et de 3 ou que 3 est le complément de 7 à 10 ou que 3 est la différence entre 10 et 7. Cette analyse *a priori* étant faite, nous poursuivons en retranscrivant les échanges entre l'enseignante et les élèves.

- Enseignante : « Qui montre avec les bandes comment on trouve ce problème ? Kan ? Explique-nous quand tu poses tes bandes. »
- Élève : « Il y a 7 gâteaux. Il faut ajouter 3 gâteaux pour faire 10. »

L'élève prend la bande 7 puis la bande 3 et les dispose bord à bord dans le prolongement l'une de l'autre.

- Enseignante *:* « on vérifie avec la bande somme. »
- Enseignante : « On fait le dessin sur l'ardoise. Tu vas dessiner quelle bande Aicha? »
- Élève : « La bande du 7 ; La bande du 3. L'accolade. J'entoure la réponse. » (figure 10)
- Enseignante : « Tu m'écris le calcul s'il te plait. »

L'élève n'avait pas le bon calcul sur son cahier pourtant elle écrit le bon sur l'ardoise.

- Enseignante : « Allez, on prend son stylo vert et on vérifie tous les calculs ».



Figure 10. Dessin des bandes en lien avec l'énoncé du problème

La séance se termine par une correction individuelle. Chaque élève de l'atelier est amené à vérifier sous le contrôle de l'enseignant qu'il a écrit sous l'énoncé du problème dans son journal des bandes $7 + 3 = 10$ ou $7 - 3 = 10$. L'objectif est de proposer soit une écriture additive, soit une une écriture soustractive pour montrer le lien entre les trois nombres 3, 7 et 10 puis de marquer en l'entourant le fait que 3 est ici la solution du problème même si comme sur la figure 10 , il n'est pas situé à droite du signe égal.

1.2 Analyse de cette séance de résolution de problèmes

Modélisation et représentation

Dans cette séance le matériel tangible dont dispose les élèves en début de séance - au cas où ils voudraient l'utiliser- est constitué de leurs propres doigts. Le fait que les nombres de l'énoncé soient inférieurs à dix facilite la recherche de complément ou de surcomptage (§ V1.1). Le jeu de bandes, matériel collectif est présent sur la table et ne servira qu'une fois que la phase de recherche et la phase de mise en commun des techniques de calcul sont finies. Il nous semble que l'utilisation des bandes par un élève, sert dans ce cas, avant tout, à revenir aux données de l'énoncé, à exprimer à nouveau les relations entre ces données et la donnée solution et à modéliser ainsi au sens de Cabassut (2020) l'énoncé.

> *« Quand on regarde une représentation en y mettant des relations mathématiques entre éléments représentés, on modélise mathématiquement. Un modèle mathématique d'un système d'éléments représentés est un système de relations mathématiques entre éléments du système » (Cabassut, 2020 , p. 4).*

En effet, l'intérêt de la production finale obtenue quand les bandes sont placées les unes par rapport aux autres, est de permettre d'établir à plusieurs si la modélisation est en cohérence avec la structure mathématique du problème.

Représenter les bandes et les liens entre ces bandes, travail déjà travaillé en calcul (tableau 1) est un moyen d'obtenir une trace écrite de la modélisation du problème et facilite selon nous le passage à l'écriture d'un calcul additif ou soustractif.

En aucun cas, nous n'avons cherché à nous servir systématiquement des bandes pour aider à trouver la solution d'un problème additif verbal dont les nombres sont inférieurs à dix. Mais une fois que chaque élève a une proposition de solution, la manipulation des bandes est une praxéologie qui permet de s'interroger sur telle ou telle modélisation du problème et qui aide selon nous à produire ou à vérifier l'exactitude d'un calcul additif ou soustractif.

2 Résolution de problème et institutionnalisation

> *« Résoudre des problèmes n'est pas un concept, c'est une activité qui est un moyen ou un but au service de l'activité mathématique, si bien que la question de l'institutionnalisation est assez complexe. Si on considère que les énoncés de méthodes sont aussi à institutionnaliser, et si on considère que les schémas sont un moyen de modéliser, nous pouvons alors penser qu'il est possible d'institutionnaliser des savoir-faire » (Allard & Moussy, 2022, p. 94).*

En lien avec les travaux de Allard et Moussy (2022), dans le cadre de notre recherche, nous pensons que l'utilisation du jeu de bandes est proposée comme une méthode pour expliciter les liens entre les données de l'énoncé et la donnée solution. Le schéma produit, en traçant bord à bord dans le prolongement l'une de l'autre deux bandes et en indiquant par une accolade la bande somme est une trace écrite de ce que la méthode en l'occurrence ici la manipulation des bandes a permis de mettre en évidence. Notre démarche d'enseignement vise à institutionnaliser des savoirs faires , par exemple le fait de représenter une collection d'objets discrets de n éléments par une bande de longueur n ; le fait de comparer deux nombres n et m en mettant bord à bord l'une sous l'autre les bandes de longueur n et m ; le fait de rechercher la bande somme de deux bandes.Celapermet selon nous, d'accéder ainsi à différentes strates de la conceptualisation des nombres sous dix (§ I.2).

VI - CONCLUSION

Nous espérons que ce texte est fidèle à la qualité des échanges qui ont lieu lors de l'atelier et qu'il donne un aperçu des questions et des contenus traités à propos de la manipulation et de la résolution de problèmes verbaux en CP. Le jeu de bandes « de 1 à 10 » est un exemple de matériel utilisé en début de CP pour appréhender les petites quantités. L'utilisation que nous en avons faite associe directement « manipulation » et « représentation ». Dans ce sens, elle permet de laisser des traces de l'activité dans le journal des bandes et de revenir dans un temps différé (cf.III.3), avec l'ensemble des élèves, sur telle ou telle réalisation spécifique. Il nous sembe qu'un des enjeux de l'école élémentaire est d'amener l'élève à avoir une procédure, à la verbaliser puis à l'évaluer. Le travail proposé en résolution de problèmes verbaux dans un champs numérique très familier aux élèves « les nombres de 1 à 10 » amène à reformuler les données, à produire une représentation sous la forme de deux bandes bord à bord dans le prolongement l'une de l'autre avec une accolade qui indique la longeur de la bande somme (Figure 8) ainsi qu'à écrire un calcul. Utiliser les écritures arithmétiques en leur donnant du sens (Rinaldi, 2022) nous semble également un autre enjeu majeur de l'école élémentaire. C'est pourquoi, nous souhaitons poursuivre le travail de recherche engagé. Nous pensons nous appuyer davantage sur les observations

effectuées dans les classes témoins qui utilisent un matériel tangible autre que les « doigts » et/ou les « bandes » pour arriver à mesurer plus précisément les effets produits par le dispositif d'enseignement conçu en 2022-2024.

BIBLIOGRAPHIE

Allard, C., Moussy, C. (2022). Résolution de problèmes basiques et complexes ? Que peut-on institutionnaliser ? *48-ème colloque de la COPIRELEM, Toulouse, 14-16 juin 2022*, 93-105.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». *Revue Au fil des maths*, 537.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques,* 3-33. Grenoble: La Pensée sauvage.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.

Nguala, J.-B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes, *Grand N*, 76, 45-63.

Sensevy, G. (2016). Le collectif en didactique. Quelques remarques. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra,L. Touche, C. Winsløw et S. Besnier (dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*(223-253). La Pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993-1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de "classes faibles". *Petit x, 35,* 5-40.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. Dans L. Radford, G. Schubring et F. Seeger (dir.), *Semiotics in mathematics education : epistemology, history, classroom, and culture*, 215-234. Rotterdam : Sense Publishers.

Rinaldi, A.-M. (2013). Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée. *Grand N*, 91, 93-119.

Rinaldi, A.-M. (2021). Habiletés calculatoires : les enjeux de la réécriture de calculs soustractifs. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 41*(2), 217–259.

Rinaldi, A.-M. (2022). Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire. *Repères IREM*, 126, 23-42.

Rinaldi, A.-M. (2022). Décomposer et composer les nombres sous vingt: une opportunité pour introduire l'équivalence quantitative *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, (Tome 2), 35-65.

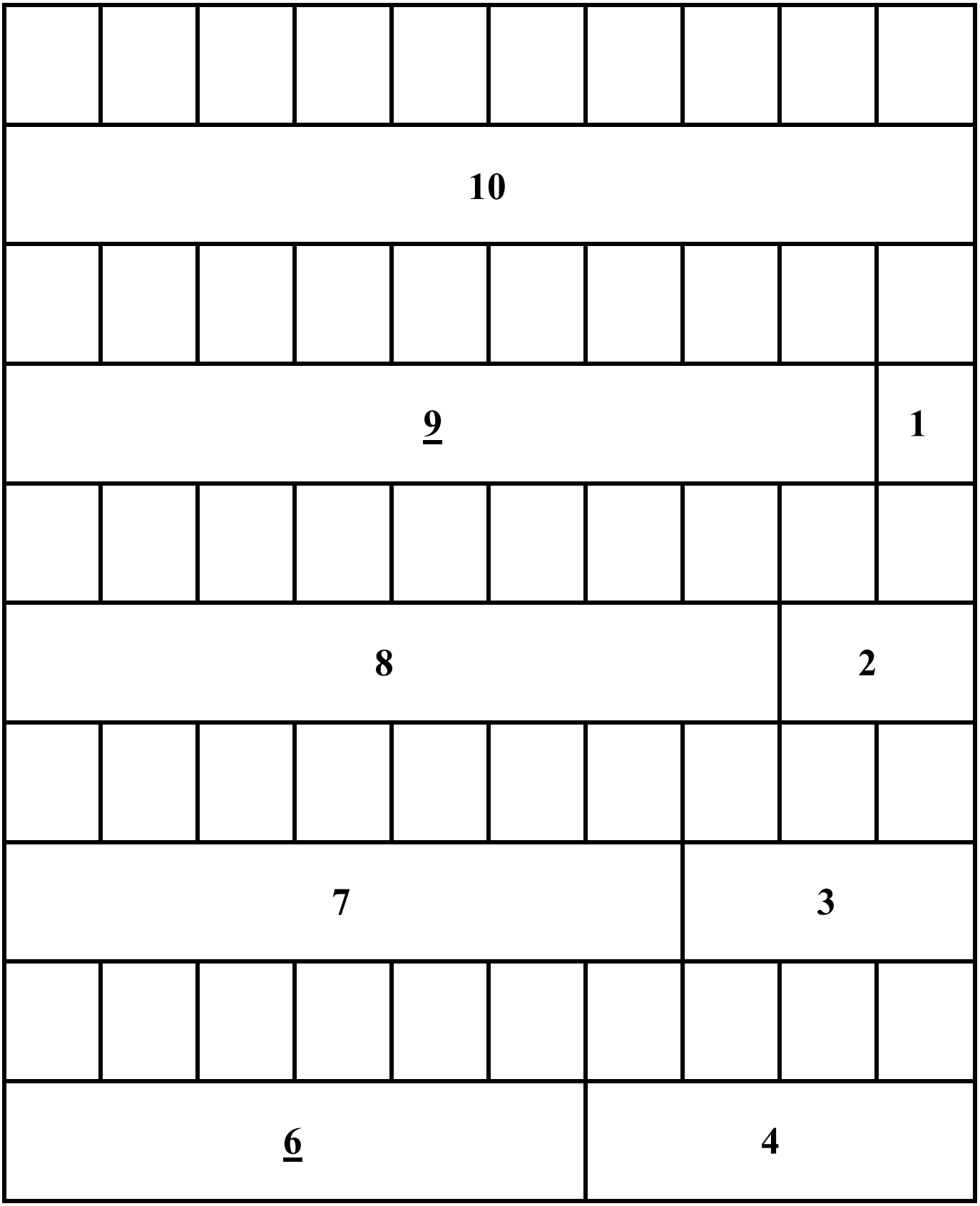
Rinaldi, A.-M., Bayle, S., Gastal, S. (2023). Représenter et modéliser autour du calcul sous vingt : quels enjeux pour l'enseignement et pour la formation ? *Actes du 48e Colloque de la COPIRELEM* (149-166) Toulouse, 14-16 juin 2022. Paris : ARPEME.

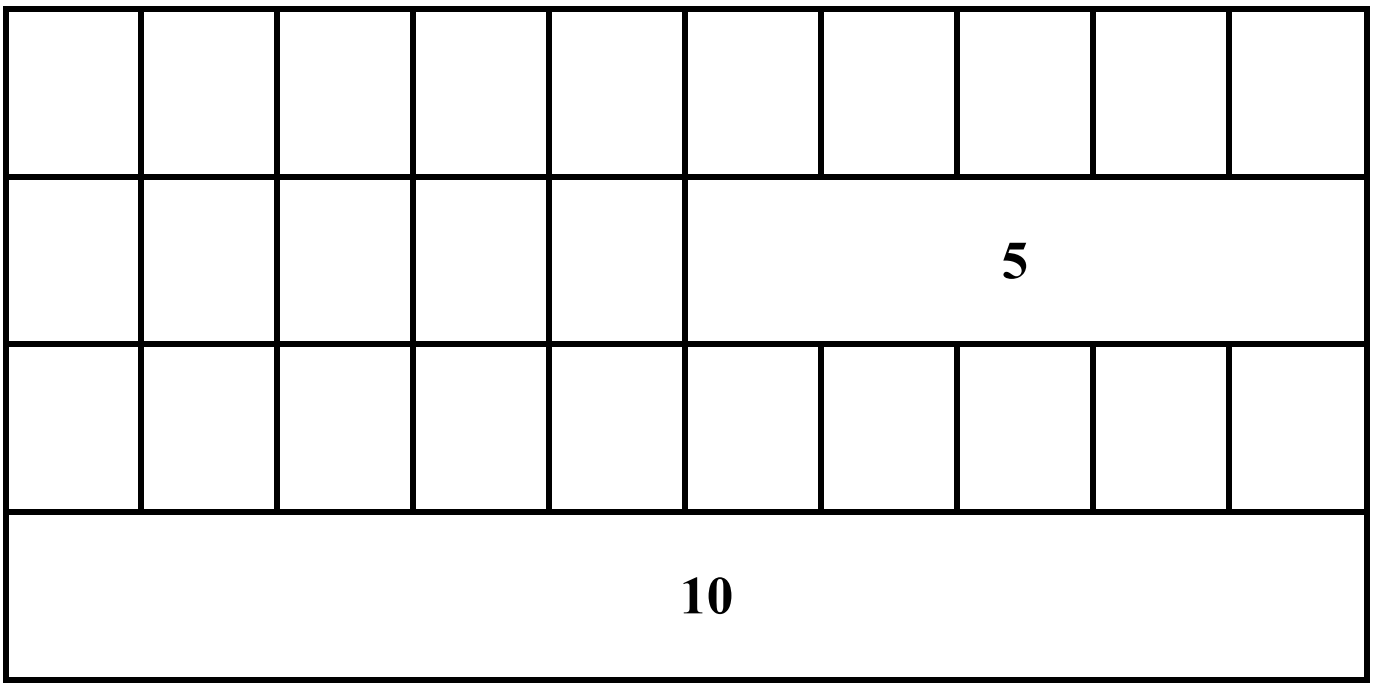
Sensevy, G. (2016). Le collectif en didactique. Quelques remarques. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra,L. Touche, C. Winsløw et S. Besnier (dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*(223-253). La Pensée sauvage.

Vergnaud G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

Vlassis, J., Demonty, I. (2019). Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 98–120.

ANNEXE 1 : MATÉRIEL POUR CONSTRUIRE LE JEU DE BANDES





ANNEXE 2 : SÉRIES DE PROBLÈMES DONNÉS DANS LE CADRE DE LA RECHERCHE IRES ENGAGÉE EN 2023-2024

Série 1

J'ai une barre avec 3 cubes rouges et 5 cubes verts. Combien y a-t-il de cubes en tout ?

J'ai 5 jetons rouges. On me donne 2 jetons verts. Combien ai-je maintenant de jetons ?

Dans la cour, il y a 3 garçons et 6 filles. Combien y-a-t-il d'enfants dans la cour ?

Série 2

Il y a 9 lapins. Il y a 6 carottes. Combien faut-il ajouter de carottes pour que chaque lapin ait une carotte ?

Il y a 10 enfants. Il y a 6 bonnets. Combien faut-il ajouter de bonnets pour que chaque enfant ait un bonnet ?

J'ai une barre de 8 cubes, certains sont rouges et les autres sont jaunes. Il y a 4 cubes rouges. Combien y a-t-il de cubes jaunes ?

Série 3

Pierre a 7 cubes. Jean a 5 cubes. Combien Pierre a-t-il de cubes de plus que Jean ?

Il y a 9 feutres. Il y a 3 bouchons. Combien manque-t-il de bouchons pour que chaque feutre ait un bouchon ?

Il y a 8 enfants. Il y a 10 gâteaux. Combien va-t-il rester de gâteaux si chaque enfant mange un gâteau ?

Série 4

J'ai 6 billes. J'en gagne 3. Combien ai-je de billes maintenant ?

J'ai 7 euros. Je veux acheter un jeu qui coûte 10 euros. Combien me manque-il d'argent ?

Il y a 5 enfants. Il y a 10 manteaux. Combien reste-t-il de manteaux quand chaque enfant a mis son manteau ?

Série 5

J'avais 10 billes avant la récréation. J'en ai perdu 3. Combien m'en reste-t-il maintenant ?
Il y a 6 bouchons. Il y a 9 feutres. Combien faut-il ajouter de bouchons pour que tous les feutres aient un bouchon ?
J'ai 7 euros. Je veux m'acheter un jouet qui coute 9 euros. Combien me manque-il ?

Série 6

Dans le saladier, il y a 5 pommes et 4 bananes. Combien y a-t-il de fruits en tout ?
Il y a 7 carottes. Il y a 5 lapins. Combien restera-t-il de carottes une fois que chaque lapin en aura mangé une ?
J'avais 8 euros. J'ai gagné 5 euros. Combien j'ai d'argent maintenant ?

Série 7

J'ai 10 euros. Combien me restera-t-il d'argent si j'achète un livre à 5 euros et un paquet de bonbons à 3 euros ?
Il y a 7 enfants. Il y a 10 vélos. Combien de vélos ne sont pas utilisés ?
Hamid a pris 7 bonbons dans le paquet. Marie a pris 4 bonbons. Combien ont-ils pris de bonbons en tout ?

DE LA FRACTION PARTAGE À LA FRACTION NOMBRE : ÉTUDE DES CONDITIONS DE TRANSFERT ET DES EFFETS D'UN DISPOSITIF DE FORMATION À MAYOTTE

Jean-Berky NGUALA
MCF, Institut de Recherche sur l'Enseignement de mathématiques, d'informatique et de Sciences IREMIS-Université de Mayotte
Laboratoire d'informatique et de mathématiques LIM-Université de la Réunion
jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

Myriam DI BETTA
PREC, Institut de Recherche sur l'Enseignement de mathématiques, d'informatique et de Sciences IREMIS-Université de Mayotte
myriam.di-betta@univ-mayotte.fr

Colette GUILLON
PRAG, Institut de Recherche sur l'Enseignement de mathématiques, d'informatique et de Sciences IREMIS-Université de Mayotte
colette.guillon@univ-mayotte.fr

Résumé
Mayotte est un territoire où les résultats aux évaluations nationales sont les plus faibles (Andreu, 2021), à l'instar du score de 11 % de réussite sur l'interprétation de la fraction simple 1/2 dans un problème. Un dispositif de formation à trois étapes est proposé à nos étudiants MEEF1D PES2 (professeurs des écoles stagiaires 2e année). Il combine un travail sur l'objet fraction via les décompositions, une prise en compte des représentations initiales des PES, à faire évoluer, pour introduire la fraction à partir des jeux contextualisés. Ces jeux, créés pour l'occasion, sont des outils de manipulation sur les équivalences des représentations sémiotiques comme discursives (en unité de numération), mixte, iconiques (100 carrés dont 75 grisés). Étudier les conditions de transfert de fraction partage en fraction nombre est notre objectif de recherche. Décrire le dispositif mis en place nous a servi de support pour en analyser les effets. Les premiers résultats sont encourageants.

I - INTRODUCTION

L'enseignement/apprentissage/formation sur les fractions pose des difficultés aux apprenants qui peinent toujours à expliquer ce concept d'étude. Par exemple, un PES qui participe à l'expérience nous explique que la fraction est « un truc où il y a une barre et un chiffre ou nombre en haut et en bas ». Ceci rejoint ce que soulignait déjà Rouche (1998), en affirmant :

> *Une fraction est une bien petite chose ; une barre horizontale, un nombre au-dessus, et un nombre au-dessous. Mais que représente cette chose ? Un morceau de tarte ? Un rapport ? Une nouvelle espèce de nombres ? La réponse est loin d'être claire pour tout le monde. … Celles-ci (les fractions) sont comme des insectes nuisibles qui s'attaquent aux écoliers et dont les piqûres entraînent d'interminables séquelles intellectuelles et morales.* (Rouche, 1998, p. 1)

De notre côté, enseignants et formateurs à l'INSPE (Institut National Supérieur de Professorat et de l'Éducation), ici et ailleurs, nous continuons d'observer des phénomènes didactiques liés à la transposition de ce concept, encore plus singulièrement à Mayotte.

Avec beaucoup d'inégalités scolaires (Nguala & Manou-Abi, 2023), ce territoire détient les résultats aux différentes évaluations nationales les plus faibles (Andreu, 2021), dont 11 % de réussite dans un problème d'interprétation de la fraction simple $\frac{1}{2}$ à l'entrée de sixième (11-12 ans). En plus de ce niveau global très faible des élèves, pointé lors de ces évaluations, nous pouvons également citer les inégalités sociales, un déficit en temps de travail scolaire personnel en dehors du temps institutionnel, la non maîtrise de la langue de scolarisation. L'île s'isole aussi dans l'organisation de l'enseignement en rotation (deux groupes classes dans la même salle, ce qui entraîne une organisation du temps de classe ne respectant pas les rythmes de l'enfant), le manque de salles de classe, de matériels… En formation initiale à l'INSPE, nous nous demandons comment accompagner ces enseignants qui ont beaucoup de difficultés disciplinaires et didactiques sur les fractions.

Par la suite, nous décrirons le dispositif de formation mis en place pour en définir nos objectifs et hypothèses de recherche. Puis en lien avec cela, il y aura notamment des justificatifs du dispositif d'un point de vue mathématique et didactique, un recueil des représentations initiales des étudiants sur les fractions (questionnaire en ligne, tests sur quelques notions de base et comment l'introduire). Ensuite, une étude des conditions favorables, une analyse des effets de transfert de la fraction partage en fraction nombre et des discussions sur les résultats obtenus seront menées. Enfin, les échanges ayant eu lieu lors de l'atelier du colloque de la COPIRELEM seront synthétisés.

II - PROBLÉMATIQUE ET HYPOTHÈSE DE RECHERCHE

L'évolution de pratique/de statut sur les fractions est questionnée à la suite d'un constat lié aux observations de terrain et à l'expérience de formateurs d'enseignants sur la conception de l'objet considéré : le plus souvent inférieur à 1 et représenté sous forme de disque divisé en parts égales, enseigné en deux séquences au plus et en absence de passage de cette fraction partage à la fraction nombre. Comment et dans quel dispositif de formation approprié faire évoluer tout ceci chez les PES ?

Comme objectif de recherche, nous voulons décrire un modèle qui pourrait expliquer :

1. Les conditions permettant de déclencher les transferts inférés au contenu mathématique visé ;
2. Les moyens susceptibles de provoquer ces acquisitions ;
3. Le rôle joué par des rapports sociaux-interactions sur cet objet d'enseignement/de formation qu'est la fraction. Internes et/ou externes aux mathématiques, ces éléments pourraient aider/accompagner cette évolution de statut de la fraction.

Pour répondre à cette problématique, nous avons émis trois hypothèses de recherche.

Dans un premier temps, nous introduisons la définition des nombres du type $\frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$ avant d'introduire la définition d'une fraction $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. Nous émettons l'hypothèse que la bonne compréhension du nombre $\frac{1}{n}$ faciliterait aussi celle de la définition générale d'une fraction, liée au premier nombre correspondant par un produit de facteurs d'un nombre entier pouvant aussi être assimilé à une somme d'additions réitérées.

Dans un deuxième temps, nous utiliserons des demi-droites graduées pour les placements des fractions. L'hypothèse ici serait que l'utilisation de demi-droites graduées permettrait aux apprenants de voir la fraction comme un nombre possédant plusieurs écritures et mettant en évidence le rôle, explicité précédemment, du signe égal. Par exemple, l'égalité $\frac{3}{4}$= 0,75 ; les PES savent que 0,75 représente un nombre. 0,75 et $\frac{3}{4}$ sont deux écritures qui représentent un même nombre.

Enfin, nous avons pensé que faire créer un lien avec l'enseignement de la fraction partage/fraction nombre en s'appuyant sur les outils didactiques contextualisés construits par les PES eux-mêmes, les aideraient à faire évoluer leurs conceptions déjà pointées précédemment sur ce thème.

III - MÉTHODOLOGIE : DISPOSITIF, JUSTIFICATIONS, RECUEIL ET TRAITEMENT DES DONNÉES

Nous commençons par décrire le dispositif support des objectifs de recherche puis le justifier sur le plan mathématique et didactique avant de passer au recueil et au traitement des données.

1 Dispositif mis en place

Comme décrit précédemment, nous nous demandons comment faire acquérir aux PES en formation (indirectement aussi à leurs élèves) le statut de nombre pour les fractions. Pour répondre à ce questionnement, nous avons mis en place un dispositif avec quelques étapes. Dans la première partie, il y a le recueil des représentations des étudiants sur les fractions (objet, utilisations et support d'enseignement). Ensuite, viennent les étapes de constructions de supports didactiques pour introduire les fractions, exposition par équipes de ces œuvres réalisées, interactions avec le groupe sous la modération du formateur, jeu des équivalences des fractions par équipe et analyses réflexives personnelles des PES. Des bilans adaptés similaires au diagnostic et améliorations des supports de représentation pour enseigner les fractions sont proposés. L'ensemble de ces étapes est résumé dans le tableau 1.

Étapes	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
Réalisations des PES	Enquête thématique Google form et questionnaire sur les fractions avec des tâches spécifiques à réaliser	Œuvres didactiques, support de représentation initiale de fraction	Vers un processus d'acquisition du statut de nombre aux fractions : jeu des équivalences, analyses réflexives à la suite de l'exposition et des échanges	Œuvres didactiques revisitées à la suite de ce qui précède. Bilan proche du test diagnostic mais adapté, réduit testant essentiellement le statut de fraction comme nombre.
Rendus par les PES, support TD	Recueil numérique des données	Pistes pédagogiques Matériel didactique réalisé en équipe	Dossier réflexif	Dossier réflexif complété
Rôle spécifique de l'étape dans le dispositif	Recueil des représentations initiales	Conception de l'enseignement sur les fractions	Confrontation des conceptions avec un expert dans le but de les faire évoluer	Recueil par écrit des conceptions finales et des conditions favorables du dispositif permettant aux PES d'apprendre.

Tableau 1 : Synoptique du dispositif sur les fractions

2 Justification mathématique et didactique du dispositif

Dans l'objectif d'étudier les conditions pour faire évoluer les conceptions des PES sur les fractions, initialement limitées aux quantités inférieures à 1, aux disques partagés en parts égales et au fait de ne pas les considérer comme des nombres, la modélisation du dispositif mis en place se réfère à la

connaissance en jeu (savoir visé) et s'appuie sur les interactions. Ces interactions, déterminantes par la connaissance (savoir visé), sont à organiser dans le dispositif entre formateur-PES/PES-PES/PES-connaissance (savoir visé). De ce fait, l'organisation de ces éléments, antagoniste entre le PES et le savoir visé, que nous évoquerons à la fin dans la notion de milieu didactique, est censée éclairer l'étude des conditions et des effets de transfert pour l'évolution du constat initial. D'abord, nous allons justifier le lien entre fraction partage et fraction nombre en passant par la description du statut du signe égal permettant un passage de plusieurs écritures d'un même nombre comme l'égalité $\frac{3}{4}$ = 0,75. Ensuite, la notion de fraction irréductible précisera l'écriture de la fraction comme un nombre représentant toutes les autres fractions équivalentes (plus loin, en écritures fractionnaires équivalentes) et la somme des fractions, est une décomposition/composition additive d'une fraction donnée comme $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Statuts d'égalité

Les différents statuts du signe égal « = » sont travaillés tout au long de la scolarité, et la première signification rencontrée dès le début du cycle 2 en est la suivante : permet d'annoncer un résultat d'une opération. Ce statut est souvent utilisé à tort, au fil de l'avancée des classes, comme un lien entre différents calculs sans qu'il y ait égalité de membres (3 x 2 = 6 +1 = 7). Une autre signification est exploitée pendant l'expérimentation, en phase de jeu des équivalences : le symbole « = » est utilisé pour évoquer une équivalence des écritures différentes d'un même nombre (par exemple, différentes représentations, décompositions) dont celle sous forme des fractions que nous traitons au point suivant (d'autres statuts ne seront pas développés ici).

Fractions équivalentes

Soient *(a,b),(c,d)* ∈ $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}$*. On définit la relation $\mathcal{R}$ par *(a,b)* $\mathcal{R}$ *(c,d)* ⇔ *ad = bc.*

Cette relation est une relation d'équivalence.

Soit *(a,b)* ∈ $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}$*. La classe d'équivalence de *(a,b)* est appelée nombre rationnel. On la note sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où *a* est appelé numérateur et *b*, dénominateur. L'ensemble des classes d'équivalence par la relation $\mathcal{R}$ est appelé ensemble des nombres rationnels, et se note $\mathbb{Q}$. Des fractions sont donc équivalentes lorsqu'elles représentent la même classe d'équivalence. On a de plus, pour tout c ∈ $\mathbf{Z}$*, *(a,b)* $\mathcal{R}$ *(ca,cb)*, c'est-à dire $\frac{a}{b} = r = \frac{ca}{cb}$. Ces fractions équivalentes représentent un même nombre. Les fractions issues des décompositions additives sont également équivalentes, c'est ce qui fait un lien avec l'addition des fractions à venir.

Sommes de fractions

On munit $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}$* de la loi de composition interne définie pour tous les éléments *(a,b) et (c,d)* de $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}$* par *(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd).* Cette loi est compatible avec $\mathcal{R}$.

Cette somme des fractions peut être simplifiée à la fin ou non, ce qui renvoie à la notion de fraction irréductible décrite ci-dessous.

Fractions irréductibles

Pour tout *r* ∈ $\mathbb{Q}$, il existe un unique couple *(a,b)* ∈ $\mathbf{Z}$x$\mathbb{N}$*, tel que *r* = $\frac{a}{b}$ et *a^b = 1.*

Dans ce cas, *r* = $\frac{a}{b}$ est appelée fraction irréductible. Dans le contexte de notre travail, l'écriture de cette fraction irréductible est un représentant de toutes les autres écritures des fractions équivalentes.

Des écritures fractionnaires équivalentes

D'une manière générale, le langage mathématique contient deux codes, le langage naturel et le langage symbolique ; c'est cette imbrication qui complexifie chez certains apprenants les tâches à réaliser. Duval

(1993) a développé une réflexion sur ces écritures symboliques sous forme de représentations sémiotiques (registres). Il appelle conversion le passage d'un registre à un autre et définit un traitement, les actions du sujet réalisées à l'intérieur d'une même représentation sémiotique. Pour notre expérience, le dispositif prévoit un travail spécifique sur les équivalences des représentations sémiotiques des fractions à construire et/ou à consolider. Ce jeu des conversions s'appuie sur la diversité de modes de représentation sémiotique allant des écritures fractionnaires, aux discursives, avec aussi les écritures mixtes et des iconiques (Chambris, Tempier & Allard, 2017). Chaque changement de représentation est important, il permet en particulier à chaque registre de mettre en évidence une partie des caractéristiques de l'objet fraction (plusieurs conversions pour en espérer une connaissance totale).

Le milieu didactique

Souvent la relation didactique est décrite comme une relation entre deux partenaires, sous-système enseignant/élève et un savoir. Entre le diagnostic et le bilan, le dispositif de formation mis en place va servir de support pour étudier les conditions et les éléments influents pour déclencher des transferts des connaissances. Ce système organisé entre les connaissances visés et l'apprenant est une cause des adaptations que ce dernier ne contrôle pas. Brousseau (1988) l'appelle milieu didactique :

> *Il a un caractère relatif : pour l'enseignant une situation (non didactique, en ce sens, les connaissances doivent être introduites par l'élève lui-même) peut apparaître comme un moyen (didactique d'enseignement) à mettre en œuvre et donc constituer l'environnement dans lequel il va immerger ses élèves. (Brousseau, 1988, p.321)*

Le milieu joue un rôle central dans l'apprentissage, notamment dans la détermination des connaissances (comme référence au savoir, source d'influences, objet de la connaissance, organisations mises en place et/ou conditions) que le sujet, son antagoniste, doit développer pour contrôler, entre autres, une situation d'action.

Au service des apprentissages, le jeu (ici nous ne développerons pas l'aspect plaisir source aussi de dévolution pour les élèves) pourrait être un milieu (Brousseau, 1988), un outil pouvant être utilisé en médiation au savoir, après un choix judicieux de l'enseignant pour sa portée pédagogique. Pour cela, comme déjà explicité précédemment, l'enseignant/formateur doit créer les conditions d'un milieu avec lequel l'élève/étudiant va interagir, le jeu interférant dans ces interactions formateur/étudiant/savoir à enseigner (adaptant pour notre étude enseignant/élève/savoir). Ceci est organisé pour que l'apprenant opère une suite de décisions et d'actions, élabore des stratégies pour gagner. Pendant ce temps, l'enseignant/le formateur s'assure que la meilleure stratégie pour gagner dans le jeu soit la connaissance visée sur les fractions qu'il cherche à faire acquérir aux apprenants. Par exemple, le formateur peut chercher à faire expliciter les connaissances en jeu ou à isoler tout autre élément du milieu didactique (rapports sociaux, interactions, questionnements, …) permettant au PES de réaliser les inférences dans le jeu des équivalences, de les aider à connaître et à passer d'une des diverses désignations des fractions à une autre, aussi bien orales, écrites que sous forme de décompositions additives et multiplicatives. Singulièrement pendant l'expérience, l'observateur va à la recherche de ce qui pousse le PES à exploiter que certaines écritures représentent le même nombre : trois quarts ; 0 unité 7 dixièmes et 5 centièmes ; 0,75 ; la représentation iconique de 100 carrés dont 75 grisés ; soixante-quinze centièmes, $\frac{3}{4}$, etc. Ces différents va-et-vient entre les écritures contribuent à créer un lien, par exemple, entre la formulation en langage courant et leur écriture mathématique et à aider à réaliser des équivalences entre les différentes écritures d'un même nombre. Par ailleurs, concernant l'activité d'introduction, les instructions officielles et rapports sur notre objet d'étude (MEN, 2016, 2021, 2013) indiquent que les fractions sont introduites pour pallier l'insuffisance des nombres entiers. Ce besoin d'utiliser d'autres nombres que les entiers, notamment pour mesurer les longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée, est à créer auprès de l'apprenant. La transposition didactique devrait s'appuyer sur des activités montrant les

limites des nombres entiers pour que, par la suite, les activités de calculs accentuent la construction de ces nombres rationnels. Comme pour tous les concepts en mathématiques, les fractions pourraient être utilisées pour résoudre des problèmes, ce qui amène les élèves/apprenants à comprendre les données numériques exprimées sous forme des fractions et met en évidence l'importance de la première approche de cette notion.

3 Recueil et traitement des données

Les PES ont été sollicités pour répondre à un questionnaire en ligne Google Forms portant sur leur connaissance et leur pratique liées au concept de fraction et par la suite, à un test diagnostic écrit sur sa maîtrise. L'enquête et ce test sont réalisés au mois de janvier 2024 pendant le temps d'enseignement. « Qu'est-ce qu'une fraction pour vous ? » est la première question de l'enquête qui nous donne la conception initiale des PES sur la notion visée. D'autres questions concernent sa progressivité dans le temps en période d'enseignement. Nous retrouvons « Programmez-vous dans votre année scolaire une ou plusieurs séquences sur les fractions ? » ou « Si vous programmez plusieurs séquences dans votre année scolaire, sont-elles réparties sur une ou plusieurs périodes ? ». Quel lien entre ces deux questions et les hypothèses sur les représentations initiales ou pratiques des enseignants ?. En effet, des PES pensent que la fraction est seulement partage d'une unité en parts égales, chaque part est une fraction de l'unité, ce qui pourrait s'enseigner en une séquence. Combien sont-ils à penser aussi qu'il faudrait enseigner ce concept dans le temps en plus de deux séquences pour aller vers le nombre ? A priori, c'est cela qui justifie leur choix pour notre questionnaire.

Par ailleurs, dans le test, il fallait reconnaître différentes écritures sur une liste donnée pouvant représenter une fraction et/ou un nombre (voir annexe 4). Il y avait à la fois la répétition des objets de la même famille comme (1, 2, 4), ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$), et celles qui étaient de nature différente. De ce fait, les objets de même nature permettaient d'analyser la cohérence des réponses données. D'autres questions pour repérer et placer les abscisses écrites sous forme de fractions sur une demi-droite graduée adaptée, étaient également posées, ainsi que celles sur la fraction partage. Donné à titre indicatif, le *tableau 2* ci-dessous renseigne des réponses du test diagnostic avec un codage numérique. Nous interprétons le « 1 » par une réponse juste, « 6 » par une réponse « fraction » erronée, « 7 » par réponse « nombre » erronée et « 9 », par une absence de réponse ou une réponse fausse, exprimée en « ni une fraction, ni nombre ». De plus, pendant la réalisation du dispositif, d'autres données ont été aussi recueillies. Il y en a eu pendant les échanges organisés (avec un questionnement mené) d'abord en collectif et par la suite au fil de l'avancée du dispositif en entretiens individuels. Ici, pour exemples, nous sommes partis des questions de formation des enseignants pour s'orienter progressivement vers des questions de recherche sur les conditions de transfert de connaissances/savoir visé. De rencontre en rencontre, nous sommes passés de « pourquoi n'utilisez-vous qu'un partage sur des diagrammes circulaires », « pourquoi n'utilisez-vous que des fractions inférieures à 1 » en « qu'est-ce qui s'est passé pour affirmer aujourd'hui que $\frac{1}{2}$ est un nombre » ou « qu'est-ce qui a fait que vous ayez appris un élément nouveau sur les fractions », etc. Au test final, contrairement au test initial (après avoir vérifié la cohérence globale des réponses données par les PES), nous gardons un représentant d'une famille de nombres. Par exemple, il y a un seul entier naturel pour représenter les entiers naturels 1, 2, 4, 6, 63 au test final et une seule fraction simple pouvant s'écrire sous forme de fraction décimale. Une autre adaptation au bilan concerne la suppression de la tâche pour reconnaitre une écriture fractionnaire puisque cette compétence est acquise par les PES. De ce fait, l'évaluation finale s'oriente directement vers le statut de la fraction représentant d'un nombre comme « La fraction $\frac{3}{4}$ peut-il représenter un nombre ? Justifier ». Le tableau 2 illustre quelques données du test initial des PES sur les représentations des écritures de nombres et grandeurs.

Groupe	Exercice n°1																												
	1%%	15,67	3Km	2	(2-7)	-39607	10x5	1	63	0,75	7%%1	4 ème	(12÷4)	(37-9)	x^2	(-5/2)	(7÷3)	π	4	15 €	62 cm	-4	L×l	-159	7%%9	1000	7%%9	3/4
1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	1	6	7	6	7	1	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
1	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	6	7	1	6	6	8	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
1	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	1	6	7	1	8	6	8	7	7	7	7	1	7	6	7	7	6
1	6	7	1	7	9	7	9	7	7	7	6	1	9	9	1	6	9	8	7	1	1	7	1	7	6	7	6	6
1	6	7	1	7	9	7	9	7	7	7	6	9	9	9	1	6	9	8	7	9	9	7	1	7	6	7	6	6
1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	6	7	1	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
3	6	9	1	7	9	9	8	7	7	9	6	1	9	9	9	6	9	9	7	1	9	7	1	7	6	6	6	6
4	6	6	1	7	9	9	8	7	7	7	6	1	6	7	1	6	6	8	7	9	1	7	1	7	6	7	6	6
4	6	9	9	9	6	9	9	9	9	9	6	9	9	6	9	6	9	9	9	9	9	9	9	9	6	9	6	6
4	6	7	9	7	9	7	9	9	7	7	6	9	9	9	9	6	9	9	7	9	9	7	9	7	7	7	6	6
4	6	7	1	7	7	7	7	7	7	7	6	1	9	7	1	6	9	6	7	9	1	7	1	7	9	7	9	9
4	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	9	6	6
4	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	1	6	7	1	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
4	6	7	7	7	9	7	9	7	7	6	6	1	6	9	9	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
4	6	7	1	6	7	7	7	6	6	7	6	1	6	7	1	7	6	8	6	1	1	7	1	7	6	6	6	6
4	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	7	6	7	1	6	6	8	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
4	1	7	1	1	7	1	7	6	6	7	6	1	7	7	7	6	7	1	6	1	1	6	1	6	6	1	6	6
4	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	1	7	7	1	6	7	8	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
4	6	7	1	7	7	7	7	7	7	7	6	1	6	7	1	6	7	1	7	1	1	7	1	7	7	7	6	7
4	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7	7	1	6	7	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	7
4	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	1	6	7	1	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6
4	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	6	7	1	6	6	1	7	7	7	7	1	7	6	7	6	6

Tableau 2. Extrait du recueil des données du test initial sur les représentations des écritures

Concernant le traitement des données, d'une part, nous analyserons le sondage des étudiants décrivant des conditions et moyens permettant leur apprentissage sur les fractions au cas par cas et, d'autre part, sur le modèle de formation support de la recherche, nous utiliserons la statistique descriptive et le test statistique du χ^2 de Mac Nemar[1]. Ce dernier est exploité pour tester si certains progrès réalisés par les PES sont significatifs sous hypothèse nulle d'égalité des proportions (échec ; réussite) et (réussite ; échec). À ce propos, nous rappelons que, entre le début et la fin du dispositif, du point de vue statistique, les deux échantillons sont appariés (chaque élève étant associé à lui-même). De plus, à chaque PES, est associé un couple en fonction de sa réussite au diagnostic et/ou au bilan (ceux qui n'évoluent pas n'apportent aucune information au dispositif, une comparaison est faite avec le cas théorique dans lequel un changement est égal dans les deux sens).

IV - EXPÉRIENCE

Notre expérience s'appuie sur un dispositif de formation dont nous allons ici décrire le fonctionnement pour chercher à vérifier les hypothèses de recherche. Ce modèle pourrait-il expliquer ce qui permet éventuellement de déclencher les transferts inférés à ce contenu mathématique visé sur les fractions, les moyens susceptibles de provoquer ces acquisitions, le rôle joué par des rapports sociaux-interactions sur les fractions ? Nous commencerons par étudier la troisième hypothèse H3 : le fait de créer un lien entre l'enseignement de la fraction partage/fraction nombre en s'appuyant sur les outils didactiques contextualisés construits par les PES eux-mêmes, les aideraient à faire évoluer leurs conceptions. C'est pourquoi nous analysons ce qui est recueilli.

1 Analyses a posteriori du questionnaire

Il y a eu 178 réponses au questionnaire. Pour définir le concept de fraction, $\frac{156}{178}$ (soit 88 %) des PES participant au dispositif évoquent la notion de partage et, pour expliquer les choix d'introduction de la fraction lors de sa transposition didactique, presque le même taux met aussi en avant, d'une manière ou d'une autre, la répartition essentiellement du disque en parts égales. Toujours pour cette même majorité de PES, dans l'introduction qui en est faite, les fractions sont toujours inférieures à 1. Il est utile de signaler

[1] Pour les détails du test, voir le site de Roditi Éric : « *eroditi.free.fr/Enseignement/STATM1S2_08-09/Fiche%20statistique%2006.pdf* ».

d'autres fréquences d'apparition de représentations pour introduire et/ou aborder cette notion : aucune réponse à l'aide de réglettes Cuisenaires, aucune réponse avec des rectangles, cinq demi-droites graduées. Pour illustrer ces propos, le lecteur pourra lire dans les réponses au questionnaire : « *Une fraction, pour moi, c'est comme une pizza partagée entre amis. Imagine que tu as une pizza entière, et que tu la partages en plusieurs morceaux. Chaque morceau représente une fraction de la pizza. Par exemple, si tu partages la pizza en quatre morceaux égaux, chaque morceau représente* $\frac{1}{4}$ *de la pizza, soit une fraction. C'est simplement une façon de représenter une partie d'un tout, comme quand on partage une pizza entre amis !* ».

Quelques-uns, en plus de la fraction partage, mettent aussi en évidence la présence de la barre de fraction comme indice de reconnaissance. Une fraction « *représente une partie d'un tout ou, plus généralement, n'importe quel nombre de parties égales. Elle est composée de deux nombres séparés par une barre de fraction*. » Ou encore pour un autre : « *Pour moi, une fraction c'est le partage d'une unité en plusieurs parts égales. Une fraction se présente sous forme d'un numérateur, de la barre de fraction puis le dénominateur en dessous*. »

La notion de quotient de nombre est quelquefois évoquée en plus du partage/numérateur/dénominateur : « *C'est le quotient de a par b, a étant le numérateur et b le dénominateur. La fraction est une écriture fractionnaire. C'est aussi le partage d'une unité en plusieurs parts égales. Il existe la fraction simple et décimale.* » ou « *Une fraction, c'est également le quotient de deux nombres entiers. Elle est utilisée pour exprimer un partage en fonction des nombres de parts données* ». Rarement, la conception de nombre est initialement présente « *écrire les nombres rationnels sous forme d'un quotient de deux entiers* ». Souvent les explications du nombre sont mélangées avec un des aspects déjà signalés : « *Une fraction est un nombre représenté par une division. Tous les nombres peuvent être écrits sous forme de fractions.* ».

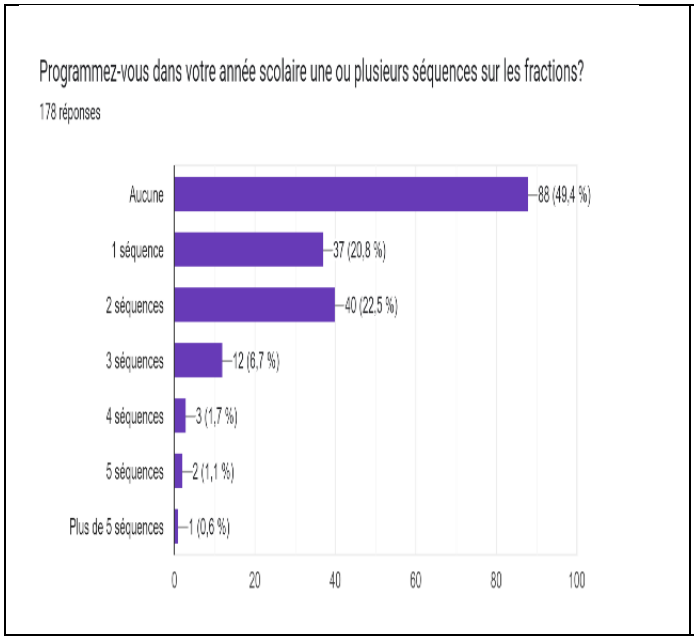
D'un autre côté, des besoins en didactique sont précisés : en majorité, les PES veulent comprendre l'objet fraction pour mieux l'enseigner, des demandes spécifiques sur les équivalences entre des écritures fractionnaires. Le lecteur pourra lire quelques-uns de ces besoins exprimés : « *je souhaiterai apprendre comment l'enseigner aux élèves* », « *J'aimerais aussi, travailler les différentes manières d'enrôler les élèves dans l'apprentissage des mathématiques.* », « *Je propose qu'on nous fasse apprendre comment débuter une séance de fraction* ». L'attitude face à la discipline est aussi présente : « *Ce n'est pas une notion qui m'intéresse et me motive mais en tant qu'enseignante je me dois de la maîtriser pour pouvoir la transmettre*. ».

Entre temps, d'autres PES pointent ce qui leur paraît le plus utile en formation :

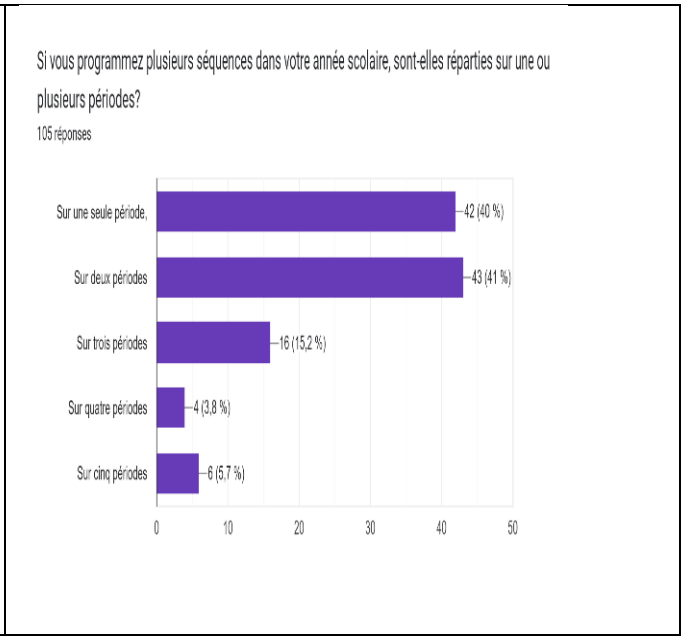
> *« Je pense lorsqu'on doit enseigner la fraction, le plus important pour un enseignant est de maîtriser son sujet. », « Pendant la formation, il serait intéressant d'être formé au mieux sur ces notions pour que nous professeur des écoles soyons à l'aise pour expliciter auprès des élèves. », « c'est un thème intéressant mais très compliqué à le mettre en place », « Je veux vivre les activités afin de mieux comprendre. ».*

Des remerciements ont été aussi formulés : « *Merci de nous permettre d'être participatif dans nos contenus c'est une bonne idée* », « *C'est une bonne initiative de nous demander comment nous percevons les mathématiques et comment nous allons les enseigner »*. Enfin, sur la programmation, un PES sur dix a programmé plus de deux séquences sur les fractions (ils sont deux sur dix pour deux séquences et un peu plus de deux sur dix pour une seule séquence). Près de la moitié affirme n'en avoir pas programmé sur les fractions. Cela amène plusieurs hypothèses d'autant plus qu'ils pouvaient aussi évoquer la programmation en stage à responsabilité d'un quart de temps de l'année précédente et celle des années de contractuel : ils n'enseignent pas en CM ou sont en échange de service, certains laissent quelques notions difficiles ou non maîtrisées comme les fractions et la proportionnalité pour les derniers jours de la fin d'année scolaire. Concernant les progressions en période d'enseignement, une minorité (24 %)

exploite des progressions spiralées étalées dans le temps sur plus de deux périodes scolaires durant l'année, comme nous pouvons le voir sur le graphique 1 (Nombre de séquences des PES proposé sur les fractions) et le graphique 2 (Répartition des séquences des PES sur les fractions) ci-dessous.



Graphique 1. Nombre de séquences sur les fractions



Graphique 2. Répartition des séquences

2 Analyses a posteriori du test initial (énoncé donné en annexe 4)

Avec ce test, des nombres sont présentés aux PES sous différentes écritures (écriture décimale comprise entre 0 et 1, écriture décimale supérieure à 1, entiers naturels petits et relativement grands, entiers relatifs négatifs). Leurs réponses sont synthétisées dans le tableau 3. Au-delà de la cohérence des réponses, nous cherchons à savoir ce qu'elles représentent pour eux.

	Fraction	Nombre	Les deux	Ni nombre Ni fraction	Je ne sais pas	Total
0,75	32	90	4	0	29	155
15,67	26	102	8	0	18	155
0	6	111	4	8	26	155
1	5	110	7	6	27	155
2	3	112	6	9	25	155
4	4	113	8	5	25	155
63	4	131	5	1	14	155
1000	3	131	6	0	15	155
- 4	2	108	6	9	30	155

-159	1	123	3	4	24	155
-39 607	1	115	4	8	27	155

Tableau 3. Réponses sur les représentations des entiers sous forme de fraction et/ou nombre

Globalement à l'intérieur d'une même famille (même nature et même taille de nombre), nous observons une cohérence à quelques réponses près. Les écritures décimales 0,75 et 15,67 sont globalement identifiées comme pouvant représenter des nombres. De plus, 0,75 (inférieur à 1) est plus facilement identifié comme pouvant être écrit sous la forme d'une fraction que 15,67 et a contrario, l'écriture 15,67 est plus considérée comme un nombre que celle de 0,75. Les entiers naturels et relatifs sont aussi identifiés comme des nombres (davantage lorsqu'ils sont composés de plus d'un chiffre comme 63, 1000 et -159 que d'un chiffre comme 0, 1, 2, 3 et 4) mais qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction. Ceci nous laisse penser que la notion de fraction comme représentant d'un nombre n'est pas encore acquise pour ces PES. Par ailleurs, les écritures 15 €, 62 cm et 3 km sont identifiées davantage comme étant des nombres que des grandeurs (ici, ni nombre, ni fraction). Par exemple, pour l'écriture 3 km, 68 PES sur 155 la considèrent comme un nombre contre 1 PES pour qui cela peut être une fraction, 53 ne se prononçant sur ni un nombre, ni une fraction et 33 qui ne savent pas répondre. Cela questionne (mais ne sera pas développé ici) aussi sur la maîtrise du concept de grandeur confondu avec celui du nombre (la globalité de l'écriture n'est pas prise en compte et/ou les unités en jeu n'ont pas d'intérêt). Qu'en est-il des écritures fractionnaires ? Le tableau 4 propose une synthèse des réponses des 155 PES.

	Fraction	**Nombre**	**Les deux**	**Ni nombre Ni fraction**	**Je ne sais pas**	**Total**
$\frac{1}{2}$	138	1	12	0	4	155
7:3	61	44	6	16	28	155
$\frac{3}{4}$	137	4	7	0	7	155
12 : 4	66	41	7	13	28	155
$\frac{7}{9}$	135	4	7	1	8	155
$\frac{7}{13}$	138	0	11	1	5	155
$\frac{29}{10}$	135	1	10	2	7	155
$-\frac{5}{2}$	116	9	9	4	17	155

Tableau 4. Réponses sur les représentations des écritures fractionnaires

D'une manière générale, il y a une cohérence à l'intérieur d'une même famille (nature et taille de nombre). Les PES identifient facilement les écritures $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{29}{10}$ comme des écritures de fraction (connaissance du principe de l'écriture fractionnaire), sans pour autant préciser qu'elles représentent aussi des nombres (ils avaient la possibilité de cocher les deux). Par exemple, $\frac{1}{2}$ n'est reconnu pouvant représenter un nombre que par $\frac{13}{155}$ des PES ($\frac{11}{155}$ est le score équivalent pour la fraction décimale $\frac{29}{10}$). C'est l'objectif du dispositif.

3 Séances du dispositif

Comme souligné précédemment, les séances du dispositif ont débuté par les diagnostics (questionnaire, tests et expressions libres pour recueillir les représentations initiales des PES). Ensuite, il s'est poursuivi par une séance avec des supports créés par les PES pour introduire ce concept travaillé. Enfin, une autre transposition didactique a porté sur les bases de la construction des rationnels : définition, décomposition additive et/ou multiplicative de l'expression mathématique $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$). À cet effet, les nombres du type $\frac{1}{n}$ sont définis au préalable comme étant des nombres tel que $\frac{1}{n}$ *x n = 1*. Des témoignages de PES ont révélé que la bonne compréhension du nombre $\frac{1}{n}$ a bien contribué à la compréhension de la définition générale d'une fraction. La fraction $\frac{a}{b}$ est le produit de la fraction $\frac{1}{b}$ par le nombre entier a ou la somme d'additions de la fraction $\frac{1}{b}$ réitérées *a fois.* Le jeu des équivalences des écritures (annexe 5) leur est proposé. C'est une adaptation du jeu de loto pour continuer à travailler les conversions au sens Duval (1993) entre les différents registres d'un même objet Tout ceci pourrait permettre aux apprenants de voir la fraction comme un nombre possédant plusieurs écritures et mettant en évidence le rôle, explicité précédemment, du signe égal.

Exemple d'un déroulé d'un TD (à la suite du test diagnostic et du questionnaire, consigne de créer un jeu)

Les PES avaient comme seule consigne : « Afin d'introduire le concept de fraction et de diversifier vos supports d'apprentissage, construire un jeu sur « la fraction /partage » et/ou sur « la fraction nombre » pour des élèves de cycle 3 ». Le fait de donner cette consigne sans plus de précision était un choix délibéré, l'objectif étant de laisser les étudiants construire leurs outils de classe comme ils ont l'habitude de le faire et ainsi pouvoir travailler sur leurs représentations.

Déroulé de la séance

Le travail à réaliser est précisé ci-dessus et a démarré en amont de ce TD, en temps libre, en groupe de 3, 4 personnes choisies par affinité. Par la suite, chaque groupe présente son jeu et la fiche pédagogique associée au reste de la classe. A la fin, les autres étudiants pouvant aussi intervenir, le formateur oriente son questionnement pour faire expliciter aux PES leurs choix et leur cheminement.

Les constats

Comme c'était prévisible, presque tous les jeux portent sur la notion de « fraction /partage » avec comme support les diagrammes circulaires (excepté un jeu ci-dessous sur le carrelage, un autre sur le cocotier à monter, sur un total de quarante-deux équipes). L'objectif d'apprentissage manque souvent de clarté pour les étudiants qui ont conçu le jeu mais également pour le reste du groupe.

Ce questionnement mené a mis en évidence les réelles représentations des étudiants stagiaires :

- Pourquoi utilisez-vous qu'un partage sur des diagrammes circulaires ?
  « on a appris comme cela ».
- Pourquoi n'utilisez-vous que des fractions inférieures à 1 ?

« *c'est dans le BO, nos élèves sont en difficultés, parfois nous sommes nous-même en difficulté.* »

- Comment avez-vous procédé ?
  « *nous construisons le jeu puis nous cherchons l'objectif d'apprentissage* ».

Nous constatons que des types de tâches du programme ne sont pas exploités, ni les compétences mathématiques liées à l'attendu de fin de cycle « *Utiliser et représenter … des fractions simples … »* (*MEN, 2016, p.90)*. Ceci nous laisse dire que la lecture du programme et son interprétation sont complexes pour eux. De ce fait, nous avons donc retravaillé avec les repères de progressivité pour les fractions (*MEN, 2016)* (annexe 6) pour avoir une vue d'ensemble des attendus de chaque niveau de classe, ce qui permet aux PES de comprendre que le temps est une variable importante pour conceptualiser l'objet d'étude en progression spiralée.

À la lecture rapide de ces repères de progressivité, les PES découvrent que l'on peut travailler avec des fractions supérieures à 1 dès le CM1. Enfin, pour continuer la conceptualisation de ce concept en construction, un travail spécifique de relecture des attendus de fin d'année (annexe 7 : ce que sait faire l'élève et exemples de réussite) (*MEN, 2016)*, dans le domaine Nombres et calculs (compétence : utiliser et représenter les grands nombres, des fractions simples, les nombres décimaux ; limitée à notre objet d'étude), est réalisé. Après des analyses réflexives de quatre documents (MEN, 2016, 2021) en annexes 6, 7, 8 et 9, c'est pratiquement sans aide qu'ils réussissent à corriger et à approfondir leur fiche pédagogique.

Bilan de l'activité

Cet élément du modèle de formation a été un support pour porter nos questions de recherche sur l'objet fraction notamment au niveau du rôle joué par des interactions (formateur-PES/PES-PES/ PES-outils institutionnels via la création et présentation d'un outil didactique contextualisé). De ce fait, le rôle spécifique des formateurs est mis en relief : organiser les conditions et moyens susceptibles de provoquer ces acquisitions sur les fractions notamment avec une confrontation réflexive des PES avec ces différents outils évoqués. D'autres éléments liés à l'Organisation Mathématiques au sens de Chevallard (1995) ont nourri aussi cette posture réflexive des PES : quel type de tâche permettant notamment de bien définir l'objectif d'apprentissage à atteindre, pour quelles techniques de résolution, justifiées et éclairées par quelles technologies et dans quelle théorie. Par ailleurs, la séance a mis aussi en évidence la nécessité pour les étudiants de s'emparer des outils institutionnels tels que les repères de progressivité et les attendus de fin d'année qui sont une aide indispensable dans la conception et analyses de leurs séances.

4 Bilan du dispositif

Nous rappelons qu'il y a eu un test final et un sondage sous la forme d'une expression libre écrite sur papier concernant l'apprentissage/formation des PES sur les fractions (ce qu'ils ont éventuellement appris et qu'est-ce qui a fait qu'ils apprennent, à quel moment ils ont appris). Le tableau 5 synthétise quelques résultats du test final des 155 PES.

	L'écriture peut-elle représenter une fraction ?	L'écriture sous forme de fraction peut-elle représenter un nombre ?	L'écriture ne peut pas représenter une fraction	L'écriture ne peut pas représenter un nombre	Je ne sais pas	Total
$\frac{3}{4}$	Xxxxxxxxx	141	xxxxxxxx	9	5	155

$\frac{5}{3}$	Xxxxxxxxx	138	xxxxxxxx	13	4	155
0,75	142	Xxxxxxxx	6	xxxxxxxxx	7	155
15,67	139	Xxxxxxxx	7	xxxxxxxxx	9	155
100	147	Xxxxxxxx	4	xxxxxxxxx	4	155

Tableau 5. Quelques Réponses sur les représentations des écritures au bilan

En comparant ces différents résultats avec ceux du diagnostic, la différence saute aux yeux. Néanmoins, nous allons confirmer et reprendre les calculs, par exemple pour ceux relatifs à la question « L'écriture 0,75 peut-elle représenter une fraction ? ». Nous utiliserons le test statistique du χ^2 de Mac Nemar. L'association en fonction de réussite donne 13 PES (échecs au diagnostic, échecs au bilan) et 36 PES (réussites au diagnostic ; réussites au bilan). Concernant le changement de réussite entre le diagnostic et le bilan, 106 PES sont passés de l'échec à la réussite, et aucun PES n'est passé de la réussite à l'échec. Ces scores sont à comparer avec le cas théorique à changement égal dans les deux sens sous hypothèse nulle, selon laquelle les proportions (échec ; réussite) et (réussite ; échec) sont égales pour cette population des PES. Ces effectifs empiriques et théoriques des évolutions sont dressés dans le tableau 6.

	(Echec ; Réussite)	**(Réussite ; Echec)**	**Total**
Effectif empirique	106	0	106
Effectif théorique	53	53	106

Tableau 6. Changement de réussite entre le diagnostic et le bilan pour l'écriture 0,75

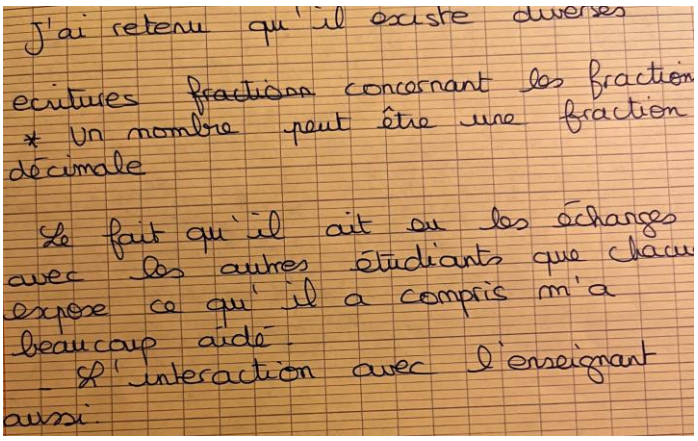
La valeur calculée du χ^2 associée aux distributions des effectifs empiriques et théoriques est égale à 106. Cette valeur est très nettement supérieure à la valeur limite au risque de 5%, $\chi^2_{0,05}$ = 3,84 (1 degré de liberté). Elle l'est même au risque de 1%. Nous concluons donc à l'existence d'une différence (significativement meilleure) dans la réussite des PES entre le début et la fin de l'expérimentation. Nous interprétons cette différence comme un progrès des PES entre le diagnostic et le bilan.

Ce progrès réalisé est également pointé concernant la question posée relative à l'écriture $\frac{3}{4}$ « L'écriture $\frac{3}{4}$ sous forme de fraction peut-elle représenter un nombre ? » pour qui la valeur calculée de χ^2 associée aux distributions des effectifs empiriques et théoriques correspondantes est égale à 130. Cette valeur trouvée est également nettement supérieure à la valeur limite au risque de 5%, $\chi^2_{0,05}$ = 3,84 à 1 degré de liberté (elle l'est même au risque de 1%). Par ailleurs, nous précisons que pour ce cas d'écriture fractionnaire, nous avons 130 PES qui ont enregistré un échec au diagnostic et une réussite au bilan, 14 PES ont un échec au diagnostic et un échec au bilan, 11 PES ont réussi à la fois au diagnostic et au bilan et aucun parmi ceux qui ont réussi au diagnostic n'a échoué au bilan.
Comme le modèle de formation proposé est un support de recherche, nous allons explorer quelques productions sur des conditions favorables et moyens qui ont contribué dans l'apprentissage des PES sur l'ensemble du dispositif. Nous pouvons lire :

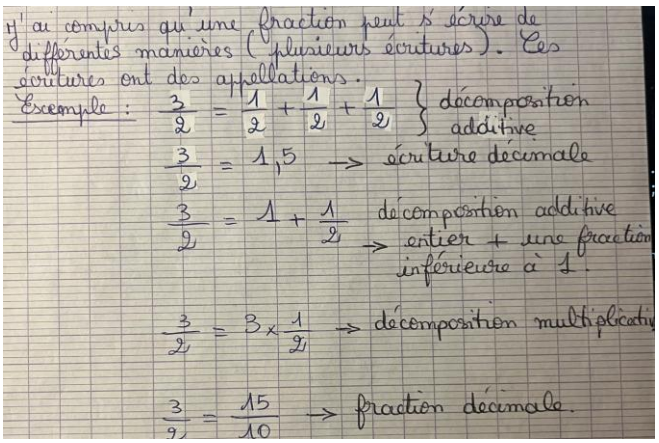
- Le fait de les avoir mis en situation d'action tout en favorisant une posture réflexive de leurs actions en fonction de ce que leurs élèves sont censés savoir à la fin de l'année. De plus, leur temps d'action

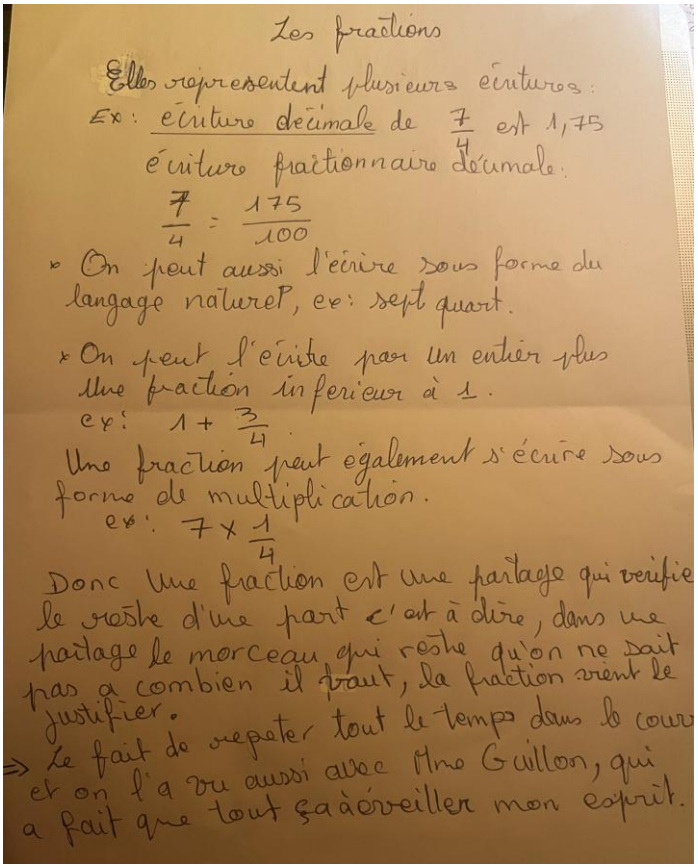
étalé dans le dispositif aurait développé une prise de conscience pour faire évoluer le statut de fraction.

- Le fait d'avoir proposé des situations complémentaires en parallèle (jeu des équivalences avec différentes représentations de fraction, introduction à la construction des rationnels où $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}$ (additions réitérées *a fois, a* et *b sont des entiers, b* $\neq 0$)) a joué un rôle déterminant dans les transferts inférés au contenu mathématiques. En plus du jeu des équivalences entre les écritures et des décompositions additives et multiplicatives déjà évoquées, les autres types de tâches réalisées sont : insérer une fraction entre deux entiers qui se suivent, écrire une fraction comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un, effectuer la décomposition additive/multiplicative d'une fraction. Pour cela, la **répétition** des actions et l'utilisation de quelques outils comme droite graduée, tableau de numération ont permis **une mise en lien** entre différentes écritures d'un même nombre. De ce fait, par exemple, près de 97 % des PES affirment avoir compris (ou retenu) qu'un même nombre (ici rationnel) peut s'écrire sous différentes formes comme illustré ici : « un nombre peut avoir plusieurs écritures, un nombre décimal peut s'écrire sous forme de fraction décimale. $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction décimale car je n'aurai pas $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ ». Un autre dit avoir compris qu'« *on peut toujours positionner une fraction entre deux entiers consécutifs quelconque. Une fraction peut être écrite sous forme d'entier et d'une fraction inférieure à 1* ».
- L'organisation des interactions y compris celle entre les PES et le savoir visé (« *au moment où j'ai vu le tableau des unités simples et des parties décimales, j'ai accédé au sens … manière de nommer verbalement, décomposer, expliquer, réinvestir…* », « *J'ai compris tout cela en écoutant les exemples des camarades* ».
- Mise en lien avec la pratique de classe en parallèle : « *Ce qui a fait que j'ai retenu, c'est la pratique en classe avec les applications de toutes les procédures comme par exemple la représentation iconique, écriture décimale, écriture sous forme de fraction* ».
- Mise en lien entre les unités simples et les unités de la partie décimale comme une centaine contient 10 000 centièmes, 1 000 dixièmes, etc. « *J'ai mieux compris une centaine est différent d'une centième* », « *Maintenant (j'ai compris en plus de la fraction partage) une fraction peut être représentée sous forme d'écriture décimale. Donc il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur. Exemple : ½ = 0,5. Le zéro représente l'unité et 5 représente le chiffre de dixième*. ».
- Mise en lien entre diviser par un nombre différent de zéro et multiplier par son inverse : « *J'ai retenu que lorsqu'on divise par 2, c'est multiplier par ½. C'est ce qui revient à en trouver la moitié*. ».
- Le fait de comprendre agit sur le rapport (l'attitude face) à la discipline : « *J'ai toujours eu des difficultés en math avec des explications sur la façon dont monsieur N. enseigne, je commence à aimer les maths* ».


J'ai retenu qu'il existe diverses écritures fractionnaires concernant les fractions
* Un nombre peut être une fraction décimale

Le fait qu'il ait eu des échanges avec les autres étudiants que chacun expose ce qu'il a compris m'a beaucoup aidé.
- L'interaction avec l'enseignant aussi.


J'ai compris qu'une fraction peut s'écrire de différentes manières (plusieurs écritures). Ces écritures ont des appellations.
Exemple : $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ } décomposition additive
$\frac{3}{2} = 1,5$ → écriture décimale
$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ décomposition additive → entier + une fraction inférieure à 1.
$\frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$ → décomposition multiplicative
$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ → fraction décimale.


Les fractions

Elles représentent plusieurs écritures :
Ex : écriture décimale de $\frac{7}{4}$ est 1,75
écriture fractionnaire décimale :
$\frac{7}{4} = \frac{175}{100}$

* On peut aussi l'écrire sous forme du langage naturel, ex : sept quart.
* On peut l'écrire par un entier plus une fraction inférieur à 1.
ex : $1 + \frac{3}{4}$.
Une fraction peut également s'écrire sous forme de multiplication.
ex : $7 \times \frac{1}{4}$

Donc une fraction est une partage qui vérifie le reste d'une part c'est à dire, dans une partage le morceau qui reste qu'on ne sait pas à combien il faut, la fraction vient le justifier.
⇒ Le fait de répéter tout le temps dans le cours et on l'a vu aussi avec Mme Guillon, qui a fait que tout ça éveiller mon esprit.

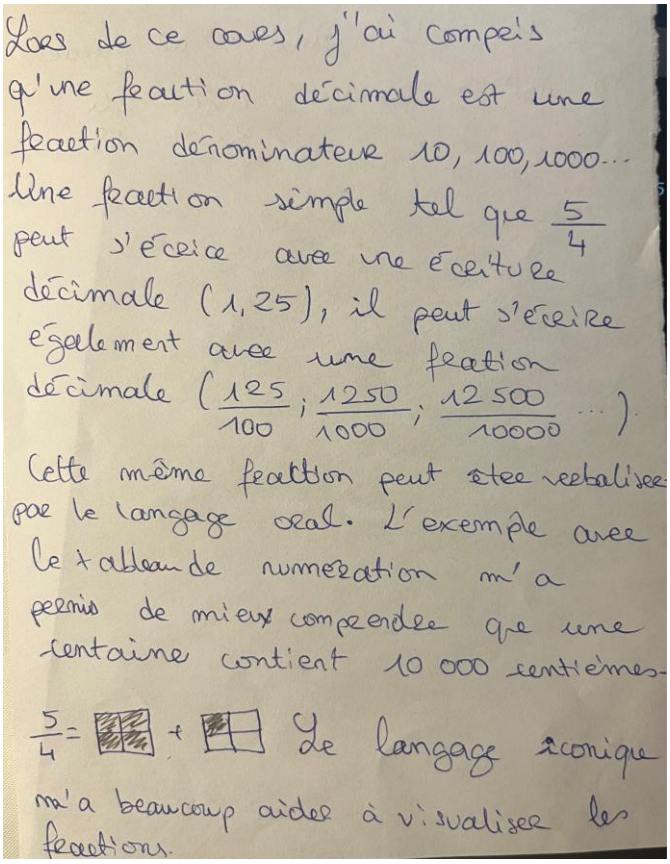

Lors de ce cours, j'ai compris qu'une fraction décimale est une fraction dénominateur 10, 100, 1000... Une fraction simple tel que $\frac{5}{4}$ peut s'écrire avec une écriture décimale (1,25), il peut s'écrire également avec une fraction décimale ($\frac{125}{100}$; $\frac{1250}{1000}$; $\frac{12\,500}{10000}$ ...).
Cette même fraction peut être réalisée par le langage oral. L'exemple avec le tableau de numération m'a permis de mieux comprendre que une centaine contient 10 000 centièmes.
$\frac{5}{4} =$ + Le langage iconique m'a beaucoup aidé à visualiser les fractions.

Figure 1. Extraits d'écrits de PES

Nous précisons tout de même que d'autres dispositifs pourraient également amener les apprenants à faire évoluer le statut de fraction (de fraction partage en fraction nombre) comme la proposition de la collection ERMEL pour introduire les fractions ou les travaux de Coulange et Train (2017). C'est une situation de formulation montrant la limite des entiers en créant un besoin d'utiliser d'autres outils exploitant des nouveaux nombres. Sur les analyses faites, nous continuerons nos traitements des données pour notamment étudier les implications entre les variables. Quant au test du diagnostic, il serait intéressant de limiter la quantité des écritures à traiter à certains représentants de famille : une seule fraction simple pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, une seule fraction décimale, un seul nombre rationnel non décimal, etc. Par ailleurs, lors de l'atelier du colloque de la COPIRELEM, en plus de la présentation de ces écrits, nous avons proposé un travail par groupe de trois sur le support unité

« cocotier » à monter en annexe 3. C'est une proposition d'un groupe lors du TD déjà explicité précédemment pour introduire la comparaison de fraction décimale en CM sous forme de bataille de cartes entre deux adversaires. La consigne donnée pendant l'atelier part de cette proposition initiale et laisse aux participants une liberté quant au choix de la notion/compétence/objectif/variables didactiques à définir concernant les fractions au CM. Différentes propositions ont fait l'objet d'échanges diversifiés et riches. Par exemple, l'objectif du jeu d'un groupe est de monter le cocotier par pallier progressivement en remportant le plus de batailles de cartes jusqu'au sommet. Chaque montée fait gagner au joueur concerné une noix de coco. L'élève gagnant est celui qui réussit à en gagner deux en premier (l'autre joueur finit quand même sa partie). À tour de rôle, chaque joueur part d'un niveau de départ défini, pioche un élément dans le sac de cartes (complétées de $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{100}$ et $\frac{7}{100}$). Un autre groupe développe l'idée de travailler au fur et à mesure de l'année sur un arbre rectiligne de deux mètres au moins (ce qui pourrait permettre de construire des subdivisions dixièmes et centièmes, en jouant également sur la variable numérique avec des zoom). Un groupe a suggéré de monter le cocotier par pallier avec des compléments à l'unité réussis. Des variantes sont proposées. L'une d'elles consiste à placer les points représentés sous forme des fractions sur le cocotier et d'aller à chaque fois chercher les cartes correspondantes. L'autre variante fait tirer et lire les écritures des nombres écrits sur les étiquettes à haute voix avant de produire leurs équivalences. C'est cela la condition pour monter la marche du cocotier. Lors du bilan de l'atelier, différentes équipes ont pointé la place spécifique des rétroactions pour s'auto-valider et le rôle central de la variable didactique « manière d'écrire la fraction » : écritures littérales, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$, la possibilité de refaire avec des cartes identiques et de dépasser la quantité 1, départ au sol, travail sur le discret et/ou en continu.

V - CONCLUSION

Nous avons voulu étudier les conditions de transfert de fraction partage en fraction nombre en partant d'un dispositif de formation mis en place dont la description a servi de support pour en analyser les effets.

Pour cela, les conceptions initiales, les connaissances disciplinaires et didactiques des PES sur la fraction, qui sont souvent limitées à la fraction partage inférieure à l'unité, ont été confrontées à chaque fois à un sous-système antagoniste (connaissances mathématiques sur les bases de construction des rationnels, outils institutionnels avec des attendus de fin d'année, différentes interactions organisées, …). Le fait de maîtriser l'organisation mathématique et l'organisation didactique (Chevallard 1985) de l'objet fraction agit sur l'évolution du statut, de la pratique. D'autres conditions favorables et d'autres moyens à l'évolution de ces conceptions vers la fraction nombre ont été aussi mises en évidence. Par exemple, la répétition des actions étalée dans le temps tout en variant l'utilisation des outils (jeu des équivalences, droite graduée, tableau de numération) aurait permis une mise en lien entre différentes écritures d'un même nombre. Nous avons aussi observé un impact positif auprès des PES d'une mise en lien avec la pratique de classe contextualisée en parallèle. Les résultats du diagnostic au bilan sont encourageants, sans oublier les variables qualitatives comme joie, satisfaction et attitude face aux mathématiques exprimées, l'estime de soi à propos d'une notion qui longtemps les a rendus mal à l'aise. Initialement conçu en formation et pour la formation pour permettre le développement de compétences professionnelles des enseignants, ce dispositif adopte le paradigme du *learning by doing* initié par Dewey (1993), les PES ont à maintes reprises exprimé leur satisfaction à ce propos. De ce fait, il permet de mettre en œuvre une approche de pédagogie active en formation. Étalé en deuxième année de Master MEEF 1D et pris en charge par les formateurs impliqués pour cette recherche-action, le dispositif sur les fractions est reconduit en cette année universitaire, dans l'espoir de le pérenniser. Enfin, dans cette continuité, lors

de l'atelier du colloque de la COPIRELEM 2024, sur un support de cocotier, cette partie du dispositif mis en place est encouragée et étendue en jouant sur différentes variables didactiques pertinentes pour ces types d'activités : c'est notre perspective de travail.

BIBLIOGRAPHIE

Andreu, S. A. N. D. R. A., et al (2021). *Évaluations 2021 Point d'étape CP : premiers résultats*. Ministère de l'Éducation nationale, de la jeunesse et des sports.

Chambris, C., Tempier, F., Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition École Collège, *Repères IREM*, *108*, 63-91.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (p.83-122). ARDM.

Coulange, L., Train, G. (2017) Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque* (p.143-156). IREM de Poitiers.

Dewey, J. (1993). *Logique : la théorie de l'enquête*. Paris : Presses universitaires de France.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Grugeon-Allys, B. (2010). Évolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice, In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.C. (Eds), *Les parcours de formation des enseignants débutants* (p.505-528). Presses Universitaires Blaise Pascal.

MEN (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3,* Mathématiques Nombres et calculs. Consultée le 01/10/2023, Url : https://eduscol.education.fr/document/16510/download

MEN (2023). *Note du conseil scientifique de l'éducation nationale Septembre 2023. Consultée le 01/10/2023, Url :* https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_alerte_CSEN_02_V2.pdf

MEN (2021). *Un guide fondé sur l'état de la recherche. Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.* Consulté le 01/02/2024, Url : https://eduscol.education.fr/media/3738/download

Nguala, J. B., & Manou-Abi, S. (2023). Statistical modeling of the attitudes toward mathematics from a school survey data of Mayotte. https://hal.science/hal-04208748/

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Éditions Ellipses.

Salone, J. J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et didactiques*. *Revue semestrielle en sciences de l'éducation*, 20. https://journals.openedition.org/ced/3848

ANNEXE 1 (EXEMPLE DE SUPPORT DE JEU CONTEXTUALISÉ SUR LA FRACTION A LA SUITE DE CORRECTIONS)

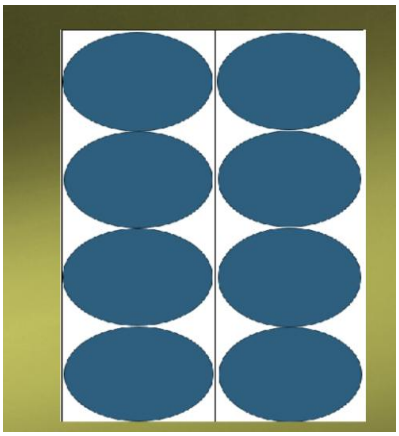
Fraction : jeu de carrelage	**Cycle 3**
Domaine : Nombres et calculs	
Compétences : Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux : Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par 1/2).	
Objectifs : - Savoir désigner et représenter une fraction. - être capable de repérer une fraction.	**Carte du savoir mis en jeu :**

Séance organisation	**Matériel**	**Activités**
Phase 1 : Rappel de la séance précédente **Collectif (10 in)**	- Cartes - Carrelages de la classe	**Présentation du jeu :** L'enseignant présente le matériel (cartes) et donne la consigne aux élèves : piocher une carte au hasard dans la boîte. Ensuite dessine les parts représentées par la fraction (1/2) puis colorie la case correspondante. L'enseignant demande aux autres de valider ou invalider le résultat de leur camarade et les laisser émettre chacun des hypothèses. La même procédure se poursuit avec d'autres élèves : l'enseignant demande à d'autres élèves de jouer le jeu.
Phase 2 : Consolidation / Réinvestissement/en groupe (20 min)	Cartes, Planche quadrillée, Grille d'observation Objet	**Déroulement :** - L'enseignant présentation le matériel et précise aux élèves qu'il s'agit d'un jeu sur la fraction comme ce qui a été vu avant mais cette fois-ci on va utiliser une planche cadrée. - **Deux actions :** Action 1 : un élève dicte à l'oral à son binôme de se placer sur la case correspondant à la fraction dictée à l'orale. Action 2 : le binôme valide ou invalide le résultat obtenu par son partenaire sur la feuille. - Élèves moteurs : faire un jeu de bataille : Ce jeu se joue en binôme. Il est présenté sous forme d'une planche quadrillée. Les binômes vont s'affronter : « Parmi les cartes proposées, trouver les fractions indiquer sur les différentes cartes : place un objet sur la case correspondante. Valider ou invalider le résultat sur la fiche d'observation.

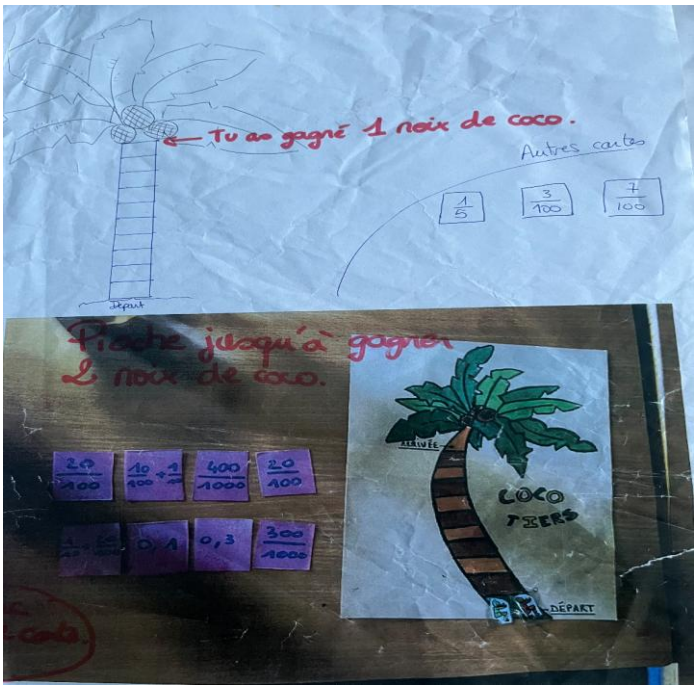
Phase 3 : Mise en commun/ Collectif (15 min)		L'enseignant passe voir les différents binômes et demande d'expliquer la procédure employée. Chaque binôme explique la stratégie utilisée.
Phase 4 : Institutionnalisation/Individuel (10 min)	- Fiches exercices	Proposer un exercice aux élèves.

ANNEXE 2 (EXEMPLE DE SUPPORT DE JEU CONTEXTUALISÉ DE LA FAMILLE DES SEMAILLES : M'RAHA WA TSO)

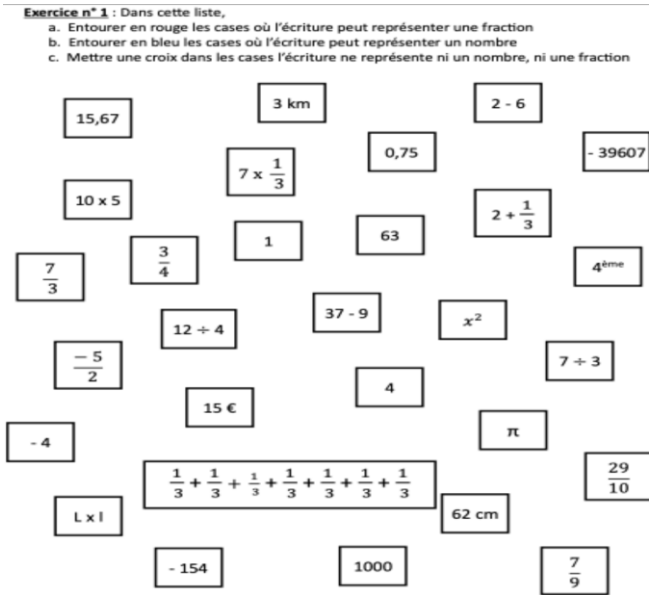
Objectif défini du jeu : Adopter des stratégies pour récolter les tso (les graines) de son adversaire. Plusieurs variantes du jeu sont proposées, d'un jeu des équivalences aux fractions représentées par les tso à semer à chaque fois.



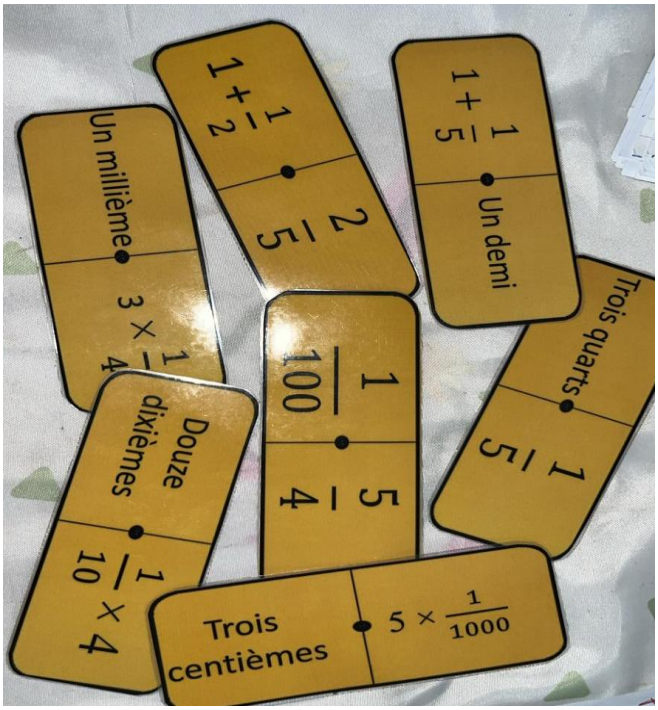
ANNEXE 3 (EXEMPLE DE SUPPORT DE JEU CONTEXTUALISÉ SUR LE COCOTIER), REPRIS À L'ATELIER DE LA COPIRELEM



ANNEXE 4 (TEST DIAGNOSTIC EXERCICE 1) : L'ÉCRITURE PEUT REPRÉSENTER UN NOMBRE ET/OU UNE FRACTION



ANNEXE 5 (JEU DES ÉQUIVALENCES DES ÉCRITURES) UNE ADAPTATION DU JEU DE DOMINO ILLUSTRATION AVEC QUELQUES CARTES



ANNEXE 6 : REPÈRE DE PROGRESSIVITÉ SUR LES FRACTIONS *MEN (2016)*

Fractions

Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.	Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

ANNEXE 7 : ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE SUR LES FRACTIONS : CE QUE SAIT FAIRE L'ÉLÈVE MEN (2016)

Fractions

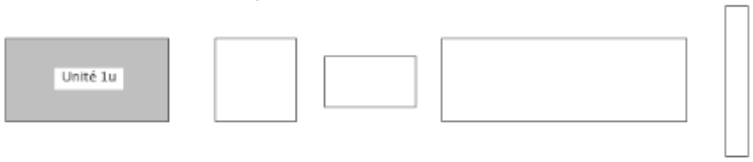
Ce que sait faire l'élève

- L'élève utilise les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs, et des fractions décimales ($\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$) ; il fait le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple faire le lien entre « la moitié de » et $\frac{1}{2}$ dans l'expression « une demi-heure »).
- L'élève manipule des fractions jusqu'à $\frac{1}{1000}$.
- L'élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.
- Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; $1+\frac{1}{3}$; $4\times\frac{1}{3}$).
- Il les positionne sur une droite graduée.
- Il les encadre entre deux entiers consécutifs.
- Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Il compare deux fractions de même dénominateur.
- Il ajoute des fractions décimales de même dénominateur.

ANNEXE 8 : ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE SUR LES FRACTIONS : EXEMPLES DE RÉUSSITE MEN (2016)

Exemples de réussite

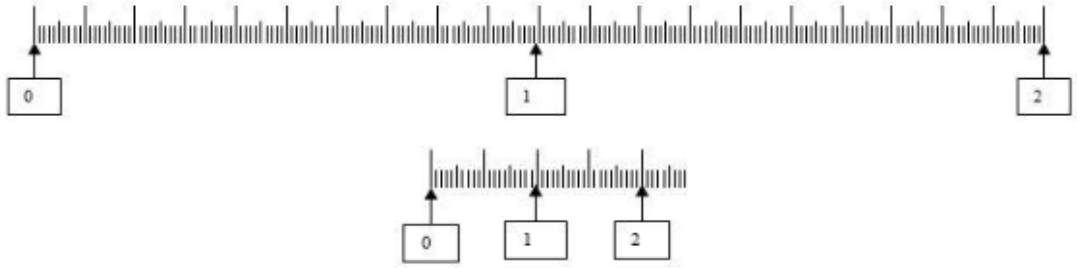
- Il partage des figures ou des bandes de papier en $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.
- Une unité d'aire étant donnée, il écrit sous forme de fraction des aires de surfaces données (supérieures ou inférieures à l'unité)



- Il écrit les nombres suivants sous forme de fractions décimales :
  0,1 ; 0,01 ; 0,11 ; 1,2 ; 12,1 ; 34,54 ; 7,845…
- Quelle est la moitié de la moitié ? Quel est le double de la moitié ?
- Quel est le dixième d'une centaine ? Quel est le centième d'une dizaine ?
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ peuvent-ils s'écrire sous forme de fractions décimales ?

ANNEXE 9 : ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE SUR LES FRACTIONS : COMPLEMENTS ET DROITES GRADUEES MEN (2016)

- Place $\frac{8}{5}$ puis $\frac{12}{10}$ sur les deux droites graduées ci-dessous :



- Encadre $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{2}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{34}{10}$; $\frac{2}{100}$; $\frac{101}{2}$ entre deux entiers consécutifs.
- Trouve des fractions pouvant se situer entre 0 et 1 ; entre 4 et 5.
- Pour chaque fraction suivante : $\frac{27}{5}$, $\frac{33}{9}$, $\frac{52}{10}$, $\frac{37}{4}$, $\frac{175}{10}$,
  – indique le nombre d'unités du nombre décimal qu'elle représente ;
  – décompose-la en somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Compare $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{12}$ et $\frac{13}{12}$.
- Calcule $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$; $\frac{26}{100}+\frac{24}{100}$; $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}$.

COMMUNICATIONS

C11 Page 299	Sylvia COUTAT, Marina De Simone, Céline VENDEIRA, Université de Genève	Comment un changement de progression d'enseignement impacte les apprentissages des élèves ? Étude de cas avec les nombres rationnels
C12 Page 315	Marie-Pier GOULET, Université du Québec à Trois-Rivières Marie-Pier FOREST, Université du Québec à Rimouski Dominic VOYER, Université du Québec à Rimouski	Comment penser l'accompagnement des enseignants du primaire afin de faire valoir la résolution de problèmes mathématiques en tant qu'approche pédagogique ?
C13 Page 330	Michella KIWAN-ZACKA, LDAR, UPEC Frédérick TEMPIER, LDAR, CY Cergy-Paris Université,	L'enseignement de l'ordre des décimaux dans les manuels de CM2 : quelles potentialités d'apprentissage pour les élèves ?
C14 Page 346	Céline HUGLI (HEP Vaud) Michel DERUAZ (HEP Vaud) Marie-Line GARDES (HEP Vaud) Jana TRGALOVA (HEP Vaud)	Évaluation de l'outil numérique Calcularis pour soutenir les processus d'enseignement et d'apprentissage du calcul en 5-6P en Suisse (CE2-CM1)
C15 Page 358	Karine BERNAD & Nathalie BRIANT & Chantal TUFFÉRY-ROCHDI LIRDEF, Université de Montpellier	Accompagner des pratiques débutantes, par une formation à la recherche, vers le développement d'une approche didactique
C16 Page 371	Jean-Philippe GEORGET Université de Caen Normandie (Inspé) Laboratoire CIRNEF UR 7454	Projet d'amélioration de l'accessibilité de ressources de formation d'enseignants
C17 Page 378	Matthieu GAUD, IREM&S de Poitiers Jérôme COILLOT, IREM&S de Poitiers	Enseignement par les grandeurs : une opportunité de motivation et d'accompagnement de chaque élève et de formation des enseignants
C21 Page 392	Jacques DOUAIRE (Équipe ERMEL, associée Ifé-ENS-LYON) Fabien EMPRIN (Université de REIMS, CEREP EA 4692 – Équipe ERMEL) Henri-Claude ARGAUD (Équipe ERMEL)	Prise en compte des connaissances des élèves dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire
C22 Page 407	Serge PETIT, Professeur de mathématiques honoraire, IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg Guillaume ASSALI, Professeur des Écoles en CM1, REP, Arles	Enseigner les fractions et les décimaux en REP
C23 Page 427	Mickael DA RONCH, Haute École Pédagogique du Valais (HEPVS), Suisse Ismaïl MILI, Haute École Pédagogique de Fribourg (HEP-FR), Suisse	Savoirs professionnels de l'enseignant et Situation de Recherche pour la Classe dans un dispositif de formation du primaire.
C24 Page 443	Arnaud SIMARD LMB, COPIRELEMr	Déplacement du corps et conceptualisation géométrique : impact du dispositif Learn-O

C25 Page 461	Laurence LEDAN Doctorante ED 623, Paris Cité, formatrice Inspe Toulouse Occitanie.	Quels éléments de conceptualisation des fractions sont proposés dans le manuel français « méthode de Singapour » en CE1-CE2 ?
C26 Page 487	Anne FEDOU, Professeur des écoles maître formateur – 19ème arrondissement de Paris ; Amine KANSOUSSI, Conseiller pédagogique de circonscription – 19ème arrondissement de Paris ; Frédéric DALEY LE MERRER, Conseiller pédagogique – Mission académique mathématiques 1er degré de Paris	La résolution de problèmes arithmétiques au cycle 2. Enseigner la représentation pour traduire la mise en relation des données numériques. Présentation d'un dispositif de formation, de son évolution, de ses variantes
C27 Page 505	Vincent HEUSSAFF professeur des écoles, école Arthur Rimbaud de Chanteloup-lès-Vignes. IREM de Paris, Groupe Astronomie. Margot DOUGLAS, Catarina JANUARIO, Cécile MALENGREZ (école Marsinval) Assia NECHACHE, Emmanuel ROLLINDE (CY Cergy Paris Université)	Utiliser le planétaire pour mesurer et représenter l'évolution au cours du temps de la distance entre deux planètes
C28 Page 519	Dominique LAVAL (INSPE de l'académie de Versailles – CY Cergy Paris Université) Delphine PEUCH-LESTRADE (ISFEC IDF, Paris)	Lire, Coder, Créer : le codage narratif avec Scratch Junior - une exploration sémiotico-instrumentale sur l'interprétation du récit chez l'élève de cycle 2
C31 Page 535	Stéphanie DEGONDE (EREA Toulouse Lautrec), Florence PETEERS (CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France) Cécile RAMECOURT (CY Cergy Paris Université, INSPE Versailles)	Conditions d'accessibilité d'une tâche complexe mettant en jeu la proportionnalité dans une classe de 4e d'un EREA
C33 Page 550	Catherine MENDONÇA DIAS, Université Sorbonne nouvelle, DILTEC Karine MILLON-FAURÉ, Aix-Marseille Université, ADEF	Différencier l'enseignement des mathématiques avec des élèves allophones récemment arrivés
C34 Page 566	Anne-Marie RINALDI, MCF, LIRDEF, Université Paul Valéry Chantal TUFFÉRY-ROCHDI, MCF, LIRDEF, Université de Montpellier Magali DELZOR, RMC, Perpignan	Visées et premiers résultats d'une recherche participative sur les pratiques des référents mathématiques
C35 Page 577	Pierre ESCLAFIT, INSPE UGA, IREM de Grenoble, Sophie TÉROUANNE, INSPE UGA, IREM de Grenoble, Fanny ESTEOULE, INSPE UGA, IREM de Grenoble, Alexandra BOURGEOIS, Académie de Grenoble, IREM de Grenoble, Danielly KASPARY, LIG, UGA	Où est le un ? Une activité d'homologie pour revisiter les fractions et la droite graduée
C36 Page 590	Alexandra HOMSI CPD Mathématiques, DSDEN des Yvelines	La grandeur longueur au service de l'apprentissage de la ligne numérique en GS

COMMENT UN CHANGEMENT DE PROGRESSION D'ENSEIGNEMENT IMPACTE LES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES ?

ÉTUDE DE CAS AVEC LES NOMBRES RATIONNELS

Sylvia COUTAT
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Marina DE SIMONE
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Marina.DeSimone@unige.ch

Céline VENDEIRA
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Celine.Marechal@unige.ch

Résumé
Dans cette communication nous partons de deux ressources qui introduisent les nombres rationnels de manières fondamentalement différentes. La première (Chastellain et Jaquet, 2001) introduit d'abord les écritures décimales avant les écritures fractionnaires. Cet ordre d'introduction amène à considérer les décimaux principalement comme résultats d'une division. La seconde (CIIP, 2022) prend le parti inverse. C'est par les fractions décimales que se construisent les nombres décimaux sous la forme d'écritures à virgule. La recherche que nous menons actuellement compare l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels avec ces deux méthodes auprès d'élèves de 10-12 ans.

Nous présentons dans cet article une recherche, en cours, portant sur l'enseignement des nombres rationnels en CM2 dans le contexte genevois. Cette recherche prend place à l'occasion d'un changement de ressource pour ce degré qui pourrait avoir des effets importants sur l'enseignement de ce thème. Dans ce contexte particulier, nous nous demandons quels sont les impacts d'un changement de ressource sur les pratiques enseignantes, notamment via les progressions proposées, et par ricochet, sur les apprentissages des élèves.

Dans ce qui suit, nous donnons tout d'abord quelques éléments concernant le contexte dans lequel notre recherche se déroule, puis nous présentons une analyse comparative des anciens et nouveaux moyens d'enseignement romands à l'aide d'une typologie de tâches concernant l'enseignement des nombres rationnels. Nous présentons ensuite notre méthodologie de recherche qui consiste en la passation de tests à des élèves de CM2[1] et sixième ainsi que des observations de séances filmées en classe. À partir des données récoltées, nous donnons, dans ce texte, quelques analyses quantitatives résultant des tests passés auprès de 190 élèves de CM2 ainsi qu'une étude de cas comparative de deux cohortes d'élèves de CM2 avec une même enseignante utilisant successivement les deux ressources discutées.

[1] L'école primaire en Suisse romande commence à l'âge de 4 ans avec la 1P et se termine à l'âge de 12 ans avec la 8P. La classe de 6ème en France correspond à la dernière année de l'école primaire en Suisse romande, 8P.

I - CONTEXTE SUISSE ROMAND

En Suisse romande les enseignants primaires disposent d'une ressource officielle et unique. Cette ressource, nommée « moyen d'enseignement », est généralement composée, selon les degrés, d'un recueil d'*activités*[2] regroupées dans un livre et d'un fichier pour l'élève. Ce recueil *d'activités* est accompagné d'une méthodologie pour l'enseignant. Cette dernière commente les *activités* et donne quelques informations (choix didactiques et/ou éléments de mises en œuvre et/ou procédures, difficultés d'élèves). C'est toutefois à l'enseignant que revient le choix et la sélection des tâches parmi celles proposées. Cette liberté dans le choix des tâches implique une préparation importante de la part de l'enseignant dans la planification de ses séquences d'enseignement.

Un changement de ressource mathématique s'opère actuellement à Genève depuis 2018 et jusqu'en 2025. Tous les degrés de la scolarité primaire sont concernés. Pour les classes de CM2 genevoises, qui nous intéressent, les nouveaux moyens sont introduits dans les classes durant l'année scolaire 2023-2024, passant ainsi des anciens moyens d'enseignement que nous appellerons COROME[3] au nouveau moyen disponible sur la plate-forme ESPER, que nous appellerons ESPER[4].

Les anciens moyens d'enseignement COROME ont été édités en 1984. Malgré les différentes corrections et révisions qui ont été opérées depuis, les changements ne sont pas significatifs. Il s'agit donc d'un moyen d'enseignement qui date considérablement. Pour notre recherche nous nous sommes basées sur l'édition de 2003 qui comporte douze thèmes dont deux qui nous concernent : le thème 3 « Approche des nombres rationnels » et le thème 8 « Opération dans Q ». Quant au nouveau moyen, il ne comporte plus que 5 axes thématiques qui s'alignent sur le plan d'étude romand[5] (Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), 2010) soit « espace », « nombres », « opérations », « grandeurs et mesures » et « ARP[6] ». En CM2, l'axe thématique « nombres » est composé de deux chapitres dont celui sur les « fractions et nombres à virgule ».

A ce stade, il importe de préciser que si en France les fractions plus petites que 1 sont introduites avant le CM1 et les fractions plus grandes que 1 au CM1, en Suisse Romande, les fractions sont abordées pour la toute première fois dès le CM2 que ce soit dans les anciens comme dans les nouveaux moyens d'enseignement.

1 Les anciens moyens d'enseignement COROME

Dès le CM2, les anciens moyens d'enseignement COROME proposaient une prise de conscience de l'existence et de la nécessité de nombres qui ne sont pas entiers ; une familiarisation avec des écritures différentes (décimale et fractionnaire) ; une représentation de ces nombres sur une droite et la comparaison de nombres donnés par leurs écritures décimales et fractionnaire. La progression mise en avant (mais non imposée) introduit les nombres rationnels par leur écriture décimale comme quotient d'une division. Le travail se poursuit autour des différentes écritures (décimale et fractionnaire) mais aussi via différentes représentations (surfaces, droite graduée) et se termine avec la comparaison de nombres rationnels.

L'enseignant peut construire sa progression à partir des 24 tâches proposées. Des indications sont données afin de les aider dans son choix, par exemple en précisant les tâches par lesquelles commencer

[2] Terme utilisé par les moyens d'enseignement et mis en italique lorsqu'il est utilisé dans ce contexte.

[3] COmmission ROmande pour les Moyens d'Enseignement

[4] ESpace du Plan d'Etude romand

[5] https://portail.ciip.ch/per/disciplines/5

[6] Ce dernier est nouveau et ne correspond pas véritablement à un axe thématique du PER bien qu'il pourrait être associé éventuellement à celui de la « modélisation » qui n'est pas travaillé pour lui-même à l'école primaire. Il s'agit concrètement d'*activités* d'aide à la résolution de problèmes.

ou encore celles impliquant une représentation sur un axe ou encore qui permettent la reconnaissance d'écritures différentes d'un même nombre, etc. (annexe 1). Cet ancien moyen d'enseignement est un « ouvrage ressource » qui propose des *activités* sans imposer l'ordre dans lequel elles peuvent être abordées. La planification du programme annuel est du ressort du maître, qui la détermine en fonction des caractéristiques de sa classe, des besoins de ses élèves, de ses conceptions didactiques et pédagogiques. Il est conseillé de travailler ce thème de manière compacte pendant une durée d'environ 7 semaines.

2 Les nouveaux moyens d'enseignement ESPER

Dans les nouveaux moyens d'enseignement, le chapitre concerné se nomme « fractions et nombres à virgule ». Il est divisé en 6 apprentissages visés (annexe 2).

Les 50 tâches disponibles sont organisées cette fois-ci selon une progression. Le chapitre est introduit par un travail sur les fractions simples qui amène aux fractions décimales et le travail avec les fractions décimales conduit aux nombres à virgule. Les commentaires du moyen d'enseignement mettent l'accent sur le fait que plus que dans tout autre chapitre, il est important de suivre, dans la planification de l'enseignement, l'ordre des apprentissages visés et de respecter les étapes décrites.

Il est conseillé de travailler ce chapitre sur une durée bien plus conséquente qu'avec les anciens moyens d'enseignement, soit entre 16 et 17 semaines. Cette durée se justifie notamment par l'ajout d'un certain nombre de tâches comme nous le verrons dans la suite de cet article et aussi par la quantité plus élevée de tâches proposées.

II - ANALYSE DES DEUX MOYENS D'ENSEIGNEMENT

À la suite de cette brève présentation des deux ressources, nous allons maintenant présenter quelques résultats d'une analyse plus fine qui se centre sur les types de tâches proposés dans chaque ressource.

1 Typologie

Afin de comparer les types de tâches présents dans les moyens d'enseignement COROME et ESPER, nous avons créé une typologie de tâches afin d'identifier les organisations « mathématiques » de chaque ressource relatives aux fractions et décimaux (Matheron et Noirfalise, 2006). Nous nous sommes appuyées sur une typologie existante (Martinez-Ibanez, 2018). Cette dernière concerne des types de tâches autour des fractions uniquement. Nous l'avons complétée avec des types de tâches sur les décimaux. Pour finir, nous l'avons réduite afin de l'adapter au degré scolaire concerné ainsi qu'à notre contexte suisse romand. Nous avons obtenu une typologie de 6 types de tâches présentée dans la Figure 1.

T1 Comparer-ordonner des rationnels
T2 Déterminer un nombre compris entre deux nombres rationnels ou encadrer un nombre rationnel
T3 Convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre
T4 Déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel
T5 Opérations
T6 Résoudre des problèmes

Figure 1. Typologie de tâches sur les fractions et décimaux pour comparer les anciens et nouveaux moyens d'enseignement suisses romands de CM2 et sixième

Concernant le type de tâches T4, cela concerne les tâches comme « Quel est le chiffre des dizaines dans 58 et quel est le nombre de dizaines dans 124 ? ».

Nous avons affiné cette typologie de tâches en y ajoutant 9 représentations différentes possibles des rationnels dont la liste est présentée dans la Figure 2.

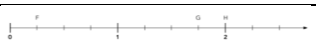
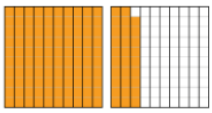
a. Fractionnaire simple ($\frac{1}{3}$)	f. Droite graduée 
b. Fractionnaire décimale ($\frac{3}{10}$)	g. Une aire 
c. Décimale (2,04)	h. Bloc base dix 
d. Décomposition fractionnaire ($2 + \frac{0}{10} + \frac{4}{100}$)	i. Un tableau 
e. Écriture multiplicative (0,1 × 10)	

Figure 2 : Représentations des rationnels

Les 5 premières représentations concernent des écritures chiffrées des rationnels. Les 4 dernières représentations utilisent des outils graphiques (droite graduée, dessin, tableau).

2 Résultats des analyses des moyens d'enseignement

En s'appuyant sur la typologie de types de tâches présentée ci-dessus, nous recensons pour la classe de CM2 44 occurrences des types de tâches de notre typologie dans COROME et 69 occurrences dans ESPER (tous items confondus). Par « occurrence » nous entendons un item au sein d'une tâche ; à titre d'exemple, si une tâche contient cinq items, nous comptabiliserons alors cinq occurrences.

Nous observons que T2 « Déterminer un nombre compris entre deux nombres rationnels ou encadrer un nombre rationnel » apparaît dans ESPER mais il est absent dans COROME. De plus, le type de tâche le plus travaillé dans les deux ressources reste le T3 « Convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre » avec une représentativité plus importante dans ESPER. En effet, dans ESPER 74 % des items sont rattachés au T3 contre 48 % dans COROME. Le T5 qui concerne les opérations dans Q est assez prégnant dans COROME bien que cette ressource comporte un chapitre à part pour les opérations dans Q. En revanche dans ESPER, T5 est absent en consacrant véritablement un chapitre à part entière aux opérations dans Q sans superposition avec celui des « fractions et nombres à virgule ». La résolution de problèmes, soit le T6 de notre typologie, est présente dans les deux ressources. Enfin, « Déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel » (T4) n'est globalement pas beaucoup travaillé dans les deux manuels : nous avons recensé deux items dans COROME et deux items dans ESPER.

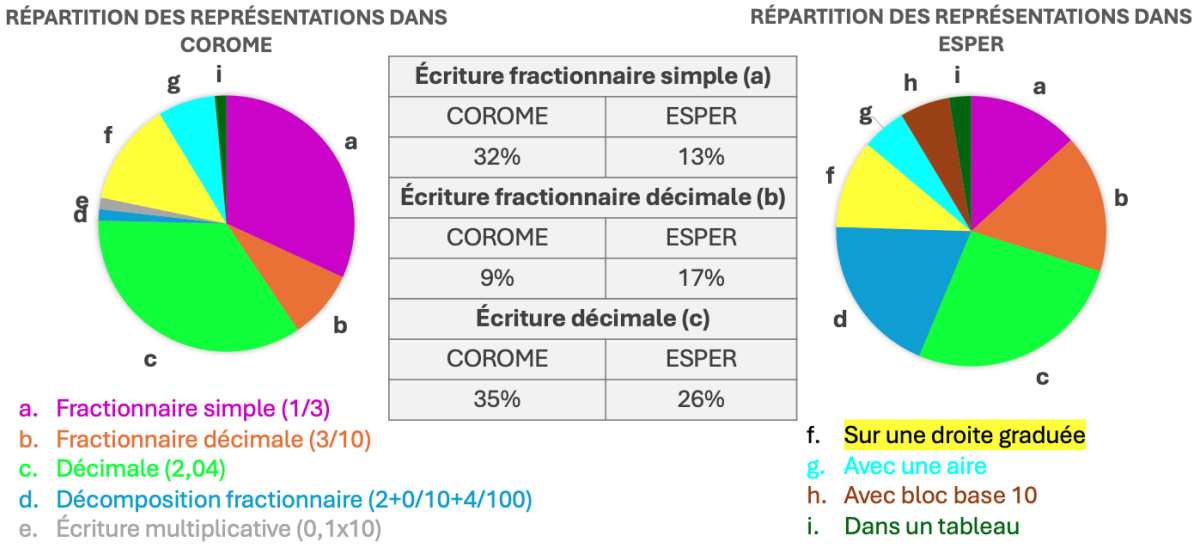


Figure 3. Répartition des types de tâches dans les deux ressources

Au vu de la place conséquente consacrée au type de tâche T3, on en déduit la place importante consacrée aux différentes écritures/représentations dans les deux ressources. Nous nous sommes donc intéressées à analyser quelles écritures/représentations sont effectivement mobilisées dans les moyens d'enseignement. Nous avons observé que l'écriture la plus travaillée dans les deux est celle décimale (c). Dans ESPER l'écriture fractionnaire est moins mobilisée que dans COROME bien que le travail sur cette écriture soit plus conséquent dans la nouvelle ressource. En revanche, dans ESPER, nous constatons une représentativité plus importante de la décomposition fractionnaire décimale en unités, dixièmes, centièmes, etc. Nous pouvons faire l'hypothèse que cela est beaucoup travaillé dans le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'un nombre rationnel ($8 + \frac{72}{100} = 8 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} = 8{,}72$), d'où sa place importante dans la ressource ESPER.

L'écriture multiplicative (0,1 x 10) disparaît dans ESPER et est convoquée une seule fois dans COROME. Celle-ci était donc déjà anecdotique dans les anciens manuels et vouée à disparaitre dans les nouveaux.

Enfin au niveau des représentations, la représentation avec les « blocs base 10 » apparait uniquement dans ESPER (« blocs de base 10 » pour les fractions décimales), ce qui constitue la principale nouveauté des nouveaux moyens d'enseignement en lien avec l'introduction plus précoce des fractions décimales.



Écriture fractionnaire simple (a)	
COROME	ESPER
32%	13%
Écriture fractionnaire décimale (b)	
COROME	ESPER
9%	17%
Écriture décimale (c)	
COROME	ESPER
35%	26%

Figure 4. Répartitions des représentations dans chaque ressource

En guise de conclusion, deux constats émanent de nos analyses. Tout d'abord le choix opéré dans ESPER d'introduire d'abord l'écriture fractionnaire en travaillant sur les fractions simples pour ensuite travailler sur l'écriture décimale en passant par les fractions décimales. Cela permet de donner une place plus importante aux fractions décimales et une place centrale dans la progression, et pourrait expliquer notre deuxième constat, l'augmentation de la variété des représentations possibles des nombres rationnels, avec l'introduction du matériel « blocs base 10 » ou de sa représentation graphique et avec l'écriture associée aux blocs base 10.

III - QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

1 Problématique

Les changements de ressources sont assez rares en Suisse romande. Dans le cas des nombres rationnels, ce dernier changement s'accompagne d'une modification de la progression. Cette occasion nous semble être propice à l'étude des pratiques enseignantes quant à la mise en œuvre de leurs séquences d'enseignement autour des rationnels, mais aussi du côté des élèves à l'étude des connaissances

construites. Cette étude peut se réaliser à la fois autour de l'ancienne ressource (COROME) comme de la nouvelle (ESPER).

L'analyse des ressources met en évidence quelques différences dans les types de tâches mais c'est surtout la progression qui est modifiée. Cela nous amène à questionner l'effet de ces changements sur les connaissances des élèves et les pratiques des enseignants. Comme nous l'avons précisé précédemment, nous sommes au début de notre recherche. Aussi, pour cette communication, nous nous limitons aux élèves de CM2, et souhaitons identifier, dans un premier temps, leurs connaissances des rationnels, construites avec la ressource COROME. Cette première étape sera reproduite avec les élèves ayant utilisé la ressource ESPER (récolte en cours lors de la rédaction). Concernant les enseignants, nous souhaitons identifier leurs pratiques associées à chaque ressource pour identifier d'éventuelles différences. Ce qui revient à nos deux questions de recherches :

Quelles sont les connaissances des élèves, concernant les rationnels, utilisant la ressource COROME en fin de CM2 ?

Dans quelle mesure les pratiques enseignantes diffèrent par l'utilisation de l'une ou l'autre des ressources ?

2 Méthodologie

Ces questions s'insèrent dans un projet plus vaste qui s'étale sur 3 années. En ce qui concerne cette communication, nous nous concentrons sur la classe de CM2, étudiée sur 2 années. La première année (2022-2023) s'est centrée sur les élèves de CM2 travaillant avec la ressource COROME. L'année suivante (2023-2024) concerne les élèves de CM2 cette fois avec la nouvelle ressource ESPER. Cela permet de récolter des données dans des classes qui utilisent les deux ressources. Les données concernant les connaissances des élèves sont récoltées à l'aide de tests proposés à plusieurs classes. Les données concernant l'utilisation des ressources dans le cadre de la classe sont récoltées lors d'observations de classes avec des enregistrements vidéo de l'enseignant et des élèves. Le Tableau 1 synthétise cette organisation temporelle.

	2022-2023	2023-2024
COROME	CM2 (7P) - Tests en classe (203) - Observations 3 enseignants (dont Lucie)	
ESPER		CM2 (7P) - Tests en classe (en cours) - Observations 2 enseignants (dont Lucie)

Tableau 1. Calendrier de la recherche menée

Nous présentons brièvement le test pour la classe de CM2 COROME dont les résultats seront exposés dans la partie suivante (les passations et analyses des tests pour les classes de CM2 ESPER étant en cours lors de la communication). Puis nous exposons l'organisation choisie pour les observations en classe.

2.1 Passation des tests

Un test a été conçu pour les élèves de CM2 afin de répondre à notre questionnement. Les *activités* proposées dans les moyens d'enseignement (COROME et ESPER) ont servi à la création des tâches du test.

Ce test contient 18 items. Le type de tâche le plus représenté est T3 « convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre », étant présent dans 12 items. Ce type de tâche est aussi le plus présent dans les moyens d'enseignement. Puis le type de tâche T4 « déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel » est présent dans 4 items et finalement le type de tâche T1

« comparer-ordonner des rationnels » est représenté dans 2 items. Le type de tâche T5 a été écarté du test car nous ne souhaitons pas tester les connaissances des élèves concernant les opérations avec les rationnels d'une part et d'autre part car ce champ de connaissance est travaillé dans un autre axe thématique dans le moyen d'enseignement ESPER. Nous avons aussi mis de côté le type de tâche T6 « résoudre des problèmes » pour des questions méthodologiques.

Concernant les différentes représentations des rationnels, seule l'écriture multiplicative est absente du test. La représentation la plus présente est celle qui utilise l'aire comme dans l'exemple présenté dans la Figure 5 où l'unité est représentée par un rectangle de 4 cases.

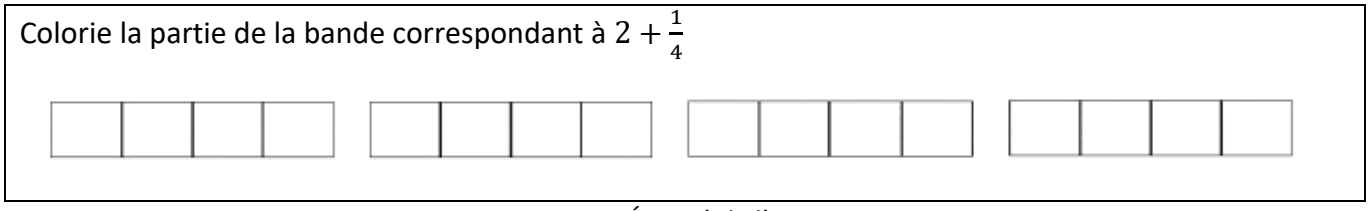


Figure 5. Énoncé de l'item 11

Dans cet exemple, il s'agit du type de tâche T3 « convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre » partant d'un rationnel écrit sous forme d'une décomposition à convertir en une aire.

Dans la partie II, nous présentons les résultats des élèves de CM2 COROME à ces tests. Mais tout d'abord nous donnons quelques informations méthodologiques relatives aux observations effectuées en classe de CM2.

2.2 Observation en classe

Afin de compléter les organisations « mathématiques » identifiées à travers l'analyse des ressources, nous menons une analyse des organisations « didactiques » des enseignants. Pour cela, nous avons observé trois enseignants de CM2 durant l'année scolaire 2022-2023. Les moyens d'enseignement utilisés étaient les anciens. Lors de l'année scolaire 2023-2024 nous avons observé deux enseignants de CM2 qui utilisaient les nouveaux moyens d'enseignement ESPER. Il s'agissait de l'année de leur introduction dans le canton de Genève.

Nous nous sommes entretenues avec chaque enseignant deux fois : en aval et en amont de la séquence d'enseignement. Les premiers entretiens avaient pour objectifs de présenter notre projet et de questionner les enseignants sur un certain nombre d'aspects. Nous nous sommes notamment renseignées sur leur contexte d'enseignement (par exemple concernant leur expérience avec des élèves de CM2 et sur le thème des rationnels), sur des aspects didactiques (par exemple autour des difficultés d'enseignement et d'apprentissage récurrentes propres à ce thème) et aussi sur leur progression prévue afin notamment de comprendre leurs choix et définir avec eux les séances que nous viendrons observer. Concernant les séances observées, l'idée était de choisir deux ou trois séances impliquant des types de tâches différents et d'essayer autant que possible qu'au moins une tâche identique soit observée dans les différentes classes.

Parmi les enseignants, nous avons observé une même enseignante durant 2 années consécutive avec des élèves de CM2. La première année était lors de l'année scolaire 2022-2023 avec les anciens moyens d'enseignement COROME alors que la seconde, l'année suivante, était avec les nouveaux moyens. C'est la comparaison de deux séances menées par cette enseignante à une année d'intervalle que nous présentons dans la partie suivante. Nous comparons également les tests effectués par ces deux cohortes afin de voir si nous pouvons en tirer quelques conclusions.

IV - QUELQUES RÉSULTATS

Les analyses de ces tests n'apportent pas de grandes révolutions quant aux difficultés rencontrées par les élèves. En effet, les erreurs identifiées dans les recherches précédentes (Perrin Glorian, 1986; Roditi, 2007) se retrouvent dans nos analyses. L'étude de cas de l'enseignante nous renseigne cependant d'une part sur les difficultés que pourraient rencontrer les enseignants avec la ressource COROME et d'autre part en quoi ses pratiques semblent être modifiées par l'utilisation de la ressource ESPER.

1 Analyse des tests

En 2022-2023, le moyen d'enseignement COROME a été utilisé pour la dernière année dans les classes de CM2. Les productions de 203 élèves répartis dans diverses écoles primaires du canton ont été récoltées entre mai 2023 (fin d'année scolaire des CM2) et octobre 2023 (début d'année scolaire suivante pour les élèves ayant terminé le CM2). Nous ne revenons pas sur les résultats à tous les items, mais sur les items ayant obtenu soit un score de réussite élevé, soit un score de réussite bas en reprenant les différents types de tâches présents. Pour rappel, trois types de tâches sont présents dans le test.

1.1 Convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre

En ce qui concerne le type de tâche T3 « convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre », il est présent dans 12 items. Il obtient cependant des scores de réussite très variables selon les écritures en jeu. Par exemple dans l'item 10, plus de 86% des élèves répondent correctement à la question présentée en Figure 6.

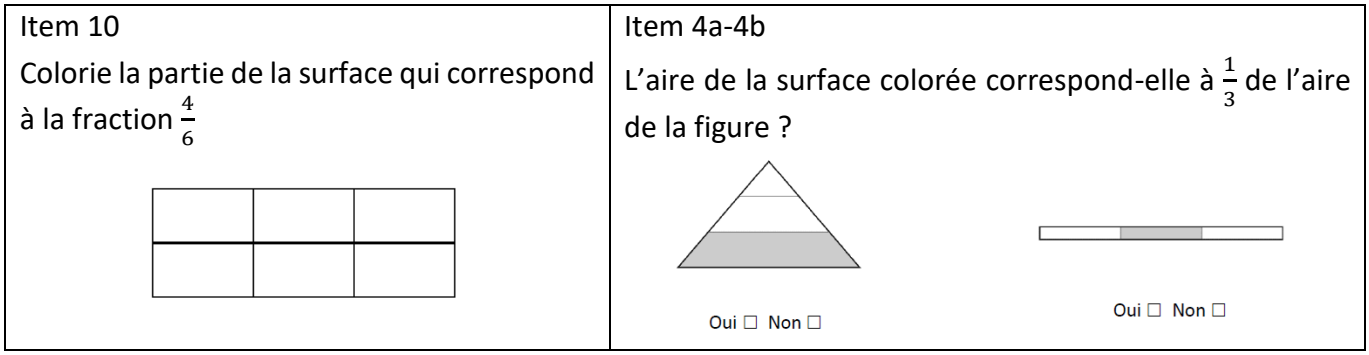


Figure 6. Consigne des items 10 et 4.

Ici il s'agit de convertir l'écriture d'un nombre rationnel d'une fraction simple vers une représentation par une aire. Ce type de tâche est présent dans le moyen d 'enseignement COROME avec une seule tâche.

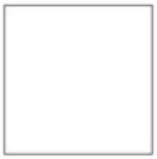
Les items 4a et 4b entrent dans le même type de tâche avec les mêmes représentations, pourtant l'item 4a ne bénéficie pas de la même réussite avec à peine 50% des élèves ayant coché la bonne réponse. L'item 4b obtient un score de 78%. Cela montre que la contrainte du partage égal entre les parties n'est pas un critère pris en compte par tous les élèves.

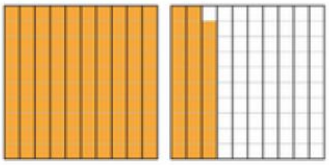
Enfin concernant le type de tâche T3 mais avec l'utilisation de la représentation de bloc base 10, l'item 12 (Figure 7) a obtenu un score de 5% mais près de 60% des élèves n'ont donné aucune réponse.

Item 12

Indique quelle fraction de l'unité représente la partie colorée. Ecris le nombre de deux manières.

Ce carré est l'unité :





$$\frac{\dots}{100} = \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}$$

Figure 7. Consigne de l'item 12

Cela s'explique par le fait que cette représentation n'est pas travaillée dans le moyen d'enseignement COROME et que les élèves ont une conceptualisation insuffisante des fractions décimales.

1.2 Déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel

Concernant le type de tâche T4 « déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel » là encore on retrouve une grande disparité dans les réussites des élèves. Ce type de tâche est présent dans les items 6 et 7 (Figure 8). Lorsque les élèves sont interrogés sur l'aspect positionnel des chiffres à l'intérieur d'un nombre, une large majorité d'élèves produit une bonne réponse (6a : 70% et 7b : 70%). Lorsque les élèves sont interrogés sur la valeur des décimales dans un nombre (« nombre de »), les bonnes réponses deviennent minoritaires (6b : 14% et 7A : 36%).

Item 6a Dans le nombre 51,43 quel est le chiffre des centièmes ? _____ Item 6b Dans le nombre 51,43 quel est le nombre de dixièmes ? _____	Item 7a Dans le nombre 807,02 80 est le nombre de _____ Item 7b Dans le nombre 807,02 2 est le chiffre des _____

Figure 8. Consigne des items 6 et 7

Dans les réponses erronées proposées, nous relevons pour l'item 6b la réponse 4 présente dans la moitié des réponses alors que 514 n'apparait que dans 14% des réponses. Pour l'item 7a, la réponse « centaines » obtient un score de 26%. La difficulté que semble rencontrer les élèves ne relève ici pas d'une connaissance sur les rationnels mais plutôt des connaissances fragiles sur la numération décimale de positions avec des effets sur la distinction entre « chiffre des » et « nombre de », distinction qui devrait être acquise avant ce travail sur les rationnels.

1.3 Comparer-ordonner des rationnels

Enfin concernant le type de tâche T1 « comparer-ordonner des rationnels », présent dans l'item 1 et 2 (Figure 9), les scores restent mitigés avec 62% de bonnes réponses pour l'item 1 et 57% de bonnes réponses pour l'item 2.

Item 1

1-Classe les nombres suivants dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

77,6 77,10 76,05 78,18 77,61 76,34

Item 2

2-Voici une liste de nombres. Complète le tableau avec ces nombres

6,40 6,56 6,61 6,51 6,67 6,52 6,2 6,7

Nombres inférieurs à 6,5	Nombres compris entre 6,5 et 6,6	Nombres supérieurs à 6,6

Figure 9. Consigne des items 1 et 2

En regardant de plus près les réponses de l'item 1, près de 80% des élèves qui proposent un rangement erroné considèrent que 77,6 est inférieur à 77,10. Quant à l'item 2, parmi les réponses erronées, un quart des élèves considèrent que 6,51 ; 6,52 et 6,56 sont supérieurs à 6,6. La conception reconnue de considérer les nombres décimaux comme deux entiers séparés par une virgule (Comiti et Neyret, 1979) apparait ici à travers ces 2 items.

2 Étude de cas dans la classe de Lucie

Nous comparons, dans cette partie, deux séances menées à une année d'intervalle dans la classe de Lucie avec des élèves de CM2. Nous rappelons que la particularité de ces séances est qu'elles ont été dispensées sur un même thème, avec des élèves du même degré scolaire, mais avec deux ressources distinctes (COROME pour la première séance et ESPER pour la deuxième). Pour ce faire, nous nous focalisons sur les vidéos des deux séances en classe. Puis, au regard de ces séances analysées, de la progression globale de l'enseignante sur le thème des rationnels et de l'analyse en termes de types de tâche des deux ressources, nous tentons d'interpréter les résultats des élèves des deux cohortes au test que nous leur avons fait passer.

Dans ce qui suit, nous débutons par quelques informations générales, puis effectuons une analyse plus fine de deux séances en classe. Nous présentons ensuite quelques résultats au test des élèves des deux cohortes. Pour finir, il s'agit de faire émerger des éventuels effets des deux ressources sur les pratiques enseignantes et les apprentissages de ses élèves.

2.1 Informations générales

Durant la première année, avec les anciens moyens d'enseignement, la séquence sur les rationnels a duré deux semaines. Le thème a été abordé de manière compacte, c'est-à-dire qu'aucun autre thème mathématique n'était traité en parallèle. La progression remise par l'enseignante lors de notre premier entretien était peu développée. Elle indiquait introduire les nombres rationnels (signifiant les écritures à virgules) par la comparaison avec la monnaie. Poursuivre ensuite avec l'introduction des "zéros invisibles" puis des fractions sous forme de "pizza". Il était question ensuite d'expliquer la technique de calcul et déplacement de la virgule dans le cas des multiplications et divisions par dix. Pour finir un travail sur le positionnement des nombres sur une ligne graduée serait proposé.

Durant la seconde année, la séquence s'est déroulée sur dix-huit semaines, de manière filée, c'est-à-dire en parallèle à d'autres thèmes mathématiques. La planification était claire dans le sens où elle allait suivre les six apprentissages visés tel qu'indiqué dans les commentaires à destination des enseignants. L'enseignante devait toutefois opérer un choix parmi l'ensemble des tâches à disposition.

Concernant les deux séances observées, il s'agissait, lors de la première année, de la toute première tâche sur le thème des rationnels et, pour la seconde année, de la tâche d'introduction du quatrième apprentissage visé, soit huit semaines après le début du thème. Malgré cette différence temporelle, les deux tâches sont très similaires. Dans la première tâche l'enseignante demande oralement « de placer un dixième » dans un tableau de numération. Dans la seconde elle demande tant oralement qu'en inscrivant simultanément $\frac{130}{10}$ au tableau noir « d'écrire cent trente dixièmes dans votre tableau de numération ». La durée des deux séances était de vingt minutes chacune.

2.2 Séance analysée basée sur les anciens moyens d'enseignement (COROME)

Le déroulement de la séance se résume en une succession de quatre tâches, des astuces données, beaucoup de questions de la part des élèves et un certain nombre de confusions.

Pour commencer la séance, l'enseignante a tout d'abord collégialement étendu le tableau de numération connu M I C I D I U en y ajoutant, à droite, les dixièmes I centièmes I millièmes. Elle indique la présence de la virgule à côté de l'unité. Une fois cela fait, elle leur demande d'inscrire individuellement à leur place « un dixième » / « deux centièmes » / « trois millièmes » / « trente-deux dixièmes » / « cent vingt-trois dixièmes » dans le tableau de numération. Suite au déroulement de cette première tâche, elle leur demande si « 1,1 / 1,10 / 1,100 c'est pareil ou différent ? ». Puis elle poursuit en dessinant plusieurs droites numériques avec des graduations différentes au tableau noir et en leur demandant ce qu'il se passe entre 3 et 4 ? 3,10 et 3,20, etc.



Figure 10. Droites numériques dessinées au tableau

Pour finir, elle leur demande « Quel est le plus grand entre les deux ? » en inscrivant au tableau noir 3,10 et 3,2.

Au regard de ce rapide résumé, on peut déjà affirmer qu'il s'agit d'une bien grande variété de tâches s'agissant d'une séance introductive et surtout de la première séance sur les nombres rationnels rencontrée par les élèves de toute leur scolarité.

Si nous nous focalisons sur le choix de l'enseignante de faire référence à la monnaie pour introduire les « nombres à virgule », nous pouvons relever dans les échanges une certaine confusion. Par exemple, pour mentionner à l'oral l'écriture 12,3, l'enseignante dit « Quand tu paies dans un magasin tu dis 12 francs 30 ». Les élèves se questionnent ici sur la différence entre 12,3 et 12,30. Cela se reflète notamment dans les propos de cet élève « alors quand on parle en franc on rajoute toujours un zéro ? ». Les questions posées par les élèves semblent manifester une volonté de leur part de connaître des « automatismes » à appliquer plutôt que de favoriser le sens.

D'autres échanges confus concernant la monnaie suivront :

Elève : « Pour tout ce qui concerne l'argent on ne va jamais dans les millièmes ? » Ce propos est confirmé par l'enseignante alors que la pièce de 5 centimes existe dans la monnaie suisse. « Du coup, les millièmes ça ne sert à rien. »

Enseignante : « Pour acheter dans la vie, non ! »

Ou encore :

Enseignante : « Alors 1,1 et 1,10 c'est pareil ou pas ? »

Elève : « Oui, car en Suisse comme on n'a pas de centimes tu peux arrondir à 10 ».

Au cours de la séance l'enseignante donne une « astuce » à ses élèves quant à l'usage oral des nombres « on parle toujours en unité ».

Enseignante : « On ne dit pas tu me dois deux centaines, mais deux-cents francs ». Ou encore lorsqu'un élève dit « douze virgule trois dixièmes » l'enseignante le reprend « douze virgule trois, on parle toujours en unité. »

Cet ensemble de propos semble augmenter la confusion, ce qui se traduit dans divers échanges au fil de la séance :

Elève : « Alors quand on est sur les centaines, dizaines et unités, donc on ne prononce pas mais quand ça passe dans les dixièmes, centièmes, millièmes, on prononce ? »

Enseignante : « Non, tu ne prononces jamais parce que quand on parle on est toujours en unité. »

Elève : « Mais avant on a dit un dixième ? (*Propos en référence à la tâche proposée par l'enseignante d'écrire "un dixième" dans le tableau de numération*).

Enseignante : « C'est juste pour l'exercice de maths mais au magasin tu ne dis pas dixième. »

Ou encore :

Elève : « Et si un bonbon coûte 20 centimes? » (Il questionne le fait qu'on parle en unité)

Enseignante : « C'est zéro virgule 20 qu'on voit sur l'étiquette. » (Elle change de registre en quittant le langage oral pour basculer dans l'écrit).

Une autre convention, celle « des zéros invisibles » vient troubler les élèves. Concernant l'écriture de « un dixième » dans le tableau de numération l'enseignante indique :

Enseignante : « Comme on est toujours obligé d'aller jusqu'aux unités, on doit mettre un zéro et ça fait 0,1 », puis elle indique ensuite pour 1,1 / 1,10 et 1,100 « les zéros qui sont à la fin ils sont invisibles, ils ne servent à rien. »

Elève : « Mais quand tu paies un franc dix, tu paies un franc **dix**, le zéro il est existant. »

Enseignante : « Oui, parce qu'on a l'habitude de parler comme ça, en centime. C'est pour ça qu'on va jusqu'à centime, donc dix. »

Dans ces quelques extraits, on comprend qu'il y a beaucoup de nouveautés qui sont introduites simultanément et que la référence à la monnaie semble davantage porteuse de confusion. L'enseignante, de par ses nombreuses contradictions, perturbe ses élèves et se sent d'ailleurs elle-même déstabilisée. Le manque de proposition de progression dans les moyens d'enseignement l'amène à faire des choix questionnables et probablement basés sur ses souvenirs de sa propre expérience d'élève. Faute de compréhension ou de progression bien orchestrée, elle donne des « astuces » plutôt que de construire des connaissances autour des nombres rationnels. Il est aussi étonnant de constater qu'elle débute sa première séance en faisant usage des fractions décimales alors que celles-ci n'ont pas encore été introduites et encore moins le passage de la fraction décimale à son écriture décimale. Quand la progression ne prend pas sens, il y a le risque de combler les incompréhensions par des « astuces » et c'est ce que fait Lucie durant la séance.

Lors de l'entretien post, elle indiquera avoir eu des difficultés notamment avec « l'histoire des zéros invisibles ». Elle regrette également qu'il n'y ait pas de lien entre « les fractions et les nombres décimaux » dans les moyens d'enseignement « c'est abordé séparément, c'est décousu ».

2.3 Séance analysée basée sur les nouveaux moyens d'enseignement (ESPER)

Si l'on résume la séance observée, l'enseignante propose une seule tâche et les élèves rencontrent une difficulté.

L'enseignante suit les différentes étapes proposées dans les moyens d'enseignement. Elle propose d'abord d'inscrire des nombres entiers dans le tableau de numération puis d'inscrire les fractions décimales (130/10, 25/10, 746/100, …). Au fil de la séance, elle fait le lien avec la décomposition additive des écritures fractionnaires décimales ($2 + \frac{5}{10}$ pour 25/10 déjà vu dans l'AV (apprentissage visé) précédent). Cela lui permet ensuite de faire le passage plus facilement vers l'écriture décimale 2,5.

La seule difficulté qui apparait se déroule en tout début de séance. Les élèves ne voient pas le lien entre les fractions décimales travaillées avec le matériel « bloc base 10 » lors des séances précédentes et les colonnes des dixièmes et centièmes dans le tableau de numération.

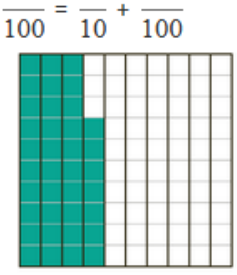


Figure 11. Exemple de tâche avec les fractions décimales et le matériel « bloc base 10 »

C'est le seul moment de la séance où l'enseignante s'appuie sur une astuce « vingt-cinq dixième, parce qu'on entend "dixième" ça finit dans la colonne des dixièmes. »

Des conventions seront par ailleurs explicitées au fil de la séance comme « on est obligé de mettre un zéro s'il n'y a pas de nombre avant la virgule » (par exemple en lien avec $\frac{85}{100}$) ou encore « le zéro quand il est après la virgule et qu'il n'y a rien après, on ne met rien ! » (par exemple en lien avec $\frac{130}{10}$).

La conclusion de la séance est claire et fait office *d'institutionnalisation* (Brousseau, 1984) « quatre-cents dix-neuf dixièmes on peut l'écrire soit comme ça (montre le $\frac{419}{10}$), soit quarante et un plus neuf dixièmes ($41 + \frac{9}{10}$, soit quarante et un virgule neuf (41,9), c'est pareil ».

L'enseignante est beaucoup plus à l'aise lors de la séance que l'année précédente. Par ailleurs, elle formule explicitement cela lors de l'entretien final « c'est beaucoup plus clair, les élèves comprennent mieux, c'est plus facile de cette façon ». Lors de la séance, les élèves démontrent aussi une meilleure maitrise du contenu travaillé par rapport à l'année précédente notamment en demandant si c'est possible de « mettre ça en éval car c'est trop facile ».

2.4 Analyse des tests des élèves de CM2 de la classe de Lucie

Les élèves de CM2 suivis par Lucie avec la ressource CROME et ceux suivis en CM2 avec la ressource ESPER ont effectués le test. Nous avons analysé ces tests et dans ce qui suit nous détaillons seulement quelques items du test pour lesquels les résultats entre les deux volées de CM2 de la classe de Lucie sont intéressants. Nous sommes toutefois prudentes avec ces analyses car le nombre d'élèves entre les deux années diffère considérablement. Lors de la première année, 19 élèves de la classe de Lucie ont participé alors que seulement 8 pour la seconde. Ceci s'explique par la présence d'un double degré lors de la deuxième année. Nous avons donc choisi d'effectuer nos analyses avec le nombre d'élèves et non des pourcentages.

Concernant les items 1 et 2 (Figure 9) de classement de nombres rationnels écrits sous forme décimale, il n'est pas étonnant, notamment à la vue des deux séances analysées, de constater une meilleure performance chez les élèves ayant travaillé avec le moyen d'enseignement ESPER (Figure 12). Le fait d'avoir travaillé sur les fractions décimales en amont pourrait avoir permis une meilleure compréhension des écritures décimales plutôt que l'« astuce » d'ajouter des zéros pour comparer qui n'a pas bien été comprise par les élèves.

1. Classe les nombres suivants dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

77,6 77,10 76,05 78,18 77,61 76,34

Réponse : _____ < _____ < _____ < _____ < _____ < _____

2. Voici une liste de nombres. Complète le tableau avec ces nombres.

6,40 6,56 6,61 6,51 6,67 6,52 6,2 6,05 6,7

Nombres inférieurs à 6,5	Nombres compris entre 6,5 et 6,6	Nombres supérieurs à 6,6

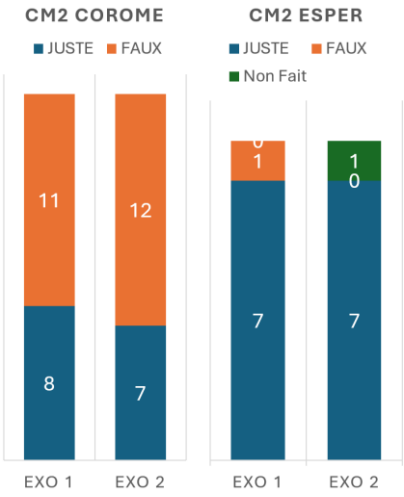


Figure 12. Résultats pour les items 1 et 2

Concernant la première valeur de l'item 5 à placer dans le tableau de numération, nous constatons aussi une meilleure réussite chez les élèves ayant reçu un enseignement des rationnels avec les moyens

d'enseignement ESPER. Ceci n'est pas étonnant au regard des résultats de notre analyse praxéologique qui montrent que les fractions décimales ne sont pas travaillées pour elles-mêmes dans les anciens moyens d'enseignement COROME et sont globalement moins représentées lorsqu'elles apparaissent. Si l'on regarde plus spécifiquement les erreurs commises dans les deux cohortes d'élèves, on constate cinq différents types d'erreur lors de la première année. Trois élèves ont inscrit 0,57 (ils commencent au dixième plutôt que d'y finir), un élève a mis 570 (avec probablement une confusion entre dizaine et dixième), deux élèves 57, un élève a placé les deux chiffres dans la colonne des dizaines et deux élèves n'ont pas répondu. Lors de la deuxième année, les deux erreurs commises sont probablement une confusion entre dizaine et dixième étant donné qu'ils ont répondu 57.

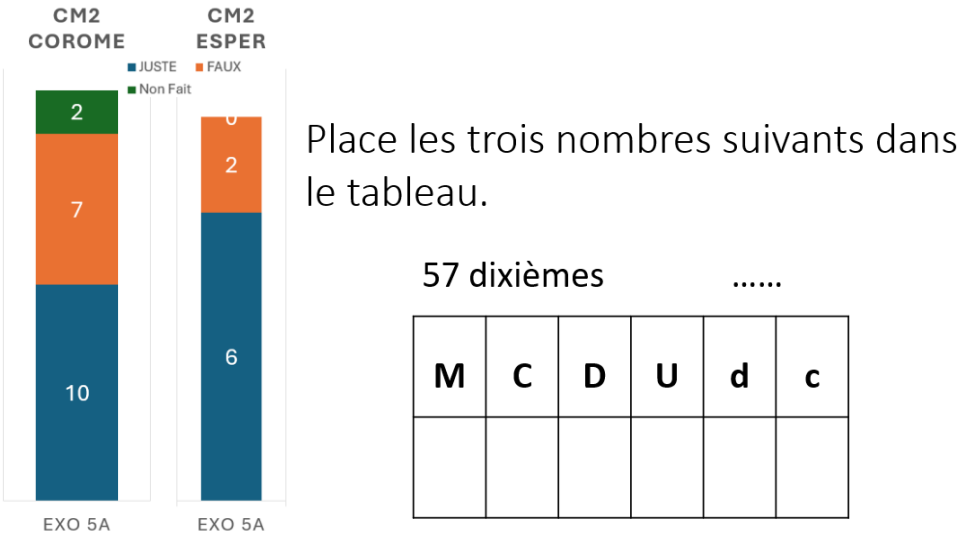


Figure 13. Résultats pour l'item 5a

Concernant l'item 12 (Figure 7), les élèves ayant rencontré les nombres rationnels avec les nouveaux moyens ESPER ont clairement mieux réussi (élèves COROME : 0 réponses justes sur 19 – élèves ESPER 6 réponses justes sur 9). Ce résultat est directement lié à l'apparition de ce nouveau type de tâche dans ESPER (l'apprentissage visé 3 y étant dédié) et aux décompositions fractionnaires qui y sont travaillées.

Pour finir, le premier exercice de l'item 4 (Figure 6 – item 4a) a été une fois encore mieux réussi par les élèves lors de la deuxième année (chez les élèves COROME nous comptabilisons 5 réponses justes sur 19 alors que les élèves ESPER ont 6 réponses correctes sur 9). Il se trouve que l'enjeu de la tâche introductive du premier apprentissage visé est justement de découper l'unité en parties égales alors que cela n'apparait pas explicitement dans les anciens moyens d'enseignement COROME.

V - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette recherche, nous avons analysé deux moyens d'enseignement romands (COROME et ESPER) en utilisant une typologie de type de tâches. Cela nous a permis d'identifier deux organisations « mathématiques » différentes concernant le thème « nombres rationnels » (Matheron et Noirfalise, 2006). Le type de tâche T3 « Convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre » est majoritaire dans les deux ressources. En ce qui concerne ces écritures/représentations, nous avons observé une richesse plus importante dans ESPER due au passage de l'écriture fractionnaire ($\frac{123}{100}$) à l'écriture décimale (1,23) qui se fait à l'aide de la décomposition décimale ($1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$).

Nous avons complété cette étude par une analyse de l'organisation « didactique » (Matheron et Noirfalise, 2006) d'une enseignante avec chaque ressource. Tout d'abord, il est à noter que les deux ressources proposent des progressions différentes de l'enseignement de ce thème. En particulier, une

progression proposée par COROME introduit les nombres rationnels comme les quotients d'une division de deux nombres entiers. En revanche, la progression proposée par ESPER introduit les fractions simples puis les fractions décimales pour arriver à l'écriture décimale des nombres rationnels. Ces progressions ont eu des effets sur l'organisation didactique de l'enseignante observée en l'amenant à une meilleure maîtrise des concepts enseignés et des moyens didactiques pour y parvenir.

En parallèle, nous avons conçu un test en vue d'évaluer les connaissances des élèves sur les nombres rationnels avec les moyens COROME. Concernant le type de tâche T3 « convertir ou associer deux écritures/représentations d'un même nombre », il ressort que les performances des élèves varient selon les représentations mobilisées dans les conversions. Il semblerait alors que les connaissances des élèves analysés concernant les rationnels restent attachées à leurs représentations et révèlent des conceptualisations insuffisantes des fractions décimales. Concernant le type de tâche T4 « déterminer les unités de numération d'un nombre rationnel », il ressort que les conceptions erronées de la numération décimale de position produisent des erreurs de compréhension chez les élèves. Erreurs qui se retrouvent dans le type de tâche T1 « comparer-ordonner des rationnels » avec la conception des nombres décimaux comme deux entiers séparés par une virgule.

Nous constatons que sur les cohortes d'élèves observés, les élèves ayant utilisé ESPER réussissent mieux le test que ceux ayant utilisé COROME. Ce résultat est à confirmer avec les analyses des tests passés dans les autres classes permettant d'avoir un nombre d'élèves plus conséquent.

Nous allons dès la rentrée à venir, 2024-2025, nous rendre chez des enseignants de sixième qui vont utiliser les nouveaux moyens ESPER. Nous pourrons dès lors effectuer le même travail d'analyse qu'avec les données recueillies en CM2 et tenter d'en tirer des conclusions voire des recommandations autour de l'introduction des nombres rationnels à l'école primaire. Peut-être pourrons-nous confirmer notre constat, restreint à l'enseignant observé et ses élèves, selon lequel il semblerait que l'introduction des nouveaux moyens apporte une réelle plus-value tant du côté de l'enseignant que du côté des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, 43-47.

Chastellain, M. et Jaquet, F. (2001). *Mathématiques cinquième année, Méthodologie-Commentaires.* COROME.

CIIP. (2022). *Mathématiques 7è*. https://www.ciip-esper.ch/#/discipline/5/7/

Comiti, C. et Neyret, R. (1979). A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N*, *18*, 5-20.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2010). *Plan d'études romand, Mathématiques et Sciences de la Nature*. Secrétariat général de la CIIP. https://portail.ciip.ch/per/domains

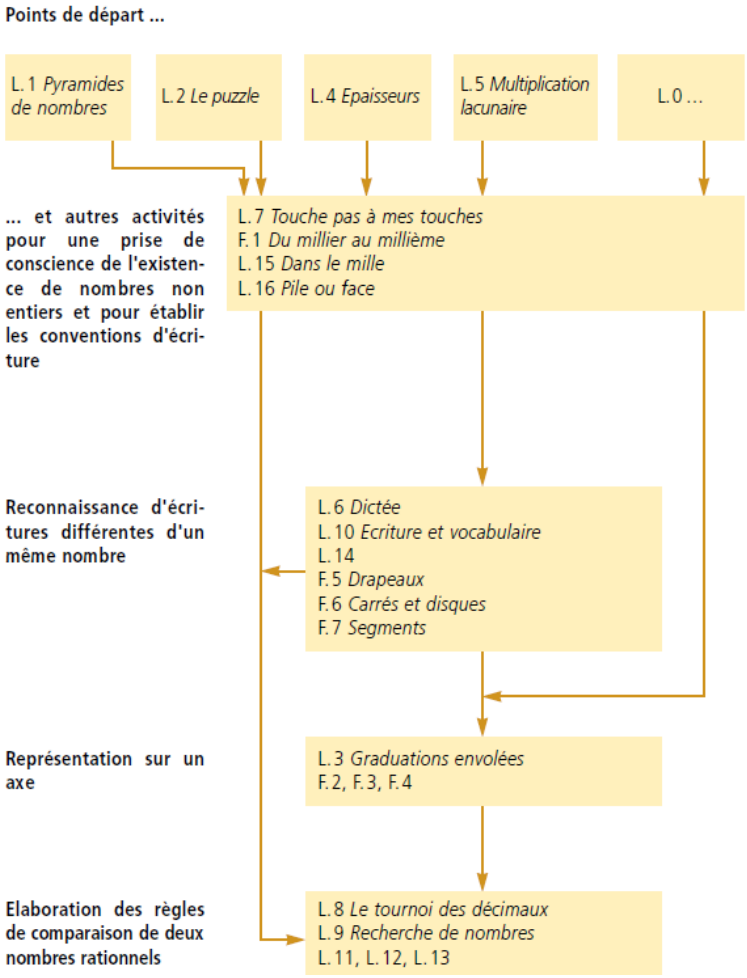
Martinez-Ibanez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : Une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Paris : Université Sorbonne Paris Cité.

Matheron, Y. et Noirfalise, R. (2006). Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. *Petit x*, *70*, 30-47.

Perrin Glorian, M. J. (1986). Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves en CM2 et du collège. *Petit x*, *10*, 5-29.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *12*, 55-81.

ANNEXE 1 - AIDE À LA PROGRESSION FIGURANT DANS LE LIVRE DU MAÎTRE DES ANCIENS MOYENS D'ENSEIGNEMENT COROME (CM2)



ANNEXE 2 - PROGRESSION DES APPRENTISSAGES VISÉS DANS LES NOUVEAUX MOYENS ESPER (CM2)

AV1	AV2	AV3	AV4	AV5	AV6
Une unité étant donnée, construire ou mesurer des bandes ou des surfaces dont la longueur ou l'aire s'exprime à l'aide de fractions simples	Représenter et lire des fractions simples sur une droite graduée	Une unité étant donnée, construire ou mesurer des surfaces dont l'aire s'exprime à l'aide de fractions décimales Représenter et lire des fractions décimales sur une droite gradué	Passer de la fraction décimale au nombre à virgule et inversement	Représenter et lire des nombres à virgule (au plus deux décimales) sur une droite graduée	6 Comparer, ordonner, encadrer et intercaler des nombres à virgule

LE DÉFI DE L'ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE EN LIEN AVEC UNE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT *PAR* LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : REGARD SUR LES BESOINS DES CONSEILLERS PÉDAGOGIQUES

Marie-Pier GOULET
Professeure, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
marie-pier.goulet@uqtr.ca

Marie-Pier FOREST
Professeure, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
marie-pier.forest@uqtr.ca

Dominic VOYER
Professeur, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À RIMOUSKI
Laboratoire (éventuellement)
dominic_voyer@uqar.ca

Résumé
Le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) du Québec publiait en 2019 un document offrant des balises aux acteurs éducatifs afin de mieux répondre aux besoins des élèves en mathématiques : le référentiel d'intervention en mathématique (RIM). Depuis sa diffusion, le ministère a comme mandat d'accompagner le personnel scolaire afin que les orientations théoriques du RIM, incluant une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes, s'actualisent dans les écoles. Malgré les efforts déployés, cette approche tarde à voir le jour dans les classes du primaire (6 à 12 ans), une situation qui n'apparait pas unique au Québec (Artigue et Houdement, 2007 ; Vlassis et al., 2014). La question qui se pose alors est la suivante : pourquoi une approche *par* la résolution de problèmes, malgré ses bienfaits associés (Cai, 2003 ; Takahashi, 2021), n'est que rarement observée dans les classes du primaire ? Du point de vue de la recherche, un enjeu actuel est le manque de connaissances relatives à l'accompagnement des enseignants en lien avec l'approche. Afin de discuter des facteurs déterminants pour un accompagnement des enseignants, les résultats d'une étude menée auprès de conseillers pédagogiques sont présentés. Le présent texte apporte des précisions au regard des besoins des personnes qui accompagnent les enseignants dans la mise en place de l'approche.

I - INTRODUCTION

Depuis sa publication en 2019, le référentiel d'intervention en mathématique (RIM), rédigé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) du Québec, a cherché à guider les acteurs scolaires afin de mieux répondre aux besoins des élèves en mathématiques. Afin d'y parvenir, ce document ministériel met notamment de l'avant deux fondements de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, dont l'un d'entre eux est de « recourir à la résolution de problèmes selon différentes intentions » (MEES, 2019, p. 1). L'une de ces intentions est l'enseignement-apprentissage des mathématiques *par* la résolution de problèmes, qui est défini comme une approche pédagogique permettant l'apprentissage de concepts et de processus mathématiques (MEES, 2019). Il s'agit d'ailleurs d'une approche préconisée par de nombreux chercheurs, tant au Québec (Houle, 2024 ; Lajoie et Bednarz,

2014 ; Theis et Gagnon, 2013) qu'à l'international (Fagnant et Vlassis, 2010 ; Lester et Charles, 2003 ; Takahashi, 2021). Malgré l'importance accordée à cette approche dans le RIM et dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, il semble que cette dernière peine à se concrétiser auprès des élèves du primaire (6 à 12 ans). Cette problématique n'apparait toutefois pas spécifique au contexte québécois, comme en témoignent les travaux de chercheurs tels qu'Artigue et Houdement (2007) ainsi que Vlassis et al. (2014).

La question suivante se retrouve donc au cœur de nos travaux de recherche : pourquoi une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes, malgré tous les bienfaits qui lui sont associés, demeure-t-elle rarement observée dans les classes du primaire ? Autrement dit, comment faire en sorte que les bienfaits attribués à cette approche valent l'effort de « faire autrement » en mathématiques ? Dans ce texte, nous présentons des résultats de recherche tirés d'une étude récente (Goulet et al., soumis) ayant traité de ces questions, puis nous proposons un outil comme première piste d'action. Avant d'en arriver à la présentation de ces résultats et de l'outil, il convient d'abord de situer l'étude dans son contexte, puis de définir ce qu'est une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes.

1 Mise en contexte

L'étude de Goulet et al. (soumis) s'est intéressée à l'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes selon l'angle de la conseillance pédagogique. Au Québec, les conseillers pédagogiques (CP) agissent notamment à titre de personnes-ressources au regard du développement professionnel continu des enseignants (Granger et al., 2021). Considérant que les CP ont un mandat d'accompagnement auprès des enseignants du primaire, il apparaissait pertinent d'étudier la situation selon leur point de vue. Par un devis de recherche mixte de type séquentiel explicatif (Cohen et al., 2018), un des objectifs de cette étude était de dégager les facteurs déterminants pour un accompagnement des enseignants du primaire par les CP afin de favoriser l'actualisation dans les classes d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. Dans la première phase de l'étude, 55 CP provenant de 13 régions administratives du Québec ont répondu à un questionnaire autoadministré en ligne. Ces personnes avaient toutes un rôle d'accompagnement des enseignants du primaire en mathématiques. Ensuite, dans la deuxième phase de l'étude, dix CP ayant participé à la première phase ont été rencontrés lors d'entrevues individuelles semi-dirigées d'une durée d'environ une heure. Menées par visioconférence par la chercheuse responsable de l'étude, ces entrevues visaient entre autres à approfondir les résultats issus de la première phase.

Afin de bien comprendre les résultats issus de cette étude, il convient de définir ce qu'est une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes.

2 Qu'est-ce qu'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes ?

Selon le RIM (MEES, 2019), qui s'appuie lui-même sur les travaux menés par différents chercheurs en didactique des mathématiques (Brousseau, 1998 ; Lajoie et Bednarz, 2014 ; Small, 2013 ; Van de Walle et Lovin, 2007), l'enseignement *par* la résolution de problèmes est une approche pédagogique ayant pour intention première l'apprentissage ou l'approfondissement de concepts et processus mathématiques. Le problème mathématique qui est proposé aux élèves inclut donc des concepts ou des processus qui n'ont pas été enseignés formellement au préalable. À titre d'exemple, un problème peut amener les élèves à découvrir qu'un cercle est une ligne courbe fermée dont tous les points sont situés à égale distance d'un point donné appelé le centre du cercle (pour une description plus détaillée de cette activité, voir Goulet, 2023). Bien que les élèves soient en mesure d'identifier des cercles, la définition d'un cercle n'a pas été enseignée explicitement par l'enseignant. La compréhension qu'ont les élèves d'un cercle se limite encore à sa représentation visuelle : « c'est rond, c'est une ligne courbe ». Plutôt que d'enseigner explicitement aux élèves ce qui permet de définir un cercle, une approche *par* la résolution de problèmes les amène à le découvrir par eux-mêmes, en s'engageant dans un problème choisi spécifiquement pour favoriser cette

découverte. Ce sont plus précisément les tentatives de résolution faites par les élèves, combinées aux différents échanges qu'ils vivront avec leurs pairs et leur enseignant au sujet du problème en question, qui permettront ce nouvel apprentissage. Ainsi, les interactions entre les élèves sont essentielles à l'apprentissage dans une telle approche. Le problème mathématique devient alors « un outil privilégié pour donner du sens aux concepts mathématiques enseignés (Sarrazy, 2008) » (MEES, 2019, p. 17).

II - UNE VISION ÉCLATÉE D'UNE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT *PAR* LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

En dépit de cette définition d'une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes, l'étude de Goulet et al. (soumis) a notamment montré qu'il ne semble pas y avoir de vision commune de cette approche auprès des CP qui accompagnent les enseignants du primaire. Dans la première phase de l'étude, l'une des questions du questionnaire autoadministré était la suivante : comment expliqueriez-vous cette approche à un membre de votre équipe qui n'est pas familier avec l'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes ? À partir d'une analyse de contenu des propos déclarés à cette question ouverte, nous avons décliné sept catégories, chacune reflétant une vision différente de l'approche (voir Tableau 1). Comme nous en faisons la démonstration dans les prochains paragraphes, bien que certaines visions présentent des différences plus subtiles, d'autres présentent des différences assez importantes.

Catégorie	Fréquence	Pourcentage
1. Vision comparable au RIM	11	20,4
2. Problème comme élément déclencheur	10	18,5
3. Problème comme contexte signifiant et réaliste	8	14,8
4. Problème pour apprendre des concepts/processus	20	37
5. Problème comme activité de mobilisation	3	5,6
6. Je ne sais pas	1	1,9
7. Je n'adhère pas à cette approche	1	1,9
Total	**54**	**100**

Tableau 1. Visions différentes des CP d'une approche d'enseignement par la résolution de problèmes (n = 54)

La **première catégorie** comprend les réponses présentant une vision comparable à celle du RIM, donc à la définition présentée à la section I.2. En voici un exemple : « L'enseignement *par* la résolution de problèmes est un problème donné aux élèves comportant les notions à voir. Les élèves n'ont pas encore eu l'enseignement de cette notion, mais ils ont des connaissances/ressources disponibles pour pouvoir tenter de le résoudre. » C'est donc environ un CP sur cinq (20,4 %) qui définit l'approche d'une façon comparable à celle du RIM (MEES, 2019).

La **deuxième catégorie** comprend les réponses présentant le problème mathématique comme un élément déclencheur. En voici un exemple : « C'est une approche visant à susciter le besoin et l'intérêt des apprenants en début de séquence ». À nouveau, c'est près d'un CP sur cinq (18,5 %) qui définit l'approche de cette façon. Bien que cette idée ne soit pas fausse, elle ne suffit pas à elle seule pour qualifier une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes : oui, le problème est un élément

déclencheur, mais ce qui importe, c'est la façon dont ce problème est exploité en classe. Il est nécessaire que les élèves s'engagent dans la recherche de solutions au problème, qu'ils explorent certaines pistes, qu'ils fassent des tentatives, qu'ils se réajustent, etc. Prenons par exemple la mise en situation suivante : un problème mathématique est présenté à titre d'élément déclencheur afin d'amener les élèves à réaliser qu'ils n'ont pas les connaissances nécessaires pour le résoudre. Ensuite, ce problème est mis de côté pour privilégier un enseignement plus traditionnel, c'est-à-dire une transmission des connaissances de l'enseignant vers les élèves. Enfin, lorsque les élèves ont désormais « acquis » les connaissances nécessaires, ils en reviennent au problème initial pour tenter de le résoudre. Dans un cas comme celui-ci, nous ne sommes pas dans une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes, puisque la principale source d'apprentissage demeure l'enseignant et non pas l'interaction entre le problème, les solutions proposées par les élèves et les relances de la personne enseignante et des élèves (qui peuvent provoquer une confrontation des idées). À ce sujet, voici le verbatim d'un CP dans la deuxième phase de l'étude :

> *Ce n'est pas juste un élément déclencheur, c'est une situation dans laquelle les élèves vont avoir à s'engager. Ce n'est pas juste de présenter puis de dire voilà, on va avoir à apprendre ces notions-là, à développer ces compétences-là pour résoudre plus tard. [...] Ce n'est pas juste pour susciter la réflexion, c'est pour s'engager, résoudre, acquérir de nouvelles connaissances. C'est plus qu'un élément déclencheur.* (CP6)

La **troisième catégorie** comprend les réponses présentant le problème comme un contexte signifiant et réaliste (14,8 % des CP). En voici un exemple : « Il s'agit de prendre des problèmes du quotidien (près de l'élève) et de leur faire vivre une démarche de résolution en intégrant plusieurs concepts/processus. » Bien qu'il soit intéressant que le contexte du problème soit signifiant et réaliste, cela n'est pas essentiel pour qualifier une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. En effet, un problème s'inscrivant dans cette approche pourrait avoir un contexte purement mathématique, par exemple des problèmes de type « Open Middle » (Kaplinsky, 2019). À l'inverse, présenter un problème dans un contexte qui soit jugé réaliste et signifiant ne permet pas de conclure automatiquement que ce problème s'inscrit dans une approche d'enseignement *par* la résolution de problème. Encore une fois, ce n'est pas suffisant.

La **quatrième catégorie** comprend les réponses présentant le problème comme une occasion d'apprendre des concepts et des processus mathématiques. Il s'agit d'ailleurs de la catégorie la plus fréquente avec 37 % des réponses des CP qui s'y retrouvent. En voici un exemple : « C'est utiliser la résolution d'un problème pour apprendre un concept, un processus ou une stratégie. La résolution d'un problème est vue comme une modalité pédagogique. » À nouveau, bien que cette idée ne soit pas fausse, elle n'apparait pas suffisante en soi pour qualifier une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. En effet, elle n'informe pas sur la façon dont cet apprentissage se déroule en classe. Par exemple, comme discuté au paragraphe précédent, si l'enseignant est chargé d'enseigner les concepts ou processus nécessaires à la résolution du problème, cela ne correspondrait pas à une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. L'enseignant doit plutôt créer le besoin d'apprendre en choisissant un problème adapté aux élèves en termes de connaissances antérieures et à développer, tout en agissant comme guide, médiateur et formalisateur, selon les différentes phases du pilotage de l'activité. Son rôle n'est donc pas d'enseigner explicitement les connaissances nécessaires à la résolution du problème. Ceci étant dit, il est important de mentionner que puisque ces données ont été recueillies par l'entremise d'un questionnaire autoadministré, nous devons vivre avec une limite inhérente à cet instrument de collecte de données, soit l'impossibilité de demander des précisions aux participants. En effet, si nous avions eu l'occasion de discuter avec les 20 CP dont les réponses ont été classées dans cette catégorie, la discussion leur aurait peut-être permis de développer davantage leur réponse pour expliquer comment l'apprentissage est déployé en classe.

La **cinquième catégorie** comprend les réponses présentant le problème comme une activité de mobilisation (5,6 % des CP). En voici un exemple : « [...] Les élèves se retrouvent devant une situation qui fait appel à des concepts et processus mathématiques pour être résolue. L'élève est donc appelé à déceler les concepts et processus qui lui seront utiles pour la résolution et à les mettre en œuvre. » Cette vision se distingue de celle du RIM puisque dans une approche *par* la résolution de problèmes, il ne s'agit pas uniquement de mobiliser des connaissances déjà apprises, mais surtout d'en construire de nouvelles. Il est donc nécessaire de choisir un problème présentant un bon équilibre entre les connaissances antérieures des élèves et celles à développer. Pour qualifier les problèmes ayant pour intention première la mobilisation de concepts et de processus mathématiques déjà appris, le RIM parle d'un enseignement-apprentissage *pour* la résolution de problèmes (MEES, 2019). Dans le même sens, voici le verbatim d'un CP dans la deuxième phase de l'étude à qui l'on a demandé ce qu'il pensait de l'affirmation « Enseigner *par* la résolution de problèmes, c'est proposer un problème qui amène les élèves à mobiliser des concepts ou des processus mathématiques en vue de le résoudre. » :

> *Oui, mais ce n'est pas suffisant. [...] C'est parce que ça pourrait être un apprentissage **pour** la résolution de problèmes. Souvent, l'apprentissage **par** la résolution de problèmes, c'est parce que tu vas apprendre quelque chose, tu vas apprendre ces nouveaux concepts-là ou ces nouvelles compétences-là. Ce sont des nouvelles choses, tu apprends **par**.* (CP1)

Enfin, les **sixième** et **septième catégories** comprennent les réponses des CP qui, respectivement, ne savent pas comment décrire l'approche (1 CP) ou n'y adhèrent pas (1 CP).

En somme, comme illustré dans la Figure 1, l'analyse de cette question ouverte met de l'avant une vision d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes qui ne semble pas commune à l'ensemble de la communauté des CP. Ce constat est en cohérence avec l'un des besoins déclarés par les CP eux-mêmes, à savoir un besoin de formation par rapport aux fondements de l'approche (les besoins seront discutés dans la prochaine section). Ce résultat apporte également une nouvelle question : pourquoi une vision si éclatée, voire parfois incomplète ? En d'autres mots, qu'est-ce qui permettrait d'expliquer qu'il n'y ait pas une vision commune de l'approche chez les CP ?

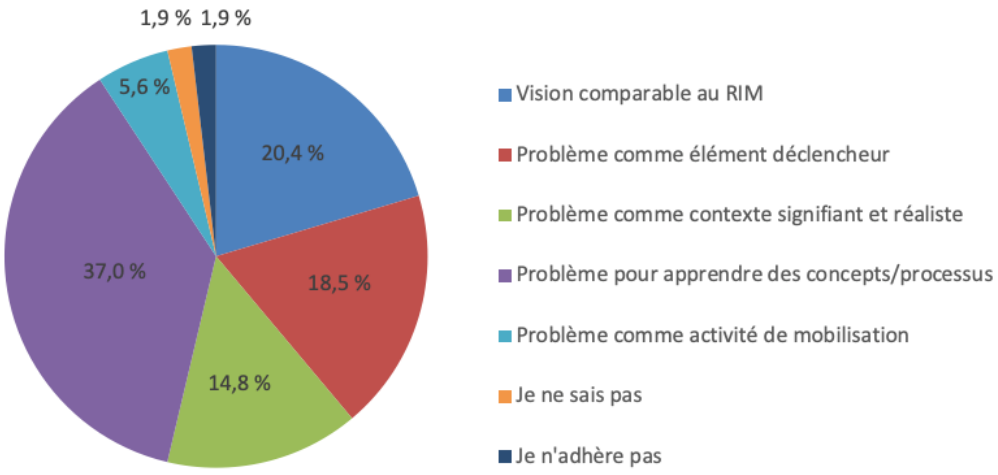


Figure 1. Vision éclatée d'une approche d'enseignement par la résolution de problèmes chez les CP (n = 54)

Nous croyons qu'une piste de réponse se trouve au niveau de la façon dont les CP ont développé leurs connaissances en ce qui a trait à cette approche. Toujours dans le questionnaire de la première phase de l'étude, l'une des questions était la suivante : comment avez-vous développé vos connaissances en lien avec une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes ? Il s'agissait

d'une question comportant plusieurs choix de réponse. Les participants pouvaient sélectionner plus d'un choix et même en ajouter, au besoin. À cette question, les trois sources de connaissances les plus importantes des CP se sont avérées être : 1) les discussions avec d'autres collègues CP (85,5 %) ; 2) les documents ministériels (70,9 %) et 3) les lectures d'ouvrages ou d'articles (65,5 %). Alors qu'il est rassurant de voir que les documents ministériels comme le RIM (MEES, 2019) sont des sources de référence pour les CP, il est possible que la transmission de connaissances par bouche-à-oreille, par le biais de discussions avec des collègues, puisse amener diverses interprétations des documents ministériels. Par conséquent, cela peut donner lieu à des visions différentes d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. Inversement, la formation universitaire initiale apparait comme l'une des sources de connaissances les moins importantes pour les CP (12,7 %). Un tel résultat s'explique probablement par le fait que la publication du RIM (MEES, 2019) est relativement récente. Si l'enseignement *par* la résolution de problèmes date évidemment de bien avant 2019, l'éclairage qu'on y apporte dans le programme québécois du primaire (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS], 2006) est minime, voire quasi inexistant. On peut ainsi faire l'hypothèse que si une certaine lacune liée à la formation universitaire en contexte québécois est actuellement ressentie avec 48 CP sur 55 (87,3 %) qui n'ont pas entendu parler de cette approche lors de leur formation initiale en enseignement, la situation pourrait s'améliorer dans les années à venir en raison de la parution du RIM (MEES, 2019) qui est désormais utilisé par plusieurs formateurs universitaires. Soulignons ici que tous les CP ayant participé à cette première phase de l'étude ont eu une formation universitaire en enseignement. La majorité d'entre eux ont une formation en éducation préscolaire et en enseignement primaire (54,5 %) ou en enseignement en adaptation scolaire et sociale (21,8 %) tandis que les autres ont principalement une formation en enseignement secondaire, soit en mathématiques ou dans une autre discipline.

III - LES BESOINS DÉCLARÉS DES CONSEILLERS PÉDAGOGIQUES POUR FAVORISER LA MISE EN PLACE D'UNE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT *PAR* LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Toujours dans la première phase de l'étude de Goulet et al. (soumis), l'une des thématiques du questionnaire autoadministré portait sur les besoins des CP comme personne accompagnatrice. La question ouverte en lien avec celle-ci est la suivante : en tant que CP ayant pour mandat d'accompagner des enseignants en mathématiques, quels sont vos besoins pour favoriser la mise en œuvre d'une approche d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes dans les classes du primaire ? À partir d'une analyse de contenu (Bardin, 2013) des propos déclarés à cette question, 83 unités de sens ont été dégagées. Puis, ces unités de sens ont été réparties en huit catégories de besoins, elles-mêmes regroupées en deux grands thèmes : la collaboration et la formation (voir Figure 2).

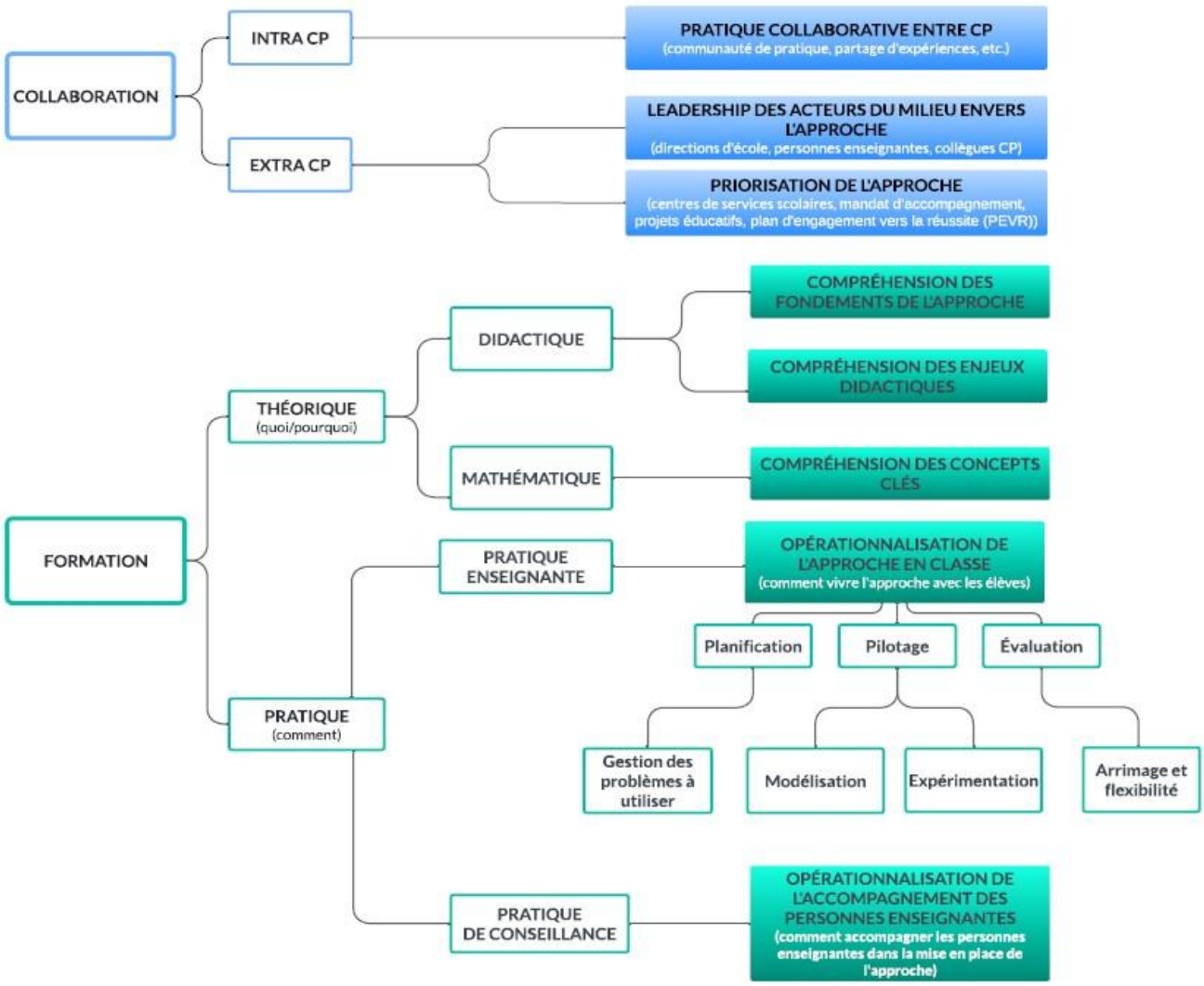


Figure 2. Schéma des besoins déclarés des CP pour favoriser la mise en œuvre d'une approche d'enseignement par la résolution de problèmes (n = 54)

Le premier thème est celui de la **collaboration**. Il se décline en deux sous-thèmes : la collaboration intra CP et extra CP. Pour la collaboration intra CP, un besoin de mettre en place des pratiques collaboratives entre CP est ressorti des propos écrits des participants, par exemple par le biais de communautés de pratique ou de pairages entre CP. Pour la collaboration extra CP, deux besoins ont été mentionnés. Premièrement, les CP déclarent qu'un leadership de tous les acteurs du milieu scolaire envers l'approche est non seulement nécessaire pour favoriser sa mise en place, mais aussi pour leur permettre d'agir en tant que personne accompagnatrice. Deuxièmement, une priorisation de l'approche est aussi un besoin ressenti par les CP afin que celle-ci soit au premier plan dans leur mandat d'accompagnement. Le Tableau 2 présente les trois besoins associés au thème de la collaboration appuyés par des propos écrits déclarés des CP.

Besoin déclaré	Exemples de propos déclarés
Collaboration INTRA CP	
Pratique collaborative entre CP	- « Avoir des partages d'expériences de collègues CP qui ont vécu cette approche pour alimenter ma réflexion » - « […] pairage avec d'autres CP »
Collaboration EXTRA CP	
Leadership des acteurs du milieu envers l'approche	- « L'engagement des directions comme leader pédagogique afin de favoriser la mobilisation des équipes enseignantes » - « Il faut que les directions et les enseignants comprennent l'importance de l'utilisation de cette approche pédagogique »
Priorisation de l'approche	- « Il faut que cette tâche soit la prioritaire du mandat d'accompagnement » - « Nous devons trouver une façon de mettre cette approche dans les priorités des projets éducatifs et des PEVR [Plan d'engagement vers la réussite] »

Tableau 2. Propos déclarés des CP en lien avec les besoins associés au thème de la collaboration

Le second thème est celui de la **formation**. Il se décline en deux sous-thèmes : la dimension théorique (le quoi et le pourquoi) et la dimension pratique (le comment). Ensemble, ces deux dimensions renvoient à des besoins associés à une expertise de « contenu et de terrain ».

Dans la **dimension théorique**, il est possible de distinguer le volet didactique et le volet mathématique. Le volet didactique comprend à la fois la compréhension des fondements de l'approche (par exemple, s'approprier les fondements, en discuter pour bien les comprendre) et la compréhension des enjeux didactiques (par exemple, acquérir une base plus solide en didactique des mathématiques). Le volet mathématique comprend quant à lui la compréhension des concepts clés qui renvoie plus particulièrement à un besoin lié à la spécificité des savoirs mathématiques à maitriser selon les différents niveaux scolaires. L'analyse de contenu a permis de mettre en évidence que les besoins didactiques étant plus spécifiquement liés à la compréhension des fondements de l'approche étaient récurrents comparativement aux autres besoins de la dimension théorique.

Dans la **dimension pratique**, il est possible de distinguer la pratique enseignante et la pratique de conseillance. Alors que la pratique enseignante concerne davantage l'opérationnalisation de l'approche en classe, c'est-à-dire comment vivre l'approche avec les élèves, la pratique de conseillance concerne quant à elle l'opérationnalisation de l'accompagnement des enseignants, c'est-à-dire comment aider les enseignants à instaurer cette approche dans leur classe.

Le besoin associé à l'opérationnalisation de l'approche en classe se décline quant à lui en trois volets qui semblent plus préoccupants pour les CP : la planification, le pilotage et l'évaluation. Le Tableau 3 permet de mieux comprendre où se situent les besoins des CP par rapport à ces trois volets, qui sont abordés dans les prochains paragraphes.

Besoin déclaré	Exemples de propos déclarés
Opérationnalisation de l'approche en classe	**Planification**
	- « […] M'assurer de posséder une banque importante d'outils "clé en mains" à proposer aux enseignants, parce qu'il est utopique de croire qu'une majorité d'entre eux ont le temps de construire leur matériel » - « Avoir une banque de tâches clé en main, classée par cycle »
	Pilotage
	- « Des capsules avec des exemples concrets d'élèves qui abordent un concept PAR la résolution de problèmes » - « Plus d'exemples, de témoignages d'enseignants, de vidéos d'élèves vivant cette approche » - « L'expérimenter moi-même en me jumelant à un enseignant »
	Évaluation
	- « […] Des exemples de comment évaluer au service de l'apprentissage » - « Un soutien pour l'arrimage entre l'évaluation traditionnelle et cette approche (c'est un frein, on se fait toujours répondre : *oui, mais il faut que j'évalue avec les tâches conventionnelles...*) »

Tableau 3. Propos déclarés des CP en lien avec les besoins associés à l'opérationnalisation de l'approche en classe

Il est possible d'observer que pour le volet de la **planification**, les propos des CP témoignent d'un besoin d'accessibilité à des problèmes pouvant être exploités dans une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. Parmi les 10 CP interrogés lors de la deuxième phase de l'étude (Goulet et al., soumis), plusieurs ont abondé dans ce sens, mais en révélant un certain tiraillement entre leur besoin d'avoir une banque de problèmes pouvant être mise à profit lors de leur accompagnement et leur mandat de développement professionnel auprès des enseignants. Une CP exprime ses craintes à cet égard :

> *Je suis encore un peu dans ce déséquilibre-là, tu sais quand on parle de ne pas vouloir tout donner « tout cuit, tout clé en main », mais en même temps, si je ne le donne pas, ça ne répond pas aux besoins de l'enseignant qui risque de ne pas se lancer [dans l'approche d'enseignement par la résolution de problèmes] à cause de ça.* (CP7)

Une autre CP explique que selon elle, la solution réside peut-être dans la recherche d'équilibre entre les deux pôles :

> *C'est sûr que d'avoir une banque de problèmes, les enseignants nous le disent souvent "On aimerait ça avoir une banque de problèmes !". Ils le nomment vraiment. Ils ne veulent pas toujours se questionner parce qu'ils manquent de temps, la tâche est quand même lourde... Je les comprends sauf que ça aiderait à comprendre tout le processus [de les former à trouver eux-mêmes des problèmes]. Avoir peut-être des modèles ?* (CP1)

Les réflexions des CP en lien avec ce besoin fait écho à un obstacle mis de l'avant dans plusieurs recherches : les attentes relatives à l'accompagnement. En effet, les écrits rapportent un dilemme constant vécu par plusieurs CP pouvant être décrit par deux pôles opposés : offrir des solutions clés en main pour répondre aux besoins ponctuels des enseignants versus les engager dans un processus réflexif les menant à une plus grande professionnalisation (Hanin et al., 2021). Ce dilemme est renforcé par des attentes ou des besoins différents de la part des enseignants pouvant s'expliquer par plusieurs variables telles que l'âge des enseignants, le nombre d'années d'expérience, leur spécialisation, leurs croyances ou encore leurs valeurs éducatives (Duchesne, 2016). Cela fait donc partie de la réalité des CP : ils doivent constamment adapter leurs pratiques à un corps enseignant présentant une grande diversité.

Pour ce qui est du volet du **pilotage**, la lecture du Tableau 3 rend compte d'un besoin très concret se traduisant par deux types d'expérience : 1) des expériences passées permettant d'avoir accès à une certaine modélisation de l'approche en classe (des exemples de vidéos d'animation en classe ou de

témoignages d'enseignants ou d'élèves) et 2) des expériences futures permettant d'expérimenter l'approche en classe. Concernant les expériences passées, les propos des CP nous permettent de comprendre plus précisément que certains auraient besoin de vidéos comme outil d'accompagnement, soit pour expliquer comment l'approche se vit aux enseignants n'en ayant jamais fait l'essai, soit pour les convaincre de la pertinence de l'approche. Pour d'autres CP, ces exemples de vidéos ou de témoignages seraient plutôt une occasion de formation pour leur propre pratique. Cela leur permettrait d'être mieux préparés pour leur accompagnement et de mieux comprendre comment cette approche s'actualise en classe auprès des élèves. Ainsi, on peut voir que la modélisation recherchée est parfois pour les enseignants, parfois pour les CP eux-mêmes. Concernant les expériences futures, ce sont des CP qui ont déclaré vouloir vivre eux-mêmes des séances d'animation d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes, souvent en étant jumelés avec un enseignant, pour approfondir leurs connaissances pratiques de l'approche.

Finalement, le dernier besoin déclaré par rapport à l'opérationnalisation de l'approche en classe est en lien avec le volet de l'**évaluation**. Les propos des CP nous apprennent qu'ils sont particulièrement préoccupés par la question suivante : comment évaluer les compétences des élèves lorsqu'on utilise une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes ? Cette première question semble ensuite se décliner par une deuxième question : comment convaincre les enseignants qu'ils peuvent y arriver ? Il faut aussi savoir que l'évaluation a été identifiée comme l'un des principaux obstacles à la mise en place de l'approche dans les classes du primaire selon les CP (Goulet et al., soumis). Conséquemment, ce besoin de soutien manifesté par les CP par rapport à la question de l'évaluation apparait digne d'intérêt. Pour cette raison, les questions aux entrevues de la deuxième phase ont été réfléchies pour aborder explicitement ce besoin, mais surtout les pistes de solution envisageables. Le Tableau 4 fait état de trois pistes proposées par les CP interrogés.

Piste de solution	Exemples de propos associés
Changer sa vision de l'évaluation	- « De notre côté, je sais que ce qui avait été moins bien reçu par les enseignants, c'est que les grilles qu'on avait créées pour les causeries mathématiques, [les enseignants croyaient] qu'il fallait qu'ils soient capables de le faire pour tous les élèves en même temps. On était comme "Non ! Le but, ce n'est pas de le faire pour tout le monde. En tout cas, pas la même tâche pour tous les élèves, c'est impossible de tout canaliser." » - « C'est difficile pour les enseignants parce qu'on les a habitués à faire toujours des évaluations qui sont complètes et qui répondent à tous les critères [de la compétence] en même temps. Il n'y a rien qui ne dit à nulle part dans notre cadre d'évaluation qu'on doit tout évaluer tout le temps. »
Avoir des outils pour la triangulation des traces	- « Idéalement, on va y aller avec la triangulation des traces. Moi, je pense que c'est là que le bât blesse chez certains de nos enseignants qui sont habitués à avoir toujours des productions écrites. Quand on y va par observations, on est capable d'en prendre des traces. Oui c'est un enjeu, mais moi je ne le vois pas nécessairement comme un grand défi. À un moment donné, on finit par faire des pas. Je pense que c'est réaliste. Il faut juste aider [les enseignants] des fois à construire leurs outils pour évaluer. »

Coenseigner pour évaluer	- « Je crois que plus on en fait, plus on est habile à animer des activités, plus c'est facile de se dégager un peu, puis d'être capable d'avoir un œil d'observation en lien avec les critères [d'évaluation de la compétence]. Je pense qu'au début, la solution c'est de faire du "team teaching", d'avoir l'orthopédagogue en classe. Puis, vraiment de cibler quelques élèves. Il y a des élèves pour qui je n'ai pas besoin d'avoir de traces pointues. Je le sais parce qu'ils me le démontrent, mais il faut que mon intention soit claire. Puis, il faut aller chercher les traces pertinentes pour les élèves dont j'ai besoin d'avoir de l'information. »

Tableau 4. Pistes de solutions proposées par les CP en lien avec le besoin de soutien à l'évaluation pour permettre l'opérationnalisation de l'approche en classe

La première piste de solution est probablement la plus importante, mais aussi celle qui est la plus difficile à atteindre puisqu'elle touche un aspect bien ancré de la pratique enseignante : une vision de l'évaluation qui veut que tous les élèves doivent être évalués en même temps, sur une même tâche se traduisant par une production écrite. Un autre élément particulier aux mathématiques est rattaché au fait que la compétence à résoudre des problèmes mathématiques est décrite dans le programme québécois selon cinq composantes : décoder les éléments de la situation-problème, modéliser la situation-problème, appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution, valider la solution et partager l'information relative à la solution (MELS, 2006). On retrouve aussi une tendance, chez les enseignants, à vouloir évaluer les cinq composantes en même temps, ce qui donne souvent lieu à des tâches très longues et très complexes qui entrainent leurs lots de défis, autant pour les élèves que pour les enseignants. Une CP explique que cette tendance vient possiblement du fait que ce qui est proposé par le ministère, c'est souvent ce type de tâche, laissant croire aux enseignants qu'il s'agit de la seule façon de faire.

> *Ce qu'on reçoit du ministère, c'est toujours ça, c'est toujours les mêmes modèles, toujours la même façon de faire alors c'est sûr qu'à la longue, à force de voir tout le temps la même chose, tu finis par déduire que [c'est ce qu'il faut faire].* (CP10)

Nous jugeons que les deux autres pistes de solution mentionnées par les CP sont en quelque sorte des éléments pouvant être mis à profit de ce changement de vision. D'une part, l'accessibilité à des outils permettant de comprendre comment s'opérationnalise la triangulation des traces permettrait aussi de discuter des éléments évolutifs de la vision décrite précédemment. D'autre part, l'idée d'instaurer une pratique de coenseignement est vue comme une façon de réduire le stress pouvant être associé au double rôle que doit remplir l'enseignant, à savoir son rôle d'animateur et son rôle d'évaluateur. En étant deux pour assumer ces rôles, l'approche peut devenir plus attrayante et plus accessible pour les enseignants qui commencent à enseigner de cette façon.

Pour conclure le thème de la dimension pratique, un dernier besoin a été identifié, s'inscrivant cette fois-ci dans la pratique de conseillance, soit l'opérationnalisation de l'accompagnement des enseignants. Ce besoin renvoie aux moyens pour accompagner les enseignants, de façon structurée et réfléchie, dans la mise en place de l'approche. Les CP ont qualifié ces moyens de guide, de plan d'accompagnement, de structure ou encore de pratiques d'appropriation et d'implantation. Voici un exemple de propos déclaré écrit illustrant ce besoin :

> *Le besoin de développer une « structure » pour implanter cette approche graduellement dans une classe. Je ne pense pas pouvoir aider les enseignants à changer toute leur pratique d'un coup. Alors, par où commencer et comment le faire ? Je crois que c'est ce qui me manque le plus actuellement.*

Ce besoin d'opérationnalisation de l'accompagnement des enseignants nous apparait lié à un obstacle rencontré par les CP dans leur mandat d'accompagnement : la construction d'une légitimité professionnelle auprès des enseignants (Hanin et al., 2021). Certains auteurs parlent en effet d'une relation parfois tendue entre les CP et les enseignants, ce qui peut nécessairement avoir un impact sur l'accompagnement. « Le CP est celui qui incarne au quotidien le changement imposé d'en haut et perçu de manière très négative » (Draelants, 2007, p. 165). Cette citation met en évidence une possible résistance au changement de la part de certains enseignants, ce qui peut constituer un obstacle de taille chez les CP qui ont pour mandat de leur offrir un accompagnement. Cette résistance peut aussi être liée à l'expérience de certains enseignants, qui peuvent compter plus d'années d'expérience que les CP (Duchesne, 2016; Orianne et Draelants, 2010). Cet obstacle permet de mieux comprendre le besoin des CP d'avoir accès à des outils, des moyens ou même des bonnes pratiques en termes d'accompagnement des enseignants.

IV - UNE PROPOSITION D'OUTIL COMME PREMIÈRE PISTE D'ACTION POUR RÉPONDRE AUX BESOINS DÉCLARÉS

Parmi les besoins déclarés par les CP afin d'assumer leur rôle de personne accompagnatrice dans la mise en œuvre d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes dans les classes du primaire, nous retenons trois éléments à propos desquels nous considérons avoir un certain pouvoir d'action : développer une vision commune de l'approche (besoin de formation théorique), développer une aisance dans l'opérationnalisation de l'approche en classe (besoin de formation liée à la pratique enseignante) et développer un plan d'accompagnement pour les CP (besoin de formation liée à la pratique de conseillance).

Un outil élaboré dans le cadre d'un projet de recherche-développement (Goulet et Forest, 2024) peut à notre avis agir positivement sur ces trois éléments. Cet outil prend la forme d'un schéma dynamique[1] (voir Figure 3) visant à expliciter le quoi, le pourquoi et le comment d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes. Il est destiné principalement aux enseignants du primaire, mais aussi aux CP qui les accompagnent puisque ceux-ci pourront utiliser le schéma à travers leur accompagnement. Un devis de recherche-développement (Bergeron et al., 2021) a été privilégié pour atteindre nos deux objectifs : 1) élaborer un outil visant à soutenir les enseignants du primaire dans la mise en œuvre d'une approche d'enseignement *par* la résolution de problèmes (objectif de développement) et 2) mieux comprendre les défis perçus par les enseignants du primaire en lien avec le pilotage d'une séance d'enseignement des mathématiques *par* la résolution de problèmes (objectif de recherche). Les participants de cette recherche-développement sont à la fois des enseignants du primaire et des CP qui les accompagnent. Sommairement, à partir de trois boucles itératives de mises à l'essai, l'outil a été bonifié graduellement afin de répondre aux commentaires reçus par les participants.

Ces boucles de mises à l'essai empiriques impliquaient la consultation de l'outil et l'expérimentation d'une activité d'enseignement *par* la résolution de problèmes telle que décrite dans une fiche d'animation élaborée par l'équipe de recherche. Au total, quatre enseignants québécois de la deuxième (7-8 ans) à la sixième année du primaire (11-12 ans) ainsi qu'une CP ont participé aux boucles 1 et 2 alors que 44 enseignants français du CP (6-7 ans) au CM1 (9-10 ans) ont participé à la boucle 3. Ce choix de mener une des boucles de mise à l'essai auprès d'enseignants francophones, mais non québécois, s'explique par notre désir d'élaborer un outil qui réponde aux besoins du plus grand nombre d'utilisateurs possibles. Pour ce faire, il nous apparaissait essentiel de prendre en compte la réalité d'enseignants francophones qui travaillent dans des contextes différents de celui québécois. Dans tous les cas, il leur était demandé

[1] Le schéma sera accessible dès l'automne 2024 sur la plateforme du RÉVERBÈRE (www.reverbereeducation.com).

de consulter l'outil (le schéma et la fiche d'animation) pour ensuite expérimenter l'activité avec leurs élèves. Pour les boucles 1 et 2, l'animation en classe était suivie d'une entrevue individuelle semi-dirigée d'environ trente minutes afin de collecter des données utiles à l'atteinte des deux objectifs (de développement et de recherche). En effet, l'entretien visait 1) à faire ressortir toutes informations pertinentes dans l'optique d'améliorer le produit, c'est-à-dire le schéma et la fiche d'animation qui l'accompagne et 2) à mieux comprendre les défis vécus lors du pilotage de l'activité. Après chaque boucle de mise à l'essai, les fiches d'animation et le schéma ont été améliorés pour répondre aux besoins et aux améliorations suggérées par les participants. Pour la boucle 3, les enseignants français ont plutôt été invités à répondre à un questionnaire en ligne autoadministré après avoir expérimenté une activité. Ce choix est justifié par le grand nombre de participants de cette troisième boucle de mise à l'essai. Le questionnaire servait quant à lui à collecter des données en lien avec les défis du pilotage seulement (objectif de recherche).

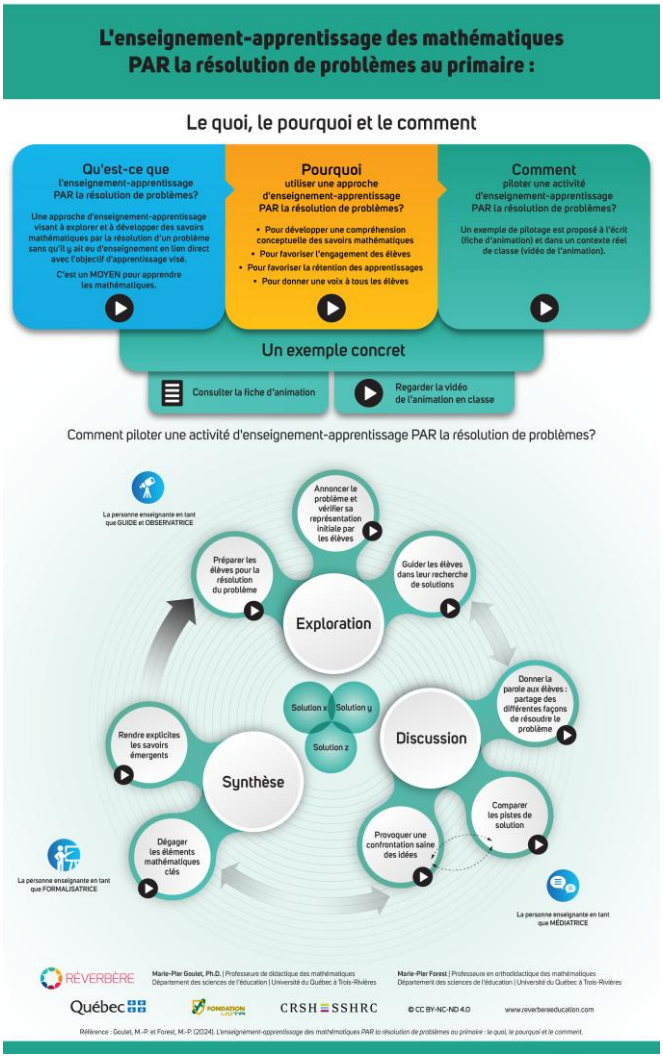


Figure 3. Schéma dynamique développé dans le cadre du projet de recherche-développement de Goulet et Forest (2024)

Les trois encadrés situés dans le haut du schéma (voir Figure 3) permettent de vulgariser, à l'écrit et à l'oral, les principaux fondements de l'approche d'un point de vue théorique, mais aussi d'un point de vue pratique. En effet, les deux premiers encadrés abordent le *quoi* et le *pourquoi* de l'approche, c'est-à-dire qu'est-ce qu'une approche *par* la résolution de problèmes et pourquoi l'utiliser, alors que le troisième encadré traite du *comment*, en expliquant comment peut se vivre le pilotage d'une activité s'inscrivant dans telle approche. Pour chacun des encadrés, des explications écrites sont fournies alors que celles-ci

sont complétées par des extraits vidéos présentant des témoignages de professeures universitaires, de conseillers pédagogiques et d'élèves du primaire.

Afin de renforcer la dimension pratique de l'approche, une vidéo montrant l'animation d'une activité d'enseignement *par* la résolution de problèmes dans une classe de cinquième année du primaire (CM2) est intégrée au schéma. Cette vidéo, accessible en cliquant sur les onglets « jouer » du schéma, permet notamment de répondre au besoin de modélisation de l'approche en classe identifié par les CP. De plus, le schéma est accompagné d'une fiche d'animation donnant un exemple très détaillé d'une activité d'enseignement *par* la résolution de problèmes, ce qui permet de répondre cette fois-ci au besoin de planification identifié par les CP, se définissant plus précisément par l'accessibilité à des ressources clé en main. Bien que l'outil ne présente qu'un seul exemple d'activité, il faut mentionner que d'autres fiches d'animation sont en cours d'élaboration. Finalement, le schéma pourrait aussi être vu comme un outil permettant l'opérationnalisation de l'accompagnement des enseignants. Celui-ci pourrait aider les CP à répondre à la question « par où commencer pour accompagner les enseignants dans la mise en place de cette approche ? ». Nous sommes d'avis que l'appropriation des fondements mis en évidence dans le schéma peut être perçue comme un premier pas essentiel vers les résultats souhaités, à savoir une plus grande utilisation de l'approche en classe. L'outil sera utilisé lors de formations continues offertes à des CP par l'équipe de recherche afin de favoriser son déploiement dans le milieu de la pratique. Il sera aussi présenté en formation initiale pour former la relève enseignante du primaire.

V - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. et Houdement, C. (2007). Problem solving in France: Didactic and curricular perspectives. *ZDM, 39*, 365 – 382. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0048-x

Bardin, L. (2013). L'analyse de contenu (2e éd.). Presses universitaires de France.

Bergeron, L., Rousseau, N. et Bergeron, G. (2021). Quelques propositions méthodologiques pour une recherche-développement dans les contextes éducatifs. Dans L. Bergeron et N. Rousseau (dir.), *La recherche-développement en contextes éducatifs : une méthodologie alliant le développement de produits et la production de connaissances scientifiques* (p. 3 – 24). Presses de l'Université du Québec. https://doi.org/10.2307/j.ctv224v0vg.8

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. Dans F. K. Lester et R. I. Charles (dir.), Teaching mathematics through problem solving (p. 241 – 254). National Council of Teachers of Mathematics.

Cohen, L., Manion, L. et Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8e éd.). Routledge.

Draelants, H. (2007). Entre le pair et l'expert, trouver la distance qui convient. Une question de légitimation pour le conseiller pédagogique ? *Recherches sociologiques et anthropologiques, 38*(1), 163 – 182. https://doi.org/10.4000/rsa.525

Duchesne, C. (2016). Complexité et défis associés aux rôles de conseiller pédagogique. *Revue des sciences de l'éducation de McGill, 51*(1), 635 – 656. https://doi.org/10.7202/1037363ar

Fagnant, A. et Vlassis, J. (2010). Le rôle de la résolution des problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Éducation Canada, 50*(1), 50 – 52.

Goulet, M.-P. (2023). Qu'est-ce qu'un cercle ? Une activité de découverte pour les élèves du 2e cycle du primaire. *Vivre le primaire, 36*(3), 20 – 22.

Goulet, M.-P. et Forest, M.-P. (2024). *Schéma dynamique sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes au primaire : le quoi, le pourquoi et le comment* [acte de colloque]. 49e colloque COPIRELEM, Marseille, France.

Goulet, M.-P., Forest, M.-P., Voyer, D. et Cabot-Thibault, J. (soumis). Obstacles et leviers à la mise en place d'une approche d'enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes dans les classes du primaire : regard sur le point de vue des conseillers et conseillères pédagogiques. *Revue des sciences de l'éducation*.

Granger, N., Guillemette, S. et B-Lamoureux, B. (2021). *La fonction de conseillère ou de conseiller pédagogique au Québec*. Université de Sherbrooke.

Hanin, V., Lajoie, C., Bednarz, N., Saboya, M. et Bacon, L. (2021). Vers une meilleure compréhension du métier de conseiller pédagogique en mathématiques au primaire : une approche par le genre et les styles. *Phronesis, 10*(1), 52-71. https://doi.org/10.7202/1076182ar

Houle, V. (2024). *Quand 7 x 6 = 37 : partir des connaissances des élèves pour enseigner les mathématiques*. Éditions JFD.

Kaplinsky, R. (2019). *Open middle math: Problems that unlock student thinking, grades 6-12*. Stenhouse Publishers.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie, 42*(2), 7 – 23. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lester, F. K. et Charles, R. I. (2003). *Teaching mathematics through problem solving. Prekindergarten - Grade 6*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire*. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Gouvernement du Québec.

Orianne, J.-F. et Draelants, H. (2010). Les métiers du conseil : une « profession » consultante ? *Sociologies*. https://doi.org/10.4000/sociologies.3058

Small, M. (2013). *Making math meaningful to canadian students, K-8*. Nelson Education.

Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving: A pedagogical approach from Japan*. Routledge.

Theis, L. et Gagnon, N. (2013). *L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques*. Presses de l'Université du Québec.

Van de Walle, J. A. et Lovin, L. H. (2007*). L'enseignement des mathématiques : l'élève au centre de son apprentissage. Tome 1*. ERPI.

Vlassis, J., Mancuso, G. et Poncelet, D. (2014). Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques : analyse des croyances d'enseignants du primaire. *Cahiers des Sciences de l'Éducation, 36*, 143 – 174.

INTERROGER LE CHOIX DES EXERCICES DANS LES MANUELS : LE CAS DE L'ORDRE DES DÉCIMAUX EN CM2

Michella KIWAN-ZACKA
MCF, Université Paris-Est Créteil
LDAR
michella.zacka@u-pec.fr

Frédérick TEMPIER
MCF, CY Cergy-Paris Université
LDAR
frederick.tempier@cyu.fr

Résumé
Dans cette communication nous présentons les résultats d'une recherche visant à interroger les exercices d'entraînement proposés dans des manuels scolaires de CM2 lors de la séquence sur l'ordre des décimaux (comparaison, intercalation, encadrement, …). En nous appuyant sur la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Abboud-Blanchard et al, 2017) nous analysons les exercices selon leur niveau de complexité et selon les adaptations de connaissances que les élèves ont à mettre en œuvre. Les résultats mettent en évidence les points communs et les différences observées entre les sept manuels étudiés.

I - INTRODUCTION

Le travail présenté lors de cette communication porte sur l'analyse des exercices sur l'ordre des nombres décimaux dans une série de sept manuels scolaires de CM2. Les « exercices » considérés dans cette étude correspondent aux tâches proposées après l'introduction et la synthèse (ou le cours à retenir). Il peut s'agir d'exercices d'application, d'entraînement, mais aussi de problèmes, de « défis », de préparation à l'évaluation, etc.

Plusieurs raisons motivent notre choix d'étudier des manuels scolaires, et plus précisément les exercices qui y figurent. En effet, une part importante du travail mathématique dans les classes est consacrée à la résolution d'exercices, quelle que soit la démarche d'enseignement mise en œuvre : explication-application ou observation-compréhension-application ou problème-compréhension-application (Rey, 2001, repris dans Grapin et Mounier, 2018). Par ailleurs, dans les pratiques d'enseignement, il nous semble que les professeurs interrogent usuellement davantage le choix des situations d'introduction que celui des exercices d'application, malgré la place qu'occupe la résolution d'exercices dans les classes. Enfin, du côté de la recherche, il existe des travaux qui montrent que le choix et la réalisation des tâches jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation des connaissances. Nous nous appuierons sur le cadre de la théorie de l'activité pour notre étude (Rogalski, 2008 ; Robert, 2008 ; Abboud-Blanchard, Rogalski, Robert & Vandebrouck, 2017 ; Chesnais 2021) où l'activité d'un sujet est considérée comme tout ce qu'il développe lors de la réalisation de la tâche. Elle est provoquée par les tâches rencontrées et elle est source de l'apprentissage du sujet.

> *« On ne peut […] parler de conceptualisation que si la connaissance visée est disponible pour résoudre un certain nombre de tâches, y compris nécessitant des adaptations non indiquées. Pour y arriver, le moyen est alors un choix de tâches suffisamment variées en termes d'adaptations - associé à des déroulements qui laissent une « part suffisante » de ces adaptations à la charge des élèves. » (Chesnais, 2021, p.58)*

Dans l'étude de manuels, nous nous intéressons alors aux potentialités des tâches, sachant que les activités possibles des élèves dépendront aussi de la façon dont ces tâches leur seront proposées, c'est-à-dire des déroulements en classe.

Nous cherchons à savoir, dans les manuels de CM2, dans quelle mesure les exercices portant sur l'ordre des décimaux nécessitent-ils de mettre en œuvre une variété d'adaptations des connaissances, variété nécessaire à la conceptualisation de la notion de l'ordre des décimaux ?

Dans une première partie, nous présenterons quelques éléments de « relief » sur l'ordre des décimaux, ensuite nous expliciterons notre méthodologie et nos outils d'analyse et nous terminerons avec la présentation des résultats de nos analyses, avant la conclusion.

II - ÉLÉMENTS DE « RELIEF » SUR L'ORDRE DES DÉCIMAUX

Pour faire des analyses de pratiques d'enseignement ou de manuels en théorie de l'activité, il est nécessaire de s'appuyer sur une analyse du relief de la notion en jeu (Robert, 2008), c'est-à-dire une étude croisée entre les programmes et le savoir mathématique en jeu en tenant compte aussi d'aspects cognitifs liés aux difficultés des élèves.

1 Enjeux d'apprentissage de l'ordre des décimaux

La séquence d'apprentissage de l'ordre des décimaux est en général proposée dans les classes après un travail sur les fractions décimales et l'écriture à virgule des décimaux.

Nous identifions deux enjeux d'apprentissage : un approfondissement de la compréhension de l'écriture décimale (déjà amorcée avant la séquence sur l'ordre) et une appropriation des propriétés de l'ordre des décimaux (ordre dense).

Lors de cet apprentissage il y a des continuités et des ruptures avec les nombres entiers à négocier :

- Des continuités sur la signification de l'écriture à virgule des décimaux (Houdement et Tempier, 2023). En effet, l'écriture à virgule des décimaux est une extension de celle des entiers qui introduit de nouvelles unités (par fractionnement de l'unité simple en dixièmes, puis centièmes, …). On retrouve le principe de position (position des dixièmes, centièmes, … dans l'écriture décimale) et le principe décimal (relations entre unités, dixièmes, centièmes, …) pour ces nouvelles unités.
- Des ruptures sur l'ordre des décimaux (Brousseau, 1998) : la notion de « nombre suivant » (ou précédent) n'existe pas et on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux (densité de l'ensemble des décimaux dans lui-même).

Cela nous conduit à considérer que l'intercalation d'un décimal entre deux décimaux est particulièrement importante dans le travail sur l'ordre car elle permet de travailler les spécificités de l'ordre des décimaux par rapport à celui des entiers.

2 Les difficultés des élèves

Pour la comparaison des décimaux, de nombreuses recherches ont mis en évidence certaines règles implicites mobilisées par les élèves (par exemple : Grisvard et Léonard, 1981 ; Steinle, 2004 ; Roditi, 2007) comme :

- *Le plus grand nombre décimal est celui dont la partie décimale a le plus de chiffres* (2,7<2,31). Cette règle mobilise un raisonnement issu des nombres entiers (décimal vu comme deux entiers séparés par une virgule).

- *Le nombre décimal ayant le moins de chiffres après la virgule est le plus grand* (2,31<2,3). Ici les élèves considèrent que si des centièmes sont en jeu (ex : 2,31) le nombre est plus petit qu'un nombre où il y a seulement des dixièmes (ex : 2,3).
- *Le nombre décimal le plus petit est celui qui a 0 pour premier chiffre dans la partie décimale*. Cette règle est en général associée à la première règle citée et les erreurs associées à cette règle apparaissent alors quand l'élève a à comparer au moins 3 nombres (exemple d'erreur : 2,08<2,7<2,31).

Certaines de ces recherches montrent que ces difficultés peuvent être assez persistantes dans le temps, jusqu'à l'âge adulte parfois.

Des études montrent également des difficultés d'élèves pour la densité de l'ensemble des nombres décimaux dans lui-même : la nature discrète des nombres entiers est une source de difficulté à la compréhension de la propriété de densité des décimaux. Cela se traduit par le fait que certains élèves pensent que :

- Il n'y a pas de nombre décimal entre certains décimaux (Bana, Farell et McIntosh, 1997), par exemple entre 3,9 et 4 ou entre 0,63 et 0,64 ;
- Il y a un nombre fini de décimaux entre deux décimaux (Hart, 1981), par exemple neuf décimaux entre 0,41 et 0,42 (0,411; 0,412 ; …; 0,419).

3 Les attentes institutionnelles

3.1 Dans les programmes de cycle 3

Voici les attendus des programmes actuels pour le cycle 3 concernant l'ordre des décimaux (MENESR, 2015) :

- Repérer et placer un nombre décimal sur une demi-droite graduée adaptée. **Comparer, ranger**[1] des nombres décimaux.
- **Encadrer** un nombre décimal par deux nombres entiers, par deux nombres décimaux.
- Trouver des nombres décimaux à **intercaler** entre deux nombres donnés.

On peut noter que la compétence « **arrondir** », qui était citée[2] dans les programmes de 2002 et 2008, n'est pas présente dans le programme actuel de cycle 3 (MENESR, 2015).

Dans le document-ressource « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 » (MENESR, 2016), des références fréquentes sont faites à propos des erreurs courantes des élèves pour les différents types de tâches et une préconisation de prise en compte de ces erreurs par une attention à porter au choix des nombres dans les activités proposées :

> *Le choix des nombres dans les activités proposées doit s'appuyer sur les difficultés des élèves et les obstacles repérés par la recherche pour s'assurer qu'ils sont bien surmontés par tous. (MENSR 2016, p.14)*

Un exemple est proposé pour illustrer ce propos : comparer 31,7 et 31,28. Il permet de confronter les élèves à l'invalidité des règles établies au cycle 2 sur les entiers (nous y reviendrons dans la partie III).

[1] Nous mettons en évidence (en gras) les types de tâches que l'on trouve dans les programmes.

[2] L'intitulé exact des programmes de 2002 et de 2008 est : « Donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au dixième ou au centième près ».

3.2 Dans les attendus de fin de CM2 et l'évaluation de début de sixième

Enfin, dans les *attendus de fin de CM2* (MENESR, 2019) sont listés des exemples de tâches qui témoignent des « exemples de réussite » attendue d'un élève de CM2.

- Compare dans chaque cas les deux nombres :
  0,988 … 1,1 ; 123,9 … 12,992 ; 23,600 … 23,6
- Range en ordre croissant : 6,405 ; 64,05 ; 0,872 ; 6 ; 0,31 ; 6,4
- Encadre chaque nombre par deux nombres entiers consécutifs :
  … < 3,5 < … ; … < 102,005 < … ; … < 0,998 < …
- Encadre chaque nombre par deux autres nombres décimaux :
  … < 3,5 < … ; … < 102,005 < … ; … < 0,998 < …
- Trouve des nombres décimaux à intercaler entre les nombres donnés :
  3 < … < 4 ; 3,5 < … < 3,8 ; 102,05 < … < 102,1

Figure 1 : extrait des attendus de fin de CM2

Ces tâches sont des exercices d'application directe où il n'y a pas de prise d'initiative laissée à l'élève. Et, contrairement aux préconisations du document-ressource, le choix des nombres n'est pas toujours adapté si l'enseignant souhaite faire émerger les erreurs courantes des élèves. Par exemple comparer 6,4 et 6,405 dans la tâche de rangement peut être réussi avec une conception des décimaux comme un couple d'entiers.

Dans l'évaluation nationale à l'entrée en sixième de 2023, la seule tâche relative à l'ordre des décimaux est la suivante.

10/ Quel est le plus petit nombre parmi les suivants ?

☐ 1,082 ☐ 1,4 ☐ 1,09 ☐ 2,03

Figure 2 : extrait de l'évaluation sixième

Nous observons que le choix des nombres est intéressant car il peut permettre de repérer les erreurs courantes des élèves mais la tâche proposée reste un exercice d'application directe sans prise d'initiative à mettre en œuvre pour les élèves.

Que ce soient les exercices proposés dans les attendus de fin de CM2 ou dans l'évaluation sixième nous considérons qu'ils ne sont pas très « riches » pour permettre aux élèves de conceptualiser les connaissances sur les décimaux. Nous allons préciser dans la partie suivante ce que nous entendons par là, en présentant notre méthodologie et nos outils d'analyse des exercices.

III - MÉTHODOLOGIE, OUTILS D'ANALYSE DES MANUELS

Pour analyser les exercices des manuels sur l'ordre des décimaux, nous interrogeons l'objectif visé, le choix des nombres proposés, les connaissances que les élèves doivent mobiliser et le degré d'initiative à prendre pour réussir l'exercice. Nous catégorisons alors les exercices selon le type de tâche en jeu et nous les analysons selon leur niveau de complexité et le niveau de mise en fonctionnement des connaissances en jeu.

1 Catégorisation des exercices selon les types de tâches

Chaque exercice du manuel porte sur un ou plusieurs types de tâches (Chevallard, 1992) relevant de l'ordre sur les décimaux : **comparer** deux nombres décimaux, **ranger** des nombres décimaux dans l'ordre croissant ou décroissant, **intercaler** un nombre décimal entre deux nombres donnés, **encadrer** un nombre décimal par deux nombres entiers ou décimaux et **arrondir** un nombre donné à l'unité, au dixième ou au centième près (ce dernier type de tâches n'est pas un attendu des programmes actuels).

Dans un exercice, on distingue les tâches en fonction des types de tâches associés. Par exemple, dans un même exercice avec plusieurs questions, on peut trouver une tâche de comparaison et une tâche de rangement.

Nous appelons items, les différents cas à traiter pour une même tâche donnée. Par exemple, dans l'exercice 6 de la figure 3, il y a quatre items d'une tâche d'intercalation.

2 Niveaux de complexité d'une tâche

Les valeurs numériques utilisées dans les tâches sur l'ordre des décimaux influent sur l'activité mathématique de l'élève. Autrement dit, pour réaliser une tâche donnée, l'élève peut mobiliser des connaissances différentes, erronées ou pas, selon les valeurs numériques données. Par exemple, l'élève peut réussir la comparaison de 4,12 et 4,25, en s'appuyant sur des connaissances sur les nombres entiers : 12 < 25, donc 4,12 < 4,25. Mais ce raisonnement ne lui permettra pas de réussir la comparaison de 4,12 et 4,5 où il doit mobiliser des connaissances sur les nombres décimaux. Ainsi, en analysant le choix des valeurs numériques des tâches, nous définissons quatre niveaux de complexité en fonction des connaissances qui seront à utiliser par l'élève pour réaliser la tâche :

- **Niveau 0** : La tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les entiers. Le traitement d'un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule conduit à un résultat correct (comme dans le cas de l'exemple ci-dessus sur la comparaison de 4,12 et 4,25).
- **Niveau 1** : La tâche peut être réalisée par la mise en œuvre a minima de connaissances superficielles sur les décimaux. L'élève peut s'appuyer sur certains indices de surface dans l'énoncé le conduisant à un résultat correct. Par exemple, pour comparer 8,7 et 8,08, l'élève peut s'appuyer sur la présence du 0 au début de la partie décimale pour considérer que 8,08 est inférieur à 8,7.
- **Niveau 2** : La tâche peut être réalisée par la mise en œuvre a minima de règles ou de techniques apprises sur les décimaux. Par exemple, pour comparer 4,12 et 4,5, le traitement d'un décimal comme deux entiers séparés par une virgule conduit à un résultat erroné ; la mise en œuvre d'une technique sur les décimaux semble nécessaire pour réaliser la tâche.
- **Niveau 3** : La tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les décimaux. Elle nécessite des adaptations de règles ou de techniques apprises sur les décimaux[3]. Par exemple, pour intercaler un nombre entre 4 et 4,1, l'élève peut réaliser la tâche en se ramenant à intercaler un nombre entre 4,00 et 4,10.

3 Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Le troisième outil d'analyse que nous utilisons est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances en appui sur la théorie de l'activité et les travaux d'Aline Robert en particulier (Robert, 2008). Nous faisons ainsi une distinction entre une utilisation simple et isolée d'une connaissance « et le fait qu'elle nécessite une (ou des) adaptation(s) c'est-à-dire s'il faut l'appliquer d'une manière différente ou dans un contexte différent de celui dans lequel elle a été d'abord travaillée » (Chesnais, 2021).

En nous appuyant sur les travaux de Douady (1986) et de Roditi et Salles (2015), nous faisons également une distinction entre les dimensions outil et objet des connaissances. Nous distinguerons ainsi les **exercices-objet** où la connaissance mise en jeu n'est pas à utiliser pour résoudre un problème (il s'agit des exercices classiques d'entraînement hors contexte, comme : comparer 3,5 et 3,31) des **exercices-outil** (ou problèmes) où la connaissance est utilisée pour résoudre un problème (en contexte ou hors contexte).

[3] Pour les tâches de comparaison, nous n'avons pas identifié de niveau 3.

3.1 Analyse des exercices-objet

Pour analyser les exercices mobilisant la dimension objet nous différencions les tâches qui nécessitent une application simple et isolée des connaissances (niveau 1), un seul type d'adaptation des connaissances comme l'introduction d'un intermédiaire, d'une étape (non indiquée), d'un changement de registre ou de cadre, etc. (niveau 2), plusieurs types d'adaptation des connaissances (niveau 3).

Nous proposons en figure 3 trois exemples d'exercices (dimension objet) permettant d'illustrer cette classification. Le premier exercice est une application simple et isolée (niveau 1) : les élèves ont à appliquer une procédure d'intercalation d'un décimal entre deux décimaux sans mettre en œuvre d'adaptation par rapport à ce qu'ils ont appris à faire. Dans le deuxième exercice (niveau 2), les élèves doivent utiliser les étiquettes proposées pour écrire un nombre compris entre 743 et 744, ce qui nécessite d'adapter la procédure d'intercalation pour en déduire que la partie entière doit être 743. Dans le troisième exercice (niveau 3), les élèves doivent trouver toutes les façons possibles de compléter une double inégalité, ce qui demande là encore d'adapter la procédure d'intercalation ou de comparaison pour en déduire que le chiffre des centièmes est 0 mais aussi de s'organiser pour trouver toutes les possibilités pour le chiffre des millièmes, ce qui constitue un deuxième type d'adaptation.

niveau 1	6 **Recopie** et **complète** avec un nombre décimal qui convient. 29,5 < **29,6** < 29,7 **a.** 1,25 < … < 1,26 **c.** 12,59 < … < 12,61 **b.** 7,255 < … < 7,265 **d.** 28,1 < … < 28,2	Application simple et isolée de la procédure d'intercalation
niveau 2	11 * **Utilise les étiquettes pour écrire :** 3 4 7 8 , **a.** un nombre décimal compris entre 743 et 744. **b.** un nombre décimal compris entre 438 et 439.	Adaptation de la procédure d'intercalation : un nombre compris entre 743 et 744 a pour partie entière 743
niveau 3	13 **Trouve toutes les façons possibles de compléter l'inégalité.** 7,205 < 7,2●● < 7,21	Adaptation 1 : entre 7,205 et 7,21 on a 0 au chiffre des centièmes Adaptation 2 : organisation pour trouver toutes les possibilités (entre 6 et 9 au rang des millièmes)

Figure 3 : trois exemples d'exercices-objet

3.2 Analyse des exercices-outil (problèmes)

Pour analyser les exercices mobilisant la dimension outil, c'est-à-dire les problèmes, nous considérons aussi trois niveaux (qui sont équivalents aux précédents) :

- Au niveau 1, la tâche nécessite une mise en fonctionnement directe d'une connaissance. La tâche est une contextualisation d'une tâche de comparaison, rangement, etc. qui nécessite une application directe d'une procédure.
- Au niveau 2, la tâche nécessite une mise en fonctionnement d'une connaissance avec un seul type d'adaptation (conversion dans une autre unité de mesure, changement de cadre ou de registre, etc.).
- Au niveau 3, la tâche nécessite une mise en fonctionnement d'une connaissance avec au moins deux types d'adaptations.

Trois exemples de problèmes (exercices-outil) sont proposés en figure 4 afin d'illustrer cette classification.

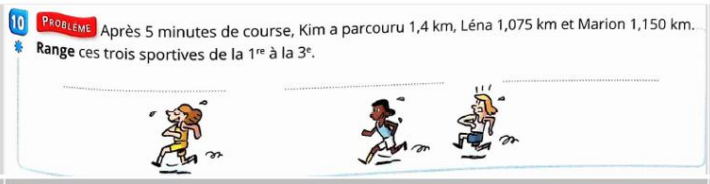
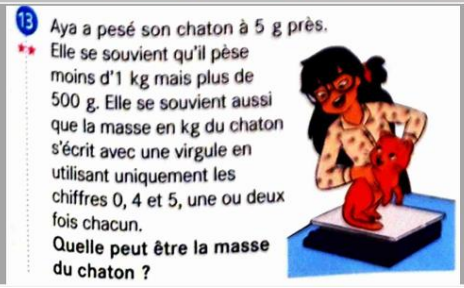
<table>
<tr><td>niveau 1</td><td> 
</td><td>Mise en fonctionnement direct de la procédure de rangement de nombres (contextualisation à la mesure de distances)</td></tr>
<tr><td>niveau 2</td><td>8 Donne le classement de cette épreuve de 100 m féminin.
<table>
<tr><td>Concurrentes</td><td>Lina</td><td>Gloria</td><td>Murielle</td><td>Myriam</td><td>Allison</td><td>Tiana</td></tr>
<tr><td>Temps</td><td>11 s</td><td>10,94 s</td><td>11 s et 1 centième</td><td>11,1 s</td><td>10,87 s</td><td>10 s et 9 dixièmes</td></tr>
</table></td><td>Adaptation : changement de registres (écriture en unités de numération/écriture à virgule)</td></tr>
<tr><td>niveau 3</td><td> 
</td><td>Adaptation 1 : conversion de g en kg, identifier nombre de chiffres après la virgule (3)
Adaptation 2 : un nombre compris entre 0,5 et 1 a pour partie entière 0 et 5 comme chiffre des dixièmes (prise en compte des chiffres proposés)</td></tr>
</table>

Figure 4 : trois exemples d'exercices-outil

4 Notre question de recherche

Nous pouvons maintenant préciser notre question : quelles différences et points communs existe-t-il entre les manuels en ce qui concerne les caractéristiques des exercices proposés sur l'ordre des décimaux ? Cela nous amène à interroger la couverture de l'ensemble des types de tâches préconisés dans les programmes et la place accordée à chacun, les niveaux de complexité des exercices proposés, les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu (objet et outil) et les relations entre niveaux de complexité et niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.

5 Liste des manuels étudiés

Nous avons sélectionné sept manuels de CM2 qui nous semblent souvent utilisés dans les classes et qui mettent en œuvre des « dispositifs didactiques » variés (Rey, 2001 ; Mounier et Grapin, 2018) :

- *A portée de maths* CM2, 2019, Hachette Education
- *Cap Maths* CM2, 2021, Hatier
- *Maths explicites* CM2, 2021, Hachette Education
- *Outils pour les maths* CM2, 2020, Magnard
- *Méthode de Singapour* CM2, 2019, Librairie des écoles
- *MHM* CM2, 2019, Nathan (https://methodeheuristique.com/)
- *Vivre les maths* CM2, 2018, Nathan

Nos données portent à la fois sur les exercices proposés dans les leçons sur l'ordre des décimaux dans le manuel élève mais aussi sur ceux qui sont parfois proposés dans des supports complémentaires (guide de l'enseignant, fichier photocopiable, etc.).

IV - LES RÉSULTATS

Nous commençons par comparer le nombre d'exercices proposés dans les manuels et leur répartition selon le type de tâches.

1 Nombre d'exercices proposés dans les manuels et répartition selon les types de tâches

Nous observons une différence importante dans les divers manuels étudiés au niveau du nombre d'items portant sur l'ordre des décimaux (figure 5) avec une variation allant de 73 à 250 items. A l'intérieur de ces différences sur le nombre d'items proposés nous observons également des différences dans les fréquences des items selon les types de tâches (figure 6).

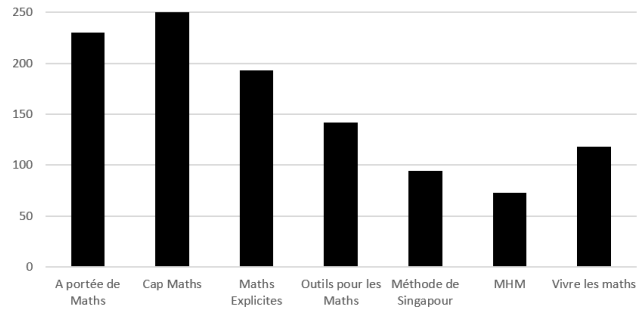


Figure 5 : nombre d'items proposés

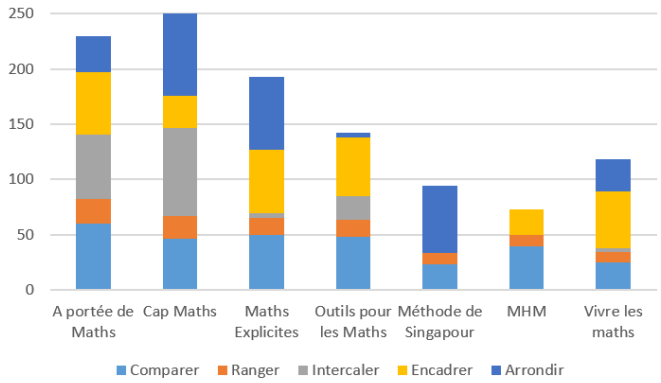


Figure 6 : répartition des items par types de tâches

Dans certains manuels, comme *A portée de maths* ou *Cap Maths*, il existe des items relevant des cinq types de tâches relatifs à l'ordre des décimaux, tandis que dans d'autres, comme *Méthode de Singapour* ou *MHM*, certains types de tâches ne sont pas représentés. Ceci nous amène à faire le constat que tous les manuels ne répondent pas de la même manière aux exigences des programmes scolaires. En effet, les exercices de comparaison et de rangement semblent être incontournables, ils sont proposés dans tous les manuels. Il en est de même des exercices d'arrondi, malgré l'absence de ce type de tâches dans les programmes actuels (MENESR 2016). Cependant, des types de tâches attendus des programmes sont absents de certains manuels ou très peu présents, comme l'intercalation et l'encadrement, malgré l'importance que revêt notamment l'intercalation pour la compréhension de la propriété de densité de l'ensemble des décimaux dans lui-même.

2 Niveaux de complexité des exercices des manuels

Nous allons maintenant analyser les niveaux de complexité des exercices proposés par les manuels.

2.1 Niveaux de complexité des items de comparaison

Le graphique de la figure 7 montre la répartition dans les différents manuels des items de comparaison selon leur niveau de complexité.

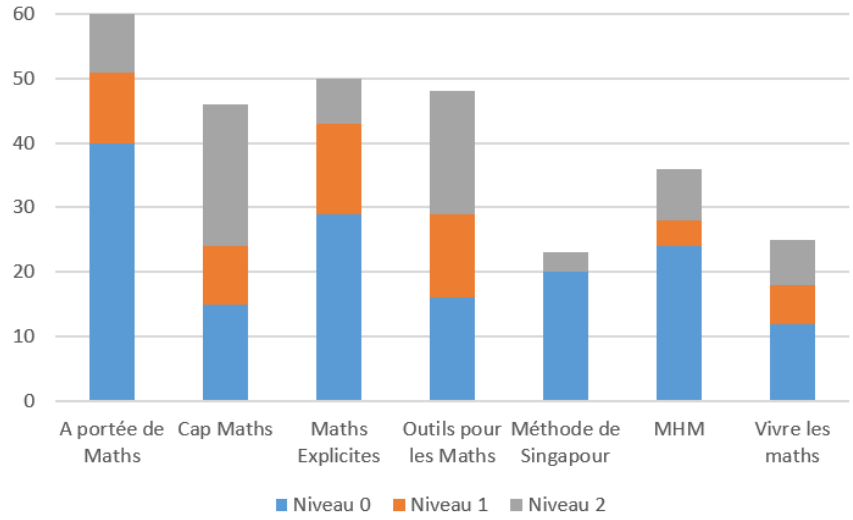


Figure 7 : Répartition des items de comparaison selon leur niveau de complexité

Six des sept manuels étudiés proposent des items de comparaison de niveaux de complexité variés (dans un manuel il ne figure aucun item de niveau 1). Toutefois, les items de niveau 0 et 1 sont plus fréquents que ceux de niveau 2 ; leur regroupement constitue plus de la moitié de l'ensemble des items de chaque manuel, avec des disparités selon les manuels. Par exemple seuls 13% des items sont de niveau 2 dans *Méthode de Singapour* alors qu'ils constituent 48% des items de *Cap Maths*. Or, rappelons que c'est la résolution des items de niveau 2 qui nécessite de la part des élèves de mobiliser leurs connaissances sur les nombres décimaux, et qui pourrait les amener à dépasser notamment les erreurs de comparaison liées au traitement des nombres décimaux comme deux entiers séparés par une virgule. Nous en déduisons un phénomène de sous-entraînement des connaissances à s'approprier sur les décimaux dans les exercices de comparaison.

2.2 Niveaux de complexité des items d'intercalation

Rappelons la grande disparité du nombre d'exercices d'intercalation : ils sont absents de deux des sept manuels étudiés et très peu présents dans deux autres (figures 6 et 8).

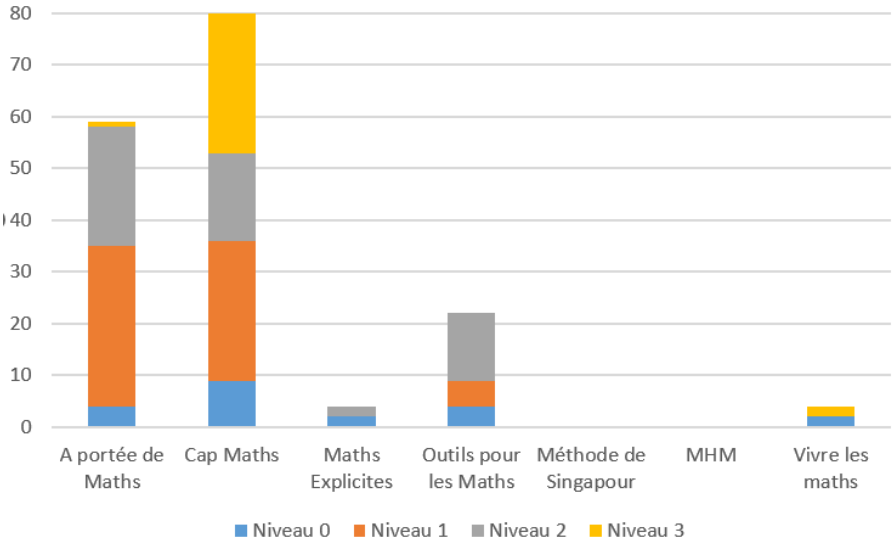


Figure 8 : Répartition des items d'intercalation selon leur niveau de complexité

Dans les trois manuels où ce type de tâches est entraîné (*A portée de Maths*, *Cap Maths* et *Outils pour les Maths*), le graphique montre que, contrairement aux items de comparaison, les items d'intercalation sont plutôt de niveaux de complexité non nul. Autrement dit, les élèves sont amenés à utiliser des

connaissances sur les décimaux pour réussir ces items. De plus, dans l'un de ces trois manuels (*Cap Maths*), le tiers des items proposés sont du niveau de complexité 3. Les deux autres manuels proposent principalement des items de niveau 1 et 2, susceptibles d'être réussis en appliquant des procédures d'intercalation apprises.

2.3 Niveaux de complexité des items d'encadrement

Six des sept manuels étudiés proposent des items d'encadrement (figures 6 et 9). Parmi eux, dans un manuel environ la moitié des items sont de niveau 1 (*Cap Math*), alors que dans les cinq autres les exercices de niveau 0 et 1 sont minoritaires. On trouve des items de niveau de complexité 3 dans quatre manuels.

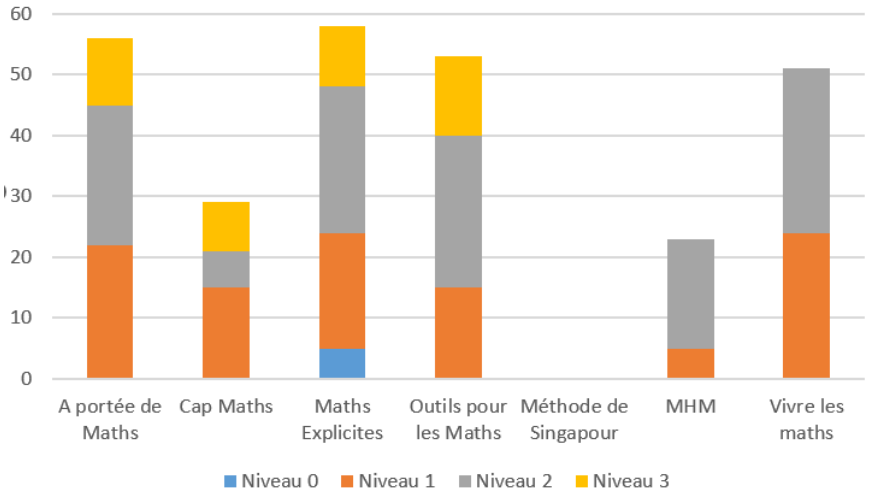


Figure 9 : Répartition des items d'encadrement selon leur niveau de complexité

3 Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices des manuels

Nous allons maintenant nous intéresser aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices proposés par les manuels.

3.1 Répartition des exercices-objet et exercices-outils

Il était prévisible de trouver davantage d'exercices mobilisant la dimension objet que d'exercices mobilisant la dimension outil (problèmes), comme le montre la figure 10. Mais le nombre d'exercices et de problèmes est très variable selon les manuels ainsi que le rapport entre le nombre de problèmes et d'exercices. Nous notons par exemple qu'il n'y a aucun exercice qui mobilise la dimension outil (problème) dans le manuel *MHM* et un seul dans *Vivre les maths* alors que les manuels *Cap Maths* et *Méthode de Singapour* en proposent 24. La part des problèmes dans l'ensemble des exercices proposés dans les manuels oscille entre 0% (*MHM*) et 26% (*Méthode de Singapour*).

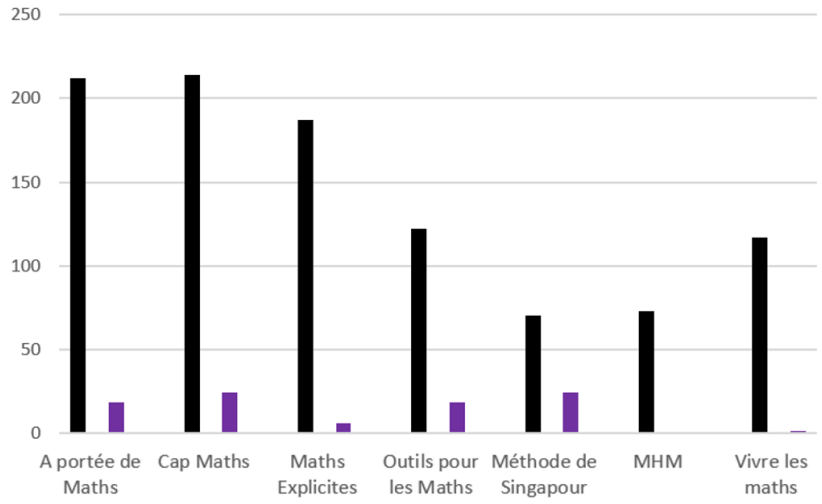


Figure 10 : nombre d'exercices-objet (en noir) et nombre d'exercice-outil (en violet)

3.2 Niveaux de mise en fonctionnement des exercices-objet

Le graphique de la figure 11 présente la répartition dans chaque manuel des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour les exercices relevant de la dimension objet.

Alors que tous les manuels consacrent plus de la moitié de leurs exercices d'entraînement à des applications simples et isolées des connaissances (niveau 1 de mise en fonctionnement des connaissances), dans quatre manuels (*A portée de Maths*, *Méthode de Singapour*, *MHM* et *Vivre les Maths*) cette proportion monte à plus de 90% des exercices.

Dans les trois autres manuels (*Cap Maths*, *Maths explicites* et *Outils pour les maths*) environ le tiers des exercices nécessitent un type d'adaptation à mettre en œuvre. Les exercices de niveau 3, qui nécessitent au moins deux types d'adaptation, sont quasiment absents des manuels sauf dans *Cap Maths* où ils représentent 12% des exercices-objets.

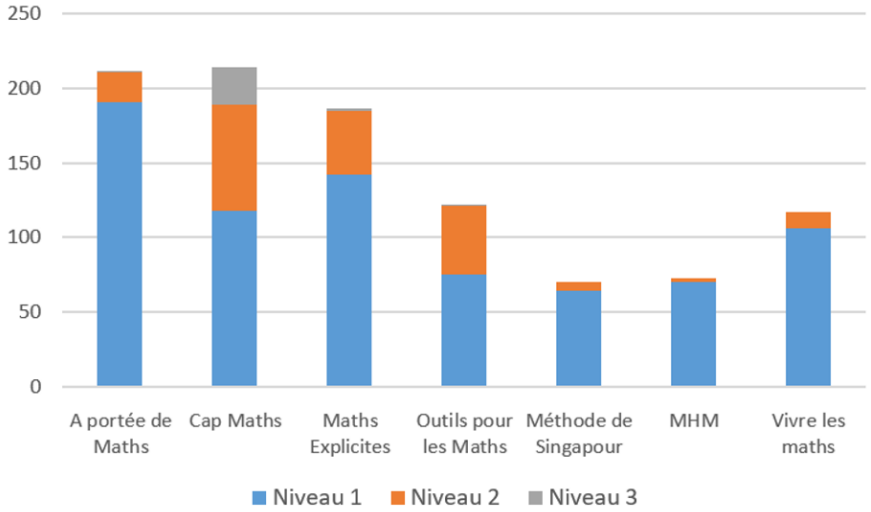


Figure 11 : niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour les exercices relevant de la dimension objet (en bleu application simple et isolée, en orange une adaptation, en rose 2 adaptations)

3.3 Niveaux de mise en fonctionnement des exercices-outil (problèmes)

Le graphique de la figure 12 présente la répartition dans chaque manuel des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour les exercices relevant de la dimension outil (problèmes).

Cinq manuels proposent plusieurs problèmes. Pour trois d'entre eux (*A portée de Maths*, *Maths explicites* et *Méthode de Singapour*), ces problèmes relèvent principalement du niveau 1, c'est-à-dire d'une mise en fonctionnement directe mettant seulement en jeu une contextualisation des types de tâches sur l'ordre.

Parmi les deux autres, l'un (*Outils pour les maths*) propose autant de problèmes de niveau 1 (8) que de niveau 2 (9) alors que l'autre (*Cap Maths*) propose principalement des problèmes de niveau 2 (19) qui nécessitent une adaptation des connaissances.

Dans l'ensemble des manuels, on trouve très peu voire pas du tout de problèmes de niveau 3, qui nécessitent plusieurs types d'adaptations.

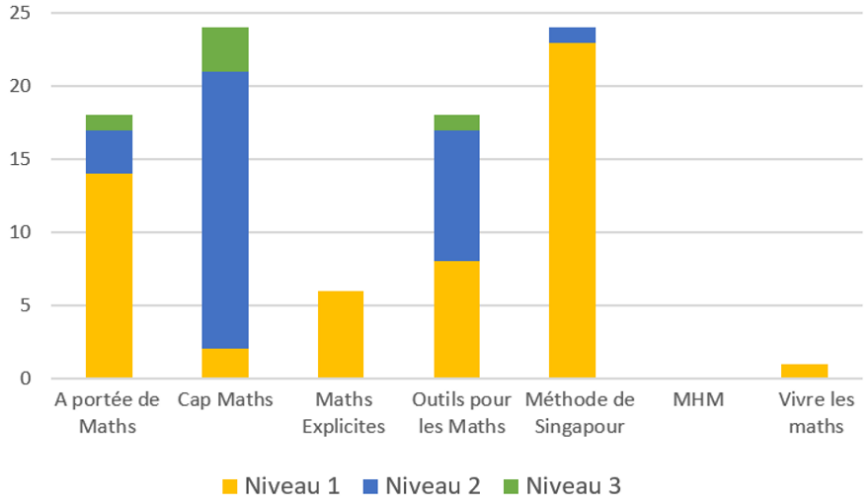


Figure 12 : niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour les exercices relevant de la dimension outil (problèmes) : en bleu mise en fonctionnement directe, en orange une adaptation, en rose deux adaptations

3.4 Croisement entre les niveaux de complexité et de mise en fonctionnement des connaissances

Nous avons également cherché des relations entre l'existence d'adaptations à mettre en œuvre dans les exercices (objet et outil) et le niveau de complexité de la tâche. Par exemple, on peut se demander si le fait de proposer des adaptations des connaissances dans un exercice (objet ou outil) n'amène pas les auteurs d'un manuel à réduire le niveau de complexité des tâches, en proposant des valeurs numériques rendant la tâche plus simple ?

Les deux graphiques de la figure 13 indiquent respectivement le nombre d'exercices-objet et d'exercices-outil mettant en jeu un niveau de complexité 2 ou 3.

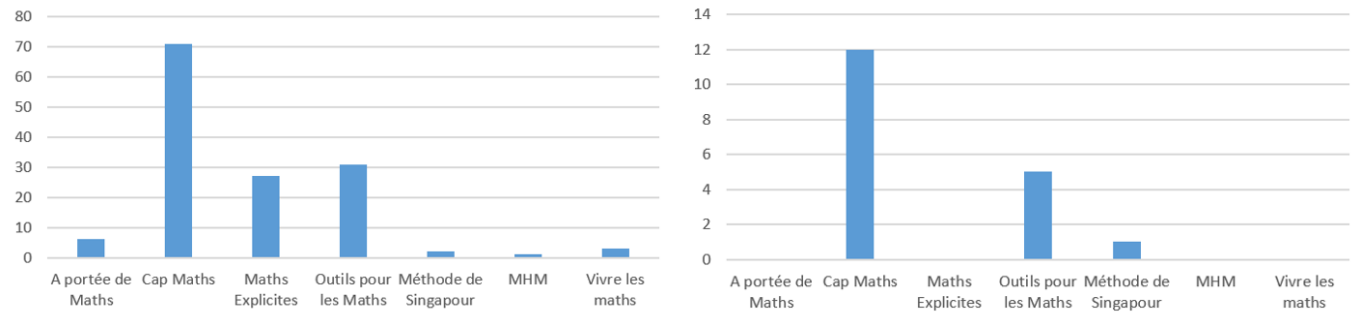


Figure 13 : nombre d'exercices-objet (à gauche) et d'exercices-outil (à droite) mettant en jeu à la fois une adaptation des connaissances et un niveau de complexité 2 ou 3

Pour les exercices-objet (graphique de gauche de la figure 13), dans quatre manuels (*A portée de Maths*, *Méthode de Singapour*, *MHM* et *Vivre les maths*), lorsqu'il y a une adaptation ou plus à faire, les nombres proposés dans l'exercice-objet sont de complexité 0 ou 1. Les connaissances sur les décimaux à mobiliser

par les élèves dans ces exercices sont donc assez faibles. Dans les trois autres manuels (*Cap maths*, *Maths explicites* et *Outils pour les maths*), la présence d'adaptations n'empêche pas les auteurs de proposer également un niveau de complexité important.

En ce qui concerne les exercices-outil, seuls les manuels *Cap Maths* et *Outils pour les maths* en proposent plusieurs qui ont à la fois une complexité liée au choix des nombres et un niveau de fonctionnement nécessitant au moins une adaptation.

Nous allons regarder plus en détail deux manuels contrastés sur ces questions : *À portée de maths* et *Cap Maths*. Dans le premier (*À portée de maths*), parmi l'ensemble des tâches proposées (exercices-objet et problèmes), la moitié ont un niveau de complexité supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire qu'ils nécessitent des connaissances sur les décimaux pour les réaliser. Parmi les exercices (objet et outil) qui nécessitent des adaptations, 24% seulement ont un niveau de complexité de 2 ou 3. Dans ce manuel, quand il y a une augmentation du niveau de mise en fonctionnement des connaissances, il y a une réduction de la complexité des connaissances à mobiliser, soit 6 exercices et aucun problème qui nécessitent au moins une adaptation et qui sont de niveau de complexité 2 ou 3. L'exercice 11 (figure 14) illustre ce phénomène : il y a bien une adaptation à mettre en œuvre pour réaliser les intercalations demandées (choix des nombres à partir des chiffres donnés) mais le choix de ne proposer que des intercalations entre des entiers limitent les connaissances à mobiliser sur les décimaux (ici un traitement de la partie décimale comme un entier permet de réussir la tâche).

Dans *Cap maths*, parmi l'ensemble des exercices proposés (objet et outil), 60% ont un niveau de complexité supérieur ou égal à 2. Parmi les tâches qui nécessitent des adaptations, 70% ont un niveau de complexité de 2 ou 3, soit 71 exercices et 12 problèmes qui nécessitent des adaptations et qui sont de niveau de complexité 2 ou 3. L'exercice 13 (figure 14) en fournit un exemple : il y a à la fois des adaptations à mettre en œuvre pour réaliser l'intercalation (choisir des chiffres et s'organiser pour trouver toutes les possibilités) et un choix des valeurs numériques qui amènent à utiliser des connaissances sur les décimaux (7,205 et 7,21 sont des nombres pour lesquels un traitement des parties décimales comme des entiers ne suffit pas pour réussir l'intercalation).

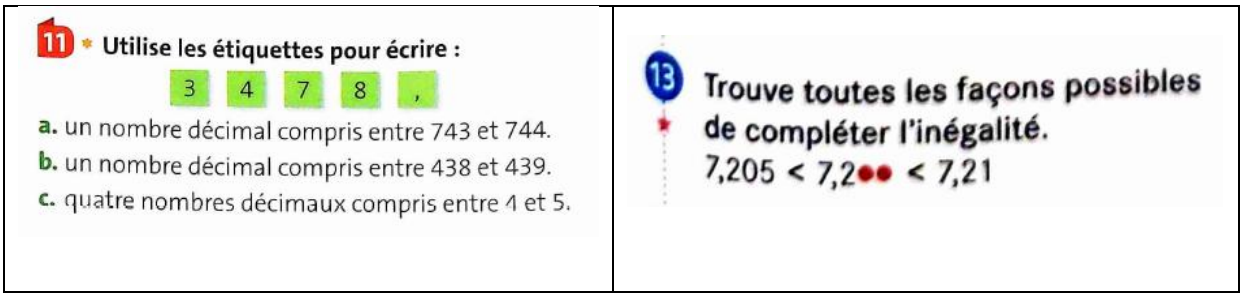


Figure 14 : deux exemples d'exercices extraits de A portée de Maths (à gauche) et de Cap Maths (à droite)

V - CONCLUSION

1 Bilan de l'analyse des exercices des manuels

L'analyse des exercices sur l'ordre des décimaux dans sept manuels scolaires de CM2, dont la liste est non exhaustive, montre quelques points communs mais surtout beaucoup de différences dans leurs propositions.

Tous les manuels analysés comportent des items sur la comparaison, le rangement et l'arrondi de nombres décimaux, contrairement à d'autres types de tâches comme l'intercalation et l'encadrement, qui ne figurent pas dans certains manuels, bien qu'ils soient préconisés dans les programmes scolaires. L'absence ou la quasi-absence d'items d'intercalation dans plusieurs manuels conduit à s'interroger sur l'appropriation par les élèves de la propriété de densité de l'ensemble des nombres décimaux dans lui-même.

Alors que tous les manuels consacrent plus de la moitié de leurs exercices-objet à des applications simples et isolées des connaissances (niveau 1 de mise en fonctionnement des connaissances), dans quatre manuels cette proportion monte à plus de 90% des exercices-objet.

Les exercices-outil proposés dans cinq manuels, demandent des niveaux de mise en fonctionnement très variables : seulement deux manuels proposent plus de la moitié de problèmes nécessitant au moins une adaptation des connaissances. Dans quatre des sept manuels, quand il y a des adaptations à mettre en œuvre dans les exercices-outil, les connaissances à mobiliser sur les décimaux sont assez faibles (complexité 0 ou 1).

Les différences observées dans les exercices proposés concernent aussi leurs niveaux de complexité. La plupart des items proposés pour la comparaison, ne nécessitent pas la mobilisation de connaissances sur les décimaux. Le traitement d'un décimal comme deux entiers séparés par une virgule peut suffire pour réussir les items proposés. Cela permet-il aux élèves de dépasser les erreurs courantes rencontrées lors de l'apprentissage des nombres décimaux, et de l'ordre sur les décimaux en particulier ? Aux enseignants de repérer ces difficultés ? Pour les exercices d'intercalation (quand il y en a) et d'encadrement, le niveau de complexité des exercices proposés est plus élevé que celui des exercices de comparaison.

Les propositions des manuels en termes d'exercices d'entraînement peuvent donc s'avérer très différentes d'un manuel à un autre, que ce soit au niveau du nombre d'exercices-objet ou exercices-outil proposés, des types de tâches travaillés, du niveau de complexité des exercices ou du niveau de mise en fonctionnement des connaissances. Il nous paraît important que les enseignants aient connaissance de ces différences pour leur permettre de faire des choix adaptés.

2 D'autres dimensions à interroger dans l'analyse d'exercices

Pour notre étude des exercices proposés dans les manuels nous avons été amenés à faire des choix sur les critères à prendre en considération. Il y a évidemment d'autres questions à prendre en compte lorsque l'on s'intéresse à cette question et qui pourraient constituer des prolongements de notre travail. En voici quelques-unes.

- Où se situent les problèmes proposés dans la progression des exercices proposés ? Nous avons observé que certains manuels ne les proposent qu'à la fin de la double page par exemple, ce qui peut évidemment avoir des conséquences sur la façon dont les enseignants vont les utiliser.
- Comment les exercices sont-ils répartis dans le « temps » c'est-à-dire dans la programmation du manuel ? Dans certains manuels le travail sur l'ordre se fait sur deux doubles pages, dans d'autres c'est beaucoup plus étalé dans le temps.
- Des questions se posent également sur l'articulation entre les exercices, les tâches d'introduction et les synthèses. Il serait aussi intéressant de regarder si les caractéristiques des exercices d'entraînement sont proches de celles des exercices d'évaluation : est-ce que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est le même, ou bien est-il plus faible ou plus élevé ?
- Nous avons remarqué que certains manuels indiquent un niveau de difficulté des exercices (par exemple avec un système de petites étoiles) : est-ce que cette classification pourrait être mise en relation avec nos outils d'analyse ?
- Notre étude portant sur un thème mathématique précis (ordre des décimaux), on peut se demander si à l'intérieur d'un même manuel les caractéristiques des exercices proposés sont différentes selon le thème abordé ou si au contraire on trouve une certaine régularité des manuels en termes de complexité et de niveau de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices proposés sur l'ensemble d'un manuel.

- Par ailleurs, si on regarde au-delà de la séquence sur l'ordre des décimaux, on peut se demander si la variabilité observée entre les manuels dans les caractéristiques des exercices concerne aussi les autres thèmes mathématiques : retrouve-t-on cette même variabilité pour la géométrie par exemple ?

Enfin, cette étude nous amène aussi à interroger les pratiques enseignantes. Quels choix des exercices des manuels font les enseignants ? Quelles autres ressources utilisent-ils (fiches sur le web) ? Le niveau initial des élèves (qui peut être très différent selon les classes) influe-t-il sur le choix des exercices proposés ? Quelle différenciation mettent en œuvre les enseignants pour tenir compte de l'hétérogénéité ? Quelles relations entre les tâches proposées et les apprentissages des élèves ?

Les questions sont nombreuses. Nous espérons que cette étude permettra d'ouvrir le champ de questionnement de la didactique des mathématiques sur ce thème des exercices.

BIBLIOGRAPHIE

Abboud-Blanchard, M., Rogalski, J., Robert, A., Vandebrouck, F. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant ordinaire utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *37*(2-3), 161 – 216.

Bana, J., Farrell, B. et McIntosh, A. (1997). Student error patterns in fraction and decimal concepts. Dans F. Biddulph et K. Carr (éd.), *People in mathematics education.* Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Rotorua, NZ (81 – 87). Rotorua : Mathematics Education Research Group of Australasia.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Carl, S., Ginet, S., Mazzari, M. et Patit-Jean, I. (2020). *Outils pour les maths CM2*. Paris : Magnard.

Castioni, L., Budon-Dubarry, H., Amiot Desfontaine, M., Aboukrat, Y. et Flament-Taillez, S. (2021). *Maths explicites CM2*. Vanves : Hachette Education.

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2021). *Nouveau Cap Maths CM2*. Paris : Hatier.

Chesnais, A. (2021). Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève. Dans H. Chaachoua, A. Bessot et al. (éd.), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesure* (Vol 1, 49 – 79). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73 – 112.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5 – 31.

Grisvard, C., Léonard, F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP*, *327*, 47 – 60.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London : John Murray.

Houdement, C., Tempier, F. (2023). Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! *Au fil des maths*, numéro spécial : Faites parler les nombres, *549*, 6 – 13.

Kritter, C., Caira, S. et Cerquetti-Aberkane, F. (2019). *Méthode de Singapour CM2*. Paris : La Librairie Des Ecoles.

Louis, C., Fayette, T., Jardy, J., Jardy, J. et Rouy, L. (2018). *Vivre les maths CM2*. Paris : Nathan.

Lucas, J.-C., Leclec'h-Lucas, J., Meunier, R., Meunier, L. et Trossevin, M.-P. (2019). *Le Nouvel A portée de maths CM2*. Vanves : Hachette Education.

MENESR (2015). Programmes d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). Arrêté du 9-11-2015 - J.O. du 24-11-2015. Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Consulté le

18/10/2024, Url : https://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/75/8/Programme_cycle_3_pour_B.O._1424758.pdf

MENESR (2016). Fractions et décimaux au cycle 3. Document ressource. Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Consulté le 18/10/2024, Url : https://eduscol.education.fr/document/16510/download

MENESR (2019). Attendus de fin d'année et repères annuels de progression. Note de service n° 2019-072 du 28-5-2019. Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Consulté le 18/10/2024, Url : https://eduscol.education.fr/document/14026/download

Mounier, É., Grapin, N. (2019). Que disent les recherches sur les manuels "Méthode de Singapour". *Au fil des maths, 532*, 6 – 13.

Pinel, N. (2019). *Méthode Heuristique de Mathématiques*. Paris : Nathan.

Rey, B. (2001). Manuels scolaires et dispositifs didactiques. Dans Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy, et J. Lebrun (éds.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (45 – 68). Toulouse : Octarès.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux : conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *12*, 55 – 81.

Roditi, E., Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation & formations*, *86*(11), 235 – 255.

Rogalski, J. (2008). Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. Dans F. Vandebrouck (coord.). La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (429 – 456). Toulouse : Octarès.

Steinle, V. (2004). Detection and remediation of decimal misconceptions. Dans B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, et P. Sullivan (éds.), *Towards excellence in mathematics* (460 – 478). Brunswick : The Mathematical Association of Victoria.

EVALUATION DE L'OUTIL NUMERIQUE *CALCULARIS* POUR SOUTENIR LES PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT ET D'APPRENTISSAGE DU CALCUL, EN 5-6P (CE2-CM1) EN SUISSE

Céline HUGLI
Chargée d'enseignement, HEP LAUSANNE
UER MS
celine.hugli@hepl.ch

Michel DERUAZ
Professeur associé, HEP LAUSANNE
UER MS
michel.deruaz@hepl.ch

Marie-Line GARDES
Professeure ordinaire, HEP LAUSANNE
UER MS
marie-line.gardes@hepl.ch

Jana TRGALOVÁ
Professeure associée, HEP LAUSANNE
UER MS
jana.trgalova@hepl.ch

Résumé

Calcularis[1] est une application qui permet de travailler l'apprentissage des nombres et des opérations à l'école primaire. Les activités d'entraînement qui y sont proposées sont personnalisées en fonction de la progression des apprentissages des élèves. Si l'application s'adapte aux besoins des élèves, l'enseignant a également la possibilité de suivre la progression des apprentissages des élèves au moyen du tableau de bord, appelé « Coach ». Cette option permet aux enseignants de mieux cibler leurs interventions en anticipant les représentations, adaptant les interventions, régulant les apprentissages. Le « projet *Calcularis* dans le canton de Vaud », initié en 2020, s'est d'abord focalisé sur l'évaluation des apprentissages des élèves utilisant l'application. Il vise maintenant à évaluer l'application du côté des enseignants, à savoir son utilité, son utilisabilité et son acceptabilité. Dans cette communication, nous présentons l'application et le tableau de bord de l'enseignant, puis nous rendons compte des résultats obtenus au sein du travail collaboratif que nous avons mené avec les enseignants de sept classes de 5-6P[2] du canton de Vaud et *Constructor* (le développeur de l'application) autour de la conception du tableau de bord nommé *Coach* ainsi que de son utilité, son utilisabilité et son acceptabilité.

[1] https://constructor.tech/de-ch/products/learning/calcularis

[2] Degrés équivalents en France : CE2-CM1

I - CONTEXTE

1 Les systèmes scolaires en Suisse

La Suisse est une confédération de 26 cantons. « *Les cantons suisses sont souverains en matière d'éducation (cf. art. 62, al. 1 de la Constitution fédérale). Une coordination s'avère toutefois nécessaire. Au niveau national, elle est assurée par la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP), réunissant les Conseillers et Conseillères d'État en charge de l'éducation dans les 26 cantons suisses, sur la base du Concordat scolaire de 1970.* »[3]

Quatre régions linguistiques recouvrent la Suisse (Figure 1) nécessitant une coordination spécifique : « *La CDIP est également organisée en quatre conférences régionales, assurant les réalisations et la coordination de proximité et se concertant dans des zones culturelles distinctes sur les dossiers et propositions soumis à la CDIP* »[3]



Figure 1. Répartitions géographiques des langues officielles en Suisse [4]

« *La Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) est composée des Conseillers, Conseillères d'Etat et Ministres en charge de l'éducation des cantons de Berne, Fribourg, Genève, Jura, Neuchâtel, Tessin, Valais et Vaud. En revanche, ce sont les autorités cantonales qui se chargent d'édicter les lois scolaires et règlements, qui prennent les décisions financières* »[3]. Dans le canton de Vaud, c'est la direction générale de l'enseignement obligatoire (DGEO[5]) qui met en œuvre ces décisions.

Le Moyen d'Enseignement Romand (MER)[6] de mathématiques officiel, nommé ESPER, est constitué d'un livre, d'un fichier et d'un espace en ligne pour les enseignants (Figure 2). Il s'agit d'un nouveau moyen d'enseignement diffusé en 2022.

[3] https://www.ciip.ch/La-CIIP/Portrait/Portrait-de-la-CIIP
[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Langues_en_Suisse
[5] L'équivalent de la DGEO en France serait la DGESCO
[6] Manuel

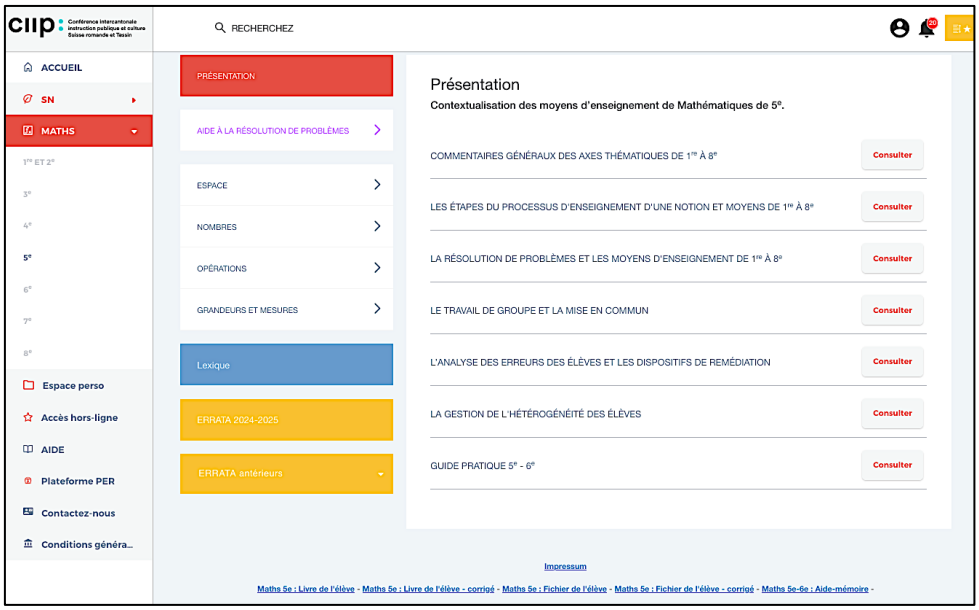


Figure 2. Page d'Accueil du moyen d'enseignement pour les enseignants

Les tâches proposées sont en lien direct avec les objectifs et progression d'apprentissage du Plan d'Étude Romand (CIIP, 2024). Ce MER apporte la garantie aux enseignants de proposer des tâches adaptées aux niveaux et besoins des élèves. Les enseignants restent libres de compléter avec d'autres contenus l'enseignement. Actuellement, aucune application numérique n'est proposée de manière officielle. Dans les faits, des applications telles que *GoMaths*[7], *Logiciel éducatif*[8] ou *Mon Ecole*[9], sont parfois utilisées par les enseignants.

2 L'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud

En 2018, le canton de Vaud a mis en œuvre une évaluation de l'enseignement des mathématiques (Dias, 2019). Ce travail a débouché sur 13 propositions pour améliorer l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants.

La septième proposition a mis en avant le besoin d'outiller les classes de supports à la pratique et à l'entraînement du calcul.

En 2021, le canton de Vaud a budgétisé le déploiement numérique de l'ensemble des classes du canton. Cette volonté d'harmonisation des équipements (5 tablettes par classe, TBI ou TNI) et d'une amélioration du réseau (raccordement au réseau) correspond à la nécessité d'améliorer l'enseignement à l'Éducation Numérique. Ce déploiement est toujours en cours.

C'est dans ce contexte que nous étions missionnés par la DGEO pour mener une évaluation de l'application *Calcularis* (présentée en section III) pour déterminer si et à quelles conditions elle peut être intégrée à l'enseignement des mathématiques.

[7] https://gomaths.ch

[8] https://www.logicieleducatif.fr/

[9] https://monecole.fr/

II - CADRE THEORIQUE

Pour l'évaluation de *Calcularis*, nous nous sommes intéressés aux trois dimensions (utilité, utilisabilité, acceptabilité) d'un environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH) décrites par Tricot et al. (2023) et leurs relations. Ci-après, nous définissons ces trois dimensions et présentons comment celles-ci orientent notre étude.

1 *Utilité*

L'utilité est présentée par Tricot et al. (2003) comme « l'efficacité pédagogique » (p. 391) de l'EIAH. La question soulevée par les auteurs est de savoir si l'environnement permet « aux personnes visées d'apprendre ce qu'elles sont censées apprendre » (ibid.). L'évaluation de l'utilité d'un environnement porte sur le contenu, le scénario didactique proposé, mais également sur l'adéquation entre le dispositif et le format de la connaissance à développer (savoir, savoir-faire, attitude…). L'évaluation empirique de l'utilité, selon les auteurs, « repose sur la comparaison de performances de groupes de sujets soumis à des tâches (e.g. résolution de problèmes) avant et après l'utilisation de l'EIAH avec ou sans utilisation » (p. 395).

Dans notre contexte, nous avons d'abord souhaité savoir si les élèves peuvent apprendre le calcul avec *Calcularis*. Cependant, en regard du lien enseignement-apprentissage, les réponses apportées ne seraient que partielles si nous ne nous intéressions pas aux enseignants pour cette question. Notre complément est donc de savoir si *Calcularis* permet aux personnes visées d'enseigner ce qu'elles sont censées enseigner.

2 *Utilisabilité*

L'utilisabilité est présentée par Tricot et al. (2003) comme « la possibilité de manipuler l'EIAH » (ibid.). Selon les auteurs, l'utilisabilité d'un EIAH « se joue au niveau de l'interface (sa cohérence, sa lisibilité, la façon dont elle représente les actions possibles, etc.), de sa navigation (la cohérence, la simplicité, l'exhaustivité des déplacements possibles, etc.) et de sa cohérence entre l'objectif et le scénario didactique » (p. 396). L'évaluation empirique repose, selon les auteurs, sur les observations lors des tests réalisés avec des utilisateurs et sur les entretiens avec ces derniers.

La question soulevée par les auteurs, à laquelle nous devrons répondre dans notre étude au sujet de l'utilisabilité, est de savoir si *Calcularis* est « aisé à prendre en main, à utiliser, à réutiliser, sans perdre de temps et sans faire d'erreur de manipulation » (ibid.), ceci du point de vue de l'élève et de l'enseignant.

Du point de vue de l'élève, *Calcularis* est-il aisé à utiliser ? Par exemple : les élèves pourront-ils se connecter et se déconnecter facilement ? *Calcularis* peut-il être utilisé de la même manière sur tablette ou sur ordinateur portable ? Sera-t-il aisé de démarrer avec l'application, avec les tâches ?

En regard du lien enseignement-apprentissage, nous souhaitons déterminer si *Calcularis* est utilisable du point de vue de l'enseignant également. Ainsi, du point de vue des enseignants, *Calcularis* est-il aisé à utiliser, par exemple pour gérer les séances mobilisant l'outil, pour suivre la progression des élèves ?

3 *Acceptabilité*

L'acceptabilité est présentée par Tricot et al. (2003) comme « la décision d'utiliser l'EIAH » (ibid.). Les auteurs précisent que l'acceptabilité est en partie déterminée par la perception de l'utilité et l'utilisabilité de l'EIAH, mais elle est également sensible à d'autres facteurs tels que la culture, les valeurs ou les pratiques des utilisateurs. Ainsi, la question soulevée par les auteurs, à laquelle nous devrons répondre dans notre étude au sujet de l'acceptabilité, est de savoir si *Calcularis* est « compatible avec les valeurs, la culture, l'organisation dans lesquelles on veut l'insérer » (ibid.).

A part la cohérence entre les objectifs des tâches de *Calcularis* et les objectifs du PER, nous pouvons soulever quelques questions concernant l'évaluation de l'acceptabilité qui mettent en évidence que tous les acteurs de la

situation enseignement-apprentissage sont concernés. Ce sont ces questions qui sont au cœur de notre étude, à savoir :

- auprès des élèves :
  - la récurrence des tâches et le rythme d'apprentissage dans *Calcularis* sont-ils des facteurs de démotivation pour les élèves ?
- Auprès des enseignants :
  - la récurrence des problèmes liés à l'environnement informatique (cités précédemment) est-elle un frein pour les enseignants ?
  - Les enseignants sont-ils prêts à investir de leur temps pour découvrir, rechercher des données dans le Coach ?
  - Les enseignants font-ils confiance aux données du Coach ?
- Auprès de la DGEO : le coût de *Calcularis* sera-t-il un frein à son déploiement dans les classes du canton de Vaud ?

La mission qui nous a été confiée et qui est de déterminer si et à quelles conditions *Calcularis* peut être intégré à l'enseignement est alors reformulée en questions de recherche suivantes :

- Dans quelle mesure *Calcularis* permet-il aux élèves de progresser dans leurs apprentissages du calcul (utilité côté élèves) ?
- Dans quelle mesure *Calcularis* aide-t-il les enseignants à organiser leurs enseignements de calcul (utilité côté enseignants) ?
- *Calcularis* est-il aisé à manipuler par les élèves et par les enseignants ? (utilisabilité)
- Dans quelle mesure l'intégration de *Calcularis* dans les pratiques des enseignants du canton de Vaud peut-elle être envisagée ? (acceptabilité)

Dans la section suivante, nous présentons l'application *Calcularis*.

III - APPLICATION NUMÉRIQUE CALCULARIS

L'application *Calcularis* est une application en ligne développée en Suisse depuis 2010, initialement dans le but de soutenir l'apprentissage de la représentation du nombre et du calcul auprès des enfants en difficulté. Elle est constituée d'un environnement pour l'élève et d'un tableau de bord, appelé Coach, pour l'enseignant. Ces deux composantes sont décrites dans ce qui suit.

1 Environnement pour l'élève

L'environnement pour l'élève de l'application *Calcularis* propose des tâches (Figure 3) organisées selon trois domaines d'apprentissage : le traitement des nombres, l'addition et la soustraction et enfin la multiplication et la division. Ces tâches sont proposées dans quatre domaines numériques : 0-10, 0-20, 0-100 et 0-1000.

Deux modes d'entraînement sont disponibles :

- le mode d'entraînement « guidé » qui propose des parcours d'apprentissage individualisés ;
- le mode d'entraînement « libre » qui permet à l'utilisateur de sélectionner la tâche souhaitée dans un domaine numérique de travail spécifiquement.

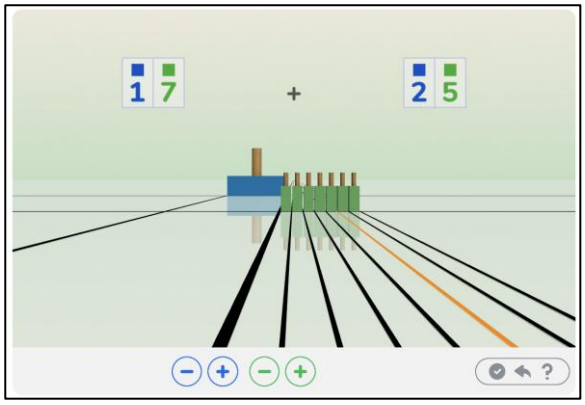


Figure 3. Capture d'écran de Calcularis présentant une tâche d'addition

Dans le mode guidé, selon les concepteurs, « *Calcularis* permet aux élèves de s'engager dans un apprentissage indépendant tandis que notre système de formation adaptatif ajuste le contenu spécifiquement à leurs besoins d'apprentissage individuels »[10]. 47 tâches ou jeux différents sont disponibles, permettant à l'élève d'interagir avec des représentations variées des nombres (en écriture chiffrée, sous forme de blocs de numération ou de collections structurées de balles par exemple). Des étayages, comme le code couleur ou des représentations alternatives, et le feedback soutiennent l'activité de l'élève.

2 Coach pour l'enseignant

Dans la version développée pour une utilisation en classe, un Coach a été développé pour permettre à l'enseignant de suivre la progression des apprentissages des élèves. La version initiale du Coach a cependant présenté des défauts au niveau de l'utilisabilité : de trop nombreuses informations étaient fournies ce qui rendait leur exploitation difficile (Hugli, 2023). Dans le cadre de notre étude, nous étions alors amenés à collaborer avec l'entreprise *Constructor* pour concevoir une nouvelle version du Coach. Cette re-conception visait à assurer l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité (cf. section II) du Coach. Dans la suite, nous présentons les principaux choix de conception.

Nous estimons que le Coach est utile pour un enseignant lorsqu'il lui permet de suivre la classe et chaque élève individuellement sans le surcharger et lorsqu'il l'aide à prendre des décisions. Pour ce faire, plusieurs choix ont été faits. Tout d'abord, l'enseignant doit avoir un accès rapide aux informations concernant la classe et chaque élève. A cet effet, l'écran principal donne une vue globale de la classe où l'enseignant peut voir l'activité des élèves (Figure 4, gauche) et leur progression (Figure 4, droite).

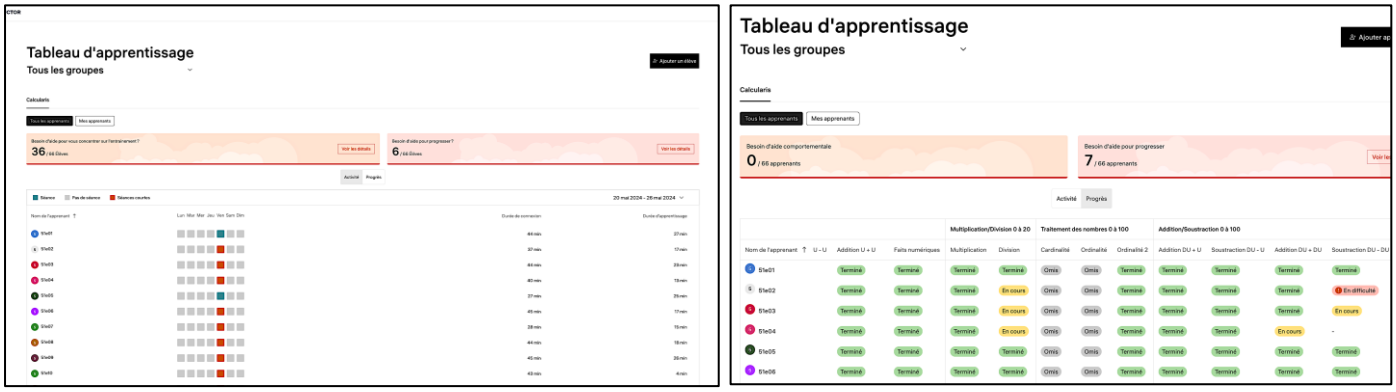


Figure 4. Écran d'accueil du Coach de Calcularis

[10] https://constructor.tech/fr/products/learning/calcularis

L'application collecte un ensemble de données pour chaque élève telles que le temps de connexion, le temps d'apprentissage actif, c'est-à-dire le temps où l'élève est en train de répondre aux questions posées, les tâches travaillées ou les réponses données. L'analyse automatique de ces données génère des indicateurs sur l'activité des élèves (par exemple engagement ou concentration) et sur la progression de leurs apprentissages. Un code couleur est associé à ces indicateurs :

- concernant l'activité de l'élève lors d'une séance de travail avec l'application, si celle-ci est habituelle, la case correspondante est coloriée en bleu, dans le cas contraire, celle-ci est rouge (cf. Figure 4, gauche). L'activité d'un élève est considérée comme inhabituelle soit par rapport à sa propre activité antérieure, ou par rapport à la moyenne des élèves ;
- concernant la progression des apprentissages, les compétences acquises dans un domaine sont coloriées en vert et marquées par « Terminé », celles qui sont en cours d'acquisition sont coloriées en jaune et marquées par « Actif » et enfin celles pour lesquelles des difficultés sont identifiées sont coloriées en rouge et marquées par « En difficulté » (cf. Figure 4, droite).

Dans un deuxième temps, il est important que l'enseignant soit alerté sur les difficultés des élèves. Il a ainsi été décidé d'attirer l'attention de l'enseignant dès la page d'accueil sur les élèves pour qui une activité inhabituelle a été détectée (barre d'alerte orange à gauche, cf. Figure 5) ou qui ne progressent plus (barre d'alerte rouge à droite, cf. Figure 5). Par ailleurs, en cliquant sur le bouton « Voir les détails », l'enseignant accède aux informations concernant les élèves repérés et il peut, s'il le souhaite, aller voir ce qu'il se passe pour chaque élève individuellement.

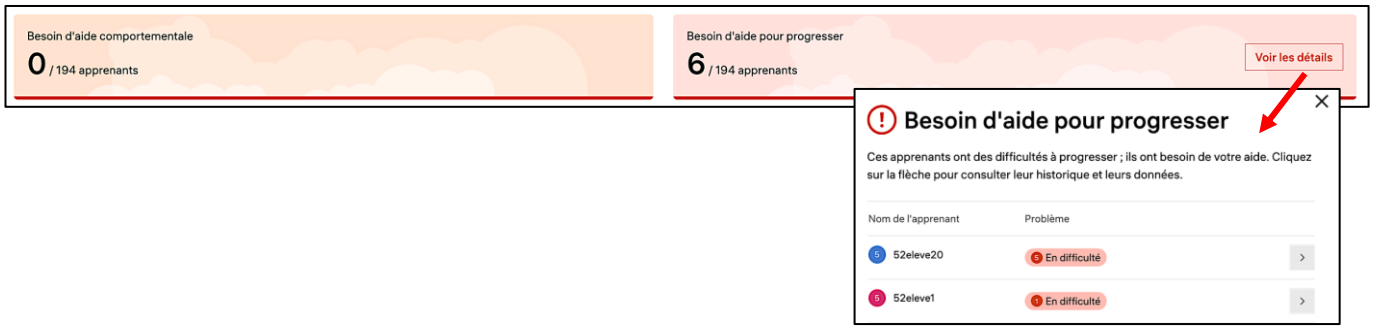


Figure 5. Alerte sur l'écran d'accueil du Coach de Calcularis

Une activité inhabituelle est détectée lorsqu'un élève présente trop de sessions courtes (moins de 5 minutes, une session complète durant 20 minutes), une faible productivité (trop peu de réponses fournies) ou trop de réponses incorrectes par rapport à la valeur individuelle ou à la valeur de référence générale. Concernant la progression des apprentissages, dès qu'un message marqué en rouge apparaît dans la vue d'ensemble de l'apprentissage, cela signifie que l'application n'a pas de solution pour soutenir l'élève de manière idéale et c'est précisément là que l'intervention de l'enseignant est nécessaire. Ce dernier va alors avoir besoin de comprendre où se situent les difficultés de l'élève. Dans ce but, le Coach doit guider l'enseignant vers les tâches problématiques.

Pour ce faire, des choix de navigation ont été faits (utilisabilité) pour permettre à l'enseignant un accès facilité aux sources de difficultés de l'élève, à plusieurs niveaux avec de plus en plus de détails. En un clic, l'enseignant accède à une vue d'ensemble des tâches problématiques (Figure 6, gauche), puis le clic suivant donne à voir les réponses de l'élève concernant une tâche qui peuvent alors être examinées plus en détail (Figure 6, droite). Ainsi, le Coach aide-t-il l'enseignant à identifier rapidement les besoins de l'élève (utilité) pour pouvoir apporter l'intervention adéquate.



Figure 6. Informations du Coach : tâches réalisées par un élève (gauche), réponses de l'élève (droite)

Afin d'aider l'enseignant à mieux comprendre les enjeux d'apprentissage des tâches proposées dans l'environnement de l'élève, une analyse didactique de chaque tâche est disponible dans le Coach (Figure 7). Cette analyse présente notamment l'objectif de la tâche et les éléments présents pour soutenir les apprentissages des élèves : les diverses représentations, l'étayage et les rétroactions.

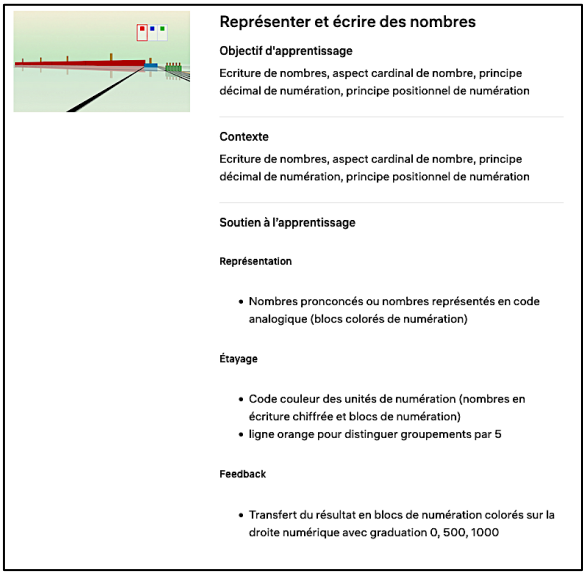


Figure 7. Analyse didactique des tâches présente dans le Coach

Ces informations sont susceptibles d'aider l'enseignant à penser à quel moment et dans quel but il serait pertinent d'utiliser l'application et de faciliter ainsi son intégration dans la progression de l'enseignant (utilité, acceptabilité).

IV - MÉTHODOLOGIE

Pour répondre à nos questions de recherche (cf. section II), nous avons réalisé une évaluation de l'application *Calcularis* pendant trois ans, de 2021 à 2024. Dans la suite, nous présentons notre méthodologie et les résultats, plus particulièrement concernant l'étude menée durant l'année scolaire 2023-2024.

1 Une évaluation en trois phases

A la suite des conclusions de l'*Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud* (2020), la DGEO du canton de Vaud a soumis un premier mandat (2021-2022) à la HEP pour sélectionner une application en

calcul pour les élèves de 5-6P[11]. Ce mandat nous demandait de comparer et évaluer le potentiel didactique des applications numériques *Mathéros*[12] et *Calcularis*[13] pour des élèves de 5-6P, puis d'évaluer l'impact de chacune d'elles sur la progression des apprentissages des élèves. Cette première étude a mis en évidence que *Calcularis* était l'application la plus pertinente des deux (Gardes et al., 2022a, b). Cependant ces seuls résultats ne permettaient pas de tirer des propositions pour assurer une intégration de cette application dans les pratiques enseignantes. Ces conclusions ont débouché sur un deuxième, puis un troisième mandat, présentés ci-dessous.

Un second mandat (2022-2023) a donc été proposé pour définir comment intégrer l'utilisation de *Calcularis* à l'enseignement, élaborer des scénarii pédagogiques et voir comment utiliser le Coach dans *Calcularis*. Il nous était aussi demandé de créer des documents de régulation (mise en œuvre dans les classes, gestion des activités *Calcularis*, mises en commun, remédiations, marches à suivre, etc.). Quelques résultats ont été obtenus (Hugli, 2023) concernant les documents de régulation et l'utilisation du Coach. En particulier, une utilisabilité satisfaisante de l'application du côté des élèves a été constatée, moyennant quelques gestes d'accompagnement de la part des enseignants. En revanche, l'utilisabilité du Coach a présenté de nombreux défauts, en effet nous avons observé des difficultés des enseignants à naviguer dans le Coach, à comprendre et trouver les analyses du Coach. Malheureusement, l'étude n'a toutefois pas pu aboutir en raison de problèmes techniques (qualité du réseau insuffisante dans l'école partenaire dans laquelle le déploiement numérique n'avait pas encore été mis en œuvre) Cependant, comme les questions liées au développement de l'Éducation Numérique font actuellement partie des thématiques prioritaires des autorités scolaires du canton de Vaud, un troisième mandat a été soumis à la HEP.

Ce mandat (2023-2024) reprend le cahier des charges du mandat précédent : définir comment intégrer l'utilisation de *Calcularis* à l'enseignement, élaborer des scénarii pédagogiques et voir comment utiliser le Coach dans *Calcularis*, créer des documents de régulation (mise en œuvre dans les classes, gestion des activités *Calcularis*, mises en commun, remédiations, marches à suivre, etc.). Les résultats obtenus ont également été communiqués dans un rapport (Hugli, 2024). La section suivante présente cette étude plus en détail.

2 Étude 2023-2024

Précisons qu'à la grille horaire scolaire pour les degrés 5-6P, cinq périodes de 45 minutes sont octroyées aux mathématiques[14]. Pour l'étude, nous avons demandé une utilisation hebdomadaire de *Calcularis* minimum de 20 minutes. L'utilisation devait se faire en classe. Un travail à domicile avec l'application ne devait pas être proposé par les enseignants. Dans les données, nous avons constaté que quelques élèves ont été actifs sur leur session depuis leur domicile.

2.1 Échantillon

Pour l'étude 2023-2024, voici un tableau qui présente la population à notre disposition :

Degré d'enseignement	**Nombre d'élèves**
5P (CE2)	84
6P (CM1)	75
Total	159

Tableau 1. Échantillon de l'étude 2023-2024

[11] Degrés équivalents en France : CE2-CM1

[12] https://matheros.fr

[13] https://constructor.tech/de-ch/products/learning/calcularis

[14] Domaines mathématiques de travail : numération - opérations - grandeurs et mesures - espace

2.2 Récolte des données

Pour cette étude, nous avons collecté des données quantitatives et qualitatives suivantes :

- données quantitatives auprès des élèves : passation de pré-tests et post-tests en calcul pour mesurer l'évolution des compétences en calcul des élèves (utilité de *Calcularis* côté élèves)
- données qualitatives auprès des enseignants concernant leurs perceptions du Coach (utilité et utilisabilité) : notes de leurs propos recueillis lors des cinq réunions, enregistrements des écrans lors de leur navigation dans le Coach avec « QuickTime Player »
- données qualitatives auprès des enseignants concernant leurs utilisations de *Calcularis* et du Coach : deux questionnaires en ligne, l'un sur la mise en œuvre de moments collectifs et l'autre sur l'exploitation des données du Coach pour la régulation de leur enseignement.

2.3 Résultats

Les données recueillies en pré-test et post-test dans les 10 classes de 5-6P participantes ont été analysées et les résultats sont montrés dans le Tableau 2. Précisons que ces tests sont identiques avant et après l'utilisation de *Calcularis* et pour toutes les classes de 5P et 6P. Ils sont administrés en format usuel sur une fiche et les calculs proposés sont proches de ceux attendus par le plan d'études en 6P. Lors des pré-tests, les élèves ont la possibilité de marquer par un point d'interrogation les calculs qu'ils ne savent pas encore effectuer car tous les savoirs nécessaires n'ont pas encore été enseignés au moment de la passation.

Degré	Classe	Moyenne	Médiane	Min	Max	ECT	Moyenne	Médiane	Min	Max	ECT
6P	1	16,1	19,5	5	23	5,86	19,4	23,0	6	24	5,99
6P	2	15,0	16,0	8	21	4,20	18,2	19,0	9	23	4,04
6P	3	14,8	13,0	9	22	4,29	17,8	19,0	5	24	4,80
6P	4	13,9	15,0	7	21	4,22	17,5	17,0	9	23	3,26
6P	5	11,8	9,0	6	21	6,49	15,0	18,0	6	22	7,48
6P	6	16,3	17,0	6	23	5,60	19,6	20,5	9	24	4,02
5P	7	11,8	11,0	3	20	4,53	17,2	17,5	8	23	4,13
5P	8	16,0	17	4	22	4,81	21,2	21,0	16	24	2,10
5P	9	16,4	18,5	6	24	5,96	20,2	18,0	14	24	3,08
5P	10	7	4,0	2,0	17,0	6,0	12,8	12,5	7	20	4,26

Tableau 2. Résultats des élèves au prétest (en vert) et au post-test (en orange) en 2023-2024

Ce tableau montre une progression des élèves dans toutes les classes. Les moyennes ont augmenté de 4 points en moyenne. On note une augmentation légèrement plus significative pour les classes de 5P (entre 3.8 et 5.8 points) en comparaison avec les classes de 6P (entre 3 et 3.6 points). Ces résultats, qui sont toutefois à prendre avec précaution en l'absence de classes témoins[15], tendent à montrer l'utilité de *Calcularis* au niveau de l'apprentissage du calcul.

[15] Ces résultats confirment ceux obtenus dans les deux études précédentes où des classes témoins faisaient partie du protocole expérimental.

Le prototype du nouveau Coach a été présenté aux enseignants lors d'une réunion en janvier 2024. Les enseignants, qui ont connu l'ancienne version du Coach, ont immédiatement constaté une amélioration au niveau de la présentation et la visualisation des données. Ils ont apprécié le code couleur qu'ils ont trouvé plus clair et plus cohérent. Ces retours des enseignants indiquent une amélioration de l'utilisabilité du Coach.

Au mois de mars 2024, le Coach a été mis à disposition des enseignants. Ils l'ont découvert lors d'une réunion en avril 2024. Alors qu'ils naviguaient dans le Coach en binôme, nous avons enregistré leur écran et leurs échanges verbaux.

L'analyse de ces enregistrements confirme les constats de l'amélioration du Coach (« Alors moi, je trouve que c'est bien plus agréable que l'autre »). Les enseignants estiment que les données qui se trouvent dans le tableau de bord sont utiles et correspondent à leurs besoins (« Tu vois en fait ce qu'il a fait, c'est super complet alors ! », « Voilà, historique, je vais essayer… ouais, c'est pas mal ça ! »). Toutefois, ils nous ont indiqué qu'ils ne les consulteraient pas après chaque séance de travail. Les données leur semblent utiles surtout dans le cas d'élèves en difficulté pour envisager de la différenciation.

La navigation dans le Coach n'est pas encore aisée (utilisabilité). Les enseignants n'accèdent pas assez rapidement à une donnée en particulier. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'appropriation de cet outil demande du temps et son utilisation régulière devrait permettre d'installer des routines et faciliter la recherche de l'information souhaitée. Les réponses aux questionnaires semblent aller dans le sens de ces hypothèses ; en effet, pour les enseignants il est nécessaire d'être formé à l'utilisation du Coach, d'une part, sur les aspects techniques (navigation, définitions, analyse des tâches), d'autre part, sur l'utilisation des données dans la planification des scenarii d'enseignement.

Tous les enseignants expriment vouloir poursuivre l'expérimentation l'année prochaine, ce qui indique que l'application *Calcularis* est acceptable pour ces enseignants.

V - CONCLUSION

Dans l'ensemble, bien que les enseignants n'aient pu utiliser *Calcularis* avec le Coach que sur une courte période, ils perçoivent son utilité pour soutenir leurs pratiques d'enseignement et pour aider à détecter les élèves qui ont besoin d'attention. En ce qui concerne l'utilisabilité, les enseignants reconnaissent que le Coach leur fournit beaucoup d'informations qu'ils doivent assimiler, ce qui demande du temps et des efforts. Les partenaires ont engagé des discussions sur le soutien qui pourrait être apporté aux enseignants pour faciliter l'utilisation de Coach.

Ces résultats n'auraient pu être obtenus sans un travail de collaboration entre les différents acteurs impliqués dans les études. Ces collaborations ne vont pas de soi, mais elles nous paraissent essentielles pour une intégration réussie de n'importe quel outil numérique. Plus particulièrement, la DGEO a pris en compte les remarques sur les conditions de travail des enseignants avec un environnement informatique et a mis en place des mesures pour rendre ce travail possible. La qualité du réseau n'était pas assez bonne pour permettre aux élèves de plusieurs classes de travailler au même moment avec *Calcularis*, pour leur permettre d'entendre les consignes correctement. La DGEO, le CIPEO[16] et la ville ont amélioré le débit du réseau et, parallèlement, le développeur a « allégé » son application. Les difficultés rapportées par les enseignants à *Constructor* concernant la navigation dans le Coach, la compréhension de l'interface, l'accès efficace aux données de progression d'apprentissage des élèves ou de la classe, ont incité le développeur à revoir complètement le produit, puis à améliorer progressivement la nouvelle version en tenant compte des retours des enseignants. Sans les retours des enseignants, sans leur implication et celle de leurs élèves, aucune collaboration n'aurait existé. Et, pour que les remarques des enseignants soient prises en compte par les

[16] Centre de l'informatique pédagogique de l'enseignement obligatoire

autorités et/ou des développeurs, il a fallu l'intervention de la HEP. Elle a pris le rôle de médiateur entre les différents acteurs.

Une nouvelle étude est en cours cette année scolaire 2024-2025. Son objectif est de déterminer les contours d'une formation continue adaptée, ou un accompagnement à un plus long terme des enseignants, pour une intégration réussie d'une application numérique dans l'enseignement. Cette étude devra aboutir à une création de scénarii d'enseignement mobilisant *Calcularis* et leur mise en œuvre et à un accompagnement de la prise de décisions des enseignants en appui sur les données du Coach.

VI - REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient la DGEO, les enseignants et les élèves des classes participantes et *Constructor*. Cette recherche a été partiellement financée par InnoSuisse (n° 69307.1 INNO-ICT).

VII - BIBLIOGRAPHIE

CIIP (2024). *Présentation générale du Plan d'étude romand*. https://per.ciip.ch/api/files/270 (consulté le 3 octobre 2024)

Dias, T. (Dir., 2019). *Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud*. Rapport du groupe de travail. Département de la formation, de la jeunesse et de la culture du canton de Vaud. https://www.hepl.ch/files/live/sites/files-site/files/uer-ms/BROCHURE%20mission%20math_interactif.pdf (consulté le 28 septembre 2024)

Gardes, M.-L., Hanssen, L., Deruaz, M., Hugli, C. & Dewi, J. (2022a). Évaluation de deux applications numériques pour le calcul en 5H-6H. *Revue de mathématiques pour l'école, 238*, 41-57. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2022.3571

Gardes, M.-L., Hugli, C., Dewi, J., Hanssen, L., & Deruaz, M. (2022b). Evaluation of a Computer-based Learning Program for Students with Mathematical Learning Difficulties. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. http://hdl.handle.net/20.500.12162/6676 (consulté le 28 septembre 2024)

Hugli, C. (Dir.,2022). *Rapport du projet Calcularis*. Rapport du groupe de travail pour la Direction générale de l'enseignement obligatoire

Hugli, C. (Dir., 2023). *Rapport du projet Calcularis*. Rapport du groupe de travail pour la Direction générale de l'enseignement obligatoire

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G., & Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. Dans C. Desmoulins, P. Marquet et D. Bouhineau (Eds.), *Actes de la conférence EIAH 2003* (pp. 391-402). ATIEF, INRP.

ACCOMPAGNER DES PRATIQUES DÉBUTANTES PAR UNE FORMATION À LA RECHERCHE, VERS LE DÉVELOPPEMENT D'UNE APPROCHE DIDACTIQUE

Karine BERNAD
MCF, Université de Montpellier
LIRDEF (EA 3749)
karine.bernad@umontpellier.fr

Nathalie BRIANT
PRAG, Université de Montpellier
nathalie.briant@unmotpellier.fr

Chantal TUFFÉRY-ROCHDI
MCF, Université de Montpellier
LIRDEF (EA 3749)
chantal.tuffery-rochdi@umontpellier.fr

Résumé
Cette communication présente une recherche en cours développée depuis janvier 2023, en réponse à un appel à projets « recherche-formation-terrain » initié par l'INSPE de Montpellier. S'inscrivant dans plusieurs travaux menés en didactique des mathématiques (Horoks & al., 2018 ; Hersant, 2020), cette recherche se donne comme enjeu principal, l'étude des effets de la formation initiale, dispensée au sein d'un dispositif promouvant une formation *à la recherche par la recherche*, sur les pratiques d'étudiant(e)s devenus des professeur(e)s débutant(e)s à partir de septembre 2023. Il s'agit d'analyser et d'interroger des pratiques de formation existantes, soutenues par une démarche de recherche, qui visent à outiller les étudiants de Master MEEF 1er degré pour l'observation de faits didactiques. L'ensemble des données recueillies concerne trois étudiantes ayant suivi cette formation au cours des deux années du MASTER MEEF de 2021 à 2023 et devenues professeures d'école stagiaires en septembre 2023. Un premier travail d'analyse croise leurs productions écrites, dans le cadre d'évaluations prévues par la formation initiale, avec des enregistrements sonores des soutenances lors de leur mémoire en mai 2023. Il en ressort une prise en considération, chez ces étudiantes, de l'utilité de travaux de recherche pour résoudre des problèmes professionnels. Nous conclurons en présentant des perspectives de recherche que nous voulons développer à partir d'une collaboration avec ces enseignantes, mise en place depuis janvier 2024.

Cette communication rend compte d'une recherche en cours, ayant comme enjeu de questionner les effets d'une formation dispensée auprès d'étudiant(e)s en Master MEEF premier degré promouvant une *formation à la recherche par la recherche* et les conditions sous lesquelles elle se réalise. Plus largement, cette recherche vise l'étude « du rôle, de la place et de la forme que peut/doit prendre l'initiation à la recherche dans le processus de formation et de construction des compétences professionnelles des enseignants » et des questions : « Comment la recherche en formation est-elle productrice de savoirs ? Comment l'écriture de recherche en formation participe-t-elle de la construction de savoirs professionnels ? » (Cadet et al., 2019, p. 19). Depuis plusieurs années, en didactique des mathématiques, plusieurs travaux (Butlen & al., 2004 ; Horoks & al., 2018 ; Sayac, 2019 ; Hersant, 2020, 2023) ont porté sur l'évaluation des effets de formations initiales sur les pratiques de professeur(e)s des écoles stagiaires. Par exemple, Hersant a cherché à « identifier les liens possibles » entre « les grands problèmes que le stagiaire se pose concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » et le dispositif de

formation « à et par la recherche » qu'il a suivi (Hersant, 2023, p. 137). Nous proposons, dans ce texte, de mettre en avant des éléments décrivant des pratiques d'étudiant(e)s de Master MEEF 1er degré ayant choisi de s'engager dans un travail de production d'un mémoire portant sur une thématique relative à l'enseignement des mathématiques et utilisant des résultats de recherches du champ de la didactique des mathématiques. Nous n'interrogerons pas ici le terme « mémoire » utilisé dans le cadre de la formation et nous nous référons à l'une des acceptions[1], proposée par le centre national de ressources textuelles et lexicales (CNTRL), qui le définit comme un « exposé qui attire l'attention de quelqu'un sur une question précise », et plus particulièrement comme une : « Dissertation sur quelque objet de science, d'érudition, de littérature rédigée à l'intention d'une société savante ou en vue d'un concours, d'un examen ».

Après avoir précisé le contexte dans lequel se situe cette recherche, nous présentons les deux axes que nous étudions et les cadres théoriques que nous mobilisons. Nous explicitons ensuite le dispositif d'enquête mis en place qui nous a permis de mener deux études de cas et de formuler des premières conclusions. Nous terminerons en décrivant des perspectives de recherche que nous envisageons de développer.

I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE EN COURS

Cette recherche a été initiée, depuis deux ans, par un dispositif de soutien à des projets « recherche-formation-terrain », proposé par l'INSPE de l'académie de Montpellier. Aussi se donne-t-elle comme objectif, le développement d'une collaboration entre des acteurs de la recherche, de la formation et du terrain. Le cadre des unités d'enseignements, dont l'intitulé est « Se former à la recherche par la recherche » et au sein desquelles nous intervenons, prévoit d'aider les étudiant(e)s à « s'initier à la recherche en éducation ; construire son projet de mémoire ; élaborer et rédiger son mémoire ; soutenir et valoriser son mémoire »[2] . Se donner ces objectifs de formation repose sur l'hypothèse qu'apprendre à articuler des savoirs théoriques et des savoirs pratiques permettra aux futurs enseignant(e)s de « s'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel »[3].

1 L'organisation des unités d'enseignement d'initiation à la recherche

La faculté d'éducation de l'université de Montpellier (FDE) organise les unités d'enseignement (UE) d'initiation à la recherche du master MEEF premier degré en communautés de recherche thématique (CRT), fédérées par le choix d'un axe thématique et pilotées par un(e) enseignant(e)-chercheur(e) et une équipe d'encadrement. Ces UE, qui se déroulent sur plus de 60 heures de travaux dirigés et de cours magistraux, correspondent à 20 ECTS dans le parcours de master des étudiant(e)s et conduisent à la production d'un mémoire, réalisé seul ou en binôme, en fin de deuxième année de master.

Les objectifs sont d'amener les étudiant(e)s à : adopter une posture réflexive sur l'enseignement ; acquérir des connaissances sur les pratiques enseignantes, sur les disciplines scolaires et sur les didactiques des disciplines ; analyser leurs observations en classe grâce à des appuis scientifiques. Plus particulièrement, le document de cadrage du mémoire[4] mentionne :

> *Les étudiants doivent développer une question de recherche à caractère professionnel [...] Ce travail doit faire prendre conscience aux étudiants qu'ils peuvent aller chercher et utiliser des résultats de recherche pour résoudre des problèmes professionnels.*

[1] https://www.cnrtl.fr/definition/memoire

[2] https://inspe-academiedemontpellier.fr/images/PDF/Cadrage_Memoire_Master_MEEF.pdf

[3] https://inspe-academiedemontpellier.fr/images/PDF/Cadrage_Memoire_Master_MEEF.pdf

[4] https://inspe-academiedemontpellier.fr/images/PDF/Cadrage_Memoire_Master_MEEF.pdf

Il s'agit d'un attendu que nous interrogerons dans cette recherche, à travers les discours écrits et oraux que les étudiant(e)s tiennent lors d'écrits intermédiaires, dans leur mémoire pendant la soutenance et lors d'entretiens menés durant leur année de stage.

2 La CRT « Expérimenter et manipuler en mathématiques »

La CRT dans laquelle les trois auteures interviennent en tant que formatrices et encadrantes de mémoires s'intitule « Expérimenter et manipuler en mathématiques du cycle 1 au cycle 3 ». Chaque année, entre 20 et 25 étudiants s'y inscrivent. Deux objectifs de formation plus spécifiques au thème de la CRT sont présentés aux étudiant(e)s concerné(e)s :

- Clarifier le rôle et la place de la manipulation dans les processus d'enseignement et d'apprentissage, en prenant en compte la spécificité des objets mathématiques ;
- Aider à la mise en œuvre d'un enseignement des mathématiques fondé sur la résolution de problèmes et à développer la dimension expérimentale des mathématiques.

Durant la première année de master, les modalités de travail alternent l'analyse de situations d'enseignement-apprentissage à partir de diverses ressources (situations de référence, manuels, vidéos de classe, textes officiels …) et l'étude d'articles de recherche en didactique des mathématiques. La seconde année de master se concentre sur l'élaboration, la rédaction et la soutenance du mémoire. Le travail au sein de la CRT permet de créer une dynamique collective au sein du groupe d'étudiants inscrits. Un encadrement plus personnalisé par un directeur ou une directrice de mémoire est également proposé à chaque étudiant ou chaque binôme d'étudiants.

3 Enjeux de formation du point de vue du formateur : développer une approche didactique

Pour analyser des pratiques des étudiant(e)s ayant suivi cette CRT, il est nécessaire de décrire les savoirs qu'elle vise. De manière globale, ce dispositif de formation vise à développer, chez les étudiant(e)s concerné(e)s, une approche didactique pour l'étude des faits d'enseignement-apprentissage en mathématiques. Plus précisément, nous voulons orienter les étudiant(e)s vers l'analyse des pratiques des élèves et du professeur dans une classe, selon deux axes d'étude, se situant dans la perspective des objectifs de formation précédemment cités : d'une part, examiner les objets, dont l'élève s'empare progressivement, qui nourrissent le travail mathématique et d'autre part, questionner l'existence de conditions lui permettant de prendre la responsabilité d'accomplir une tâche mathématique ou au contraire des conditions qui l'en empêchent. Ainsi, il s'agit, tout d'abord, d'amener les étudiant(e)s d'une part, à dépasser une fausse évidence d'origine culturelle selon laquelle il y aurait une opposition entre « concret » et « abstrait » (Chevallard, 1991) et d'autre part, d'aller à l'encontre du présupposé, consistant à dire que manipuler des objets matériels suffit pour rendre les élèves acteurs de leur apprentissage (Briand, 2019). Afin de leur faire éprouver qu'étudier des mathématiques nécessite d'expérimenter sur des objets de natures différentes**,** nous sollicitons les notions d'ostensifs, de non-ostensifs et leur dialectique que proposent Bosch et Chevallard (1999) pour enrichir leur travail d'analyse d'activités d'étude mathématique. En effet, l'une des perspectives formulées par Bernad (2021) à l'issue d'une thèse portant sur les conditions favorisant une mise en œuvre d'une démarche d'investigation au collège (MEN, 2008), est d'amener les enseignants à identifier les fonctions des ostensifs et de leur montrer comment ceux-ci alimentent l'activité mathématique selon leurs valences instrumentale et sémiotique. Nous considérons également comme enjeu de formation essentiel, celui de questionner le rôle de l'élève et le rôle du professeur pour repérer des conditions qui permettraient ou empêcheraient l'élève d'accomplir une tâche mathématique avec une autonomie relative. Aussi, nous nous référons à la topogenèse (Chevallard, 1985), comme l'un des processus participant à la mise en place de contrats didactiques dans une classe, en mettant en évidence la question de l'élargissement du topos des élèves et la complémentarité des processus de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998). Enfin, nous

amenons les étudiants à porter une attention spécifique aux ressources disponibles, utilisées et produites (Gueudet et Trouche, 2010), en particulier les supports de séances et le matériel de manipulation, et ce aussi bien dans les phases de préparation des séances que lors de leur mise en œuvre. L'ensemble des concepts didactiques que nous mobilisons permet d'étudier au sein de la CRT, les fonctions didactiques que peuvent assumer des phases de manipulation d'objets matériels organisées dans une classe.

Ces enjeux de formation constituent des repères pour saisir des traces du développement d'une approche didactique dans les pratiques des étudiantes concernées par notre dispositif d'enquête.

II - AXES DE RECHERCHE ET CADRAGES THÉORIQUES

1 Axes de la recherche

Partant des enjeux que s'est donné ce dispositif de formation, nous nous attachons à étudier les pratiques des étudiant(e)s l'ayant suivi selon deux axes.

Un premier axe interroge l'objectif tel que le formule le document de cadrage du mémoire, « faire prendre conscience aux étudiants qu'ils peuvent aller chercher et utiliser des résultats de recherche pour résoudre des problèmes professionnels » : Les étudiant(e)s devenus professeur(e)s débutant(e)s saisissent-il(elle)s l'utilité de s'approprier des travaux de recherche en didactique des mathématiques ? Comment ? Pour quels besoins professionnels ?

Un second axe questionne, au regard des enjeux de formation de la CRT, le développement d'une approche didactique dans leurs pratiques, telle que nous l'avons explicitée dans le paragraphe précédent :

- Ces étudiant(e)s interrogent-il(elle)s la manipulation d'ostensifs selon leurs fonctions et leur contribution à faire avancer l'étude d'une tâche mathématique ?
- Mettent-il(elle)s en relation les pratiques des élèves avec celles du professeur ? Leurs discours se réfèrent-t-il(elle)s aux processus de dévolution et d'institutionnalisation ? La nécessité d'élargir le topos des élèves est-elle prise compte ?
- Adoptent-ils une attitude questionnant les ressources qu'ils utilisent pour concevoir et mettre en œuvre leur enseignement ?

2 Cadrages théoriques

Pour l'étude des pratiques d'enseignement des étudiant(e)s concerné(e)s, que nous qualifions de « débutantes », nous sollicitons la théorie anthropologique du didactique (TAD) et l'approche documentaire du didactique.

2.1 TAD

Dans le cadre de la TAD (Chevallard, 2007, 2010, 2017), Chevallard définit :

> *Le didactique est cette dimension du réel social qui est coextensive à la présence d'une intention, portée par une personne ou, plus généralement, par une institution, de faire quelque chose pour que quelqu'un, personne ou institution, « apprenne » quelque chose.* (Chevallard, 2010, p. 138)

Les termes utilisés ici - *personne* et *institution* - renvoient à deux notions fondamentales sur lesquelles repose une modélisation du cognitif en TAD. Deux autres notions, celles d'*objet* et de *rapport à*, s'y rattachent pour décrire la relativité institutionnelle des connaissances. Dans *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques*, Chevallard définit un objet comme « toute entité, matérielle ou immatérielle, *qui existe pour au moins un individu.* Tout est donc objet, y compris les personnes » (Chevallard, 2003, p. 81). Le *rapport personnel* d'un individu *x* à un objet *o* « désigne le système […] de toutes les interactions que *x* peut avoir avec l'objet *o* », la notion de personne est définie comme « le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels […], à un moment

donné de l'histoire de x » (Chevallard, Ibid., p. 81). Il est important de souligner que « le système des rapports personnels de x évolue : des objets qui n'existaient pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de x change. Dans cette évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne » (Chevallard, Ibid., p. 81). En particulier, pour questionner le développement d'une approche didactique des trois étudiantes que nous avons suivies, nous chercherons à étudier comment s'élaborent les rapports personnels vis-à-vis de l'objet « Résolution de problèmes » se situant au centre de leurs préoccupations. Poursuivons en donnant la définition que Chevallard propose pour une *institution* :

> *Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres.* (Chevallard, 2003, p. 81)

Par exemple, peuvent être regardées comme institutions la CRT « Expérimenter et manipuler en mathématiques », et les Stages d'Observation de Pratique Accompagnée (SOPA) auxquelles participent ces étudiantes. Nous verrons plus loin que ces institutions sont évoquées dans leurs discours. Ainsi, en considérant que le rapport personnel à un objet d'un individu émerge de la pluralité des rapports institutionnels auxquels il a été assujetti, nous examinerons principalement des éléments qui participent de la construction de leur rapport à des objets étudiés pour l'élaboration du mémoire ; ce qui nous renseignera sur les connaissances qu'elles mobilisent, notamment celles reposant sur les processus de dévolution et d'institutionnalisation, et nous permettra de les étudier au regard des deux axes de recherche fixés.

2.2 L'approche documentaire du didactique

Le cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2010) propose de regarder l'activité du professeur dans sa globalité et considère que l'activité en classe n'est qu'un moment de celle-ci. Cette approche développe un ensemble de concepts permettant l'étude didactique du travail documentaire des enseignant(e)s, c'est-à-dire le travail qu'il(elle)s réalisent pour concevoir et mettre en œuvre la matière de leur enseignement.

Pour préparer sa séance, le professeur va collecter de façon réfléchie des ressources, les parcourir et en sélectionner certaines. Il va alors concevoir une nouvelle ressource (composée à partir d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinées) et une façon d'utiliser cette ressource. Il va ensuite la mettre en œuvre avec ses élèves et peut-être la partager avec d'autres enseignants, ce qui va souvent le conduire à réviser la ressource et/ou la façon de l'utiliser, parfois sur le moment en classe face aux réactions des élèves ou encore avant de la mettre en œuvre une seconde fois avec un autre groupe par exemple.

L'approche documentaire introduit une distinction fondamentale entre l'ensemble des ressources disponibles et le document que le professeur développe à partir de cet ensemble. La notion de document intègre à la fois une nouvelle ressource et un schème d'utilisation de cette ressource. La notion de schème reprise à Vergnaud (1996) est une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations. Gueudet et Trouche (2010) s'attachent en particulier à identifier dans le schème d'utilisation d'une ressource des règles d'action et des invariants opératoires. Les règles d'action sont des régularités observables dans l'activité de l'enseignant à travers différents contextes pour une même finalité. Les invariants opératoires sont les connaissances professionnelles de l'enseignant(e), entendues ici comme l'ensemble des connaissances susceptibles d'intervenir dans l'activité professionnelle des enseignant(e)s.

Le processus par lequel un document nait d'un ensemble de ressources est nommé genèse documentaire. Il combine deux sous-processus : l'instrumentation et l'instrumentalisation. Les ressources instrumentent le professeur en l'outillant et influencent ainsi son activité l'amenant à constituer de nouveaux schèmes

d'utilisation. En retour, le professeur s'approprie ces ressources et les adapte à son objectif d'enseignement ; il peut les prolonger ou les détourner de leur objectif premier, dans un processus d'instrumentalisation.

Dans leur travail de mémoire, les étudiant(e)s sont amené(e)s à concevoir une méthodologie pour éprouver leurs hypothèses de recherche en lien avec leur problématique. Cette méthode de recherche peut s'appuyer sur une analyse croisée de manuels ou sur la conception et la mise en œuvre d'une expérimentation menée dans leur classe. Les étudiant(e)s sont ainsi amené(e)s à parcourir, sélectionner et analyser des ressources. Ces ressources peuvent être institutionnelles comme les guides fondamentaux ou autres documents d'accompagnement des programmes[5]. Elles peuvent être liées à des collections de manuels scolaires comme les fichiers élèves ou les guides du maitre. Elles peuvent également être issues de la recherche en particulier des recherches d'interfaces autour d'échanges sur des pratiques.

Après l'obtention du concours, durant leur année de stage, les enseignant(e)s débutant(e)s sont amené(e)s à concevoir pleinement la matière de leur enseignement mathématique. L'attention que nous portons aux ressources utilisées et produites nous amène en particulier à identifier les connaissances professionnelles en jeu dans les genèses documentaires. Cela apporte des éléments de réponse à nos deux axes de recherche : Les étudiant(e)s devenu(e)s professeur(e)s débutant(e)s saisissent-il(elle)s l'utilité de s'approprier des travaux de recherche en didactique des mathématiques, comment et pour quels besoins professionnels ? Ces jeunes enseignant(e)s adoptent-il(elle)s une attitude questionnant les ressources utilisées pour concevoir et mettre en œuvre la matière de leur enseignement ?

III - MISE EN PLACE D'UN DISPOSITIF D'ENQUETE

Le cadrage des UE d'initiation à la recherche proposé par la FDE programme des évaluations qui prennent la forme de devoirs écrits que nous avons corrigés en tant que « directrices de mémoire ». Ces textes produits par les étudiantes concernées constituent des données pour mener cette recherche. En janvier 2022, celles-ci ont eu à produire une analyse croisée de deux articles qu'elles ont choisis. La rédaction d'un projet de mémoire, d'une douzaine de pages, a été demandé pour le mois de mai 2022. Il s'agit d'expliquer le choix du thème qu'elles envisagent d'étudier et de présenter une revue bibliographique de ressources qui leur semblent pertinentes d'utiliser. C'est ensuite au cours du mois de mai 2023 que le mémoire est rendu et soutenu à l'oral. Les soutenances ont été enregistrées. En amont de celles-ci, nous avons décidé de poser entre autres les deux questions suivantes ÷

1. Dans le cadre de votre de futur métier d'enseignant, si un de vos collègues exprime une difficulté qui concerne l'enseignement des mathématiques, qu'est-ce que vous lui conseilleriez ?
2. Quelles lectures de textes, du domaine de la didactique des mathématiques, vous ont aidé à mieux comprendre, au cours de cette année, ce qui peut se passer en classe à tel moment ? Ont fait écho à ce que vous avez pu observer en classe ?

Les réponses fournies à ces deux questions nous permettent d'avoir des informations sur l'utilité que des étudiantes perçoivent des textes issus de travaux de recherche pour répondre à d'éventuels besoins professionnels à venir ; ce dont nous allons rendre compte dans la partie suivante. Durant l'année scolaire 2023-2024, le dispositif d'enquête s'est poursuivi et s'est alors appuyé sur la mise en place d'un dispositif d'accompagnement des pratiques des étudiantes devenues Professeures des Écoles Stagiaires (PES) ; ce qui a donné lieu à la passation d'entretiens qui nous renseignent également sur la construction de leur rapport à des objets étudiés, comme le rôle de la manipulation pour l'enseignement des mathématiques.

[5] https://eduscol.education.fr/3107/guides-fondamentaux-pour-l-enseignement

Nous reviendrons, en conclusion, sur la mise en place de ce dispositif et développerons les perspectives dans lesquelles il s'inscrit.

IV - PREMIÈRES ANALYSES – ETUDES DE CAS

Nous proposons ici de rendre compte de l'étude menée dans le cas d'une étudiante et celui d'un binôme d'étudiantes, que nous désignons respectivement E_1, E_2 et E_3.

1 Le cas de E_1 devenue PE_1

L'étudiante E_1 a soutenu son mémoire en juin 2023. Celui-ci portait sur la résolution de problèmes au cycle 2 avec comme problématique : « la manipulation en groupe peut-elle favoriser la réussite individuelle des élèves dans la résolution de problèmes numériques au CP ? ». Dans la partie théorique sont développés des concepts de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) longuement développés lors des séances de la CRT, des travaux de recherche sur le travail de groupe (Connac, 2017) et sur la manipulation (Dias, 2012), ainsi que des apports sur des typologies de problèmes (Vergnaud, 1986 ; Houdement, 2017). L'expérimentation conçue et menée dans le cadre du mémoire concerne la résolution de problèmes additifs basiques (Houdement, 2017) et de types composition, transformation, et comparaison (Vergnaud, 1986). La méthodologie suivie repose sur une évaluation diagnostique individuelle, des séances de résolution de problèmes menées en groupes hétérogènes de quatre élèves et s'appuyant sur du matériel de manipulation (matériel multibase, boite à picbilles[6]), et enfin une évaluation bilan individuelle.

Dans la conclusion de son mémoire E_1 revient sur les lectures qui ont alimenté son travail ; éléments qu'elle reprendra lors de la soutenance orale.

> *La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau et la classification des problèmes additifs de Gérard Vergnaud et de Catherine Houdement ont été de réels points d'appuis pour moi. Enfin, j'ai retenu les méthodologies spécifiques préconisées par Sylvain Connac concernant le travail de groupe, ou par Thierry Dias sur la manipulation en mathématiques.*

Enfin, elle conclut sur l'impact positif des séances de résolution de problèmes en groupe sur la réussite individuelle des élèves.

> *Les deux expérimentations menées ont permis de mettre en évidence l'impact et le rôle de la manipulation en groupe dans la réussite individuelle des élèves lors de la résolution de problèmes.*

L'obtention du concours permet à cette étudiante de devenir professeur des écoles stagiaire à la rentrée 2023. Nous la nommons PE_1 à partir de cette étape. Notre objectif de recherche étant de percevoir l'impact de la formation initiale sur les pratiques débutantes, nous la sollicitons pour participer à un entretien. Celui-ci est mené en novembre 2023 dans la classe de CE1 dont elle a la responsabilité. En mathématiques, PE_1 dit utiliser la Méthode Heuristique de Mathématiques[7] (MHM) conseillée par ses collègues de CE1 de l'école.

> *Tous les CE1 font pareil, donc elles m'ont conseillé de faire ça pour suivre, pour pas être toute seule. Et c'est vrai que j'ai accepté.*

Lors de cet entretien, en réponse à une question sur ses pratiques concernant la résolution de problèmes avec la classe, PE_1 est en mesure de s'appuyer de façon pertinente sur les éléments de la classification de problèmes de Houdement (2017) en précisant n'avoir traité que des problèmes basiques. Elle dit également dans un premier temps avoir fait résoudre des problèmes additifs des quatre types de Vergnaud (1986) qui se révèlent après quelques échanges des problèmes de types composition de deux

[6] https://www.editions-retz.com/

[7] https://methodeheuristique.com/

états et transformation d'états avec recherche selon les problèmes de l'un des états ou du composé, de l'état initial, de l'état final ou de la transformation.

Elle met alors spontanément en avant un questionnement en lien avec des travaux de Nguala (2005) et Julo (2002) sur la multiprésentation et la construction d'une mémoire des problèmes rencontrées dans les séances de CRT et pour son propre mémoire :

> *Ce n'est pas par type de problème, c'est vraiment varié et c'est ça que j'aime bien parce qu'on ne reste pas que sur une façon de faire à rechercher le même état. Mais du coup c'est peut-être moins bien dans le sens où on ne passe pas de temps à se concentrer sur la méthode à appliquer pour trouver l'état initial ou l'état final. […] C'est pour ça que je trouve ça bien mais je pense qu'ils intègrent aussi un petit peu moins la bonne stratégie pour chaque type de problème, le fait de pas y passer trop de temps et trop d'entraînement. J'ai l'impression que c'est moins efficace dans ce sens-là, mais ça leur permet de voir un peu tout et de rebrasser tout le temps. Pour l'instant, je ne sais pas trop ce qui est le mieux…*

Son mémoire ayant mis en avant le travail de groupe, nous l'interrogeons sur le fonctionnement de la classe organisée en rangées frontales au tableau :

> *Alors au départ je voulais faire en ilot mais j'ai changé d'avis parce que c'était trop compliqué. En fait je l'ai fait le premier jour et ce n'était pas possible, ils se sont tous mis entre copains et ça parlait trop. Et puis beaucoup de collègues m'ont conseillé de commencer comme ça [frontal] pour apprendre à les connaître et moi après faire mes ilots. Donc je pense que plus tard je ferai des îlots mais pour l'instant non.*

PE_1 précise néanmoins faire travailler régulièrement les élèves en binôme ou en groupe pour les séances de mathématiques. Les groupes sont des groupes de niveau et l'enseignante dit alors se mettre avec le groupe le plus faible :

> *Alors ça dépend, parfois c'est en binôme, parfois ça va être en plus grand groupe de 5 ou 6. J'ai fait des groupes de besoins, de niveaux, et souvent ils sont en groupe […] je suis avec le groupe le plus faible.*

Elle explique également un mode de fonctionnement en ateliers tournants induit par la méthode MHM et, alors qu'elle avait dit suivre la méthode pas à pas, elle fait part ici d'une prise d'initiative :

> *Je fais une séance où il va y avoir 4 ateliers tournants et moi je prends un atelier, celui qui découvre la notion, le jeu. Mais c'est vrai que depuis quelques temps, je préfère espacer les séances d'ateliers et prendre moi un atelier de maths pendant qu'ils sont en atelier d'autonomie d'autres choses, je préfère moins les laisser en autonomie en maths.*

Les dernières questions de l'entretien portent sur la place et le rôle de la manipulation, objet de la CRT et du mémoire. *PE_1* dit disposer dans sa classe uniquement de jetons et de matériel multibase qu'elle propose principalement pour les élèves en difficultés. Lorsqu'elle est elle-même amenée à manipuler c'est avec les groupes des élèves plus faibles :

> *Je le fais surtout pour les élèves qui ont des difficultés mais je le ne fais pas systématiquement pour tout le monde […] Quand je prends les groupes un peu plus faibles, je vais manipuler en même temps. Ou pour leur montrer au départ, pour les lancer sur l'activité et après ils vont reproduire en fait.*

Le cas de *E_1*, devenue *PE_1*, nous semble montrer l'appropriation et l'utilisation pertinente de résultats issus de la recherche sur des typologie de problèmes rencontrés en particulier lors des séances de CRT et lors de lectures pour son propre mémoire.

La ressource que ses collègues l'ont incitée à prendre l'instrumentent en lui fournissant en particulier des supports de séances et une progression. Elle lui évite d'avoir à collecter, parcourir et sélectionner différentes ressources au moment de la préparation de la séance et d'avoir à concevoir des supports de séances. Ses connaissances lui permettent de l'utiliser en identifiant les types de problème résolus. Elles l'amènent même à questionner les choix de progression faits par la ressource utilisée. On note ici une mise en relation des pratiques des élèves avec celles du professeur, élément identifié dans notre recherche comme marqueur du développement d'une approche didactique. *PE_1* questionne les choix didactiques fait par la ressource utilisée et leurs effets sur les apprentissages des élèves. A ce moment de l'année, *PE_1* dit suivre la méthode mais commence à prendre des libertés sur le contenu des ateliers

tournants. Il est encore tôt pour parler d'une réelle instrumentalisation mais on perçoit des premiers signes montrant que PE_1 met la ressource à sa main.

Par rapport au travail mené pendant le mémoire, nous identifions deux éléments qui nous semblent être un recul par rapport aux pratiques mises en avant pendant la CRT et travaillées par PE_1 dans son mémoire : le travail de groupe limité à des groupes homogènes (de niveau, de besoin) et la manipulation réservée aux élèves les plus faibles. L'impact du terrain (de ses collègues) vient en début d'année freiner l'envie de PE_1 de faire travailler les élèves en ilot. Il induit également le choix de la méthode, induisant la ressource et la façon de l'utiliser.

2 Le cas de E_2 & E_3

Nous présentons maintenant des premiers éléments d'analyse issus de l'étude du cas d'un binôme d'étudiantes, ayant rédigé un mémoire dont la problématique étudiée a été formulée ainsi : « Comment les schémas de représentation influencent-ils l'activité de résolution de problèmes additifs au CE1 ? ». Aussi avons-nous décidé de rechercher, dans les écrits qu'elles ont produits au cours des deux années du master, des traces de la construction de leur rapport aux deux objets, « la résolution de problèmes mathématiques » (RPM) et « l'élaboration de schémas dans une résolution de problèmes ».

Dès le début du premier écrit rédigé en janvier 2022, qui consiste à analyser de manière conjointe deux articles de leur choix, les étudiantes E_2 & E_3 affirment :

> *En mathématiques, le problème est ce qui donne un sens à la connaissance. Ce sont des situations qui obligent les élèves à tâtonner, à se tromper, ou à recommencer. Les élèves se transforment alors en petits chercheurs qui expérimentent. En effet, les problèmes et la démarche de résolution qui en découle, permettent aux élèves de s'engager dans l'activité, d'y prendre part, d'adopter une posture active qui leur permet d'agir sur les mathématiques.*

Cet extrait met en évidence que E_2 & E_3 accordent une place essentielle à la recherche et la résolution de problèmes pour l'apprentissage en mathématiques et la justifient en la mettant en relation avec la nécessité d'élargir le topos des élèves, les élèves devenant des « petits chercheurs qui expérimentent ». La dimension expérimentale des mathématiques paraît être ainsi considérée comme essentielle pour permettre « aux élèves de s'engager dans l'activité, d'y prendre part, d'adopter une posture active qui leur permet d'agir sur les mathématiques ». Le rapport qu'elles entretiennent avec la RPM semble les amener ainsi à se référer au processus de dévolution pour souligner les conditions topogénétiques attendues dans le cadre d'une RPM. E_2 & E_3 poursuivent, en distinguant trois visées d'une activité de résolution de problème :

> *C'est pourquoi, l'objectif principal du problème ne réside pas dans sa résolution propre mais dans la démarche pour le résoudre. En effet, cette démarche de résolution est riche d'apprentissage : elle peut montrer la nécessité de découvrir de nouvelles notions ou de s'entraîner à mobiliser les connaissances déjà acquises ou tout simplement d'apprendre à chercher.*

Notons également que cette distinction permet d'étayer l'importance accordée à la « démarche » développée pour résoudre le problème posé et semble être rattachée à la reconnaissance de deux enjeux d'apprentissage : apprendre à chercher ce problème et le résoudre. Les étudiantes E_2 & E_3 précisent ensuite le cas des problèmes qui conduisent les élèves à découvrir de nouvelles notions :

> *L'apprenant doit pouvoir envisager une réponse grâce à ses connaissances antérieures : il doit comprendre la situation. Cette réponse initiale doit se révéler insuffisante ou inefficace pour résoudre la situation. L'apprenant doit percevoir l'insuffisance ou l'inefficacité de cette réponse initiale par les rétroactions du milieu et non par les interventions du maître.*

Ici, ces étudiantes sollicitent la notion de milieu en évoquant « les rétroactions du milieu » qui feront éprouver aux élèves la nécessité de rencontrer de nouvelles connaissances, tout en posant comme condition de limiter le topos du professeur. Apparaissent ainsi des traces de leur rapport à la RPM qui indiquent une mise en relation des pratiques des élèves avec celles du professeur ; aspect qui les intéresse

particulièrement du fait des difficultés rencontrées tant du point de vue de l'élève que du point de vue de l'enseignant et soulevé dans l'extrait ci-dessous :

> *Le problème est donc bel et bien une activité de manipulation/expérimentation qui s'avère être une tâche centrale dans la discipline. Pourtant, beaucoup d'enseignants sont en difficulté pour l'enseigner et beaucoup d'élèves sont en difficulté pour le résoudre. Ces éléments expliquent donc l'intérêt que nous portons à étudier cette notion.*

Lorsqu'est présentée l'analyse de l'un des articles choisis, celui rédigé par Houdement (2003) et intitulé « La résolution de problèmes en question », E_2 & E_3 évoque l'élaboration d'un schéma qu'elles semblent considérer, à ce moment-là, comme une possibilité offerte au professeur pour communiquer « vers les élèves » « les données du problème » :

> *Dans cet article, l'autrice nous propose des pistes d'analyse de la complexité de la résolution de problèmes. Catherine Houdement donne des clés aux enseignants entre autres afin d'exercer leur vigilance sur certains facteurs en s'appuyant sur les données du problème : mode de communication choisi par le professeur vers les élèves (oral supporté ou non par une illustration, écrit supporté ou non par un dessin, un schéma) et le contexte choisi.*

C'est en présentant l'analyse du second article étudié, de Balmes et Coppé (1999), dont le titre est « Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3 », que ces étudiantes questionnent la production d'un schéma. S'appuyant sur des propos que ces auteures tiennent à ce sujet, elles écrivent :

> *De plus, le fait de donner des schémas de résolution qui théorisent la méthode générale de résolution de problèmes donne l'illusion à l'élève que tous les problèmes peuvent être résolus par ce schéma. Ce sont les raisons principales pour lesquelles les auteures conseillent d'éviter de faire apprendre aux élèves ce genre de démarche trop normée.*

Ainsi, E_2 & E_3 mettent en évidence des pratiques enseignantes qui participeraient à associer l'élaboration d'un schéma avec celle d'une démarche générale de résolution d'un problème et semblent prendre en considération le choix des auteures citées de faire preuve, pour l'enseignant, d'une vigilance pour ne pas engager les élèves « dans une démarche trop normée ». L'intérêt que ces étudiantes portent à l'élaboration d'un schéma est confirmé dans le premier écrit du projet de mémoire rédigé en mai 2022 :

> *Nous avons pu observer lors de nos SOPA respectifs la difficulté éprouvée par les élèves à produire et exploiter efficacement un schéma de représentation pour parvenir à une résolution correcte du problème. C'est pour ces raisons que nous voulons axer notre recherche sur les activités de résolution de problèmes.*

Ce sont des observations réalisées dans le cadre des SOPA qui leur ont permis de constater « la difficulté éprouvée par les élèves à produire et exploiter efficacement un schéma de représentation » et qui ont contribué à les motiver à étudier les pratiques des élèves dans « les activités de résolution de problèmes ». Leur rapport à l'élaboration des schémas est également alimenté par la lecture de travaux de recherche, comme en témoigne l'extrait suivant, issu de cet écrit :

> *Suite à la lecture des articles cités plus haut, (Bosch & Chevallard, 1999 ; Julo, 2002 ; Houdement & Coppé, 2014), nous sommes convaincues du rôle essentiel que joue la représentation des problèmes dans la résolution. C'est pourquoi, nous postulons que la qualité de représentation du problème détermine en grande partie sa résolution.*

E_2 & E_3 précisent, dans la conclusion du mémoire rédigé en mai 2023, l'utilité qu'elles reconnaissent pour la notion d'ostensif :

> *Bosch et Chevallard (1999) abordent la notion d'ostensifs graphiques en tant qu'outils pour rendre visibles les opérations mentales des élèves que l'on peut mettre en lien avec les schémas de représentation.*

Cela les amène à procéder à plusieurs choix méthodologiques relatifs à la mise en place d'une expérimentation : former deux groupes d'élèves de « de niveaux équivalents » auxquels est proposé une

série de trois problèmes : l'une des séries est constituée de problèmes issus de manuels « qui proposent différents degrés de prise en charge de la tâche de représentation par le manuel » et une seconde série, qui utilisent « les mêmes données, la même situation que dans les problèmes extraits des manuels » mais pour laquelle est simplifié « à l'extrême le guidage initialement donné par le manuel pour inciter les élèves à s'appuyer sur leur propre stratégie de représentation pour résoudre le problème ». Ces choix méthodologiques attestent de la volonté de questionner la responsabilité que peut prendre l'élève pour produire un schéma ; ce que nous interprétons par la manifestation d'un rapport à l'élaboration d'un schéma dans une RPM marqué, un questionnement sur le topos de l'élève et sur son élargissement. L'analyse des productions écrites des élèves les amène, dans la conclusion du mémoire rédigé en mai 2023, à formuler que :

> *Les résultats a posteriori montrent que la production de schémas de représentation est plus élevée au sein du groupe version modifiée, qui laisse une plus grande autonomie aux élèves dans la résolution. Nous concluons donc que les élèves produisent plus facilement des schémas de représentation lorsque le degré d'ouverture de la tâche est plus grand.*

A la question, « Quelles lectures de textes, du domaine de la didactique des mathématiques, vous ont aidé à mieux comprendre, au cours de cette année, ce qui peut se passer en classe à tel moment ? », posée lors de la soutenance du mémoire en mai 2023, l'une d'entre elles E_2 dit :

> *Julo forcément dense/ résume toutes les approches historiques de l'enseignement de la résolution de problèmes mathématiques, comment les schémas de problèmes sont apparus, on voit que l'on met le doigt sur quelque chose de fondamental, que les activités de catégorisation et d'identification de la structure de problème mais il y a aussi le déboire de on va rentrer dans « tu vois ce problème tu fais ça », dans le mode d'emploi, c'est là que quelque chose m'a échappé parce que je ne vois pas comment éviter…*

Ce discours confirme à nouveau une prise en compte de l'importance d'élaborer un schéma, désormais mise en relation explicitement avec celle de reconnaitre un modèle utile pour la résolution d'un problème ; ce qui soulève, chez cette étudiante, des interrogations persistantes sur des pratiques d'enseignement qui conduiraient à enseigner un « mode d'emploi » pour résoudre tel problème. Nous faisons alors l'hypothèse qu'un tel rapport à la RPM et à l'élaboration de schémas dans une RPM témoigne de la nécessité d'anticiper les processus de dévolution et d'institutionnalisation au sein d'une telle activité et ainsi d'une intention de développer une approche didactique pour l'étude de faits d'enseignement.

V - PREMIÈRES CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce texte, nous avons mené deux études de cas qui ont permis de mettre en évidence des éléments des rapports que les étudiantes concernées construisent vis-à-vis d'objets étudiés pour le travail d'élaboration d'un mémoire. Ces analyses ont révélé que celles-ci se sont appropriées, au cours des deux années de Master, des résultats de recherche en didactique des mathématiques. Nous avons fait l'hypothèse que dans leurs discours s'expriment des questionnements à la fois marqués par le développement d'une approche didactique, notamment par l'anticipation de questions relatives aux topos de l'élève et du professeur et par la mise en relation des pratiques d'apprentissage avec celles d'enseignement, mais aussi par la confrontation aux pratiques de classe existantes au sein de l'établissement où elles exercent. Se situant dans la perspective d'étudier des pratiques de formation existantes pour outiller les étudiant(e)s de Master MEEF 1er degré pour l'observation de faits didactiques, facilitant l'entrée dans l'exercice du métier d'enseignant, cette recherche s'est poursuivie, durant l'année 2024, par la mise en place d'un dispositif visant à développer une collaboration entre 5 étudiantes devenues professeures des écoles stagiaires dont les trois étudiantes en question ici et les 3 chercheures, auteures de ce texte. Ce collectif ainsi constitué s'est réuni, en février 2024, afin que chacune exprime des besoins et formule des attentes vis-à-vis du travail collaboratif à venir. Un objectif d'étude commun a pu émerger : étudier comment la schématisation peut être une aide pour les élèves à résoudre un problème. Le collectif a fait le choix de s'engager dans l'étude d'un problème complexe pour le proposer ensuite aux

élèves des classes dont les professeures sont responsables. Une analyse *a priori* d'une mise en œuvre a été proposée par les chercheures, puis discutée collectivement en mars. Les séances consacrées à la recherche et la résolution de ce problème ont été réalisées par les enseignantes et observées par les chercheures au cours des mois de mai et juin. La réalisation de ces expérimentations nous semble, à ce jour, attester d'une volonté commune de travailler ensemble et permettre de mettre en place un espace de co-interprétation partagé (Bednarz, 2013) des faits d'enseignement et d'apprentissage que le collectif aura repérés. Nous faisons également l'hypothèse que la question partagée d'étudier les pratiques des élèves au regard des schémas qu'ils produisent nous amènera à interroger, au sein de cet espace, l'utilité des travaux de recherche que reconnaissent les enseignantes et le développement d'une approche didactique dans leurs propres pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

Balmes, R. M., & Coppé, S. (1999). Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3. *Grand N*, *63*, 39-57.

Bednarz N. (coord.) (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement.* Paris : L'Harmattan. Col. Savoir & Formation.

Bernad, K. (2021). Besoins mathématiques et didactiques du professeur dans le cadre de mises en œuvre d'un parcours d'étude et de recherche en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *41*(1), 97-141.

Briand, J. (2019). Manipuler en mathématiques... oui mais. *Au Fil des Maths*, *531*, 6-9.

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen, D., Masselot, P., & Pezard, M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs des écoles débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation. *Recherche et formation*, 44, 45-61.

Cadet, L., & Lavieu-Gwozdz, B. (2019). Former à et par la recherche : Quels objectifs, quels dilemmes, quels dispositifs ? *Le français aujourd'hui*, 204, 5-16.

Chevallard, Y. (1991). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, *30*(5), 5-15.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. *Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (705-746). Universidad de Jaén : Gráficas « LA PAZ ».

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous?. *Éducation et didactique*, *4*(1), 139-148.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*, 27-65.

Connac, S. (2017). *La coopération entre élèves*. Futuroscope : Éditions Canopé,

Dias, T. (2017). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris : Magnard.

Grau, S. (2020). Quelles conditions pour une formation initiale des enseignants du 1er degré en didactique des mathématiques par le travail sur le mémoire?. *Revue de Mathématiques pour l'École*, *233*, 28-38.

Gueudet, G et Trouche, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes

Hersant, M. (2023). Former les professeurs des écoles au regard didactique en mathématiques ; étude d'une dynamique de problèmes. Dans Fabrice Vandrebrouck ; Marie-Line Gardes. *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Preuves, modélisation et technologies numériques*., Volume des séminaires et posters, 133-142.

Hersant, M. (2020). Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : Matérialité des situations et chronologie. *Revue française de pédagogie*, *208*(3), 17-30.

Horoks, J., Couchot-Schiex, S., & Grugeon-Allys, B. (2018). De l'utilité de l'initiation à la recherche en formation initiale en master MEEF 1. Ce qu'en disent les professeur. es des écoles stagiaires. *Questions Vives. Recherches en éducation*, *30*.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, *71*, 7-23.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59-78

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31-52.

Ministère de l'Éducation Nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement des mathématiques. BOEN n°6 du 28 aout 2008. Consulté à l'adresse

http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

Nguala, J.B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, *76*, 45-63.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Grand N*, *38*, 21-40.

ACCESSIBILITÉ D'UN ENSEMBLE DE RESSOURCES DE FORMATION À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ÉCOLES EN FORMATION INITIALE

Jean-Philippe GEORGET
MCF, Inspé Normandie Caen
CIRNEF UR 7454
jean-philippe.georget@unicaen.fr

Résumé
La formation initiale des professeurs des écoles a été profondément remaniée ces dernières années et ce remaniement s'est accompagné d'une réduction substantielle du volume de formation à l'enseignement des mathématiques des étudiants et des professeurs des écoles stagiaires.
Ce contexte a conduit depuis 2016 à mettre en œuvre à l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation (Inspé) de Caen un nouveau dispositif de formation s'appuyant sur un ensemble de ressources diffusé en tout début d'année aux étudiants et aux stagiaires.
Ce dispositif s'inscrit dans un projet de recherche à long terme (Georget, 2009) visant à améliorer l'ergonomie des ressources pour enseigner, notamment leur accessibilité, et à enrichir les pratiques des professeurs des écoles en termes de pratique de situations de recherche et de preuve entre pairs (RPP).
Le texte revient sur l'historique du projet, son évaluation (cf Georget et Dufy, 2020) et présente ses dernières évolutions et perspectives.

La diffusion de la recherche en didactique des mathématiques dans le monde de l'enseignement reste une question problématique. En France, bien que le plan Villani-Torossian (2018) et ces développements dans les différentes académies permettent de diffuser plusieurs résultats de cette discipline, des tensions persistent et se traduisent parfois par quelques dissensions entre ce que montre la recherche et les pratiques promues par l'Éducation Nationale. C'est par exemple le cas des schémas en barres et de la méthode dite « de Singapour » (Cabassut, 2020 ; Chambris, 2017 ; Mounier et Sayac, 2023).

Il nous paraît donc opportun, d'une part, de réaffirmer l'expertise acquise par la communauté scientifique des didacticiens des mathématiques et, d'autre part, d'en diffuser les résultats par différents moyens et à différentes échelles notamment celui de la formation initiale des enseignants. C'est ce dernier point que nous abordons dans le présent texte.

I - ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

La diffusion des résultats de la recherche par le biais des manuels scolaires est une piste qui peut sembler pertinente étant donné que la majorité des enseignants s'appuient sur eux pour organiser leur enseignement (Reverdy, 2014). Mais, d'une part, les enseignants ne consultent généralement pas le guide qui les accompagne (Vargas cité par Reverdy, 2014, p. 12), et d'autre part, diverses contraintes

d'édition semblent de nature disqualifier cette piste, comme en témoigne différents auteurs (Peltier, 1999, Reverdy, 2014, Rimaud, 2016).

Différentes critiques sont fréquemment évoquées. D'une part, un manuel est pensé pour toutes les classes et donc pour aucune. C'est probablement un fait important qui conduit des enseignants à utiliser plusieurs manuels afin d'élaborer un outil personnel pour organiser leur enseignement (Margolinas et Wozniak, 2009), d'autant que suivre un manuel peut donner « une image minorée du travail enseignant aux parents et aux enfants » (Wagnon, 2019, p. 162). D'autre part, les manuels scolaires en France ne disposent ni d'agrément officiel de la part du ministère de l'Éducation Nationale ni de celui d'une communauté scientifique. Les choix faits relèvent bien souvent de politiques d'édition et de choix commerciaux, quitte à prendre des libertés nuisibles aux apprentissages ou à refuser par exemple un partenariat avec l'Académie des sciences (Ayada, 2021).

Pepin, Gueudet et Trouche (2013) indiquent de plus que les enseignants adoptent de nouvelles ressources à la condition qu'elles ne perturbent pas leurs pratiques habituelles. Leurs collègues ont aussi une forte influence sur leur choix. Force est de constater que la résistance au changement du monde de l'édition scolaire, cumulée aux difficultés d'adoption par les enseignants de pratiques davantage en cohérence avec les résultats de la recherche, est forte.

Enfin, les ressources en ligne plus ou moins « prêtes à l'emploi » semblent prendre une place prédominante, au moins chez les enseignants débutants (Reverdy, 2014, p. 9), au détriment de ressources que des experts seraient davantage tentés de promouvoir.

Dans ce contexte, la formation initiale en Inspé a un rôle important à jouer. Cependant, elle ne peut agir actuellement que dans un cadre limité dans le temps, un à deux ans, ce qui limite d'emblée son action, d'autant plus que d'autres facteurs, comme les pratiques ordinaires des enseignants titulaires ou la formation des tuteurs de terrain, ont, elles aussi, un impact sur la formation dispensée en Inspé.

Comment alors « prolonger » le mouvement de formation qui peut être entrepris au sein des Inspé ? Notre pari est de miser sur des ressources universitaires destinées aux enseignants en formation initiale, qui soient régulièrement actualisées, qui restent disponibles aux enseignants lorsqu'ils quittent les instituts de formation et qui soient aussi accessibles que possible aux enseignants déjà expérimentés.

II - EXPÉRIMENTATIONS DÉJÀ MISES EN ŒUVRE

Depuis 2016, devant les effets contrastés de la formation sur les pratiques d'enseignement de professeurs des écoles stagiaires (PES) en mathématiques, nous avons lancé une expérimentation centrée sur un ensemble de ressources documentaires (Georget et Dufy, 2020). Cette expérimentation s'appuie sur un ensemble de documents, relativement hétérogène et qui évolue au fil des ans. Il est composé d'éléments théoriques, de trames de séquences sur différents sujets mathématiques, de scénarios de séances plus ou moins détaillés, de diaporamas et de références puisées dans les littératures scientifiques, professionnelles et institutionnelles. Elles sont mises à disposition des professeurs des écoles stagiaires dès le début de la formation, sous la forme d'un unique fichier archive au format ZIP (170 Mo) disponible en ligne. Cette archive se décompresse en différents dossiers portant sur des thèmes tels que le calcul mental, le travail en groupes en mathématiques, les situations de recherche et de preuve entre pairs (Georget, 2009, 2010), etc.

L'hétérogénéité de cet ensemble de ressources documentaires vise à permettre différentes appropriations qui peuvent par exemple aller de la simple consultation anecdotique jusqu'à l'appropriation des sources et références qui en sont la base. Ces ressources ont pour objectif de rester une source de formation sur le moyen et le long terme pour les PES une fois qu'ils sortent du dispositif de formation initiale.

Des modalités de formation spécifiques permettent aux PES de les consulter et de se les approprier durant l'année. Par exemple, des séances de cours leur permettent de consulter les ressources qui les intéressent en priorité pour préparer leur enseignement en fonction de leurs conditions de stage (niveau d'enseignement, sujets mathématiques abordés, etc.) ou bien encore en fonction de leurs compétences ou connaissances déjà acquises. Ces séances leur permettent de commencer à préparer des séquences d'enseignement et d'échanger avec les formateurs à leur sujet. Les ressources sont aussi à disposition des personnels de l'Éducation Nationale qui les tutorent durant la durée de l'année de stage. Ces derniers peuvent ainsi potentiellement faire du lien entre la formation à l'Inspé et le stage, bien que cela reste pour le moment plutôt anecdotique d'après nos constats.

Depuis le début de l'expérimentation, différents questionnaires ont été soumis aux PES et des observations en classe ont été réalisées afin d'évaluer la pertinence de nos choix (Georget et Dufy, 2020). L'analyse des réponses a permis de faire évoluer la présentation des ressources et le dispositif de formation. Elle a aussi permis de constater que le dispositif produisait des effets pertinents sur les pratiques, comme la mise en œuvre dès le début de l'année de situations de recherche et de preuve entre pairs, même ces effets paraissaient parfois limités, comme pour la gestion parfois très guidée de la mise en commun des productions des élèves. Enfin, des échanges avec des conseillers pédagogiques ou des enseignants maître-formateurs ont montré que certaines de nos ressources étaient diffusées au-delà du cercle des professeurs stagiaires, de leurs tuteurs et de l'Inspé, ce qui était un effet de bord escompté.

Partant du constat que les ressources généralement utilisées par les enseignants, en particulier les manuels scolaires, ont un rôle important sur leurs pratiques (Coppé et Houdement, 2002 ; Houdement 1998), il est pertinent de s'intéresser à leur ergonomie. Nous nous intéressons particulièrement aux caractéristiques suivantes des ressources : leur utilité, leur adaptabilité, leur accessibilité et leur acceptabilité. Nous avons emprunté ces concepts au domaine des environnements pour l'apprentissage humain (EIAH) et nous les avons adaptés au contexte des ressources documentaires (Georget, 2009, 2010 ; Tricot et al., 2003).

Dans le contexte de ressources d'enseignement, l'évaluation de l'utilité consiste notamment à étudier si ces ressources permettent aux PES d'enseigner auprès de leurs élèves en cohérence avec les résultats de la recherche scientifique et en tenant compte de leur contexte d'exercice.

L'évaluation de l'adaptabilité consiste à étudier si les enseignants peuvent adapter les ressources à leur pratique et à leurs élèves et si elles prennent en compte l'expertise qu'ils ont déjà acquise. Par exemple, un enseignant débutant n'a pas besoin ou ne ressent pas le besoin d'accéder aux mêmes informations qu'un enseignant rompu à la pratique de situation de recherche et de preuve entre pairs avec ses élèves, ce dernier ayant déjà intégré des compétences et des connaissances lui permettant de gérer ce type de situations particulièrement complexe à mettre en œuvre.

Quant à l'accessibilité, elle revêt principalement deux aspects, d'une part, l'accès matériel ou virtuel aux ressources, et, d'autre part, la simplicité d'accès à son contenu, tant sur le fond (lisibilité du propos, terminologie adaptée) que dans sa forme (aspects typographiques par exemple).

Enfin, l'évaluation de l'acceptabilité consiste à s'intéresser à la valeur que constitue ces ressources aux yeux des enseignants.

Comme l'indique (Tricot et al., 2003), ces caractéristiques ne sont pas indépendantes les unes des autres. Par exemple, l'acceptabilité d'une ressource aux yeux d'un enseignant sera réduite s'il ne voit pas comment l'adapter à ces élèves. Ainsi, il est généralement difficile d'évaluer une composante sans en évaluer une autre dans le même temps.

Dans notre travail de thèse (Georget, 2009), nous avons introduit le paradoxe d'incomplétude des ressources d'enseignement que nous pouvons résumer ainsi :

- Si une ressource est trop complète, par exemple si elle rentre trop dans les détails de la situation à mettre en œuvre, les enseignants risquent de ne pas les utiliser du fait de la quantité d'information à traiter. Ces détails peuvent aussi être trop contraignants. Son acceptabilité est mise en défaut.
- Si la ressource est trop incomplète, les enseignants risquent de peiner à en tirer profit. Son utilité et son utilisabilité sont mises en défaut.

Selon nous, une tentative pour résoudre ce paradoxe consiste à jouer sur le court terme de la formation initiale, à la fois sur l'ergonomie des ressources documentaires et sur l'accompagnement des enseignants pour les familiariser avec ces ressources et leurs références. Ceci est censé permettre une appropriation plus complète et efficiente sur le moyen et le long terme.

Malgré les améliorations apportées au fil des ans, certains problèmes d'ergonomie demeurent. D'un côté, les PES évaluent les ressources comme pertinentes pour leur formation et leur pratique d'enseignement mais, d'un autre côté, ils peinent à se repérer dans la somme de ressources disponible, malgré la présence d'un résumé des différents dossiers thématiques proposés et d'un guide d'appropriation.

S'ajoute à ces problèmes, l'absence d'un moteur de recherche dédié susceptible de faciliter et d'accélérer la recherche d'information. Les possibilités de consultation de documents au format ODT ou PDF sur des smartphones, d'un usage courant aujourd'hui, est très limité du point de vue ergonomique. De par l'organisation en dossiers et fichiers et leur désarchivage sur des systèmes d'exploitation différents (Windows, Mac, Linux, Android), la mise en place de liens hypertextes entre documents se révèle impossible ou compliquée à organiser. Il en est de même pour la gestion des mises à jour et la façon de les rendre accessibles. Enfin, les bugs de certains systèmes d'exploitation ne permettent parfois pas d'accéder à l'ensemble des documents de manière simple.

III - UNE NOUVELLE EXPÉRIMENTATION

Pour tenter de résoudre plusieurs de ces problèmes, une nouvelle structuration des ressources basée sur un site web *responsive*[1] et *low-tech*[2] (ADEME, 2022) est en cours d'expérimentation. Afin d'assurer certaines qualités ergonomiques, notamment son accessibilité, ce site web a été conçu en collaboration avec des informaticiens, un typographe et des experts de l'accessibilité du service de pédagogie de l'Université de Caen Normandie.

L'introduction du versant *low-tech* peut surprendre, mais nous sommes convaincus qu'il contribue à l'acceptabilité de ces ressources par les enseignants. En effet, selon différents interlocuteurs informaticiens consultés, une ressource en ligne est généralement dupliquée au moins une dizaine de fois, dans le cadre de la duplication des serveurs pour assurer la disponibilité des contenus et dans le cadre des sauvegardes quotidiennes, hebdomadaires voire mensuelles. De plus, il nous semble essentiel que la consultation des ressources ne dépende ni de la qualité de la liaison Internet utilisée ni de l'âge du matériel utilisé (ordinateur, tablette, smartphone)[3].

Les contenus sont sous une licence *Creative commons BY-NC-SA*[4]. Celle-ci consiste notamment à permettre leur rediffusion tant que la référence initiale et la licence sont préservées. Il s'agit donc à la fois de renforcer l'utilité, l'adaptabilité et l'acceptabilité des ressources car les enseignants pourront, s'ils le souhaitent, rediffuser en toute légalité ces ressources, y compris dans une version modifiée à leur gré.

Techniquement, l'expérimentation en cours s'appuie sur un site web statique. Cela signifie que les pages web ne sont pas créées dynamiquement lorsque des usagers accèdent au contenu, comme c'est par exemple le cas avec un site sous Wordpress[5]. Elles sont créées en une seule opération et stockées sur un serveur. C'est le gage d'une dépense limitée d'énergie conforme à l'approche *low-tech,* en plus de faciliter la sécurisation du site.

Le site est hébergé par l'Université de Caen Normandie, ce qui assure à la fois une identification universitaire claire et une disponibilité accrue, toutes deux de nature à accroître l'acceptabilité du site.

---

[1] Site web *responsive* (généralement traduire par « réactif », nous avons gardé le terme anglophone car il davantage utilisé en informatique), c'est-à-dire consultable depuis différents appareils avec un confort similaire, y compris dans notre cas pour des diaporamas.

[2] Le rapport de l'ADEME (2022, p. 15-16) détaille les caractéristiques d'un système *Low-tech*. Il s'agit en particulier d'un système conçu dans une approche systémique visant notamment à développer son utilité, son accessibilité et sa durabilité (en lien avec les problématiques de développement durable).

[3] La dépense énergétique liée aux équipements numériques est très majoritairement due aux extractions minières liées à la production de nouveaux appareils, extractions qui sont des sources importantes de pollutions et de conflits à travers le monde (Systex, 2021, 2024).

[4] La licence Creative commons BY-NC-SA (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr) autorise le partage et la modification des documents à condition de créditer l'œuvre initiale, de ne pas en faire une utilisation commerciale et de la partager aux mêmes conditions si on souhaite partager à son tour l'œuvre initiale ou une version modifiée.

[5] Wordpress (https://fr.wordpress.org/) est un système libre de publication de contenus très utilisée sur le web. Il est fréquemment mis à jour, de même que plusieurs logiciels annexes qui permettent de le faire fonctionner. Son emploi nécessite donc une disponibilité régulière des gestionnaires du site pour le sécuriser.

Les ressources sont produites majoritairement au format Markdown[6]. Il s'agit d'un format de texte balisé conçu pour être libre, pérenne, et simple à apprendre et à utiliser. Il est compatible avec de multiples applications. Le même fichier peut ainsi être réutilisé, à de menus ajustements près, pour créer des pages web ou des diaporamas *responsive*. S'il est aujourd'hui peu utilisé par les enseignants d'après nos constats[7], il est, a priori, de nature à renforcer l'adaptabilité des ressources qu'il permet de produire puisqu'il est très facilement modifiable, réutilisable et stockable à peu de frais. Des formules en LaTeX[8] peuvent être intégrées lorsqu'il s'agit d'écrire des mathématiques et le système MathJax[9] permet de les rendre accessibles à des personnes souffrant de différentes déficiences, ce qui accroit l'accessibilité du site.

Un moteur de recherche[10], local et compatible RGPD, permet d'accéder non seulement aux pages du site mais aussi directement à des sections de ces pages, ce qui accroit son ergonomie générale.

Chaque page ou diaporama peut être imprimé et dispose d'un QR code permettant de le partager par exemple entre plusieurs enseignants, ce qui nous semble pertinent étant donné nos objectifs d'accessibilité, d'acceptabilité et de diffusion au-delà du cadre de la formation initiale en Inspé.

Enfin, l'ensemble des documents source est stocké sur un serveur Git. Git[11] est un logiciel libre de gestion de versions décentralisé. Initialement créé pour gérer le développement collaboratif de logiciels, il est aussi utilisé pour la production de documents. Il est notamment utilisé sur le réseau Renater des universités françaises et sur la Forge des communs numériques éducatifs[12] de l'Éducation Nationale. Il permet ainsi le partage et la mutualisation de ressources à une large échelle. Cette potentialité paraît pertinente pour l'accessibilité de nos ressources mais nous ne l'avons pas encore été testée hors de l'Université de Caen Normandie.

IV - CONCLUSION

L'expérimentation qui vient seulement de débuter nous semble prometteuse et pertinente étant donné les éléments développés dans le présent texte.

Malgré son potentiel de développement, dû notamment aux formats et outils ouverts et pérennes utilisés, il reste que ces technologies sont encore peu connues des enseignants, des formateurs d'enseignants et des chercheurs en didactique des mathématiques. Une initiation minimale est

[6] Pour des informations sur le format Markdown, nous renvoyons à la page Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Markdown (consultée le 30/11/2024).

[7] L'application CodiMD utilise le format Markdown pour produire des documents textes ou des diaporamas. Elle est déployée sur le serveur de l'Éducation nationale (https://projet.apps.education.fr/applications/codi-md) mais encore peu connue des enseignants selon nos constats.

[8] LaTeX est un système libre et largement diffusé de composition de textes mathématiques et scientifiques.

[9] Le système MathJax (https://www.mathjax.org/) est produit par une organisation à but non lucratif associant l'*American Mathematical Society* (AMS) et la *Society for Industrial and Applied Mathematics* (SIAM) et visant à promouvoir les contenus mathématiques et scientifiques sur le web.

[10] Il s'agit d'un moteur de recherche pour site statique, Pagefind (https://github.com/cloudcannon/pagefind), parfaitement compatible avec le cadre du RGPD européen puisqu'il ne stocke aucune donnée de l'utilisateur.

[11] Le logiciel Git (https://git-scm.com/) a été créé par Linus Torvalds, le créateur de Linux.

[12] Forge des communs numériques éducatifs de l'Éducation nationale (https://forge.apps.education.fr).

nécessaire pour se les approprier. Ceci étant, la fréquentation de logiciels d'une certaine complexité par la communauté des enseignants et formateurs en mathématiques et des chercheurs en didactique des mathématiques nous semble être un gage que ceci n'est qu'un obstacle passager.

BIBLIOGRAPHIE

ADEME (2022). Démarches low-tech. État des lieux et perspectives. Rapport. 48 pages.

Ayada, S. (2021). Nous n'avons aucun pouvoir sur le contenu des manuels scolaires. FigaroVox, *Le Figaro*, 12 novembre 2021.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité », *APMEP Au fil des maths, 537.* Consultée le 26/09/2024. Url : https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/les-representations-en-barres-ni-cet-exces-dhonneur-ni-cette-indignite/

Chambris, C. (2017). L'enseignement des maths à l'école et la méthode de Singapour. Bulletin de la CFEM, 44, 13-18.

Margolinas C. et Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Revue des sciences de l'éducation, 35(2), 59-82.

Mounier, E. et Sayac, N. (2023). Maths : la « méthode de Singapour », remède ou mirage ? *The Conversation*, 14 décembre 2023.

Peltier, M.-L. (1999). Histoire d'un manuel scolaire, du projet au produit fini : désirs et désillusions. *Grand N*, 63, 59-76.

Pepin, B., Gueudet, G., et Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions : A collective perspective on resources, their use and transformation. ZDM, The International Journal of Mathematics Education, 45, 7, 929-943.

Reverdy, C. (2014). Du programme vers la classe : des ressources pour enseigner. Dossier de veille de l'IFÉ, 96. Consultée le 26/09/2024. Url : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=96&lang=fr

Rimaud, M. (2016). Le livre scolaire numérique : un marché qui attire les convoitises. La revue des médias. INA, 5 septembre 2016.

Systex (2021). Controverses minières. Volet 1 - Caractère prédateur et dangereux - Techniques minières - Déversements volontaires en milieux aquatiques - Anciens sites miniers. Rapport d'étude. Consultée le 26/09/2024. Url : https://www.systext.org/node/1785

Systex (2024). Controverses minières - Volet 2 - Mine secondaire et recyclage. Rapport d'étude. Consultée le 26/09/2024. Url : https://www.systext.org/node/2064

Tricot, A., Plégat-Soutjis F., Camps JF., Amiel A., Lutz G., Morcillo A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. Dans Grandbastien M., Labat JM. (éd.), Environnements informatiques pour l'apprentissage humain. 391–402. Consultée le 26/09/2024. Url : https://hal.science/edutice-00000154v1

Villani, C., Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Rapport au ministre de l'Éducation Nationale. Consultée le 26/09/2024. Url : https://www.education.gouv.fr/media/11072/download

Wagnon, S. (Ed.) (2019). Le manuel scolaire, objet d'étude et de recherche : enjeux et perspectives. Peter Lang.

ENSEIGNEMENT PAR LES GRANDEURS : UNE OPPORTUNITÉ POUR PRENDRE EN COMPTE LA DIVERSITÉ DES ÉLÈVES ET CELLE DES ENSEIGNANTS EN FORMATION

Matthieu GAUD
Professeur de mathématiques
Collège Pierre Mendès France, La Rochelle (17)
IREM&S de Poitiers
matthieu.gaud@ac-poitiers.fr

Jérôme COILLOT
Professeur de mathématiques
Collège Léon Huet, La Roche Posay (86)
IREM&S de Poitiers
jeromecoillot@hotmail.com

Résumé
Nous présenterons un apprentissage des contenus des programmes de CM1 et CM2 à partir de l'étude de 8 grandeurs en montrant qu'il permet de prendre en compte la diversité des élèves en questionnant le monde et en pratiquant une pédagogie de l'enquête (Chevallard), en s'appuyant sur des situations de la vie, avec une organisation spiralée qui laisse le temps d'apprendre, avec une pluralité de méthodes de résolution, avec un passage progressif vers l'abstraction. Pour sa mise en œuvre, nous venons de réaliser 8 livrets qui sont utilisés par des élèves de CM1. Nous montrerons aussi comment le fait d'aborder cet enseignement avec les PE (Professeurs des Écoles) permet à tous de porter un autre regard sur les mathématiques, leur utilité, et le sens des notions et techniques qu'ils ont à enseigner.

« *L'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématiques de la diversité du monde.* »

Yves Chevallard et Marianna Bosch (2001)

Au-delà des états des lieux réguliers et alarmants sur les connaissances et savoir-faire mathématiques de nos élèves français, la demande, de plus en plus pressante, de prendre en compte leur diversité interroge. Pour « pallier cet état de fait », depuis de nombreuses décennies la tendance est à l'individualisation de l'enseignement, soit en l'adaptant à des typologies d'individus (La Garanderie, 1980), soit en utilisant l'informatique, et bientôt l'IA. Nous pensons au contraire que l'on peut mettre en place un enseignement qui prend en compte la diversité des élèves tout en utilisant la richesse de la communauté qu'est la classe pour débattre, proposer, travailler à plusieurs, aider, mener des projets en commun, sous la direction du professeur qui, connaissant les enjeux de ce qu'il a à enseigner, peut arbitrer, décider, diriger l'étude (Chevallard, 1997, p. 17-25). Mais pour cela il faut proposer un enseignement qui fasse sens pour tous. C'est pourquoi, depuis de nombreuses années, nous expérimentons une approche différente de l'enseignement des mathématiques en faisant entrer les élèves dans les apprentissages par l'étude des grandeurs. Et nous nous proposons de montrer comment cet enseignement par les grandeurs permet de prendre en compte la diversité des élèves de la classe, et permet aux enseignants de requestionner leur enseignement et leurs connaissances en mathématiques.

I - LE CADRE : L'ENSEIGNEMENT PAR LES GRANDEURS

1 L'organisation didactique

L'enseignement par les grandeurs que nous avons construit pour faire apprendre les mathématiques en CM1-CM2 propose de partir de l'étude d'un certain nombre de grandeurs, et en priorité de celles qui figurent au programme, pour découvrir et travailler tous les contenus du programme. C'est un travail de réflexion sur l'écologie des savoirs enseignés (Chevallard, 2002) au collège et à l'école, qui nous a fait prendre conscience que tous ces savoirs vivaient dans les grandeurs usuelles. Les grandeurs que nous avons alors choisies pour le CM1 et le CM2, et qui correspondent aux chapitres de l'année, sont les populations, les angles, les masses, les longueurs, les prix, les aires, les durées et les volumes, dont nous proposons l'étude dans cet ordre (figure 1).

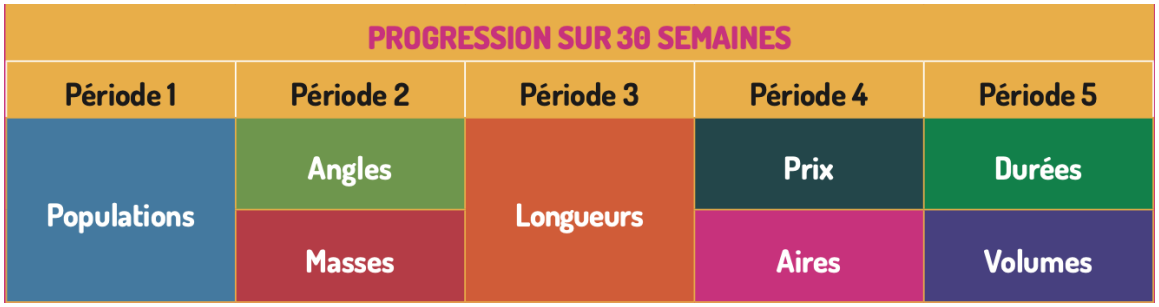


Figure 1. L'organisation de l'enseignement par les grandeurs en CM1 et CM2

2 Ses motivations

Pourquoi cet enseignement ?

Pour redonner du sens aux mathématiques en les travaillant comme elles se sont construites : en réponse à un questionnement du monde. Comment dénombrer des collections, les comparer, les ajouter, les partager ? Comment savoir si un angle est plus petit ou plus grand qu'un angle droit ? Comment reproduire un angle ? Une figure ? Comment se déplacer sur mer et dans les airs ?… Les grandeurs et les questions étudiées sont en prise directe avec la vie : l'élève peut ainsi comprendre le pourquoi des mathématiques. Et en apprenant, pour chaque grandeur, comment se résolvent ces questions, il apprend des mathématiques : il découvre de nouveaux nombres, il calcule, il trace des figures, il raisonne, il apprend l'ordre de grandeur des choses, il fait du calcul mental, il programme un algorithme ou la construction d'une figure...

Cet enseignement décloisonne les contenus des anciens chapitres : en travaillant sur les longueurs, on va par exemple construire des figures ayant des côtés de même longueur, et donc travailler sur des triangles, des quadrilatères, des polygones réguliers qui auraient été étudiés dans des chapitres différents. Mais on va aussi apprendre à agrandir des figures, à chercher le rapport entre deux longueurs : et nous voici alors dans les multiples et diviseurs et dans les fractions qui s'introduisent ainsi naturellement sans faire l'objet d'un chapitre à part. Et quand on parlera de mesure de longueurs, on aura affaire à des nombres et du calcul.

Cet enseignement est spiralaire : on revoit pour chaque grandeur des contenus que l'on a déjà vus dans une grandeur étudiée auparavant. Dans la grandeur *Prix* lors du travail de comparaison, on va retrouver les rapports et fractions que l'on avait vus dans les longueurs mais aussi les nombres décimaux découverts dans les masses et utilisés dans les longueurs. Cela permet un apprentissage progressif : ce qui n'a pas été bien assimilé du premier coup, va être revu dans un autre contexte, avec un autre regard, et plusieurs fois dans l'année.

Cet enseignement est ouvert sur la vie : les situations (exercices, problèmes) étudiées permettent de découvrir des métiers, des instruments, des sujets d'hier ou d'aujourd'hui. Par exemple la fausse équerre

du menuisier, le perpendicule des Égyptiens et des permaculteurs, la rose des vents du navigateur, le tri des déchets, …

3 Les ressources

Cet enseignement a fait l'objet de nombreuses publications à l'IREM&S de Poitiers (voir, par exemple, Coillot, 2019). Nous travaillons actuellement à la conception de livrets pour les élèves afin de faciliter sa mise en œuvre par les enseignants de CM (Cours Moyen). Les 8 livrets de CM1 (Coillot, 2023) ont été réalisés, et ceux de CM2 sont en cours de réalisation. On peut y accéder et se les procurer à partir du site que nous avons créé (www.lamethodedesgrandeurs.fr)

Voyons maintenant comment cet enseignement permet de prendre en compte la diversité des élèves.

II - UNE PÉDAGOGIE DE L'ENQUÊTE

1 Notre démarche

Notre démarche s'inscrit dans la perspective d'Yves Chevallard : on ne visite pas des savoirs tout faits, mais on questionne le monde. D'où l'importance des questions qui vont structurer l'étude de la grandeur, et sur lesquelles les élèves vont enquêter. Cette notion d'enquête est importante pour Chevallard (Chevallard 2009, Chevallard et Ladage 2010), comme pour nous. Dans chaque grandeur, chaque leçon a pour objet une question dont nous avons intitulé l'étude : J'enquête. Cette enquête se fait à partir de l'étude d'une situation de la vie, avec souvent la possibilité d'expérimenter : c'est la première séance de la leçon. Les élèves ont une grande liberté pour proposer des réponses. La diversité des méthodes, des calculs, des idées est acceptée et discutée. Dans une deuxième séance, les méthodes retenues vont être mises à l'épreuve sur plusieurs situations de la vie qui relèvent de la question étudiée. On ne va pas imposer l'utilisation d'une technique experte pour trouver la réponse ou la construction cherchée, puisque l'important c'est d'être capable de trouver cette réponse ou construction, même si c'est cette technique experte dont l'apprentissage est visé. Nous acceptons les alternatives viables, qui peuvent faire aussi l'objet d'institutionnalisations. Chacun aborde les situations avec les outils qu'il s'est construit, ou qu'il est en train de se construire.

2 Les enquêtes dans nos livrets

2.1 L'exemple des Populations

Prenons l'exemple de la grandeur *Populations*[1] qui commence l'année scolaire de CM1. Voici les questions soumises à l'enquête pour les 8 leçons :

- Comment compter des objets qui sont très nombreux ?
- Comment lire et écrire des grands nombres ?
- Comment comparer des grands nombres ?
- Comment trouver l'arrondi de grands nombres ?
- Comment comparer des populations lorsqu'elles ont beaucoup d'écart ?
- Comment trouver un nombre d'objets disposés en rectangle ?
- Comment trouver le nombre de parts lors d'un partage en parts égales ?
- Comment trouver la valeur d'une part lors du partage d'une collection ?

Comme nous l'avons dit, toutes ces enquêtes portent sur des documents, des objets, des situations ou des expériences issus de la vie, que l'élève peut connaitre et partager avec les autres, ou qu'il découvre

[1] Pour la définition de la grandeur *Populations*, voir Coillot, 2018, p. 7-8.

le plus souvent, ce qui enrichit la connaissance du monde dans lequel il vit et son questionnement sur ce monde.

2.2 La leçon 6, séance 1

Regardons la première séance de la leçon 6 (voir figure 2)

L'objet de l'enquête est de trouver le nombre de photos figurant sur un poster et disposées en rectangle (16 × 60). Aucune contrainte, aucun pré requis. Chaque élève peut aborder la recherche avec ses acquis, là où il en est dans ses apprentissages : dénombrer un à un, décomposer le rectangle en lignes et colonnes, en plusieurs rectangles, utiliser des additions répétées, des multiplications, faire des calculs posés, de tête ou à la calculatrice. Il peut écrire sur le support. On lui propose ensuite de donner une autre méthode pour trouver le résultat. Ce qui vise à élargir son point de vue et à lui montrer des moyens de se contrôler. Ce travail peut être fait par les élèves ou les groupes les plus rapides avant la mise en commun du travail de la classe sur la première question. Pour les autres élèves il sera fait après la mise en commun, ou bien il y sera intégré, au choix de l'enseignant.

Les échanges et le bilan faits avec le professeur permettent de constater :

- que le dénombrement est long et peu efficace,

- que les additions réitérées sont également longues notamment pour le 16+16+16… et sont donc source d'erreurs,

- le lien entre l'addition réitérée et la multiplication ; il y a 16 lignes de 60 photos soit 60 + 60 + 60+ 60 + 60... ou 16 × 60, ou bien 60 × 16 ; d'où la mise en évidence de la commutativité de la multiplication,

- que l'on peut décomposer la figure en 10 lignes de 60 photos et 6 lignes de 60 photos,

- que la technique opératoire de la multiplication posée, vue en cycle 2, peut être utilisée.

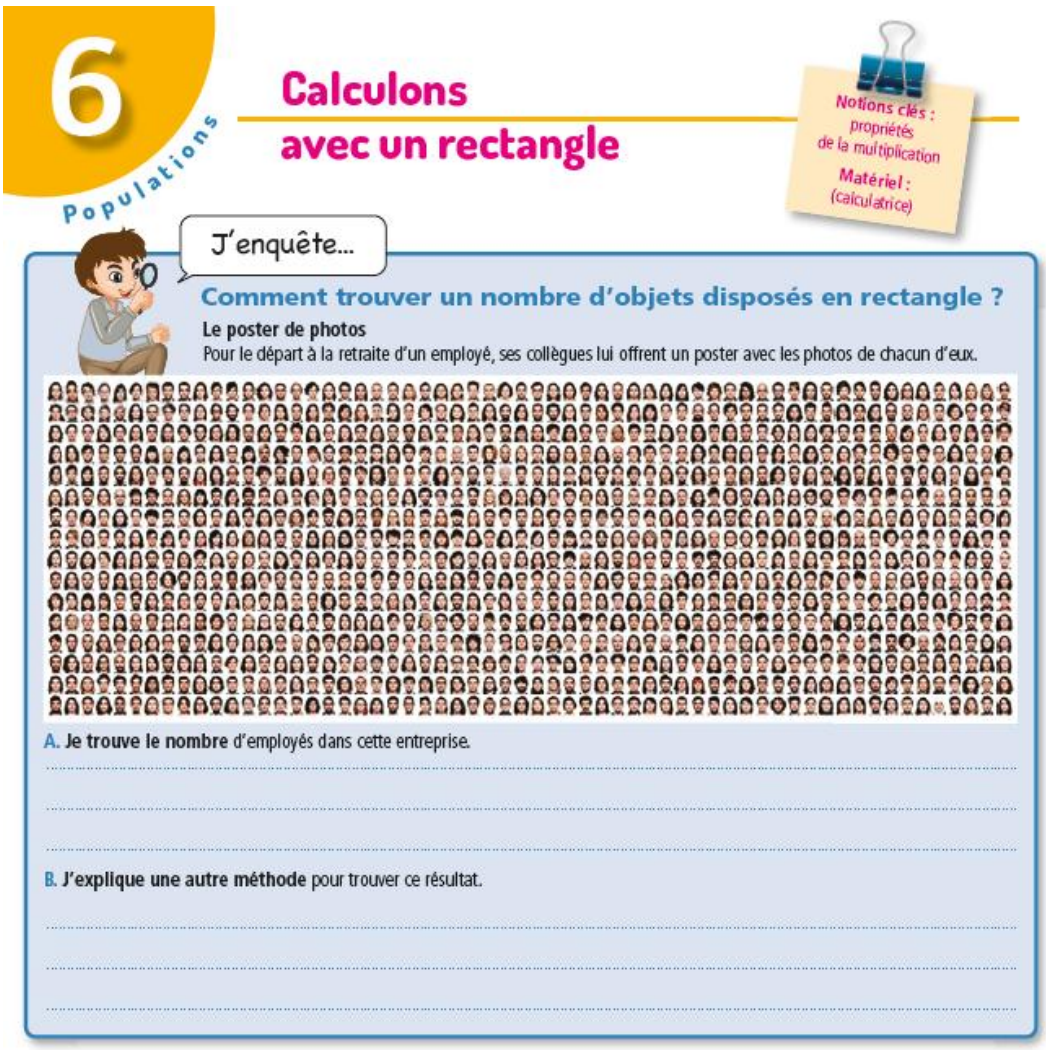


Figure2. Livret Populations CM1 leçon 6 J'enquête

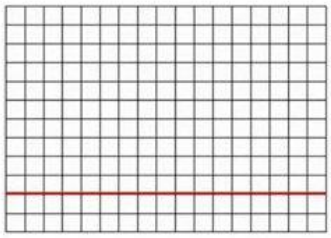
Le bilan de l'enquête montre l'intérêt d'utiliser la multiplication pour dénombrer des collections rectangulaires en gardant le sens d'une addition réitérée (16 lignes de 60 photos ou 60 colonnes de 16 photos). Donc les deux façons de poser la multiplication. Et une décomposition permet un calcul mental ou en ligne (10 × 60 + 6 × 60). On a le rectangle comme visuel emblématique de la multiplication. Même si certaines techniques se révèlent peu efficaces, elles ne sont pas rejetées, car elles peuvent permettre de trouver le résultat, et dans d'autres contextes avoir leur intérêt (ne serait-ce que pour compter le nombre de lignes et de colonnes s'agissant du dénombrement). Mais le professeur peut proposer, ou imposer, à certains de ses élèves, ou à tous, de tester d'autres méthodes, d'utiliser une multiplication, de calculer le produit mentalement, en ligne ou en posant les multiplications. L'élève enrichit ainsi ses techniques de contrôle de ses résultats, et avance dans sa compréhension et sa maitrise de la multiplication. C'est le professeur qui arbitre, décide, dirige l'étude, comme nous le disions dans l'introduction. C'est lui qui sait ce qu'il peut exiger de tel ou tel élève, durant l'étude, pour qu'il progresse dans ses apprentissages. Il tient ainsi compte de la diversité des profils de ses élèves, dans un contexte où l'élève peut réussir la tâche qui lui est demandée.

Un exemple de bilan, institutionnalisant le travail fait, est donné dans la figure 3. Ce n'est qu'un exemple. Chaque enseignant fera le sien en fonction de ses analyses et de ses objectifs.

L'important à retenir, c'est la compréhension du sens et de la technique opératoire de la multiplication, c'est faire le lien entre la multiplication et l'addition réitérée, c'est savoir décomposer une multiplication.

Exemple d'institutionnalisation

Rectangle et multiplication



*Ce rectangle est formé de 12 lignes de 17 carrés **ou** de 17 colonnes de 12 carrés. Le nombre de carrés est égal à 12×17 carrés ou à 17×12 carrés : 12×17 = 17×12 = 204.*

On peut trouver 204 en calculant mentalement, en posant la multiplication, ou en utilisant une calculatrice.

En calcul mental ou posé, la méthode consiste à découper le rectangle en 2 rectangles en utilisant des multiples de 10.

Par exemple 12 lignes c'est 10 lignes + 2 lignes, donc cela donne un rectangle de 10×17 carrés (170 carrés) et un autre de 2×17 carrés (34 carrés), soit un total de 204 carrés : 12×17 = (10+2)×17 = (10×17)+(2×17) = 170+34 = 204.

```
  17
x 12
  34   ← 2 x 17
+170   ← 10 x 17
 204
```

Multiplication et rectangle

Une multiplication de 2 nombres peut se représenter par un rectangle. Par exemple la multiplication 16×60 peut se représenter par un rectangle de 16 lignes de 60 carrés.

Un nombre peut se représenter par un rectangle. Par exemple 18 peut se représenter par un rectangle de 3 lignes de 6 carrés, ou de 2 lignes de 9 carrés, ou d'1 ligne de 18 carrés !

Figure 3. Livret Populations CM1 leçon 6 Bilan

2.3 La leçon 6, séance 2

Regardons maintenant ce qui se passe lors de la deuxième séance, qui constitue la deuxième partie de la leçon, où l'élève va être confronté à des situations relevant de la question étudiée : Comment trouver un nombre d'objets disposés en rectangle ?

Cinq situations lui sont proposées (voir figure 4 les situations 1 et 5) : carrelage d'une table basse (6 × 21), poster de drapeaux (10 × 18), grille de sudoku (9 × 9), places de parking (20 × 8), parasols sur une plage (disposition à découper en rectangles, avec plusieurs possibilités). L'étude de ces situations est conçue comme étant un travail individuel, contrairement au travail d'enquête. Elle est prévue pour une séance, et il n'y a pas d'obligation que les élèves étudient toutes les situations. Chacun peut aller à son rythme, et le professeur décider qu'il vaut mieux que tel élève n'étudie que deux situations, mais travaille le calcul posé des multiplications impliquées dans l'étude des situations qu'il étudie. Pour les plus rapides, qui auraient trouvé les réponses aux cinq situations, le livret offre la possibilité à l'enseignant de leur proposer un des défis qui figurent en troisième de couverture, ou un problème choisi dans une des trois séquences de problèmes qui se trouvent en fin de livret.

Voyons la première situation proposée à l'étude (voir figure 4), où il s'agit de trouver le nombre de carreaux d'une table basse (6 × 21).

On pourra remarquer que la méthode n'est pas imposée, et donc que l'élève peut réussir la tâche avec sa méthode. Ce sera l'occasion d'identifier la méthode utilisée par les élèves. Aux élèves utilisant une addition réitérée ou un comptage de un en un le professeur proposera d'utiliser une multiplication. La bonne réponse trouvée avec leur méthode leur permettra de contrôler leur niveau de maitrise de l'utilisation d'une multiplication, et d'avancer dans cette maitrise qui est un attendu en cycle 3.

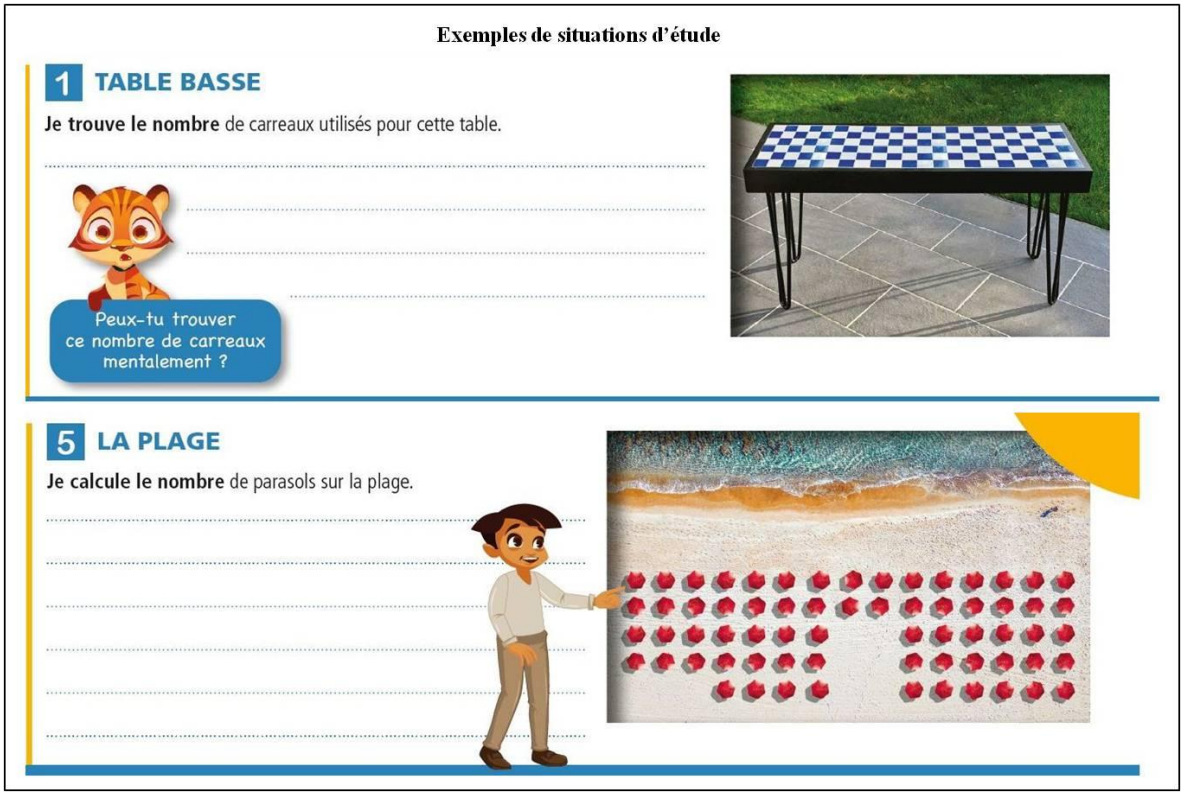


Figure 4. Livret Populations CM1 leçon 6 : 2 exercices

On voit ainsi comment l'utilisation de la multiplication et celle de sa technique opératoire peuvent se construire ou se reconstruire à travers l'étude de situations qui leur donnent du sens.

La dernière situation, où il s'agit de trouver un nombre de parasols (66), vise à montrer que le découpage en rectangles peut être une méthode efficace pour dénombrer certains types de collections ayant des formes géométriques. La diversité des découpages possibles permet que s'expriment les visions différentes de la figure par les uns et les autres, et le contrôle du résultat trouvé.

3 Le choix des situations

Comme nous nous plaçons dans la perspective d'Yves Chevallard (2009) de questionner le monde et de ne pas se couper de la société, nos enquêtes et nos exercices ont essentiellement pour support des situations de la vie qui ne sont pas que des situations de la vie courante. Et « l'exploration » des grandeurs nous offre, pour cela, un cadre idéal. Par exemple, en CM1, dans l'étude de la grandeur *Angles*, qui fait suite à celle des *Populations*, nos élèves observent la position des bords d'un toit, des poutres d'une charpente, des ailes d'un hibou, le fronton du Panthéon, l'inclinaison de la tour de Pise, la disposition des pales d'une éolienne, une étoile à 5 branches, des barrières, un plan de ville, un cerf-volant, des figures de danse, une rue pentue de Nouvelle Zélande, un perpendicule, une équerre de charpentier, un cric, des logos, un miroir hexagonal, le pavage du Caire, un panneau de radar, construisent et utilisent une fausse équerre, construisent le cap d'un ferry, d'un avion, des étoiles (avec des instruments ou en origami), des frises, comparent les angles de voiles de bateaux. Cet inventaire montre la diversité des domaines de la vie sur lesquels les élèves vont travailler, et porter un regard mathématique. Ces domaines, lieux, objets qu'ils connaissent ou qu'ils découvrent sont des occasions de partages ou de recherches. Histoire, géographie, sciences, sports, vie quotidienne se trouvent questionnés mathématiquement via les grandeurs. On n'est pas dans l'abstrait, dans le formel, dans le « à quoi ça sert ? ». Sur de telles situations, tous les élèves peuvent s'investir, et s'investissent. Et l'abstrait, le formel, le mathématique, se construit petit à petit à partir du concret, du familier, de la vie, à partir des questions des enquêtes. Le passage du concret à l'abstrait se fait continuellement puisque l'on part du concret, et que l'on a besoin de l'abstrait pour résoudre des problèmes concrets, des problèmes de la vie. Mais cela peut se faire progressivement

en ne décontextualisant pas trop vite, en restant avec des exemples liés au contexte de la grandeur étudiée.

Dans leur forme, les situations, enquêtes ou exercices que nous proposons aux élèves sont contextualisés, issues de la vie des hommes, ne durent pas trop longtemps. La méthode de résolution n'est pas donnée dans l'énoncé, et dans la mesure du possible elles favorisent la manipulation.

Nous espérons avoir montré comment notre démarche, fondée sur un questionnement du monde et une pédagogie de l'enquête, permet de prendre en compte la diversité des élèves. Voyons maintenant comment elle en tient compte aussi en organisant un enseignement spiralaire qui laisse du temps aux apprentissages et assure une construction progressive des connaissances mathématiques.

III - UN ENSEIGNEMENT SPIRALAIRE

Dans l'enseignement traditionnel des mathématiques, l'apprentissage des notions et techniques est souvent massé et décontextualisé. Dans notre démarche, au contraire, il est étalé dans le temps et abordé de façon contextualisée[2]. Nous avons vu, dans la partie précédente, comment les apprentissages se faisaient en contexte à partir de situations de la vie, et comment se faisait l'adaptation aux élèves. Voyons maintenant ce qui est fondamental pour nous et qui caractérise notre démarche : le côté filé de l'apprentissage, le côté spiralé de notre organisation. Les notions et techniques se réinvestissent, se retravaillent tout au long de l'année, les notions et techniques s'élaborent progressivement, laissant à chacun le temps d'apprendre.

1 Les notions

1.1 Les fractions

Prenons, pour commencer, l'exemple de la notion de fraction qui pose de nombreux problèmes d'apprentissage en cycle 3.

Une de ces difficultés tient aux différents sens de la fraction : un rapport dans les problèmes de comparaison multiplicative (comparer en nombre de fois), la fraction d'un tout dans les problèmes de partage, la fraction d'une unité dans la mesure des grandeurs. L'élève va être confronté à trois sens différents de la fraction tout au long de l'année dans l'étude de nos grandeurs, sauf dans la grandeur *Angles* dont on débute l'étude en CM1. Il va rencontrer les fractions une première fois dans des situations de comparaison multiplicative, ce qui va lui permettre de s'initier à la notion de rapport, puis de s'y familiariser tout au long de l'année et dans des contextes différents. Il en sera de même pour le partage d'un tout, et la fraction de l'unité, puisque la question du partage d'une grandeur et celle de la mesure d'une grandeur avec des unités seront abordés dans toutes les grandeurs à partir de la troisième : les *Masses*. Dans le tableau qui visualise l'apprentissage spiralaire de la notion de fraction à travers l'étude des huit grandeurs de CM1 (voir figure 5), on peut lire une première progressivité, mais en gardant à l'esprit que chaque étape est revue et approfondie dans toutes les suivantes : le vocabulaire des fractions unitaires (inverses d'entiers) associé aux multiples (nombre de fois), les fractions simples et leur modélisation, les fractions décimales, les égalités de fraction, l'addition de fractions simples.

[2] Un travail de décontextualisation et d'institutionnalisation des notions et techniques mathématiques se fait dans chaque leçon lors du bilan de la séance d'enquête. Sur les problèmes d'institutionnalisation on pourra consulter Allard (2016).

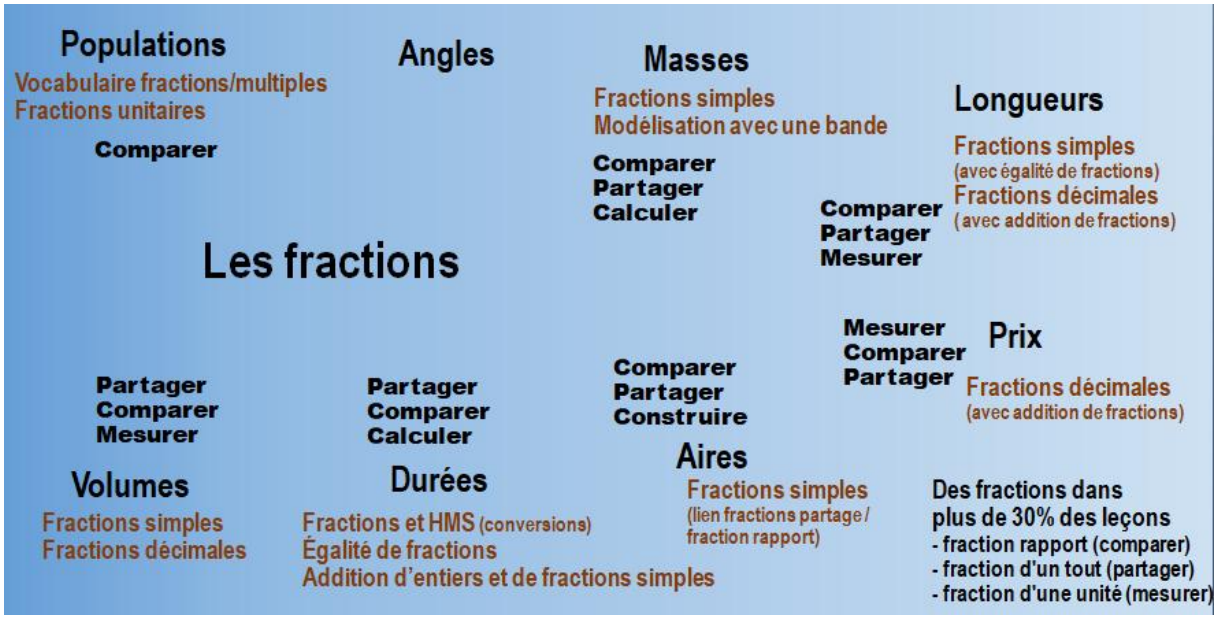


Figure 5. Les fractions dans les huit grandeurs de CM1

Une autre difficulté connue dans l'apprentissage de la notion de fraction est le fait de lui faire acquérir le statut de nombre. Or là aussi, dans notre démarche, cela se fait à la fois d'emblée puisque la première rencontre avec les fractions se fait dans des situations de comparaison multiplicative, mais uniquement pour des inverses d'entiers, puis progressivement avec des partages, des comparaisons, et des mesures qui ne tombent pas juste.

Quand on fait le bilan, sur une année, on voit que les fractions sont présentes dans 20 des 64 leçons des huit livrets (soit 30 % des leçons), avec la répartition suivante sur les huit grandeurs : 2/11, 0/7, 2/7, 3/11, 3/7, 2/7, 3/7, 5/7. Ce qui montre bien l'aspect spiralé de l'enseignement que nous proposons. On travaille les fractions tout au long de l'année et dans toutes les grandeurs. On mesure la différence de conception et d'organisation, en regardant des manuels « classiques ». Par exemple, dans la méthode de Singapour (Kritter, 2021) de la *Librairie des écoles*, les fractions sont travaillées dans une unité spécifique consacrée aux fractions qui comporte 11 leçons sur les 119 de l'ouvrage (9%). Dans *Au rythme des maths* de la librairie *Bordas* (Hélayel, 2020), les fractions sont travaillées dans une unité spécifique (dans laquelle elles servent à introduire les décimaux), qui comporte 7 des 66 leçons de l'ouvrage (11%).

1.2 Les nombres décimaux

Si l'on regarde maintenant les nombres décimaux en CM1, dans notre démarche, les élèves vont les rencontrer dans l'étude de la troisième grandeur étudiée : les *Masses*.

Dans la leçon 1, sans passer par les fractions décimales, ils découvrent la signification des nombres décimaux à travers l'écriture décimale de la mesure de masses. Dans la leçon 2, ils vont comparer des masses en écriture décimale en utilisant le tableau de conversion et en faisant le parallèle avec le tableau de numération. Ils vont apprendre à ajouter et soustraire des décimaux dans la leçon 3, dans le contexte des masses, en faisant des changements d'unités permettant d'utiliser les techniques vues sur les entiers pour faire additions et soustractions. La multiplication d'un décimal simple par un nombre entier simple est abordée et utilisée dans les leçons 4 et 5. Et dans la leçon 6 sont étudiés des problèmes avec des décimaux simples. Donc 6 des 7 leçons de l'étude de la grandeur *Masses* sont consacrés à une première familiarisation avec les décimaux dans un contexte qui fait sens. Puis les nombres décimaux sont utilisés, et donc retravaillés, dans les 5 grandeurs suivantes *Longueurs* (3 leçons sur 11), *Prix* (7 leçons sur 7), *Aires* (1 leçon sur 7), *Durées* (2 leçons sur 7), *Volumes* (4 leçons sur 7). Les nombres décimaux sont donc présents et travaillés dans 6 des 8 grandeurs, et dans 23 des 64 leçons (36%), ce qui en permet une familiarisation et un apprentissage progressif tout au long de l'année, dans des contextes qui ont du sens pour l'élève.

1.3 La géométrie

En géométrie, il en est de même, mais bien évidemment essentiellement sur les grandeurs géométriques étudiées. Par exemple les polygones sont rencontrés dans 6 des 8 grandeurs, dans 23 des 64 leçons (36%), et travaillés dans 3 des 8 grandeurs *(Angles, Longueurs, Aires)*, ce qui représente 18 des 64 leçons (28%). Et la symétrie orthogonale est présente dans ces 3 grandeurs géométriques, sans avoir de leçon dédiée.

2 Les techniques

Intéressons-nous maintenant à la division dont l'opération posée est une nouveauté du cycle3. Dans le même esprit que précédemment, son apprentissage, ainsi que celui de l'opération posée, va être filé au cours de l'année à travers les diverses grandeurs. Mais en tenant compte, comme pour les fractions, des différents contextes qui font intervenir la division. S'agit-il de partages, où l'on travaille sur la division euclidienne, avec ou sans reste, ou de comparaisons et de proportionnalité dans lesquelles la division apparait comme opération inverse de la multiplication, et donc comme quotient, exact ou approché ? Sans parler de la division par 10, 100, 1000 dans les changements d'unités qui traduit le rapport entre les différentes unités.

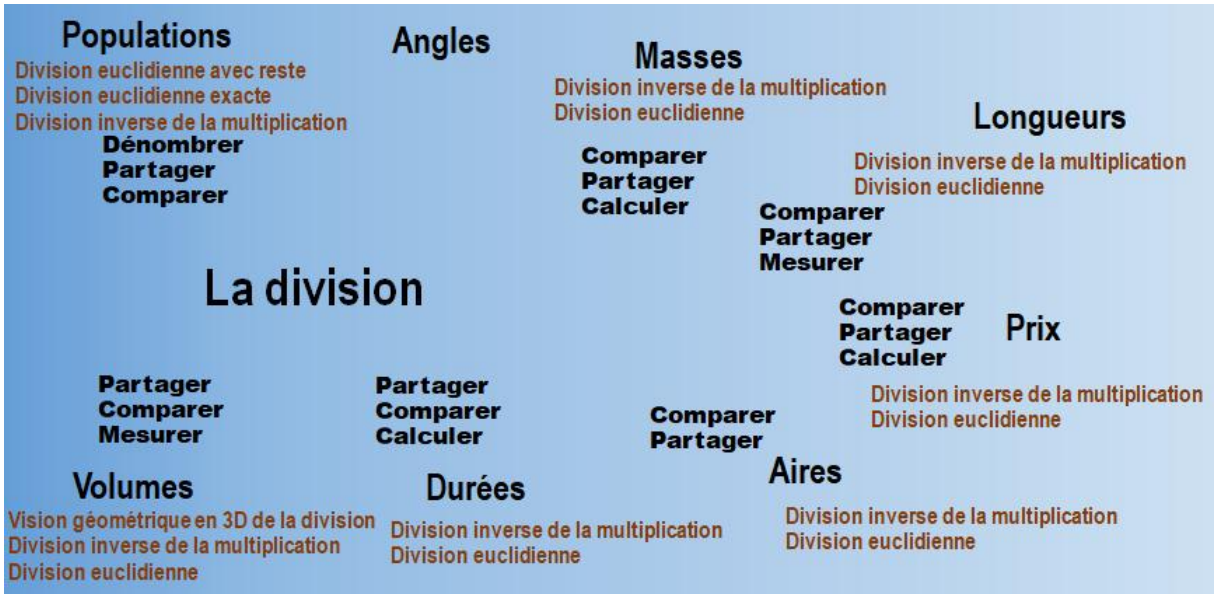


Figure 6 La division dans les huit grandeurs de CM1

Comme pour les fractions, nous vous proposons un tableau (voir figure 6) qui montre l'apprentissage spiralé de la division à travers l'étude des grandeurs tout au long de l'année.

Si on regarde du côté technique, nous proposons un apprentissage progressif des techniques possibles qui ne débouchera sur la technique opératoire connue que lors de l'étude de la cinquième grandeur : les *Prix*. La progressivité porte à la fois sur les situations et sur les techniques.

Pour les situations, on commence par des situations simples de partage et de recherche de rapports simples (entiers ou fractions simples).

Pour les techniques, on utilise d'abord des additions ou soustractions réitérées pour l'aspect division euclidienne, et des multiplications à trous pour l'aspect quotient. Ces techniques, qui ne sont pas à oublier et qui donnent du sens, préparent l'arrivée de la technique opératoire de la division qui est abordée dans l'étude de la grandeur *Prix*. Puis s'établit une cohabitation plus ou moins longue, en fonction de l'élève, entre ces techniques qui relèvent du sens de l'opération, et la technique opératoire posée. La division est présente dans 45% des leçons. On a le temps, on prend le temps.

Cet enseignement spiralaire, par l'étalement des apprentissages dans le temps, par la réutilisation constante des notions et techniques dans des contextes différents (celui des diverses grandeurs étudiées),

donne les moyens à l'enseignement et à l'enseignant de pouvoir tenir compte des acquis très divers de chacun de ses élèves, de leurs différents profils d'apprentissage, de leurs différentes vitesses d'acquisition des connaissances et des méthodes.

IV - EN FORMATION D'ENSEIGNANTS

Dans la majorité des écoles visitées, les grandeurs semblent passer au second plan, souvent faites en fin d'année ou laissées à l'enseignant qui vient faire un complément de service dans la classe. Tout cela alors que les enseignants semblent concernés par la résolution de problèmes pour laquelle il y a, à juste titre de notre point de vue, une certaine pression institutionnelle. Quoiqu'il en soit, il semble que ce qu'elles sont, leur construction, leur représentation et l'étendue de ce qu'elles peuvent apporter ne sont pas maitrisées (Pretis, 2024), peut-être parce qu'elles sont considérées à tort comme trop simples.

1 La formation

Depuis plus de 5 ans maintenant nous allons observer des classes, nous formons des professeurs des écoles, souvent via des FIL (Formations d'Initiative Locale) ou à travers le plan mathématiques, mais aussi des RMC (Référents Mathématiques de Circonscription) de notre académie (Poitiers) ou parfois d'autres académies (Toulouse, Orléans-Tours). Il s'agit de montrer comment l'enseignement à partir des grandeurs permet de travailler en profondeur les notions qui posent problèmes dans l'enseignement à l'École.

1.1 La réflexion sur la notion de grandeur

Pour cela, les formations dispensées proposent dans un premier temps de mener une réflexion sur la notion de grandeur, sa construction, le passage de la grandeur à sa mesure. Nous montrons ce que cela suppose comme travail préalable : une prise de conscience que l'étude d'une grandeur est toujours fondée sur un enchainement des mêmes questions fondamentales (comment définir, comparer, ajouter, partager, mesurer, calculer) qui renvoient à des compétences à travailler en mathématiques, tant dans le domaine numérique que géométrique, et qui sont explicitées dans les programmes. Ensuite l'étude d'une grandeur avec les stagiaires leur permet de repérer tous les apprentissages mathématiques fondamentaux qui sont impliqués.

Par exemple l'étude de la grandeur *Angles* questionne sur la façon de définir les figures usuelles de géométrie et de les construire (Groupe collège, 2018). *Triangle* veut dire 3 angles, alors que l'on définit usuellement le triangle comme une figure à 3 côtés, et on la construit classiquement à partir des longueurs de ses côtés. Pourquoi ne pas construire le triangle ou le reproduire à partir des angles (Coillot, 2023, Angles p .9) ? Le triangle isocèle est étymologiquement un triangle à 2 cotés égaux. Mais peut-on le définir comme ayant 2 angles égaux (Coillot, 2023, Angles p. 2) ? Cela suffit-il pour s'assurer de l'existence d'un axe de symétrie ? Quelles expériences peut-on faire pour cela ? La reproduction de figures polygonales, à une échelle donnée à partir de leurs angles, permet de bien prendre conscience que ce sont les angles qui donnent leur forme aux figures, et que les angles sont invariants dans un agrandissement-réduction. La mesure des angles suppose le choix d'une unité (angle plein, angle droit, angle plat,…) et la possibilité de partager cette unité. Comment partage-t-on un angle en 2 ? en 3 ? La facilité du partage en 2, et la difficulté, voire l'impossibilité du partage en 3 à la règle et au compas, expliquent l'intérêt que les mathématiques portent au principe de dichotomie, et les réalisations par les marins de roses à 8, 16, 32 ou 64 vents pour prendre leur cap. On plonge ainsi au cœur d'un travail géométrique que beaucoup de professeurs des écoles n'ont souvent pas rencontré dans leur formation, mais qui va leur permettre de reconsidérer ce que sont les mathématiques, et ce que pourrait être un enseignement qui ne se réduit pas à l'apprentissage de techniques qui ne font pas sens pour les élèves.

On voit bien qu'un tel questionnement à partir de l'étude d'une grandeur, des questions que posent cette étude, des situations de la vie qui y sont impliquées, permet à chacun, quel que soit son parcours de

formation antérieur et ses acquis en mathématiques, de mettre du sens autour des connaissances mathématiques et de se construire un parcours personnalisé de formation en mathématiques.

1.2 L'apprentissage des notions et des techniques

Ces formations sont aussi un moment pour montrer comment l'enseignement à partir des grandeurs permet de traiter une notion ou une technique particulière. Par exemple : comment améliorer l'apprentissage des fractions ou des décimaux en CM ? Les analyses faites dans la partie III, montrent comment nous pouvons alors être amenés à présenter notre démarche d'enseignement par les grandeurs.

Par exemple si les professeurs des écoles se questionnent sur la façon d'introduire les décimaux en CM, nous leur apportons des éléments historiques, et nous les amenons à se questionner sur leur écologie (Chevallard, 2002) : où vivent-ils, à quoi servent-ils ?

Côté histoire, nous sommes amenés à parler de la *Disme* de Stevin, qui va marquer le début d'une révolution dans l'écriture des nombres : l'écriture décimale ; il s'agit de faciliter les calculs de diverses professions en proposant le partage en 10 pour les unités de mesure. Donc c'est dans la mesure des grandeurs que s'installe l'écriture décimale qui aujourd'hui est omniprésente dans notre vie quotidienne. Et l'on appellera nombres décimaux ces nombres qui s'expriment avec des parties décimales de l'unité.

Côté écologie, il est intéressant de faire chercher aux stagiaires dans quels contextes de la vie on utilise l'écriture décimale des nombres. Ils retrouvent ainsi la quasi-totalité des grandeurs qui figurent au programme. Alors pourquoi ne pas initier les élèves aux nombres décimaux à partir des grandeurs ? Nous avons montré, dans la partie III, comment on peut commencer cette étude en CM1 par exemple à partir des *Masses*[3], et la poursuivre, tout au long de l'année, dans les autres grandeurs où vivent les décimaux. C'est alors l'occasion de montrer ce que peut être un enseignement spiralaire, et les avantages qu'il procure.

Nous voyons ainsi comment le fait d'aborder avec les professeurs des écoles cet enseignement par les grandeurs permet à tous de porter un autre regard sur les mathématiques, leur utilité, et le sens des notions et techniques qu'ils ont à enseigner.

2 L'enseignement par les grandeurs

2.1 Réception

Nos interventions, nos formations, notre accompagnement créent une dynamique autour de l'enseignement par les grandeurs. Cette approche, centrée sur le sens, est très différente de l'enseignement traditionnel. C'est ce qui en fait, pour nous sa force, mais aussi sa faiblesse pour un engagement des enseignants. C'est pourquoi nous avons construit une méthode clés en main : des livrets pour les élèves (Coillot, 2023), avec un guide pédagogique et des exemples d'évaluations, que les enseignants peuvent télécharger à partir du site que nous avons créé.

Pour assurer un suivi des formations et tenir compte de la diversité des profils des enseignants, il y a sur le site une plateforme d'échanges. Les échanges sont de deux types :

- des questions d'ordre pédagogique ou didactique à l'adresse des membres de l'équipe conceptrice, auxquelles il est régulièrement répondu,

- une mutualisation des expériences et des documents entre utilisateurs.

[3] On peut signaler qu'avec les nouveaux programmes (https://eduscol.education.fr/84/j-enseigne-au-cycle-2) les décimaux vont être introduits en cycle 2 à partir des prix, donc à partir d'une grandeur, comme dans notre démarche.

Le suivi continu créé clairement une dynamique et convainc les enseignants de se lancer dans la démarche. Le suivi et les échanges entre collègues nous permettent de nous adapter au mieux au terrain par la création d'accompagnements supplémentaires ou mieux adaptés.

2.2 Sondages

Un sondage fait auprès des douze enseignants qui ont enseigné par les grandeurs dans la circonscription de La Roche Posay, de leurs 250 élèves et de leurs familles permet de mesurer leur ressenti :

- côté enseignants : 100% des douze enseignants ont aimé enseigner les mathématiques par les grandeurs. Les avantages qu'ils y ont trouvés : le côté spiralaire des apprentissages (répétition des compétences dans chaque module (i.e. grandeur), les liens entre les différentes notions), l'ancrage dans la réalité, l'implication des élèves, des situations concrètes qui leur parlent, et qui suscitent leur intérêt et des discussions. Pour 92% des enseignants, cette approche leur a permis d'enrichir leurs connaissances mathématiques ou didactiques, et $\frac{3}{4}$ d'entre eux ont trouvé leurs élèves plus motivés (les autres étant sans avis),

- côté élèves : 88% ont aimé faire des mathématiques, 63% ont dit avoir parlé maths à la maison et 43% ont dit avoir parlé maths avec leurs camarades en dehors de la classe,

- côté familles : $\frac{3}{4}$ disent avoir été intéressées par cette façon d'enseigner (le reste étant sans avis), 30% disent que ça a permis de parler davantage maths à la maison, 40% disent avoir senti leur enfant plus motivé par les mathématiques (aucun moins motivé).

2.3 Ouvertures

On peut mentionner aussi le fait que cet enseignement prévu pour les classes de CM des écoles, intéresse aussi des enseignants s'occupant d'élèves à profils spécifique (EREA, SEGPA, ULIS)[4], et que des expérimentations ont été faites dans ces structures à partir des livrets de CM1. Ce qui nous conforte dans l'idée que notre approche peut s'adapter à des profils d'élèves très diversifiés.

V - CONCLUSION

L'enseignement par les grandeurs que nous venons de vous présenter propose d'organiser l'enseignement des mathématiques en CM par l'étude de huit grandeurs. Les mêmes notions mathématiques sont abordées plusieurs fois dans les diverses grandeurs étudiées et s'approfondissent progressivement. Ceci permet de véritablement spiraler les apprentissages et d'augmenter l'efficacité des séances. L'étude des grandeurs offre un apprentissage basé uniquement sur des mises en situation, manipulations, expérimentations, résolutions de problèmes liés à la vie. Au lieu de morceler les savoirs, cette démarche les met en interaction, donnant du sens à la pratique des mathématiques. Cet enseignement basé sur un apprentissage progressif et spiralé, dans des contextes variés et motivants, nous permet de bien prendre en compte la diversité des élèves.

BILIOGRAPHIE

Allard, C. (2016). Étude du processus d'institutionnalisation. Dans *Les pratiques de professeurs des écoles expérimentés. Actes du séminaire national de l'ARDM* (115-121). Paris : IREM de Paris – Université Paris Diderot. Consulté en ligne le 21/01/2025, Url : https://bibnum.publimath.fr/IPS/IPS18017.pdf

Chevallard, Y. (1997). *Familière et problématique, la figure du professeur*. Consulté en ligne le 21/01/2025, Url : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=24

[4] Établissements Régionaux d'Enseignement Adapté, Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté, Unités Localisées d'Inclusion Scolaire.

Chevallard, Y., Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. Dans *Petit x*, *55*, 5-32. Grenoble : IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. Dans *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques* (41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage. Consulté en ligne le 21/01/2025, Url : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

Chevallard, Y. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques*. Consulté en ligne le 21/01/2025, Url : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Chevallard, Y., Ladage, C. (2010). *Enquêter pour connaitre*. Consulté en ligne le 21/01/2025, Url : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=196

Coillot, J., Guichard, JP., avec la participation de Gaud, M., Rebourg, L., Redondo, C. et Thomas, F. (2018). *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Les Populations*. Poitiers : IREM&S de Poitiers.

Coillot, J., avec la collaboration de Gaud, M., Redondo, C., Thomas, F., conseillère pédagogique et Rebourg-Fert, L., professeur des écoles. (2019*). Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter, fascicule 1 : CM1 & CM2*. Poitiers : IREM&S de Poitiers.

Coillot, J., Delaporte, M., Gaud, M., Guichard, JP., Rebourg-Fert, L., Redondo, C. et Thomas, F. (2023). *La méthode des grandeurs*, 8 livrets de mise en œuvre pour les élèves de CM1. Châtellerault : Terre de Maths. Site associé : consulté en ligne le 21/01/2025, Url : www.lamethodedesgrandeurs.fr

Groupe Collège (2018). *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Les Angles*. Poitiers : IREM&S de Poitiers

Hélayel, J. (2020). *Au rythme des maths CM1, fichier de l'élève*. Paris : Éditions Bordas.

La Garanderie, A (de). (1980). *Les Profils pédagogiques. Discerner les aptitudes scolaires*. Paris : Le Centurion.

Kritter, C. (2021). *Maths CM1, La méthode de Singapour, fichiers 1 & 2*. Paris : La librairie des écoles.

Pretis, M. (2024). Suivi d'une constellation sur les grandeurs. *Au Fil des Maths, bulletin de l'APMEP*, *553*, 38-42.

PRISE EN COMPTE DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL, Ifé
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Université de REIMS, CEREP EA 4692 — équipe ERMEL
IREM de Reims, COPIRELEM
fabien.emprin@univ-reims.fr

Henri-Claude ARGAUD
Équipe ERMEL, Ifé
hargaud@gmail.com

Résumé
La prise en compte de l'état des connaissances des élèves est une condition inhérente à tout projet de différenciation. Or depuis la maternelle, les élèves développent des connaissances spatiales et géométriques dans des actions sur des objets qui sont moins explorées par des travaux de psychologie ou de didactique que celles relevant des apprentissages numériques. Comment ces connaissances initiales peuvent-elles contribuer à l'apprentissage des propriétés des figures ? Comment évoluent-elles de l'action sur des objets à des raisonnements sur des relations géométriques ? Pour répondre à ces questions au cœur de nos recherches, cette communication propose des pistes pour outiller les enseignants sur la prise en compte des potentialités des élèves en présentant des éléments d'analyse de leurs connaissances initiales ainsi que des situations d'apprentissage et des éléments de progression avec notamment le passage de problèmes portant sur des objets matériels à des problèmes « papier-crayon ».

I - PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

1 Finalités de l'intervention

Cette communication de l'équipe ERMEL propose de présenter les résultats de la recherche menée par l'équipe. Elle poursuit deux buts : d'une part analyser les connaissances, les potentialités, les difficultés des élèves – ce qui, selon nous, constitue une condition nécessaire pour la conception de dispositifs d'enseignement – et d'autre part s'interroger sur la prise en compte du temps long de certains apprentissages. La démarche de l'équipe ERMEL est basée sur une ingénierie didactique (Artigue, 2002) appliquée à des problèmes d'enseignement à l'échelle d'un cycle complet (Douaire et Emprin, 2018). Les expérimentations, dans de nombreuses classes, de différents milieux et sur le long terme (jamais moins d'une année scolaire), nourrissent le processus d'ingénierie et permettent d'adapter la proposition jusqu'à la production d'une ressource. Nous développons plus particulièrement ici l'étude de la symétrie autour de quatre moments :

- en Grande Section, avec la recherche de figures symétriques ;
- au CE1 avec l'association du pliage et de la symétrie et la recherche d'un axe éventuel ;
- au CE2 avec l'association du retournement et de la symétrie ;
- au CM1 et au CM2 avec l'identification et le tracé de figures symétriques.

Ce choix de présentation est guidé par la volonté de proposer une réflexion sur le long terme. Lors d'une enquête auprès des enseignants, nous avions identifié que ces derniers voyaient dans leurs ressources sur la géométrie une dimension répétitive (les mêmes types d'activité étant présentes, avec quelques variantes, chaque année). Notre objectif est de proposer, aux enseignants et aux élèves, des activités « nouvelles » pour chaque niveau. Ces dernières contribuent à développer des connaissances spécifiques aux niveaux, évolutives et complémentaires. Il s'agit de situations qui permettent de s'appuyer sur les connaissances initiales des élèves à propos du concept. En effet, même en Grande Section, en raison d'activités diverses (jeux, activités artistiques), les enfants dans leur famille et les élèves à l'école ont développé des connaissances dans l'espace usuel familier principalement spatiales, essentiellement perceptives (visuelles, gestuelles, orales).

Nous ferons aussi une incursion sur les connaissances sur cette notion en formation initiale.

2 Les recherches de l'équipe ERMEL

Nos recherches concernent l'intégralité des apprentissages de la GS au CM2. Elles poursuivent plusieurs buts : expliciter les problématiques d'enseignement des mathématiques à l'école primaire ; prendre en compte des connaissances des élèves identifiées notamment dans nos expérimentations ; élaborer des situations d'apprentissages fondées sur des problèmes pour permettre des sauts qualitatifs des connaissances ; produire des ressources pour les enseignants et les formateurs mettant à leur disposition les résultats de nos recherches.

Notre travail est basé sur la résolution de problèmes. Ces derniers sont conçus pour que la procédure optimale de résolution soit celle qui permette les sauts qualitatifs visés, et donc que l'élève ne puisse plus utiliser les procédures antérieures pour réaliser la tâche. De ce fait, la réalisation de la tâche doit garantir que les sauts qualitatifs aient été réalisés. Ces derniers sont visibles à travers la résolution des problèmes posés, les procédures employées, les capacités à pouvoir décrire avec précision les objets en jeu, les relations entre les objets (c'est le cas notamment en CE2 — *PAREIL PAS PAREIL* — avec la distinction entre « pivoter » et « retourner » à propos du quart de disque par exemple).

Les sauts qualitatifs sont donc visibles au niveau de l'évolution :

- des savoirs sur la symétrie (nous le décrivons dans la suite de l'analyse des différentes situations) ;
- des connaissances purement spatiales traduites dans la perception visuelle des objets par les gestes ou des locutions enfantines ;
- des connaissances spatiales identifiées par des caractéristiques des éléments composant ces objets, exprimées en langage courant familier ;
- des connaissances spatiales plus formalisées à travers un langage employant des termes adaptés aux actions spatiales qu'ils décrivent (retourner, pivoter, glisser sans pivoter…), voire institutionnels (symétrique, axe).

Plusieurs de nos publications récentes portent sur les apprentissages géométriques : au CP et au CE1 (*ERMEL Géométrie,* 2020), en Grande Section (*ERMEL GS Apprentissage du nombre et de la géométrie*, 2023). Elles présentent les résultats de notre recherche récente sur les apprentissages spatiaux et géométriques de la GS au CE1. Notre dernière publication sur les apprentissages géométriques du CE2 au CM2 (*ERMEL Géométrie CE2 et CM*, 2024) restructure complètement les progressions décrites antérieurement dans *ERMEL Géométrie cycle 3* (2006). Elle prend appui sur les apports récents de travaux en didactique des mathématiques et, notamment, sur ceux de la recherche que nous avons menée sur les apprentissages géométriques de la GS au CE1 et qui nous a permis d'analyser plus complètement les potentialités des élèves à l'approche de l'étude de chaque notion. Nous avons également choisi, comme dans la collection *Les Essentielles ERMEL* portant sur les apprentissages numériques, une entrée par les situations et non par des parties théoriques préalables.

Les situations sont aussi décrites de façon plus détaillée que dans les ouvrages précédents, notamment en ce qui concerne les sauts qualitatifs de connaissances et les gestes professionnels des enseignants dans les moments clefs comme la consigne, la mise en commun…

II - TROUVER LE SYMÉTRIQUE D'UNE FIGURE EN GS

Cette situation propose aux élèves, au premier trimestre de la Grande Section, d'associer les deux ailes d'un même papillon et de comparer des figures qui se ressemblent pour élaborer des critères d'analyse. La compréhension du problème est largement fondée sur la connaissance que les élèves ont déjà de la ressemblance entre les deux ailes d'un papillon, issue de leurs observations dans la nature ou sur de nombreuses illustrations dans les livres à leur disposition. Cette situation contribue au passage de la perception globale d'une figure à l'analyse des différences.

Dans la première phase, après une observation de photos de papillons, les élèves produisent des représentations de papillons par peinture sur une moitié (figure 1a) et repliage (figure 1b), ce qui leur permet de se rappeler les caractéristiques perceptives essentielles relatives aux motifs des deux ailes.

(a)  (b) 

Figure 1. (a) peinture sur une partie ; (b) résultat après pliage

1 Recherche de dispositions symétriques

Dans la deuxième phase, un ensemble de dix ailes leur est proposé (figure 2). Les différences portent uniquement sur la position des trois tâches circulaires sur les ailes, le contour des ailes restant identique.

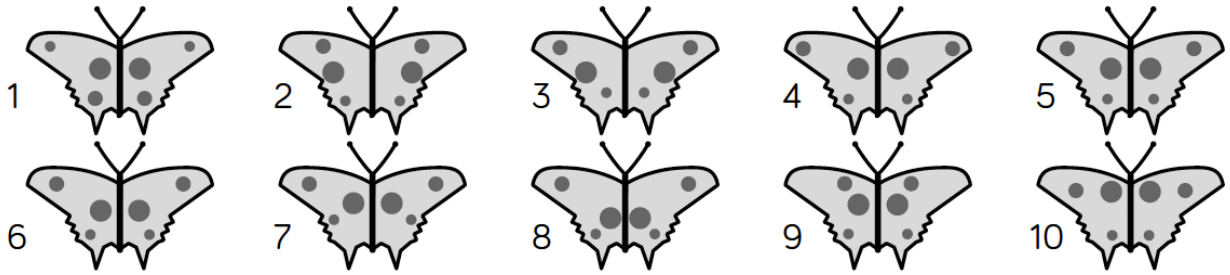


Figure 2. Les dix papillons

Dans un premier problème, les élèves ont à chercher la seconde aile d'un papillon, parmi l'ensemble de ces 10 ailes droites (figure 3).



Figure 3. La partie gauche du papillon dont il faut retrouver l'autre partie

Les essais des ailes sont plus ou moins organisés selon les élèves : certains élèves prennent les ailes droites « comme elles viennent » et les essaient au fur et à mesure. Un élève choisit une aile droite et la compare à l'aile gauche (figure 4a), en mettant l'aile en position, sans même la disposer contre l'autre aile, puis il range les ailes droites qu'il n'a pas rejetées, et les regarde plus attentivement (figure 4b) avant d'en sélectionner une.

(a)  (b) 

Figure 4. (a) essai d'association ; (b) recherche dans le lot d'ailes droites non rejetées

Dans cette comparaison de figures qui se ressemblent, plusieurs critères émergent pour la détermination de l'aile : La proximité des disques vis-à-vis des bords ou du corps ; la grosseur relative des disques en vis-à-vis ; les positions relatives des disques (plus haut, plus bas). Ces critères de comparaison, pour déterminer si deux ailes sont « pareilles » ou « pas pareilles » sont d'abord produits plus ou moins implicitement par chaque élève, puis formulés lors des échanges ; ils sont explicités et mis à l'épreuve lors des mises en commun.

2 Recherche de contours symétriques

Lors de la troisième phase (figure 5), les ailes sont uniformes, seuls leurs contours varient d'un papillon à l'autre. Les élèves sont donc conduits à s'intéresser à la forme de l'aile. Dans cette phase, lors d'un premier problème, l'aile n° 7 a été choisie par l'enseignant ; elle, seule, présente un bord supérieur concave.

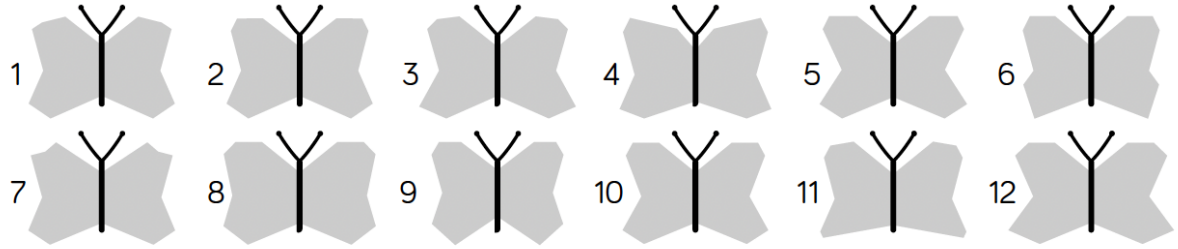


Figure 5. Lots de papillons de contours différents

Les procédures de comparaison sont essentiellement constituées par la perception globale, des amorces de superposition, le suivi avec le doigt. Leurs descriptions font émerger des critères de singularité (comme la particularité déjà citée de cette aile), de longueurs de segments, de la forme constituée par des paires de segments (ouverture entre les angles).

3 En conclusion sur cette situation

Cette situation **amène les élèves à analyser des figures, et à formuler lors de la validation de leurs solutions des critères géométriques pour les comparer. Ces acquisitions sont rendues possibles par la confrontation des élèves à des ensembles de figures proches** les contraignant à dépasser tant les critères perceptifs habituels comme la taille, que l'évocation d'objets familiers, pour ne s'intéresser qu'à leur

contour (ici une analyse du passage de la surface au contour pourrait être réalisée avec des outils du type de ceux développés par Duval et Godin (2005) ou Perrin-Glorian et Godin (2018) mais ce cadre n'a pas été mobilisé dans notre recherche).

Un des intérêts de cette situation est **d'approcher les caractéristiques des figures symétriques sans avoir besoin d'introduire des procédures où l'axe de symétrie intervient de façon nécessaire** (le recours à l'axe constitué par le corps du papillon n'est pas explicitement utilisé).

Cette situation, outre le fait de présenter un choix d'évolution de variables didactiques (nature des ailes du papillon, formes identiques avec points différents ou formes des ailes différentes) permettant aux élèves de faire un saut qualitatif dans les procédures d'identification de la symétrie, nous renseigne sur leurs connaissances. La symétrie reste « évoquée » par les propriétés des papillons (la place des éléments intérieurs aux ailes, puis les caractéristiques de leur contour). Il s'agit pour les élèves de passer d'une perception globale de la ressemblance à l'analyse des caractéristiques de la symétrique. Ces caractéristiques ne sont pas encore des propriétés : le symétrique est à même distance de l'axe que l'antécédent, la symétrie conserve la forme et la taille (un gros rond est symétrisé en un gros rond…), les longueurs des segments sont conservées… Elles sont mobilisées par le contexte et l'expérience du pliage par les élèves dans des situations de classe ou hors de l'école dans des jeux ou activités ludiques. Cette situation permet de prendre des informations sur ces expériences sans avoir à proposer une situation isolée en recueillant les résultats des élèves (choix d'ailes) et leurs arguments (éventuellement accompagnés de gestes).

Notre choix a été de nous appuyer sur l'aspect « pliage » du concept de symétrie en nous basant sur les activités usuelles des classes (notamment artistiques). La viabilité de ce choix a été confirmée dans l'expérimentation sans que nous ne cherchions à montrer que d'autres choix seraient impossibles ou moins efficients. Grâce à cette approche, nous avons pu montrer que la symétrie est vue comme

- conservant la taille : un gros rond ne peut pas être associé à un petit rond ;
- la distance à l'axe de symétrie (implicite comme nous venons de le dire) : le rond symétrique ne peut pas être plus proche de l'axe que l'autre ;
- les propriétés des figures : angles, concavité…

Ces propriétés s'exercent en actes dans les choix des élèves et peuvent être formulées lors des mises en commun. L'enseignant peut détecter, chez certains élèves, des difficultés à percevoir certaines propriétés comme la conservation de la distance à l'axe. Il peut alors proposer de revenir, pour ces élèves spécifiques, à des étapes de manipulation de pliage.

III - PLIAGE ET SYMÉTRIE AU CE1

Alors que la situation précédente portait sur la comparaison de figures pour déterminer si elles sont symétriques (la relation de symétrie, et en particulier l'existence d'un axe), la situation *Pliage et symétrie* rend nécessaire la recherche d'un axe. Dans cette situation, les élèves, sans effectuer le pliage, doivent chercher si des formes pleines ou des tracés de leur contour peuvent avoir été produits par pliages, et dans ce cas ils ont à déterminer où se situerait le pli. Les pliages d'une figure et le retournement d'une moitié de celle-ci, associés à la symétrie, sont utilisés conjointement dans cette situation.

1 Les connaissances initiales et la réappropriation des techniques de pliage

Dans des activités relevant de différents domaines depuis la maternelle, les élèves ont une pratique des pliages, des découpages voire de l'utilisation des pochoirs, qui, selon les techniques utilisées, leur ont permis de produire des formes symétriques ou présentant une certaine régularité, comme des ribambelles. Mais au début du CE1, ces techniques, qui n'ont, au regard de ce que l'on peut voir dans les outils pédagogiques à disposition des enseignants, généralement pas été accompagnées de la formulation de critères évoqués précédemment ont parfois été oubliées.

Par ailleurs, les activités existantes en maternelle et cycle 2 ont tendance à renforcer l'idée que le symétrique est produit autour d'un axe horizontal ou vertical. De plus, dans ces techniques, les élèves sont conduits, en général, plus à plier qu'à devoir anticiper l'emplacement du pli. Quand, par ailleurs, ils comparent des formes, les jugements sur les ressemblances ou différences exprimés s'appuient davantage sur la perception globale ou leur régularité que sur la mise en correspondance d'éléments singuliers symétriques par rapport au pli. Aussi, une première phase de la situation permet de réinstaller ces gestes techniques de pliage et découpage ; les élèves produisent des formes pleines symétriques par pliage/découpage et les analysent.

2 Recherche de plis

Dans une deuxième phase, les élèves sont confrontés à plusieurs problèmes successifs qui ont en commun la recherche d'un pli éventuel sans avoir le droit de plier la feuille sur laquelle est imprimée une forme. Ces feuilles sont « non rectangulaires » pour n'induire aucune orientation particulière de la forme portée. L'enseignant ayant indiqué que ces formes ont été produites par le même procédé que ceux que les élèves ont mis en œuvre à la phase 1, chacun sait qu'il existe un axe de symétrie. Les dessins sont proposés successivement pour chacun des trois cas ci-dessous (figure 6) différant par l'existence et le nombre de « points singuliers », c'est-à-dire de points qui, perceptivement, apparaissent aux élèves, compte tenu de leurs expériences de pliage, comme devant être sur le pli.



(a) *(b)* *(c)*

Figure 6. Exemple de figures proposées en phase avec différents points singuliers : (a) deux points singuliers ; (b) un point singulier ; (c) sans point singulier

Plusieurs formes de la même catégorie sont proposées avant de passer à la suivante. Les élèves doivent donc identifier des ressemblances entre des parties superposables, déterminer des indices sur la position de l'axe (les points singuliers) ou sur des paires de points correspondants, ce qui constitue un nouveau critère possible d'analyse.

Afin de mettre en échec des constats uniquement perceptifs, trois types de variables didactiques sont exploitées pour la première série de problèmes : l'existence ou non de points singuliers qui sont sur le pli, comme sommet d'un angle ; la rectitude ou non d'un côté où passe le pli pour lequel l'élève doit trouver, parfois approximativement, le milieu. Les formes peuvent avoir des bords rectilignes ou légèrement incurvés.

Les procédures peuvent s'appuyer sur l'assimilation à une forme connue (sapin…), l'identification de parties semblables (« bosses », « creux »,) qui sont « en face » ou l'identification de points où passe le trait du pli. Les élèves n'ont pas le droit de plier, mais certains amorcent le pliage avec la main.

Lors de la mise en commun, les arguments portent sur les éléments significatifs, repérables de part et d'autre du pli. Les imprécisions de tracés sont distinguées des erreurs portant sur l'emplacement du trait. Ensuite seulement le pliage permet la validation pratique.

3 Existence d'axe de symétrie

Dans une troisième phase, les élèves ont à résoudre des problèmes successifs d'existence de l'axe de symétrie de figures. La consigne est la suivante : « Ces figures peuvent-elles avoir été faites avec un pliage ? Si oui, tracez l'emplacement du pli. Sinon, expliquez pourquoi. ». Cette fois, seul le contour, et non la forme pleine, est représenté (des exemples sont donnés figure 7).

Les figures proposées ont 0 axe de symétrie (parallélogramme, « bannière ») ou 1 axe (lune) ou plusieurs (Etoile). Deux types de variables didactiques sont donc utilisées : l'apparente régularité de certaines figures qui va faire émettre des constats perceptifs — pour de nombreux élèves ces formes pouvaient être obtenues par pliage — qui seront mis en échec, l'existence de plusieurs axes (5 pour l'étoile) notamment des axes qui ne sont pas perpendiculaires entre eux. Les figures sont imprimées sur des feuilles A5, sans que l'axe éventuel ou les côtés ne soient parallèles au bord de la feuille.



Figure 7. Exemple de figures proposées en phase 3

À force de travailler sur la symétrie, les élèves peuvent penser que toute forme a nécessairement un symétrique. Cette phase introduit donc une réflexion sur l'existence, ou non d'un axe. Elle a pour but de distinguer la régularité perçue et la symétrie axiale : des figures présentant une régularité peuvent ne pas avoir d'axe de symétrie (parallélogramme, « bannière », figure 7). Il est clair que l'on ne peut pas viser à cet âge la « démonstration » du fait qu'aucun axe n'existe néanmoins, les élèves peuvent trouver des arguments pour se convaincre que ce n'est pas possible. Par exemple, pour le parallélogramme (figure 7), l'élève repère les régularités (côtés de même longueur) et peut dire « s'il y avait un axe il passerait par le milieu du côté ou les sommets » et, en essayant, se convainc que cela ne fonctionne pas. Comme dans la phase précédente, une fois les arguments examinés lors de la mise en commun, notamment relatifs au parallélogramme ou à la bannière, une validation pratique peut être effectuée avec le pliage…

Dans ces deux dernières situations, les élèves doivent anticiper le résultat, c'est en cela qu'il y a bien un problème nécessitant un saut qualitatif de procédures : passer de la perception des régularités à l'analyse des figures mobilisant des propriétés. Ces propriétés sont identifiées par les élèves grâce au lien entre l'aspect technique (pliage effectif) et l'axe de symétrie (trace du pli). L'évolution des variables didactiques permet, par le passage de la forme au contour, l'analyse des composantes d'une figure et le recours au tracé. Ces choix de variables remettent également en cause l'idée erronée d'unicité de l'axe de symétrie, l'association entre symétrie et régularité et l'horizontalité ou la verticalité de l'axe.

La situation permet enfin d'institutionnaliser le vocabulaire « symétrique », « axe de symétrie » associé au pliage ainsi que les constats précédemment cités.

IV - SYMÉTRIE ET RETOURNEMENT AU CE2

Nous présentons rapidement une situation abordant une nouvelle signification de la symétrie (deux figures sont symétriques si elles sont superposables éventuellement après retournement) et permettant de distinguer la superposabilité avec ou sans retournement.

1 Analyse de formes réversibles (situation *PAREIL PAS PAREIL*)

Après avoir produit des assemblages de trois pièces, un carré, un quart-de-rond et un triangle rectangle de même longueur de côté ou rayon, les élèves ont à chercher tous les assemblages possibles dont quelques exemples ci-dessous sont dessinés sur des macarons (figure 8).

Dans une première phase, les élèves ont à produire le plus d'assemblages possible différents. Les assemblages identiques sont identifiés par superposition. Puis les élèves doivent reconnaître parmi un lot d'assemblages dessinés ceux qui sont « les mêmes sans retournement » ou « les mêmes après retournement ».

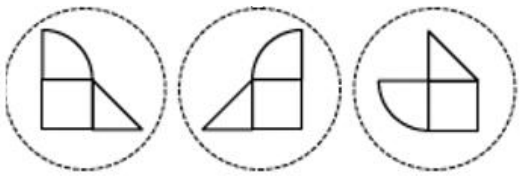


Figure 8. Exemple de figures possibles

Dans le second problème, ils doivent reconnaître parmi un lot d'assemblages dessinés, ceux qui sont superposables, directement ou par retournement. Cette dernière procédure permet plus facilement que la procédure par pliage de valider la non-existence d'un axe de symétrie car il suffit de faire pivoter selon un demi-tour à condition que les élèves aient bien compris cette procédure.

2 Analyse de formes réversibles (situation *PUZZLE*)

Plus tard dans l'année de CE2, l'association entre réversibilité (la forme face blanche et face noire est identique) et symétrie est approfondie. Les élèves ont à reconstituer un hexagone à partir de 7 pièces, chacune de ces pièces étant bicolore (figures 9a et 9b,) puis à déterminer si un hexagone peut être réalisé en ayant tous ses éléments noirs, ou blancs, ce qui est impossible par exemple pour l'hexagone ci-dessous (figure 9c) : les cinq pièces symétriques peuvent indifféremment être posées à l'endroit ou à l'envers, mais les deux pièces non symétriques (celle à gauche de la figure 9a) ne peuvent être de la même couleur.

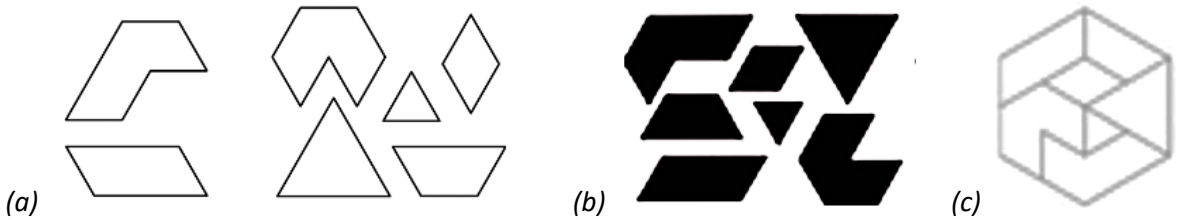


Figure 9. (a) face blanche des sept pièces du puzzle ; (b) face noire sept pièces du puzzle ; (c) hexagone à essayer de reconstituer d'une seule couleur avec les sept pièces

Il s'agit dans un premier temps d'amener les élèves à prendre conscience que, parmi les formes proposées, pour certaines « l'envers vaut l'endroit » (réversibles) et que, pour d'autres, ce n'est pas le cas (non réversibles), puis à associer cette réversibilité à l'existence d'un axe de symétrie. Pour cela l'enseignant utilise les connaissances des élèves sur les formes symétriques.

Dans ces deux situations destinées au CE2, les élèves dans un premier temps manipulent des pièces pour chercher des assemblages ou réaliser un puzzle. Lorsque ces actions sur les pièces sont interdites, leur jugement doit porter uniquement sur les figures représentant les pièces initiales. La relation entre symétrie et superposabilité par retournement conclut cette situation.

V - SYMÉTRIE ET MIROIR AU CM1

En CM1, c'est la production d'une symétrie qui est l'enjeu essentiel du travail, mais il n'est pas possible d'attendre des élèves la construction de perpendiculaires à l'axe et le report de longueur. Pour autant il est possible de mobiliser en actes ces actions pour qu'elles deviennent disponibles pour les années ultérieures. Un matériel spécifique, le *Géomiroir™*, permet de construire un problème de ce type.

1 L'utilisation du Géomiroir™

Ce matériel, constitué d'un miroir semi-transparent sur pied, permet de voir à la fois les objets qui sont derrière lui, mais aussi le symétrique des objets qui sont devant lui. Sur la figure 10, on peut voir un point devant le miroir, un cercle derrière ainsi que l'image du point, dans le Géomiroir™, symétrique du point par rapport à la droite sur laquelle est posé le Géomiroir™.

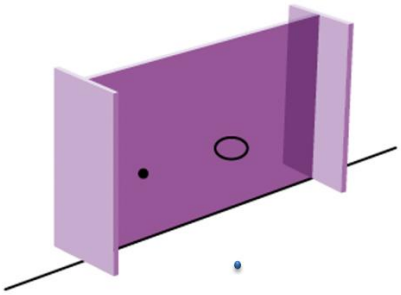


Figure 10. Fonctionnement du Géomiroir™

Dans une première phase, les élèves s'approprient le fonctionnement de cet outil en reprenant une tâche du CE2 : trouver les axes de symétrie d'une figure s'ils existent, tout d'abord en essayant de placer le Géomiroir™ puis uniquement par tracé, le matériel ne servant que pour la validation (figure 11). On s'appuie donc sur l'apprentissage déjà effectué en CE2 tout en réalisant un nouveau diagnostic des acquis des élèves.

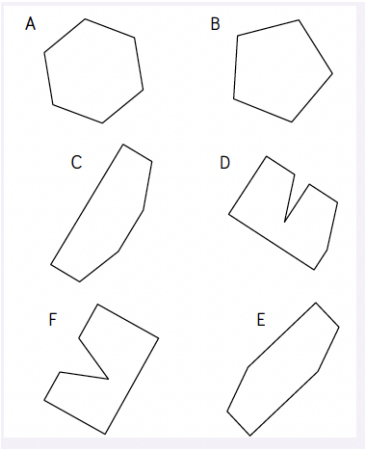


Figure 11. Figures dont il faut trouver les axes de symétrie (s'ils existent)

Les tâches suivantes visent la production du symétrique d'un point ou d'un segment orienté par rapport à un axe.

2 Produire et contrôler un symétrique (situation *ATTRAPE CM1*)

Dans la situation *ATTRAPE* au CM1, les élèves doivent placer un point de sorte que son image dans le Géomiroir™ apparaisse à l'intérieur d'un disque donné (par exemple dans la figure 10, l'image du point bleu n'est pas « attrapée » par le cercle qui est derrière le miroir). Le point est placé sur un petit macaron mobile. Le disque est, quant à lui, fixe sur la feuille tout comme l'axe de symétrie. Le dispositif est présenté figure 12.

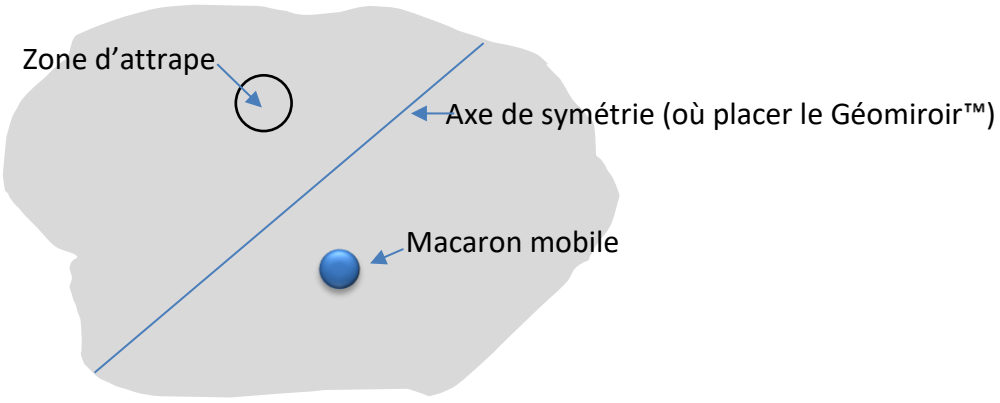


Figure 11. Le dispositif ATTRAPE *vu du dessus*

La situation évolue de la façon suivante :

- *ATTRAPE* avec des macarons et avec le Géomiroir™ placé – les élèves peuvent donc déplacer le macaron et contrôler en même temps la position du symétrique ;
- *ATTRAPE* avec des macarons, mais sans Géomiroir™ - les élèves doivent anticiper la place du symétrique puis contrôler avec le Géomiroir™ ;
- *ATTRAPE papier-crayon* – cette fois les élèves doivent tracer sur la feuille le symétrique ou encore trouver l'emplacement du Géomiroir™ pour que le point soit bien attrapé par le disque (figure 12).

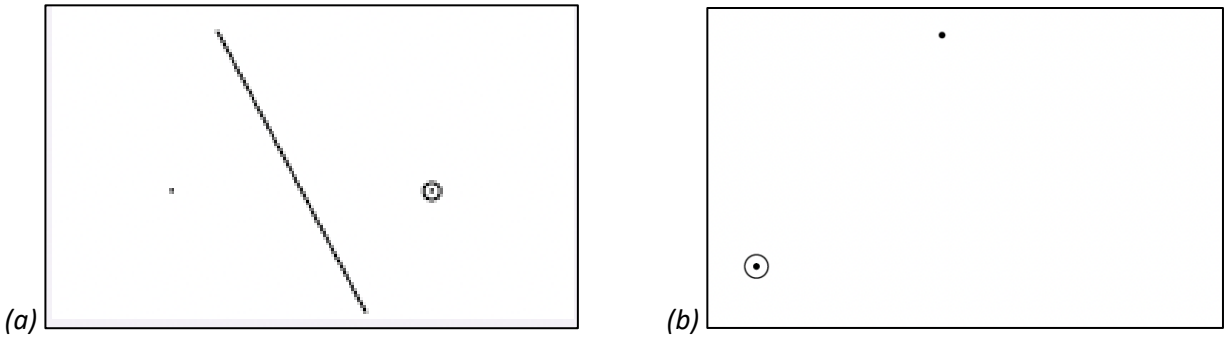


Figure 12. (a) placer le point pour qu'il soit attrapé par le disque ; (b) tracer le trait sur lequel placer le Géomiroir™, on voit que le point est bien attrapé par le disque

Une des variables didactiques de la situation est la taille du disque, mais aussi celle du point. En effet, pour les élèves de CM, nous n'introduisons pas de définition du point comme intersection de courbes, ni sa représentation sous forme de croix. Nous faisons le choix de laisser au collège cette définition qui induit que le point est l'intersection de deux courbes. Nous restons donc dans une approche spatiale.

L'observation des élèves montre une persistance de l'horizontalité dans les premiers essais, mais aussi dans les situations suivantes. Le choix de l'utilisation du Géomiroir™permet une confrontation pratique de cette représentation erronée.

Le passage à un problème en papier-crayon vise à rendre nécessaire l'utilisation de constructions géométriques pour anticiper tant la place du symétrique que celle de l'axe. La situation se conclut par une institutionnalisation des procédures trouvées par les élèves pour réussir avec les instruments.

3 Du point au segment (situation *ATTRAPE CM2*)

Il s'agit désormais de remobiliser les procédures de tracé de symétrique d'un point pour construire le symétrique d'un segment et, par là même, de figures plus complexes. Le jeu sur les variables, issu de nos expérimentations, conduit aux étapes suivantes. Dans un premier temps, il s'agit d'obtenir un assemblage symétrique ou non à partir d'une forme donnée. La validation réutilise toutes les techniques déjà vues telles que le pliage, la superposition et le Géomiroir™ (figure 13a). Ensuite, les élèves doivent compléter une figure par symétrie (figure 13b). Enfin ils doivent construire le symétrique d'un point et d'un segment en utilisant le problème *ATTRAPE* avec Géomiroir™ et uniquement en papier/crayon (figure 14).

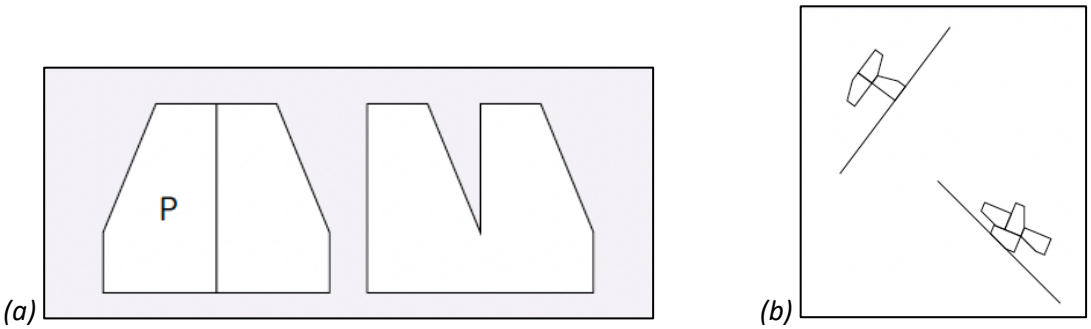


Figure 13. (a) formes à assembler pour obtenir un axe de symétrie (ou non) ; (b) les symétriques des assemblages à produire (la forme de base est utilisée comme gabarit)

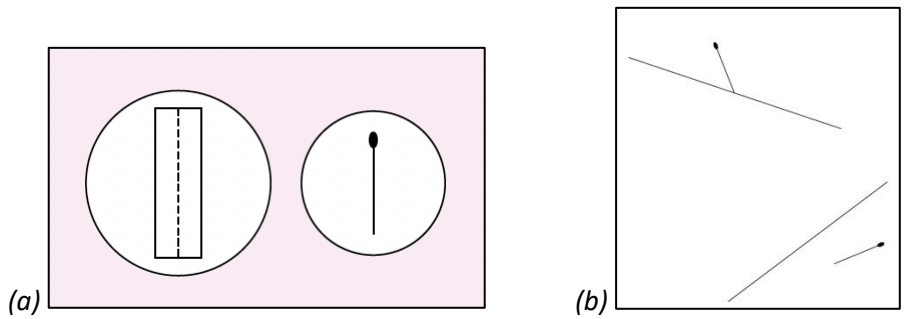


Figure 14. (a) formes le disque qui attrape et le macaron à attraper, ; (b) le problème en papier-crayon

4 Quelle élaboration des savoirs à long terme en s'appuyant sur l'évolution des connaissances ?

L'équipe ERMEL a mené des recherches sur l'apprentissage des mathématiques à l'école, en s'appuyant sur la résolution de problèmes, d'abord dans le domaine numérique, puis dans le domaine géométrique en utilisant la même méthode. Ces recherches étaient destinées, dès le départ, à être diffusées sous forme d'ouvrages aux enseignants et formateurs de l'enseignement primaire. La méthodologie de recherche comprend :

- une identification des besoins des enseignants, par exemple sur la mise en place de situations didactiques ;
- une analyse des connaissances mathématiques (problèmes, propriétés, représentations symboliques…) ;
- une analyse de l'environnement mathématique ;
- une analyse des connaissances mathématiques (problèmes, propriétés, représentations symboliques…) ;
- l'organisation de l'étude de toutes les notions numériques (ou géométriques) d'un cycle (dans la définition française, un cycle s'étale sur plusieurs années) ;
- la construction de situations didactiques et l'expérimentation dans de nombreuses classes de milieux sociaux différents au sein de plusieurs académies ;
- l'identification de la potentialité des élèves, qui se fait aussi à partir des expérimentations, en interaction avec la composante précédente ;
- la rédaction d'ouvrages comprenant l'approfondissement des enjeux des apprentissages et des problèmes de l'enseignant ainsi que des dispositifs pédagogiques expérimentés.

Ce travail nous a donc menés à identifier les significations de la symétrie du point de vue mathématique puis celles qui peuvent être mises en œuvre pour organiser une étude tout au long de l'école primaire. Les expérimentations à grande échelle nous ont permis de vérifier la viabilité de cette organisation dont nous avons extrait ici quatre temps utiles pour qu'enseignants et formateur puissent comprendre notre démarche. Les trois significations de la symétrie mobilisables par les élèves dans ces situations sont : « formes obtenues par pliage » disponible dès la GS et reprise en CE1, « formes réversibles » mobilisée en CE2 et « image dans un miroir » travaillée en CM. Pour travailler ces aspects du concept, nous utilisons trois types de problèmes permettant de partir des procédures des élèves pour les faire évoluer : identifier si une figure a un axe de symétrie et tracer l'axe ; déterminer si deux figures sont symétriques et produire le symétrique ; tracer le symétrique d'un point ou d'un segment. Pour chacun, nous pouvons poser le problème avec des formes manipulables ou des dessins, laisser la procédure de contrôle disponible (autoriser le pliage ou l'usage du Géomiroir™) ou demander d'anticiper. Ce jeu sur les variables permet à l'enseignant d'accéder aux connaissances des élèves, de s'y appuyer pour faire évoluer leurs procédures.

Les élèves commencent par utiliser des gestes sur les objets (pliage, retournement…), des instruments (miroir…) puis sont conduits à identifier des points ou traits en correspondance pour réaliser ou vérifier

enfin les tracés. Les raisonnements et l'analyse des figures s'installent. En prenant en compte les connaissances des élèves, il est possible de proposer des situations remettant en cause celles qui sont erronées. L'identification des connaissances et des potentialités des élèves a été réalisée grâce au processus d'ingénierie : l'analyse *a priori* permet de faire des choix et des hypothèses mises à l'épreuve dans une validation interne. Ces choix portent sur les objets, les procédures, les types de problèmes… Nous faisons un petit détour par les formations des étudiants se destinant au métier de l'enseignement dans le cadre d'une licence pluridisciplinaire. Sans que cela ait de valeur scientifique, cela nous permet d'illustrer l'état des connaissances de ces jeunes adultes ayant eu un parcours scolaire ne les confrontant pas à ce type de problèmes (ils ont été questionnés à ce sujet *a posteriori*) et donc aussi revenir sur les connaissances des élèves.

VI - REGARD EN FORMATION (L1)

Dans le cadre d'une licence pluridisciplinaire mention sciences de l'éducation destinée aux étudiants voulant préparer les concours de l'enseignant, nous avons la charge, en première année, des cours de mathématiques. Sans détailler plus ici notre travail, nous poursuivons deux objectifs essentiels : redonner à ces étudiants un regard positif sur les mathématiques et les amener à construire des *Connaissances Approfondies des Fondements des Mathématiques* (CAFM), concept que nous empruntons à Ma (2010). Ma met en évidence une différence entre les connaissances approfondies des mathématiques fondamentales (CAFM) (*Profound Understanding of Fundamental Mathematics*) qui diffèrent des « connaissances de haut niveau » travaillées dans la scolarité et qui permettent de résoudre des problèmes mathématiques spécifiques (fonctions, intégration, équations différentielles, rédaction de démonstrations formelles…). En comparant les enseignants chinois qui possèdent des CAFM et les enseignants américains ayant des connaissances de haut niveau, Ma (ibid.) montre que ce sont les CAFM qui permettent d'améliorer l'enseignement. Les CAFM se construisent au travers de l'identification exhaustive des différents aspects d'un concept mathématique. On voit là que le travail mené au sein de l'équipe ERMEL pour identifier les connaissances des élèves peut nourrir l'identification des CAFM.

1 Un symétriseur informatique pour tracer à souris levée

L'entrée dans ce travail avec les étudiants de L1 se fait par le repérage de leurs représentations. Pour cela nous avons conçu, avec Géogébra, un symétriseur[1] (exemples donnés figure 15).

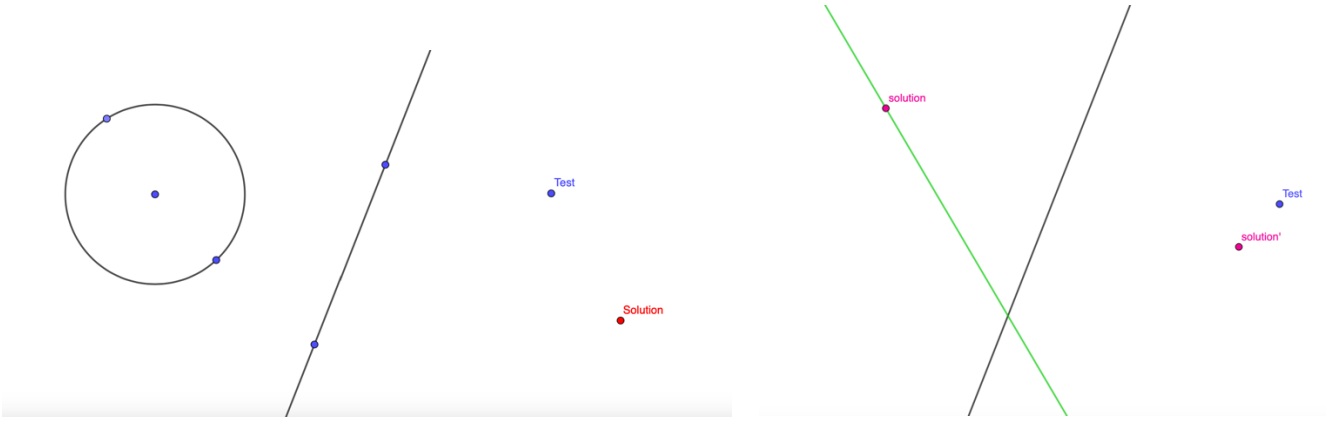


Figure 15. Exemples de symétriseurs dans Geogébra

Ce travail s'appuie sur les expérimentations en début de collège de l'équipe ERMEL (1995) qui proposaient l'usage de symétriseurs mécaniques. L'intérêt ici est d'avoir une production et une vérification de la symétrie en laquelle les étudiants puissent avoir confiance. Le symétrique se construit sous leurs yeux,

[1] https://www.geogebra.org/m/c8upgkwq ou https://www.geogebra.org/m/vadsu4kx

point par point, contrairement au Géomiroir™ qui donne directement une image de la réponse. Les étudiants doivent tracer à souris levée (sans outils), en saisissant le point bleu indiqué « test », le symétrique du cercle ou de la droite par rapport au trait noir (figure 15). Ils peuvent ensuite saisir le point solution (violet) et le déplacer sur l'objet pour voir se réaliser la trace du symétrique (« point»). Ils peuvent ainsi confronter leur tracé avec le tracé symétrique.

2 Erreurs persistantes en L1

Il est proposé aux étudiants de transmettre à l'enseignant via la plateforme de cours *Moodle*, une copie d'écran de leur travail. Cela n'a pas de caractère obligatoire et n'entre pas en compte dans l'évaluation du travail. Il leur est précisé que c'est à des fins de recherche et que cela sera traité anonymement. Nous avons donc récupéré des travaux d'étudiants sans pouvoir réaliser de statistiques, car bon nombre d'entre eux recommencent plusieurs fois pour obtenir un tracé parfait à envoyer à l'enseignant, alors même que ce dernier a pu voir les tracés erronés se faire en passant dans les rangs. Néanmoins, ces travaux montrent des difficultés toujours présentes en L1.

Les productions présentées dans l'annexe 1 illustrent la prégnance de l'horizontalité, les tracés étant réalisés comme s'ils étaient symétriques par rapport à un axe vertical (productions a, b, c, d, i).On voit aussi apparaître des erreurs dans la taille du symétrique qui est plus petit que la figure initiale (productions c, d), ou plus grand (production h). Pour ce qui est du symétrique d'une droite, on remarque que certains étudiants ne repèrent pas qu'un point est son propre symétrique, celui qui est situé sur l'axe. Cela signifie qu'ils ne font pas passer le symétrique de la droite par ce point. On remarque dans la production g un étudiant qui, à l'approche de l'axe de symétrie, se rend compte qu'il y a une incohérence et rebrousse chemin pour ensuite faire passer son symétrique par l'intersection droite-axe. Ces travaux illustrent, pour nous, l'importance, dans le cursus scolaire, de remettre en cause des représentations de la symétrie.

VII - ÉLÉMENTS DE SYNTHÈSE : QUELLE PRISE EN COMPTE ET QUELLE EVOLUTION DES CONNAISSANCES INITIALES ?

Dans le cadre de la recherche ERMEL, nous avons pu vérifier certaines hypothèses. Ce processus s'appuie, tel que nous l'avons décrit succinctement ici et dans d'autres publications (Douaire, 2012), sur un travail d'analyse d'expérimentations en classe durant six années pour la géométrie au cycle 3 et six autres années pour la géométrie que cycle 2.

Durant ces expérimentations, les chercheurs recueillent des informations auprès des enseignants expérimentateurs, les synthétisent et les partagent au sein de l'équipe. Ces recueils sont hétérogènes et peuvent aller du compte rendu de réunion, à la captation vidéo, en passant par le recueil de traces en fonction de la nature de la question posée (question de programmation, de progression, de mise en œuvre, d'identification des connaissances initiales, de vérification de la viabilité en classe ordinaire…)

Nous avons confirmé, en analysant les procédures, que les élèves avaient des connaissances issues de gestes sur les formes depuis leurs activités menées en maternelle : tourner, retourner, superposer, juxtaposer, pour assembler, emboîter… Ces gestes ne sont pas de simples manipulations dépourvues d'intentionnalité, mais constituent des procédures de résolution de problèmes géométriques. Ils ont des fonctions exploratoires, de contrôle…

Nous avons fait le choix, pour permettre aux élèves d'accéder à des connaissances géométriques, de mettre en échec les critères de validation fondés sur la perception ; aussi comme nous l'avons évoqué, les comparaisons portent sur des formes ou des figures suffisamment proches pour rendre nécessaire le recours à l'analyse de leurs composantes géométriques. Ainsi, les programmations issues de nos expérimentations sont construites pour permettre l'interaction entre l'étude des objets et celle des relations. Nous faisons évoluer les supports tout comme les ressemblances entre des figures et les méthodes de validation pour permettre les sauts qualitatifs de procédures chez les élèves.

De plus, pour que l'apprentissage des propriétés s'opère, nous l'avons appuyé sur l'analyse des effets des actions sur les objets et sur les tracés des figures. Nos expérimentations montrent que cette analyse est renforcée en passant des actions sur les formes à l'analyse des figures puis aux tracés. Cette évolution des tâches favorise également l'entrée dans le spatio-grahique.

Une de nos ambitions serait de permettre à l'enseignant de garder une approche critique sur les propositions d'enseignement qui lui sont soumises, y compris celles présentées ici. C'est pourquoi nous explicitons ici, comme dans nos ressources, les fondements des choix, basés sur des expériences, des choix théoriques ou encore de simples options que nous avons prises.

Nous avons cherché à montrer à la fois qu'il était possible d'avoir une continuité sur les apprentissages géométriques prenant en compte les connaissances des élèves, que cette proposition était viable dans une classe ordinaire (acceptable pour les enseignants expérimentateurs) et que les procédures attendues des élèves, notamment les sauts qualitatifs s'opéraient réellement (les problèmes permettaient bien de mettre en défaut les procédures erronées). Cela nous semble une originalité par rapport aux propositions d'enseignement existantes ainsi qu'une piste prometteuse de recherche, l'analyse de connaissances des élèves étant une piste pour aider les enseignants à aider leurs élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui. *Revue internationale des Sciences de l'éducation*, *8*, 59-72.

Douaire, J. (2012). Sur les publications ERMEL. Dans R. Jost et A. Mercier (eds.), *Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège* (p. 42-47). Url : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/1actes-mercierjost_2012.pdf/view

Douaire, J., Argaud, H.-C., Emprin, F. et Frémin, M. (2023a). *ERMEL GS.* Paris : Hatier.

Douaire, J., Argaud, H.-C., Emprin, F. et Frémin, M (2020). *ERMEL Géométrie CP-CE1*. Paris : Hatier.

Douaire, J., Argaud, H.-C., Emprin, F. et Frémin, M. (2024). *ERMEL Géométrie CE2-CM* Paris : Hatier.

Douaire, J., Emprin, F. et Argaud, H.-C. (2023b). Recherche et production d'une ressource pour les apprentissages géométriques en CP et en CE1. Dans C. Guille-Biel Winder et T. Assude (eds.), *Articulations entre les espaces sensible, graphique et géométrique* (p. 171-177). Londres : ISTE.

Douaire, J. et Emprin, F. (2018). The evolution of a resource stemming from research. Dans *(Re)sources 2018 international conference* (p. 183-187). ENS LYON.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N, 76*, 7-27.

Houdement, C. et Petitfour, É. (2022). Le dessin à main levée, un révélateur du rapport des élèves à la figure géométrique . *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*, 315-340.

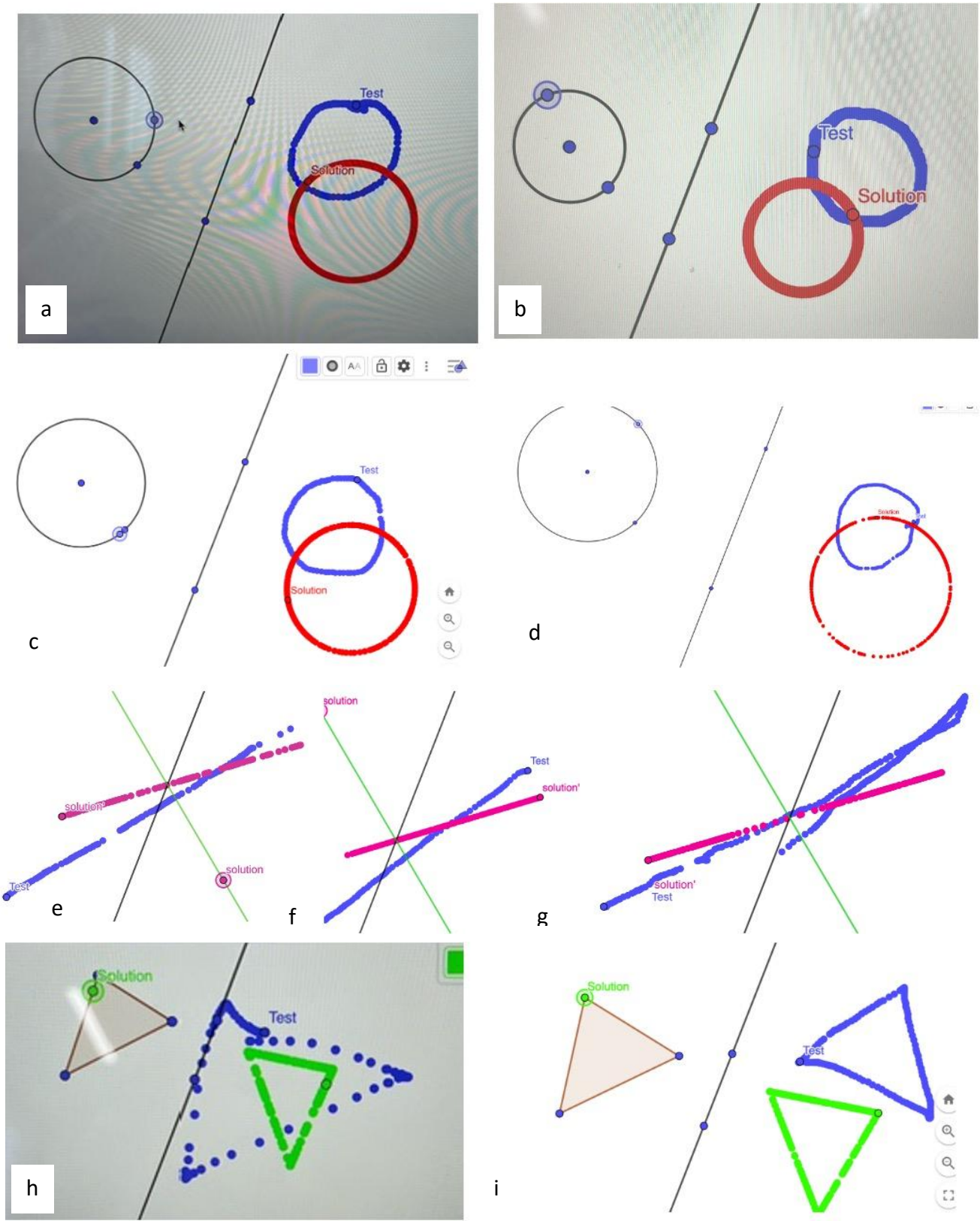
Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mazeau, M. et Pouhet, A. (2014). Chapitre 5— Attention et fonctions exécutives. Dans M. Mazeau et A. Pouhet (eds.), *Neuropsychologie et troubles des apprentissages (2e édition). Du symptôme à la rééducation* (p. 219-289). Paris : Elsevier Masson.

Perrin-Glorian, M. J. et Godin, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. Url : https://hal.science/hal-01660837v2

Petitfour, E. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques*, *37(2–3)*, 247–288.

ANNEXE : EXEMPLES DE TRAVAUX SUR LE SYMÉTRIQUE D'UN CERCLE, D'UNE DROITE ET D'UN TRIANGLE



PRÉSENTER ET ANALYSER UNE PRATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS ET DES DÉCIMAUX PAR UN PROFESSEUR DES ÉCOLES ACCOMPAGNÉ PENDANT TROIS ANS

Serge PETIT
Formateur en mathématiques retraité
IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg
serge.labaroche@sfr.fr

Guillaume ASSALI
Professeur des Écoles, REP, Arles
guillaume.assali1@ac-aix-marseille.fr

Résumé
Cette communication présente une pratique de formation d'un professeur des écoles et un dispositif d'enseignement des fractions dans une classe hétérogène de CM1 d'une école de REP[1]. L'enseignant, en reconversion professionnelle, ayant travaillé huit ans dans le privé, n'est pas de formation scientifique, mais essentiellement artistique (musique, arts plastiques) et littéraire. Une rencontre fortuite avec un formateur retraité l'a amené à mettre en œuvre dans sa classe, depuis l'automne 2021, un dispositif d'enseignement des fractions suggéré par ce formateur et sans cesse adapté à ses élèves (dispositif anciennement testé en 1995 en Alsace dans des classes « ordinaires »). Cette rencontre a eu lieu il y a trois ans, alors que Guillaume Assali était « T1[2] ». Depuis, le travail conjoint se poursuit en s'affinant. L'adaptation au public spécifique de REP sera présentée au fil du texte et un bref bilan de la formation continue ainsi engendrée sera effectué en fin de communication.
Cette communication témoigne donc à la fois d'une adaptation de l'enseignement du concept de fraction à un public particulier tout autant que de l'accompagnement d'un enseignant. Elle s'inscrit dans la continuité de celle donnée au Colloque de la COPIRELEM de Marseille en Juin 2023 (Petit, Assali, 2024). Le lecteur pourra retrouver dans les actes de ce dernier colloque la définition que nous avons retenue du concept de fraction (un nombre et pas une désignation) et l'argumentaire aboutissant à ce choix.
Enfin, cette communication montre l'évolution professionnelle d'un professeur des écoles accompagné pendant trois années scolaires sur une thématique donnée.

I - UN RAPPEL

Nous rappelons succinctement notre choix relatif à la définition de ce qui est désigné par le mot *fraction* dans l'enseignement.

Au début de la communication, la réponse à la question : « Combien de fractions y a-t-il dans le cadre ? (voir figure 1) a généré des réponses variées, mais pas la réponse « zéro ». Il n'y a pourtant aucune fraction dans ce cadre. Il s'agit là, pour nous, d'un point fondamental à transmettre aux élèves : les fractions sont

[1] Réseau d'Éducation Prioritaire

[2] Professeur titulaire en première année de plein exercice

des nombres et pas des désignations de nombres. En tant que nombre, chaque fraction a une infinité de désignations possibles (Petit, Assali, 2024).

0	**3/5**	**0,7**
π	**17**	**e**
1/10	**cinq pour cents**	

Figure 1 : test

Ce point de vue est conforté par les programmes de cycle 3 qui précisent que les fractions doivent être enseignées comme de « nouveaux nombres pour pallier l'insuffisance des nombres entiers » (MENJ, 2020, p. 100).

Nous nous proposons donc d'enseigner les fractions d'entrée comme des nombres, à l'inverse de la démarche suggérée par les textes officiels qui indiquent que cet aspect viendra par la suite, en fin de cycle 3, soit en sixième, comme le mentionne le document *Repères annuels de progression* : « En période 3, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a » (MENJ, 2024).

Nous ne regardons pas les fractions, lors du processus d'introduction, sous des aspects souvent cités : « fraction partie d'un tout », « fraction mesure », « fraction ratio », « fraction opérateur », « fraction quotient ». Car, comme le précise Allard : « L'utilisation des fractions dans ces « *aspects* » est « *contextualisée* » et dépend de leurs représentations (parts de tartes, aires à subdiviser, collection d'objets, droite graduée…) et des grandeurs en jeu (continue/discrète) » (2015, p. 95).

Notre point de vue consiste à définir les fractions, à partir de la recherche d'un nombre, certes dans une situation de mesure, mais nous ne parlons pas de « fraction mesure », puisque par ailleurs, personne de parle d'« entier mesure ». Les autres contextes et donc « aspects » dans lesquels les fractions peuvent opérer apparaitront au cours d'activités variées, lors de travaux destinés à élargir les domaines d'utilisation possibles des fractions. Notamment, pour ce qui nous concerne, à passer du continu au discret.

Une des difficultés majeures bien souvent mise en relief dans les évaluations en classes de sixième est la non maîtrise par les élèves de la droite graduée et les conversions d'écritures fractionnaires vers des écritures décimales et inversement quand cela est possible. Nous avons donc choisi d'en faire des lignes de force du dispositif d'enseignement suggéré ci-après. La droite graduée se construit donc dès le début des apprentissages par le positionnement sur cette dernière des nouveaux nombres au fur et à mesure de leur découverte comme exprimant, une unité étant donnée, la distance à l'origine.

L'observation de pratiques usuelles justifie nos choix.

II - INTRODUCTION DES FRACTIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

Loin de nous l'idée de traiter de manière exhaustive de l'introduction des fractions dans l'enseignement. Nous nous nous contentons de relever deux pratiques qui semblent dominantes, en lien avec l'observation de manuels ou de productions issues de la recherche en didactique des mathématiques.

1. Dénombrer des parts

Parmi ces approches, on peut citer celles qui consistent à dénombrer des parts d'un tout (pizzas, gâteaux, etc.), « interprétation la plus enseignée » (Alajmi cité par Tremeje et Winder, 2012, p. 9) et à traduire par une écriture soi-disant mathématique le nombre de parts choisies relativement au nombre de parts

totales. Dans ce type d'approche, les désignations telles que 3/8[3] ne semble pas prendre le statut de désignation d'un nombre, mais encode davantage une action. La seule connaissance des « petits » nombres entiers suffit alors à encoder, par une telle écriture, une action pouvant être décrite en langage usuel : « je prends trois parts d'un gâteau coupé en huit parts (supposées égales) ». Il est fort difficile d'y apercevoir le concept de « nouveau nombre » et la nécessité de pallier aux entiers naturels puisqu'ils suffisent à bien décrire la situation.

De plus, cette approche s'effectue presque uniquement à partir d'artéfacts (Camenisch, Petit, 2018) en dimension deux. Elle repose essentiellement sur une référence aux aires (peut-être aux masses ?), sans que cela ne soit précisé. Pourtant, les aires, tout comme les fractions ne figurent pas aux programmes de cycle 2. Le concept d'aire, nouveau pour les élèves, n'a peut-être pas été enseigné avant celui des fractions et n'est en tout cas jamais mentionné de manière explicite. Comment dès lors, serait-il envisageable d'approcher les fractions à partir d'un concept délicat et inconnu ou méconnu des élèves ?

2. Reporter une unité

Une autre approche très courante elle aussi, consiste à essayer de mesurer la longueur d'une bande de papier donnée à l'aide d'une unité non conventionnelle. Une telle approche suppose que le concept d'unité est bien connu des élèves et peut sembler assez artificielle. Pourquoi vouloir mesurer avec une unité non conventionnelle, alors que les unités conventionnelles permettent aussi d'introduire les fractions comme de nouveaux nombres ? Ce type d'approche peut aussi conduire à des conclusions manquant de précision : « […] cette écriture [3/8 *u*] signifie qu'on partage l'unité en huit parts égales et qu'on prend trois de ces parts. Cette écriture est une fraction. Elle se lit trois huitièmes de l'unité. » (IREM Pays de Loire, 2020, p. 16). Cette synthèse fait référence à la signification de l'écriture (sens de l'action opérée), ce qui n'est pas son sens et conclut que cette écriture est une fraction. Les fractions sont donc alors des écritures, des désignations et pas des nombres. De plus, la formulation de la conclusion est équivalente à la description du choix d'un certain nombre de parts de gâteau. Elle ne fait pas (plus) référence à la mesure. Revenant à la mesure, l'ouvrage préconise « L'enseignant conclut sur l'existence de plusieurs écritures fractionnaires pour une même mesure », ajoutant quelques lignes plus loin « C'est très différent de ce qui se passe avec les nombres entiers » (IREM Pays de Loire, 2020, p. 16). Ce qui revient à exclure les nombres entiers des fractions et/ou à penser que les nombres entiers n'ont qu'une et unique désignation !

Une telle approche consistant à emprunter une unité artificielle pour introduire les fractions par report de l'unité est-elle adaptée à une classe de REP ? Peut-être pas, d'une part à cause des prérequis nécessaires (concept d'unité), d'autre part du point de vue de la motivation qu'elle peut (ou non) engendrer.

Cette approche nous semble s'inscrire en rupture par rapport aux acquis (supposés) des élèves et conduit très souvent à introduire des désignations de fractions sans qu'un nombre soit explicitement cherché par les élèves, sans qu'apparaisse la nécessité de devoir disposer de « nouveaux nombres ».

Nous favorisons en REP une approche plus directe, dans la continuité des acquis des élèves au cycle 2, se fondant sur ces derniers, afin de mettre les élèves plus facilement en action. Ils pensent savoir et pouvoir faire et n'hésitent pas, comprenant immédiatement la situation et ses enjeux, à s'impliquer fortement dans les activités proposées.

3. Des pratiques qui s'inscrivent peu ou prou dans les textes officiels

Les deux pratiques citées précédemment s'inscrivent peu ou prou dans la lignée des textes officiels et des repères de progression « Dans la période 1, les élèves utilisent d'abord les fractions simples […] dans le

[3] Nous informons le lecteur que toutes les désignations des fractions seront écrites avec un « trait de fraction » oblique et non conventionnel, pour des raisons de commodité.

cadre de partage de grandeurs » (MENJ, 2024). Mais les programmes sont rédigés par cycles et un des objectifs de l'enseignement des fractions est bien qu'elles apparaissent comme de « nouveaux nombres pour pallier l'insuffisance des entiers, notamment pour mesurer des longueurs » (MEN, 2020, p. 12). Les deux aspects « partage » et « mesure », qui apparaissant tous deux comme une piste pour introduire les fractions, semblent contradictoires. Nous nous réservons donc le choix de notre cheminement et nous permettrons de nous détacher, des repères, tout en respectant le programme de cycle 3 ; exerçant ainsi notre totale liberté pédagogique dans l'intérêt, nous semble-t-il des élèves. Ainsi, nous ne suivrons pas la première préconisation rappelée dans ce paragraphe.

4. D'autres pratiques plus minoritaires

Certains enseignants s'inspirent peut-être encore de l'ingénierie proposée par N. et G. Brousseau qui ont publié une séquence très dense de 65 leçons à l'IREM d'Aquitaine (Brousseau, 1987), ou de la nouvelle suggestion de Margolinas dans la revue *Grand N* (Margolinas, 2020).

L'approche de Brousseau, expérimentée pendant 25 ans, consiste à désigner l'épaisseur d'une feuille de papier, en considérant l'épaisseur en millimètres d'un empilement d'un certain nombre de ces feuilles toutes identiques. Elle donne une mesure exacte en millimètres de la hauteur de cette pile et permet d'introduire, dans un dispositif de communication, un couple de nombres (nombre de feuilles, épaisseur en mm), puis, d'affirmer que ce couple est une fraction, après avoir mis en œuvre des raisonnements relevant de la proportionnalité. Outre les marges d'erreurs possibles, une telle approche nous semble délicate à mettre en place en REP, par le passage artificiel de la désignation du type « 2 cm pour 36 feuilles » au nombre noté 2/36. Cette approche n'est d'ailleurs plus d'actualité puisque la multiplication des fractions n'est plus au programme, comme l'ont mentionné Margolinas (2020) et Allard (2015).

Margolinas propose une autre approche mettant en œuvre un guide-âne pour partager un segment en segments isométriques et introduit des artéfacts langagiers « 10 en 3 », mais précise « Nous ne pensons pas à ce stade de la séquence que beaucoup d'élèves vont s'approprier l'égalité de la relation fondamentale » (Margolinas, 2020, p. 11).

Elle fonde son approche sur la « relation fondamentale » : $b \times \frac{a}{b} = a$ (a entier, b entier non nul) et met en avant le guide-âne en précisant : « Dans ce texte, je me suis toujours référée à la situation de partage permise par le guide-âne et la référence à la mesure de longueur est restée essentielle jusqu'à la fin de la séquence » (Margolinas, 2020, p. 21).

Le passage des écritures artéfactuelles à la désignation de nombres nous semble pouvoir présenter une difficulté pour les élèves. Pourquoi « dix en trois » désignerait-il un nombre et pas un processus ?

Nous partageons le point de vue de devoir disposer d'une situation de référence et choisissons comme propriété fondamentale des fractions la relation (de l'inverse) pour tout entier n non nul, $n \times 1/n = 1$ et pas celle donnée ci-avant. Cette relation sera sans cesse mobilisée par les élèves dans toutes sortes de problèmes y compris hors de celui de la mesure des longueurs, notamment dans le domaine du cardinal d'une collection d'objets. Ce qui se traduit chez les élèves par la mobilisation d'explications du type « sept c'est le quatrième[4] de vingt-huit parce que quatre fois sept égale vingt-huit ».

Conclusion

Bon nombre d'approches de l'enseignement des fractions s'inscrivent en rupture par rapport aux connaissances et savoir-faire antérieurs des élèves ou bien n'abordent pas les fractions comme une

[4] Nous utilisons un des suffixes *-ième* de manière générale afin de montrer la continuité possible des désignations (un deuxième, un troisième, un quatrième), qui deviendront par la suite, progressivement (un demi, un tiers, un quart). En effet, tous les élèves ne connaissent pas ces expressions que l'on pourrait croire à priori et à tort maitrisées par le langage usuel.

nécessité, celle de devoir trouver, construire, de nouveaux nombres pour pallier l'insuffisance des entiers. Des désignations de type fractionnaires traduisent un fait ou une action (tant de feuilles pour telle épaisseur aux erreurs de mesure près, tant de parts prises dans un certain nombre de parts -sous réserve d'une certaine égalité des parts, généralement non précisée-). Ces écritures ne mettent pas en évidence qu'elles sont des désignations de nombres. Elles se traduisent en langue naturelle par des expressions, certes provisoires, du type « 12 en 3 » qui nécessitent comme l'écrit Margolinas (2020) l'« installation du milieu « 12 en 3 » » (Margolinas, 2020, p. 7). Est-il nécessaire d'installer des milieux intermédiaires, artéfactuels (Camenisch, Petit, 2018), d'acculturer les élèves à ces artéfacts de service[5], pour ensuite s'en détacher ? N'est-ce pas alourdir le travail de l'élève ?

Notre choix consiste donc à faire rechercher des nombres d'entrée de jeu aux élèves, dans le cadre d'une situation de mesure des longueurs et à introduire les désignations conventionnelles sans passer par des désignations intermédiaires artéfactuelles.

Notre approche se situe à la confluence de deux courants : l'un relevant de considérations pédagogiques générales, l'autre prenant appui sur les mathématiques.

III - LA CLASSE : LA NÉCESSITÉ D'UNE APPROCHE ADAPTÉE

Le profil de la classe dans laquelle nous menons cette approche est celui d'une classe hétérogène en REP dans un quartier prioritaire d'Arles (QPV[6]). Il est donc nécessaire de prendre en compte dans notre approche plusieurs aspects sociaux.

1. Le profil socio-culturel des élèves

Le quartier accueille des familles d'origines variées. Certains élèves, dits « allophones » parlent des langues différentes du français à la maison, ce qui peut influencer leur maîtrise de la langue scolaire.

Par ailleurs, certaines familles sont en mesure d'accompagner les apprentissages de leurs enfants, d'autres non. Et quand c'était le cas, les aides prodiguées aux enfants ne s'inscrivaient pas dans la continuité des apprentissages proposés à l'école. Nous avions par exemple soumis aux élèves des défis à la maison. Certains élèves revenaient démotivés, tandis-que d'autres avaient pu partager les défis en famille, mais le suivi des apprentissages à la maison s'est révélé contre-productif car fondé sur des artéfacts du type « pizza », entrainant alors une déstabilisation des élèves. Cette tentative, loin d'atteindre l'objectif initial de stimuler la curiosité et l'appétence pour la recherche, a accentué les inégalités entre élèves. Elle a été abandonnée au profit de défis à relever en classe pendant l'année scolaire 2023-2024, ce qui a permis de réduire la disparité entre élèves.

2. Le profil éducatif des élèves

Lors de l'année scolaire précédente, bien que quelques élèves aient présenté des difficultés spécifiques – notamment une élève allophone, deux non-lecteurs et un non-scripteur – le niveau global de classe de CM1 était relativement homogène. En revanche, la promotion 2023/2024, organisée en cours double (CM1 et quatre élèves de CM2), s'est révélée nettement plus hétérogène. Ce groupe présentait l'avantage que quatre élèves de CM2 avaient déjà suivi l'apprentissage des notions en CM1, mais souffrait également d'importantes disparités dans les niveaux et besoins des élèves.

[5] Voir classement des artéfacts (Camenisch, Petit, 2018).

[6] Quartier Prioritaire de la Ville

En effet, dans cette promotion, deux élèves étaient affiliés au dispositif ULIS[7], ceux-ci n'ont pu prendre part aux apprentissages sur les fractions. Au cours de l'année, les tests EPOCY[8] menées pour examiner une éventuelle orientation vers la SEGPA[9] ont mis en évidence que trois élèves affichaient un niveau oscillant entre la fin de CE1 et le CE2, tant en français qu'en mathématiques. Deux autres élèves, bien qu'ayant atteint un niveau équivalent à la fin de CE2 en mathématiques, présentaient des troubles des apprentissages ou faisaient face à des difficultés linguistiques. Enfin, deux élèves suivis par le dispositif EMASCO[10] en raison de troubles du comportement ont fait l'objet d'une information préoccupante en cours d'année.

Cette hétérogénéité accrue au sein de la classe, en plus des défis qu'elle soulève en matière d'inclusion et de cohésion, peut engendrer des tensions et des conflits. Dans ce contexte, le profil de ce groupe, typique d'une classe de cycle 3 en REP, incite les enseignants à adapter leurs pratiques pédagogiques pour répondre aux besoins variés des élèves.

L'ensemble de ces considérations implique la mise en œuvre de stratégies différenciées et de démarches inclusives, quitte à s'écarter des directives officielles. Ces réflexions pédagogiques ont conduit l'enseignant à s'inspirer des travaux de Sylvain Connac[11] pour concevoir des approches mieux adaptées.

3. Une pratique pédagogique inspirée des travaux de Sylvain Connac

Si l'on se réfère aux phases d'apprentissage décrites par Connac (2018), l'élève se trouve initialement dans une phase « d'incompétence inconsciente » : il ne sait pas qu'il existe des nombres entre 0 et 1. Il va donc, à partir des situations proposées (l'élève découpe des ficelles, puis des segments unitaires en sept segments isométriques et doit déterminer la longueur de chacun des segments ainsi obtenus), se confronter à ses propres frustrations générées par la phase « d'incompréhension consciente » et prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers, seuls nombres qu'il connait. C'est lors de cette phase qu'est mis en forme le savoir : introduction des fractions comme de nouveaux nombres, de leurs désignations et surtout de la relation fondamentale qui les définit (exemple : $1 = 7 \times 1/7$).

À force de manipulations, d'explicitations, les élèves parviennent enfin à la phase de « compétence consciente ». C'est ainsi que, grâce à ces nouveaux savoirs, les élèves, en situation de recherche, ont pu établir par la manipulation des égalités telles que $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{7} = 4 \times 1/7$, après qu'aient été construits, selon le même principe les nombres $4/3$ et $4/7$ comme exprimant la mesure des segments obtenus en découpant un segment de longueur 4 unités respectivement en trois et en sept segments isométriques. Ces nombres vérifient les égalités $3 \times 4/3 = 4$ et $7 \times 4/7 = 4$. Les égalités ($4 \times 1/3 = 4/3$ et $4/7 = 4 \times 1/7$) ne relèvent pas de l'évidence car les membres de chaque égalité désignent certes le même nombre, ils ont donc même sens, pourtant les deux membres de chaque égalité sont portés par des significations (Petit, 2023) différentes.

Enfin, les élèves développent une intuition mathématique qui les conduit naturellement vers la dernière phase de développement du savoir, la phase de « compétence inconsciente ». Dans cette phase, l'élève,

[7] Unités Localisées pour l'Inclusion Scolaire (Ulis), dispositifs pour la scolarisation des élèves en situation de handicap dans le premier et le second degré.

[8] Évaluation qualitative et quantitative des compétences en mathématiques, en orthographe et en lecture.

[9] Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté : elle accueille les jeunes de la 6e à la 3e présentant des difficultés scolaires importantes. Il s'agit de difficultés ne pouvant pas être résolues par des actions d'aide scolaire et de soutien.

[10] Les EMASCO sont des Équipes Mobiles Ayant pour vocation de Soutenir les équipes des écoles, des collèges et des lycées dans la scolarisation des élèves en situation de handicap, en leur apportant une expertise médico-sociale. L'EMASCO est constituée de professionnels du secteur médico-social (chefs de service, éducateurs spécialisés, psychologues, etc.).

[11] P.U. Université de Montpellier en Sciences de l'éducation

expert, transfère ses savoirs pour résoudre des problèmes complexes comme utiliser les fractions pour rendre compte d'égalités et de partages de grandeurs (pas nécessairement continues).
Connac (2018) insiste sur l'importance de créer un cadre structuré et rassurant pour les élèves et sur la manière dont cette structuration peut favoriser l'engagement et la motivation des élèves à travers des pratiques régulières et prévisibles. Ainsi, suivant son raisonnement, notre démarche pédagogique inclut des phases ritualisées lors de chacune des phases précédemment évoquées, afin d'ancrer dans le temps les connaissances des élèves et de leur éviter de tomber dans une cinquième phase du cycle de l'apprentissage que l'on pourrait nommer « l'inconscience de la perte de compétence ».

4. Une pratique inclusive et favorisant l'entraide

Notre approche se centre sur la motivation et l'engagement des élèves que nous mettons au profit de la résolution de problèmes à travers ce que nous appelons trivialement « des défis » (Assali, 2024). Cette approche nous permet d'attiser la curiosité des élèves, ce qui les incite à s'engager activement dans les recherches proposées.

Ainsi encouragés par l'esprit de collaboration, les élèves parviennent à se surpasser grâce au travail en équipe, au point que nous avons instauré un dispositif d'échange avec les élèves de 6e. Les élèves de CM1/CM2 leur proposent des défis nouveaux, élaborés à partir de leurs propres réussites. Cette activité valorise non seulement le travail collectif et l'intelligence collaborative, mais elle permet également aux élèves de concevoir des stratégies innovantes pour résoudre des problèmes complexes (les élèves n'hésitent pas, par exemple, à écrire 100/200 pour exprimer $1/2$, afin de déstabiliser les élèves de 6e pour exprimer une fraction de douze objets). À titre individuel, cette démarche favorise une compréhension approfondie des mécanismes liés à l'écriture de problèmes et de ce fait des concepts mathématiques sous-jacents.

Les progrès des élèves sont suivis de manière continue tout au long des séances, ce qui nous permet d'adapter notre progression en fonction des besoins individuels. Les élèves se montrent ainsi plus réceptifs à l'apprentissage d'un nouveau concept, ce dernier étant perçu comme pertinent et en adéquation avec leurs attentes, plutôt que comme une notion imposée de manière arbitraire. Par ailleurs, lors de nos séances, nous nous opposons à une différentiation fondée sur l'attribution de supports « simplifiés » aux élèves en difficulté. Nous préférons proposer à tous les élèves les mêmes tâches, en les accompagnant de manière individualisée et bienveillante tout en favorisant les phases de recherches en groupes et en mettant en place un système de tutorat. Ce dispositif a pour objectif de faire évoluer le groupe ensemble tout en répondant aux besoins spécifiques de chacun.

Pour ce faire, nous structurons chaque séance en fonction des productions des élèves lors de la séance précédente, suivant ainsi les préconisations du collectif Didactique pour enseigner (2019). Nous favorisons ainsi une progression collective en nous appuyant sur les acquis des élèves (au cycle 2, par exemple, la mesure de longueurs). Cependant, cette approche nécessite la mise en place de divers outils : des tuteurs sont formés pour accompagner des groupes lors d'ateliers ou soutenir des élèves durant des séances de remédiation. Cette démarche a l'effet simultané de permettre aux élèves en difficulté de bénéficier d'une explication alternative, tout en offrant aux tuteurs l'opportunité de renforcer leur propre savoir en s'efforçant de le reformuler de manière à le rendre plus intelligible.

Après les phases de structuration, nous mettons en place des rituels quotidiens pour aiguiser l'intuition mathématique et développer l'appétence des élèves. Leur réussite renforce ainsi leur confiance et leur plaisir d'apprendre. En somme, nous proposons de mettre en place une approche inclusive, collaborative et axée sur la résolution de problèmes, qui vise à rendre l'apprentissage des mathématiques à la fois accessible et agréable pour tous les élèves qui ainsi apprennent en confiance. Dans cette approche pédagogique, l'erreur, plutôt que d'apparaitre comme une sanction pour l'élève, l'invite à de nouvelles collaborations.

Ainsi, notre travail se veut explicite, non par le type d'enseignement choisi, mais par les explicitations qui proviennent régulièrement des échanges entre pairs. Nous nous démarquons d'un rattachement à « la pédagogie explicite » qui renvoie au modèle américain (evidence based) trop peu documenté scientifiquement.

5. Du point de vue des savoirs et compétences des élèves

Les élèves des classes impliquées dans ce projet sur les trois années de travail collaboratif présentent tous des fragilités et font preuve d'un manque de confiance en eux, particulièrement en ce qui concerne les mathématiques. Toutefois, ils se montrent prêts à s'investir dans des tâches apparemment simples, dès lors qu'ils en saisissent le sens et qu'ils se sentent soutenus dans un cadre bienveillant[12].

C'est ainsi que nous avons choisi de prendre appui sur leurs connaissances et compétences acquises, ou supposées l'être, pour montrer l'insuffisance des nombres entiers (connus des élèves) et la nécessité de nouveaux nombres (les fractions).

Ce point de vue nous a semblé d'autant plus important que la moindre évocation du mot *fraction* indispose bien des adultes et effraye les élèves qui ont souvent entendu ce mot comme marquant un passage difficile ou comme source de nombreux échecs par d'autres enfant de leur voisinage (fratrie, copines et copains plus âgés, etc.). Il n'est donc pas question pour nous de procéder selon les préconisations de la pédagogie dite « explicite » qui consisterait à annoncer d'entrée aux élèves quelque chose comme « aujourd'hui, nous allons aborder les fractions ».

Il nous a ainsi semblé important, voire fondamental, de ne pas créer de rupture, mais d'inscrire l'enseignement des fractions dans la continuité des apprentissages précédents, de manière naturelle.

6. Du point de vue du programme de mathématique du cycle 3

Le choix mentionné ci-dessus fait fi des repères de progressions dans lesquels les fractions n'apparaissent qu'en fin de cycle 3 comme des nombres. Nous avons décidé d'inverser la démarche et de commencer par montrer la nécessité d'avoir recours à de nouveaux nombres. L'essentiel est que les objectifs de fin de cycle 3 soient atteints en fin de classe de 6e, seul véritable contrat liant les enseignants aux parents et à l'État.

IV - UNE NOUVELLE VOIE[13] POUR ENSEIGNER LES FRACTIONS

Concernant la justification du choix de considérer les fractions comme des nombres (nombres rationnels positifs), nous renvoyons le lecteur à Petit et Assali (2024). Nous rappelons ci-après brièvement le dispositif mis en place même si celui-ci est déjà décrit dans la référence précédente, et ce, dans un souci de lisibilité du texte.

1 Construire les fractions comme des nombres

Nous résumons notre approche du point de vue mathématique dans le tableau ci-après (à lire par lignes) et renvoyons le lecteur pour davantage de détails à la référence ci-avant.

[12] Des théoriciens comme Philippe Meirieu ou Catherine Lemoine ont défendu l'idée qu'une pédagogie bienveillante et respectueuse des élèves, qui valorise leurs compétences et les aide à surmonter leurs difficultés sans les stigmatiser, est un facteur clé de sécurité.

[13] Nous utilisons le terme de « voie » et ne nous permettons pas d'utiliser le terme « d'ingénierie » car « il faut réserver le terme d'ingénierie didactique à une proposition ayant fait l'objet de mises en œuvre et d'observations en classe », comme le dit Margolinas (2020). Ce qui n'est que partiellement le cas ici puisqu'il s'agit de la troisième année de mise en œuvre et d'observations en classe, mais toujours avec le même enseignant et le même observateur/accompagnateur.

Étape 0	Distinguer écritures, désignation de nombres des nombres eux-mêmes.	En effet, tout nombre entier peut s'écrire de très nombreuses manières en chiffres.	Affichage
Étape 1	Découper une ficelle en sept segments isométriques	Les manipulations, report d'une longueur donnée, pliage ne conviennent pas.	Nécessité d'un outil. Introduction du guide-âne formé par le carrelage (sous le préau)
Étape 2	Modélisation	En classe : Ficelle ➔ segment de droite Tableau, feuille	Découpage d'un segment d'1 dm de longueur en sept segments isométriques
Étape 3	Mesure de la longueur de chacun des segments obtenus	La mesure de la longueur de chaque segment vérifie la relation $L + L + L + L + L + L + L = 1$, Ou $7 \times L = 1$ L'unité étant le dm.	Essais-erreurs : Impossibilité de trouver L entier : $7 \times 0 = 0$ (trop petit) $7 \times 1 = 7$ (trop grand) Ce prolongement de la multiplication ne pose aucun problème aux élèves.
Étape 4	Changements successifs d'unités	Tests en cm, mm, dmm (dixièmes de mm), cmm (centièmes de mm), mmm (millièmes de millièmes de mm), etc… très loin	Succession d'encadrements, mais impossibilité de trouver une valeur qui « tombe juste ». Conclusion : « on n'y arrivera jamais »
Étape 5	Nécessité de nouveaux nombres	Pédagogie frontale : « Oui, vous n'y arriverez jamais ». Les mathématiciens ont inventé de nouveaux nombres.	Introduction conventionnelle de l'écriture $\frac{1}{7}$ (lue « un septième » et écriture de la relation fondamentale (qui apparait alors naturelle) : $7 \times \frac{1}{7} = 1$
Étape 6	Même travail en découpant en 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9	Mobilisation des acquis précédents : encadrements.	Dans certains cas, « ça tombe bien », dans d'autre non. Introduction de toutes les relations fondamentales correspondantes.
Étape 7	Désigner les points obtenus par les découpages sur la droite graduée.	Désignations du type $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; etc.	Note : Il n'est pas encore évident que $1/3 + 1/3$ soit aussi $2/3$ Par contre $1/3 + 1/3 = 2 \times 1/3$ est possible et naturel.
Étape 8	Construire le nombre désigné par $4/7$	Ce nombre désigne la mesure de la longueur de tout segment isométrique obtenu par découpage en sept d'une ficelle mesurant quatre unités.	Manipulations, réalisation des découpages.
Étape 9	Modélisation : tableau, feuille	Découper en sept un segment de quatre unités, graduer la demi-droite.	Établir par la manipulation la relation $4 \times 1/7 = 4/7$

Étape 10	Entrainement	Graduer des demi-droites de différentes manières, comparer les écritures entières aux écritures fractionnaires, par exemple : $3/3 = 1$, etc.	Activités rituelles portant sur les changements de registres : conversions du registre des écritures fractionnaires aux représentations sur la droite graduée.

Figure 2 : Récapitulatif très succinct de la construction des fractions

2 Fraction et demi-droite numérique

Une telle construction des fractions construit simultanément le concept de fraction et celui de droite numérique graduée, limitée aux points constructibles. Il est nécessaire au cours de cette approche de reprendre des notions comme :

- calculer la distance entre deux points c'est calculer la différence de leurs abscisses,
- le résultat de cette différence est invariant pour un segment que l'on translate sur la demi-droite, elle mesure la longueur du segment,
- l'abscisse d'un point représente sa distance à l'origine.

Des activités rituelles courtes, mais très régulières portant sur le positionnement d'écritures fractionnaires sur des demi-droites graduées sont indispensables pour stabiliser et renforcer les apprentissages.

3 Reconsidérer le concept de mesure

Le point de vue qui guide notre approche est la recherche du nombre qui, une unité de mesure étant donnée, exprime la longueur des segments obtenus par découpage réguliers par le guide-âne. La mesure de la longueur de chaque segment obtenu par un découpage en quatre d'un segment d'un décimètre s'exprime par un entier (25), à condition de changer l'unité de mesure et de prendre le millimètre pour unité. Par contre, ce n'est plus possible lors d'un découpage en sept. Ce qui devrait motiver les élèves et questionner l'activité de mesure.

Les élèves ont été habitués à chercher des nombres pour déterminer la mesure de la longueur d'un segment en cycle 2. Une rupture s'impose maintenant : mesurer une longueur consiste à déterminer, non pas une valeur donnée, qui semble exacte, mais un encadrement. Calculer la mesure d'une longueur n'aboutit pas toujours, mais il est possible d'approcher d'aussi près que l'on veut toute mesure de longueur par des encadrements ou d'exprimer certaines longueurs avec ces nouveaux nombres, ceux qui sont constructibles selon le processus du guide-âne et seulement ceux-là.

Conclusion

Le contexte dans lequel les fractions sont introduites et travaillées se limite au cas de la mesure des longueurs et à la construction simultanée d'une demi-droite graduée. Cette approche inclut ainsi la comparaison de fractions et offre aux élèves la possibilité d'émettre la conjecture qu'une même fraction peut se présenter sous différentes écritures ($1/3 = 2/6 = 3/9$, etc.), conjecture que le processus de construction facilite par l'observation de l'augmentation du nombre de lignes du guide-âne (en insérant de nouvelles lignes tout en maintenant l'équidistance). Ces conjectures, formulées par les élèves, sont validées par l'enseignant. À ce stade, les élèves connaissent, pour les avoir construites géométriquement par manipulation de ficelles, des relations telles que $4 \times 1/3 = 4/3$ ou $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$. Ils savent placer les fractions sur la droite numérique et décomposer les fractions sous la forme « $n + f$ », où n est la partie entière de la fraction et f une fraction inférieure à l'unité. Cette décomposition résulte de l'observation des fractions sur la droite numérique et trouvera confirmation dans la division

euclidienne et la relation fondamentale. Il devient alors nécessaire de sortir du cadre de la mesure des longueurs (grandeur continue) pour aborder celui des grandeurs discrètes (cardinaux d'ensembles).

V - PASSAGE DU CONTINU AU DISCRET

Si ce point a été abordé lors des deux années précédentes, en fin d'année, l'aisance acquise par l'enseignant au cours de cette troisième année l'a conduit à aborder ce passage dès le mois de février, donc bien plus tôt, malgré une classe à priori plus difficile à gérer en début d'année et plus hétérogène que les précédentes.

Deux pistes ont été proposées pour ce passage.

1. Première piste

Comme l'année précédente : les élèves disposent chacun d'une vingtaine de jetons (travaux de groupes). L'enseignant dit aux élèves « Chaque jeton représente un douzième. Représentez l'unité avec les jetons ».

Les élèves, certains après avoir dessiné schématiquement un segment découpé en douze[14], présentent douze jetons qu'ils disposent automatiquement sous forme rectangulaire. Les justifications exprimées sont du type : « Il faut douze jetons parce qu'il faut douze douzièmes pour faire un ». Ils sont alors capables de représenter $1/3$, $1/4$ avec les jetons et également $1/3 + 1/4$, en exhibant sept jetons. Ils écrivent alors des égalités du type $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Ce type d'activité qui consiste à faire calculer la somme de deux fractions, sans qu'aucunement ce soit devenu un objet d'enseignement, mais une simple application de la propriété fondamentale des fractions nous semble être de nature à anticiper des erreurs classiques et persistantes du type « somme des numérateurs sur somme des dénominateur ». De telles activité sont dès lors fréquemment proposées aux élèves.

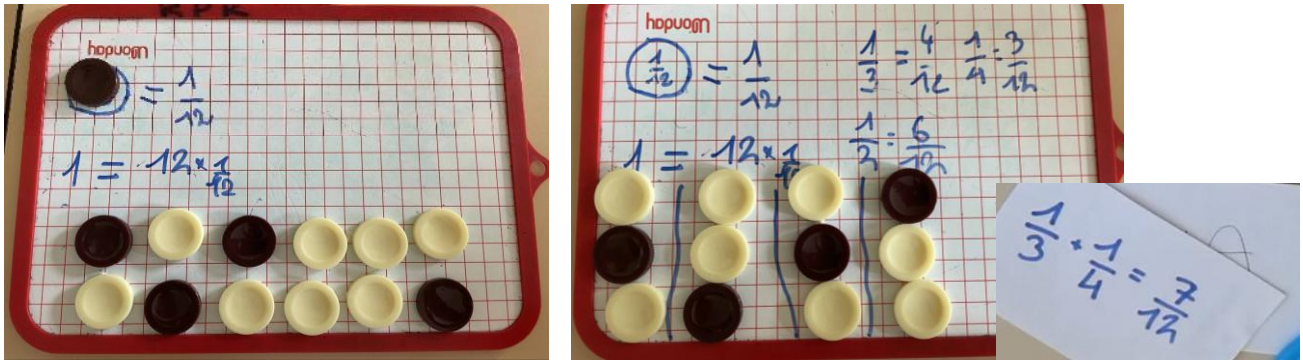


Figure 3 : passage du discret au continu, jetons

2. Deuxième piste

Cette deuxième piste prend ses racines dans le défi[15] suivant lancé aux élèves.

Le chef de gare de Colmar et son horloge[16]

[14] La situation de départ est donc une « situation fondamentale » telle que décrite par Margolinas (2005, p. 7) « Une situation fondamentale […] est une situation qui va rendre possible, la construction des connaissances qui participent à un savoir visé pendant une durée importante. »

[15] Afin de motiver encore davantage les élèves, des défis étaient lancés par le formateur accompagnateur aux élèves et avaient un grand succès. Tous les défis lancés ont été levés par les élèves (ou un groupe d'élèves au moins). Ils servaient souvent de déclencheurs à de nouveaux apprentissages. Les élèves étaient indirectement félicités par ce formateur.

[16] Tous les défis proposés aux élèves l'ont été par Serge Petit.

Le chef de gare de Colmar a trouvé $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$ *en attendant le train Bâle-Strasbourg et* $1 = 2/3 + 1/4 + 1/12$ *puis* $1 = 3/4 + 1/6 + 1/12$ *en attendant le train Strasbourg-Bâle.*

Devine comment il a fait. S'est-il trompé ? Je suis certain que tu peux faire mieux que lui et décomposer 1 en quatre fractions différentes, en cinq fractions différentes, et pourquoi pas en beaucoup plus de fractions différentes.

Il ne s'agit plus ici d'additionner des fractions, mais de les décomposer additivement. Le défi ci-dessus a conduit l'enseignant à proposer des « horloges carton », ainsi que des trombones. Les élèves placent alors des trombones représentant une minute sur le tour de l'horloge. L'ensemble des soixante graduations

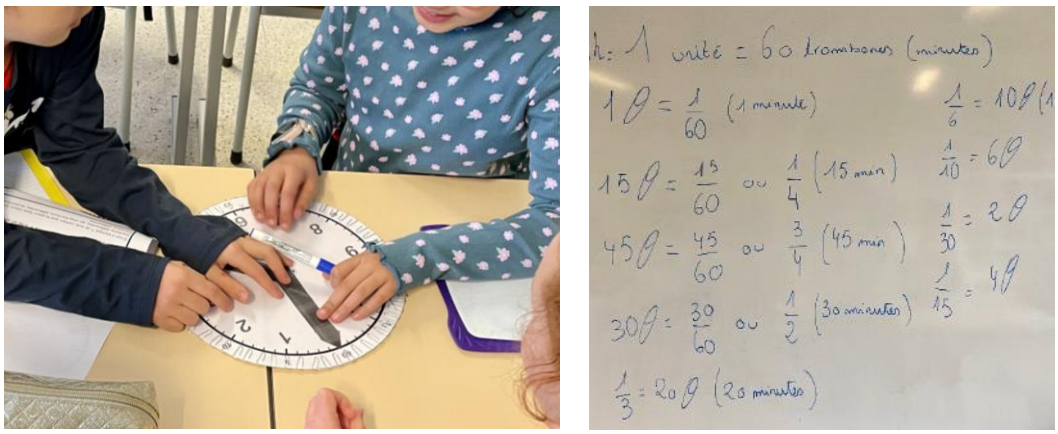


Figure 4 : passer du continu au discret, l'horloge et les trombones

correspond à la situation fondamentale du découpage d'un segment en soixante segments isométriques. Les élèves n'ont alors aucun mal à écrire les fractions représentées par cinq minutes, dix minutes, etc. et à les associer à un certain nombre de trombones comme on peut le voir sur la figure 5. De nombreuses

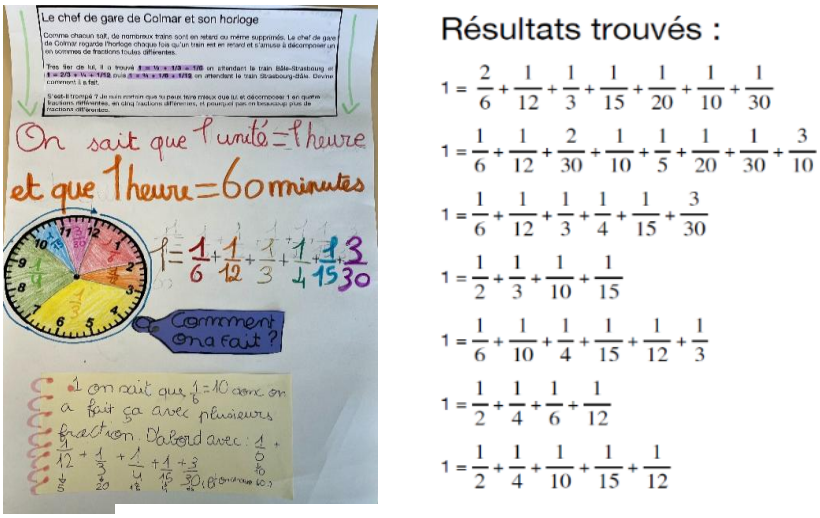


Figure 5 : Quelques solutions et justifications

solutions ont été trouvées comme le montre également la figure 5.

Un élève s'est même tellement pris au jeu qu'il a produit une décomposition en une somme de vingt-quatre termes (en jouant sur les différentes écritures équivalentes des fractions $a/b = na/nb$ - sous conditions -).

Au mois de février, le défi suivant a été proposé aux élèves :

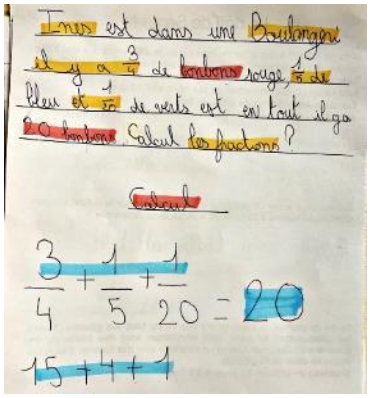
Les billes d'Ahmad

Ahmad a des billes de trois couleurs différentes. Il a des billes rouges, des billes bleues et des billes vertes. Il a moins de cent billes.

Trois cinquièmes de ses billes sont bleues, un quatrième de ses billes sont vertes et trois vingtièmes de ses billes sont rouges.

Combien Ahmad a-t-il de billes en tout ? Au fait, pourquoi j'ai écrit « Il a moins de cent billes » ?

Si la multiplicité des solutions n'est pas apparue aux élèves, une petite impulsion de l'enseignant a fait entrevoir que les solutions étaient innombrables. Il a ensuite été demandé aux élèves par groupes de produire des énoncés du même type. L'énoncé reproduit ci-après est défaillant au niveau de la question car il manque l'indication « de chaque couleur », mais cela semblait aller de soi pour les élèves.



Ines est dans une boulangerie il y a $\frac{3}{4}$ de bonbons rouges, $\frac{1}{5}$ de bleu et $\frac{1}{20}$ de verts est en tout il y a 20 bonbons. Calcule les fractions ?

Texte rectifié

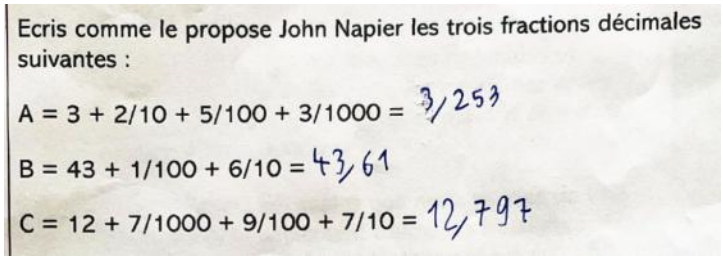
Figure 6 : énoncé de problème produit par un groupe, traces de justification

Après une étude de la construction de ce type d'énoncés et de nombreuses écritures de problèmes en groupes, nous avons proposés différents énoncés à la classe de CM2 de l'école et à des élèves de 6e. Si tous les groupes ont été capables de devenir correcteurs des productions des autres élèves concernant leurs propres énoncés (chaque groupe devait corriger les productions des élèves concernant leur énoncé et présenter une correction devant le reste de la classe), trois groupes (12 élèves) ont pu prendre un rôle de correcteur quel que soit l'énoncé proposé. Ces exercices montrent à la fois par la résolution de problèmes (défis) et la rédaction d'énoncés qu'ils ont acquis une bonne maitrise du concept de fraction, les énoncés n'étant pas très classiques à ce niveau des apprentissages en REP.

VI - INTRODUCTION DES ÉCRITURES DÉCIMALES À VIRGULE

Les élèves étant à l'aise avec les traitements dans le registre des écritures fractionnaires, il leur a été demandé, quand c'était possible, de trouver une autre écriture de fractions dont le dénominateur soit 10, 100 ou 1000, voire une autre puissance de 10.

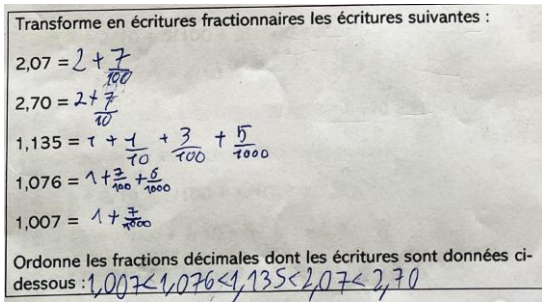
Des documents puisant leurs sources dans l'histoire (Stevin, Napier) ont servi de support au passage vers les désignations des nombres décimaux en utilisant une virgule. Cet apprentissage s'est effectué assez rapidement en fin d'année scolaire. Le travail à partir de documents historiques a sérieusement motivé les élèves. Ici encore, ce travail a été proposé sous forme de défi. La comparaison des fractions décimales a été abordée en prenant appui sur leur décomposition sur la base dix, ce qui a contribué à donner sens. Les termes « virgule », « partie décimale », « partie entière » ont été bannis du vocabulaire de la classe dans toutes les situations de communication et ce, même si l'expression « partie entière » a un sens, contrairement à « partie décimale ».


Ecris comme le propose John Napier les trois fractions décimales suivantes :

A = 3 + 2/10 + 5/100 + 3/1000 = 3,253

B = 43 + 1/100 + 6/10 = 43,61

C = 12 + 7/1000 + 9/100 + 7/10 = 12,797


Transforme en écritures fractionnaires les écritures suivantes :

2,07 = $2+\frac{7}{100}$

2,70 = $2+\frac{7}{10}$

1,135 = $1+\frac{1}{10}+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$

1,076 = $1+\frac{7}{100}+\frac{6}{1000}$

1,007 = $1+\frac{7}{1000}$

Ordonne les fractions décimales dont les écritures sont données ci-dessous : 1,007 < 1,076 < 1,135 < 2,07 < 2,70

Figure 7 : exercices de traitement et de comparaison

VII - ÉVALUATION

L'évaluation qui prévaut dans la classe repose sur un suivi continu, s'inscrivant dans une démarche formative visant à appréhender les progrès individuels de chaque élève. Cette évaluation a révélé que la majorité des élèves maîtrisent le placement de points (dont les abscisses sont exprimées en écritures fractionnaires) sur une droite graduée. Elle a de plus montré une aisance des élèves dans les calculs de base impliquant les écritures fractionnaires et les nombres décimaux, notamment pour passer d'une forme d'écriture à une autre, réduire à un dénominateur commun pour effectuer des additions ou encore comparer des décimaux.

En fin d'année scolaire, une série d'exercices spécifiques a été proposée aux élèves, portant sur des activités non abordées précédemment en classe et indépendantes des attendus ministériels définis pour cette période de l'année et pour ce niveau. Les progrès constants observés tout au long de l'année ont encouragé la mise en place de tels défis ambitieux pour une classe essentiellement composée d'élèves de CM1.

Notre propos n'est pas de donner les résultats d'une évaluation normée, mais simplement de partager une petite expérimentation visant à explorer les compétences des élèves dans des contextes inédits pour eux. Ces défis portaient notamment sur la maîtrise avancée de la droite graduée, par le biais d'exercices présentant un niveau de complexité supérieur.

Certains élèves ont fait preuve d'intuitions intéressantes, qui, bien qu'elles n'aient pas systématiquement conduit à des réponses correctes, témoignent des progrès significatifs réalisés en termes de résolution de problèmes, de capacité de concentration et de rapport à l'échec.

À partir de la mi-juin, la dynamique de classe évolue : la participation des élèves devient irrégulière, ce qui complique la mise en œuvre de nouvelles séquences d'apprentissage. Certains élèves ne fréquentent la classe que l'après-midi, d'autres se limitent aux jours consacrés à des activités telles que la musique ou le sport. En moyenne, la classe compte alors entre 12 et 15 élèves, constituée d'un noyau stable de six CM1 et quatre CM2.

Afin d'évaluer les compétences des élèves concernant la droite graduée dans ce contexte de classe, une série d'exercices spécifiques leur a été proposée. Quelques exemples sont présentés ci-après.

1. Trouver des points à coordonnées entières, un point étant donné.

Nous donnons tout d'abord une première droite graduée sur laquelle est positionnée la fraction $3/2$. Ici, il n'est pas question de positionner le 0 mais plutôt le 1 et le 2. Les graduations aidant, nous voulons nous assurer que les élèves travaillent en conscience et se rendent compte que $3/2$ est plus grand que 1 avant de positionner le 0 par réflexe à l'origine du segment.

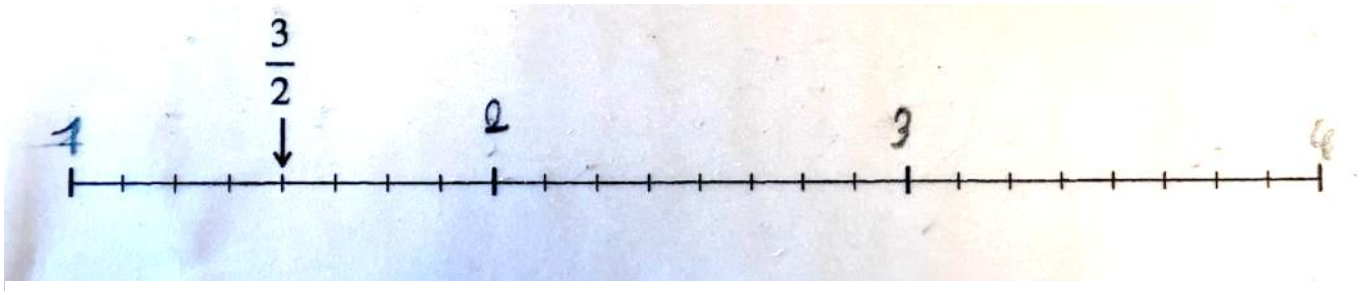


Figure 8 : seul 3/2 est placée sur une droite graduée en huitième, unités en gras

La moitié de la classe est parvenue à faire l'exercice très rapidement. Certains élèves veulent toutefois placer le 0 à l'origine de la droite mais parviennent à se corriger seuls en voyant que $3/2$ est plus grand que 1.

Une fois la correction effectuée, il est demandé aux élèves de placer d'autres écritures fractionnaires.

Ce travail préliminaire réalisé, nous proposons aux élèves une droite non graduée sur laquelle seul $1/4$ apparait.

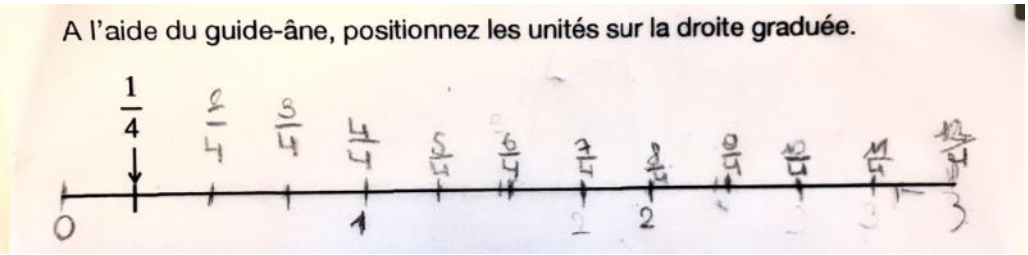


Figure 9 : seul ¼ est placé sur une droite qu'il faut graduer

Lors de la mise au travail et avant de distribuer le calque, la droite est montrée aux élèves afin de vérifier que tout le monde a bien compris la consigne. Le guide-âne est mobilisé spontanément par les élèves.

Trois élèves (2 CM2 et 1 CM1) sont parvenus à graduer la droite et à placer les points à abscisse entière, y compris le 0. Un CM1 n'a pas voulu utiliser le guide-âne. Il a mesuré la longueur du segment mesurant $1/4$ de l'unité grâce aux carreaux de son cahier. $1/4$ mesurerait pour lui la longueur d'un carreau et un interligne. Il a donc reconstitué la droite à partir de ce raisonnement (qui est juste), mais l'imprécision de sa méthode fait que chaque segment est différent.

La limite de cet exercice tel que nous l'avons proposé est que le 0 se trouvait par hasard être très proche de l'origine du segment ainsi, les élèves bénéficiaient en réalité de deux points sur la droite et l'on ne peut vérifier si le 0 a été positionné en conscience.

2. Trouver le 0 et le 1, deux points étant donnés

Cet exercice a été donné dans un premier temps aux tuteurs qui ont eu à réfléchir individuellement à trouver le 0 et le 1 sur une droite sur laquelle apparaissaient seulement les point $5/4$ et $7/4$. Trois des cinq tuteurs ont réussi.

Ils ont ensuite eu à encadrer des binômes travaillant sur une droite similaire sur laquelle n'apparaissaient que les points $5/3$ et $7/3$.

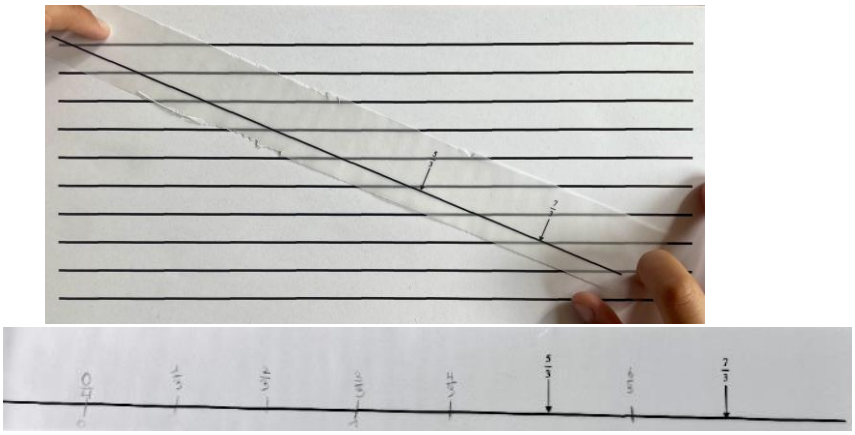


Figure 10 : droite non graduée, seuls $5/3$ et $7/3$ sont donnés

Certains groupes n'ont pas eu à se faire aider par des tuteurs, d'autres si, mais la plupart des binômes ont fini par trouver. Un binôme a toutefois eu à attendre la correction pour finalement réussir à compléter sa droite graduée en suivant la manipulation montrée via le visualiseur. Ce binôme n'a pas réussi la tâche.

Dans une dernière phase de ce test, lors d'un rallye-maths proposé à la classe sur un créneau d'une heure, trois exercices étaient proposés (voir Annexe 1):

- comparer $2/3$ et $3/4$;
- placer le 0 et le 1 sur une droite ne comportant aucune graduation et sur laquelle seuls 2/3 et 3/4 sont donnés ;
- trouver des nombres décimaux entre 1,2 et 1,21.

Les élèves disposaient d'une série d'indices qui leur coutaient des points. Le guide-âne coutant lui-même 1 point, l'objectif étant de terminer le rallye en ayant accumulé le moins de points (pénalités) que possible.

La complexité de l'exercice réside dans le fait que les fractions positionnées sur la droite graduée ont des dénominateurs différents.

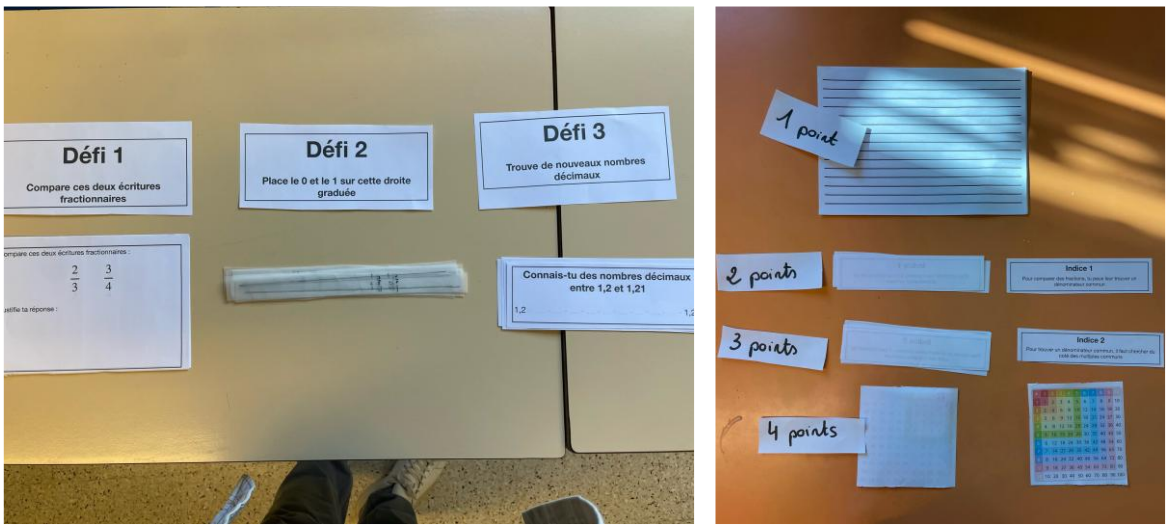


Figure 11, défis portant sur la recherche du repère d'une droite graduée

Lors de cet exercice un groupe a fortement surpris l'enseignant. Composé de quatre des cinq élèves ayant réussi l'exercice présenté au-dessus, ils ont résolu l'ensemble des trois défis en moins de cinq minutes, sans utiliser le guide-âne, préférant utiliser le quadrillage de leur cahier afin de ne pas perdre de points.

Deux autres groupes de trois élèves sont venus à bout de ce rallye. L'un en utilisant le guide-âne et en acceptant de perdre les deux points du second indice (« pour comparer des fractions tu peux leur trouver un dénominateur commun »), l'autre le réussissant en perdant six points en ayant utilisé les indices suivants : le guide-âne (1 point) et « pour comparer des fractions tu peux leur trouver un dénominateur commun » (2 points supplémentaires) et « pour trouver un dénominateur commun, il faut chercher du côté des multiples communs » (3 points supplémentaires).

Trois élèves ont dû travailler sur des exercices de remédiation avec le maitre.

3. Fraction-opérateur

Cette évaluation, portant sur des activités non encore pratiquées jusqu'à ce jour, a été proposée en binômes. Le profil de la classe est le même que pour les évaluations précédentes. Les élèves les plus motivés sont présents. Ici le taux de réussite est important car 10 élèves sur 16 ont réussi l'ensemble des exercices en binôme et 7 ont pu justifier leur raisonnement sans aide de leur camarade. Ils justifient leur résultat par la « relation fondamentale » $n \times \frac{1}{n} = 1$ pour tout entier naturel n non nul.

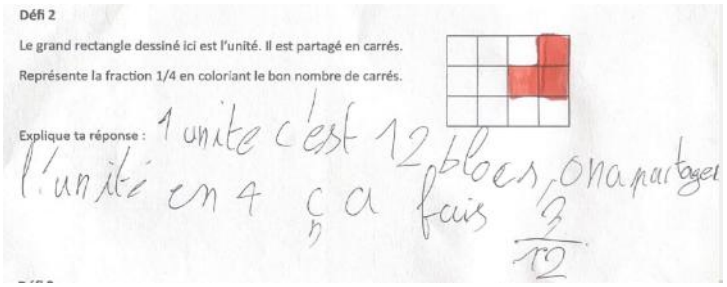


Figure 12 : fraction comme opérateur de partage

Sur les 6 élèves restant, 3 ont réussi l'exercice adapté à l'aide des jetons. 2 élèves de CM2 et 1 de CM1 n'ont pas réussi l'exercice. Ils savaient qu'il fallait partager mais ne parvenaient pas à partager de manière égale leurs jetons.

Ces activités, inhabituelles pour les élèves, permettent de confirmer que certains d'entre eux ont acquis une maitrise déjà bien assurée du sens de la droite graduée ou de la fraction outils d'opérateur de partage (sans que cet aspect ait été enseigné explicitement). Ils sont capables de mobiliser la relation fondamentale pour chercher des solutions et justifier leurs résultats. Cette relation fondamentale est devenue cardinale pour eux. Ce qui était un des objectifs visés par cette approche des fractions.

CONCLUSION

La rédaction de la conclusion est confiée à l'enseignant de la classe, Guillaume Assali.

De manière très usuelle, l'enseignement des fractions ne fait pas surgir le fait que les fractions sont des nombres qu'après bien des manipulations matérielles et sémiotiques. Nous avons choisi de faire l'inverse et de commencer par chercher des nombres (que les élèves croyaient exister puisque tout segment a une longueur…). Nous avons pu constater que ce sens est abordable dès le début du cycle 3.

La progression suggérée, originale, totalement différente de celles que l'on trouve en général dans les ouvrages scolaires a montré sa pertinence trois années de suite, dans trois classes différentes. La découverte par les élèves de ces nouveaux nombres leur a ouvert un univers nouveau dans lequel, même

les plus timorés d'entre eux en mathématiques ont pris du plaisir à apprendre. Peut-être parce que, justement, la difficulté a suscité leur appétence.

D'un point de vue pédagogique, en attribuant les mêmes tâches à tous les élèves, sans stigmatiser ceux rencontrant des difficultés, mais en les accompagnant de manière spécifique, cette approche leur a offert l'opportunité d'obtenir de bons résultats associés à une bonne compréhension des concepts, dans le domaine des fractions et des décimaux, mais aussi en mathématiques de manière générale.

Ces bénéfices sont, selon nous, en grande partie dus à la mise en place de défis de groupe grâce auxquels les élèves ont développé un véritable intérêt pour la résolution de problèmes et de manière plus générale, une appétence pour les mathématiques. Au fil des séances, les progrès des élèves sont tels qu'à la fin de l'année scolaire, ils ont été capables de mettre en œuvre des stratégies innovantes pour résoudre des problèmes (certains dépassant même les attentes de fin de cycle), témoignant ainsi d'une compréhension approfondie des concepts mathématiques en jeu. L'année précédente, nous avions utilisé l'exercice des jetons (passer du concret à l'abstrait, du continu au discret) en toute fin d'année ; cette année, ce même exercice a été proposé en remédiation à un groupe d'élèves ayant des besoins spécifiques et ne parvenant pas à développer des stratégies efficaces pour résoudre certains problèmes.

Suite à ce travail, nous avons constaté que pour l'ensemble des élèves - qu'ils réussissent ou non la tâche demandée -, la situation de recherche en mathématiques ne suscite plus de blocages. Un silence absolu régnait en fin d'année pendant plus de vingt minutes quand était proposé un défi sur les fractions aux élèves, chacun, travaillant seul, s'étant placé dans une situation intense de recherche.

Nous confirmons donc fermement notre opposition à une différenciation reposant sur l'idée de proposer des supports « plus simples » aux élèves jugés faibles et consolidons l'opinion de Bautier et Goigoux :

> *D'autres pêcheraient […] par sur-ajustement aux difficultés et aux caractéristiques des élèves : […] on leur propose des tâches simplifiées à l'excès […] conduit à considérer que « tout va bien » dès lors que les élèves parviennent à réussir les tâches proposées […] de tels effets de leurre se convertissent alors fréquemment en sentiment d'injustice, en rancœur et ressentiment à l'égard de l'école et de ses agents et/ou de soi-même* (Bautier et Goigoux, 2004, p. 97-98).

Tout au contraire, en donnant les mêmes tâches à tous, en valorisant la réflexion critique et la collaboration, notre approche a ainsi favorisé chez les élèves l'émergence de leur autonomie dans l'apprentissage, qu'ils abordent désormais avec confiance. Cette évolution positive est également le fruit de la mise en place de nombreux rituels quotidiens aiguisant leur intuition mathématique.

Parler des bénéfices de ce travail pour les élèves sans mentionner ce qu'il a apporté, en termes de formation au professeur, dresserait un tableau incomplet de ce projet. Il me semble essentiel de souligner ici l'importance de l'accompagnement régulier de Serge Petit dans ce travail, du recul qu'il est nécessaire de prendre sur nos pratiques en classe, sur notre conception des concepts mathématiques, et de l'exigence accrue qu'il convient d'adopter envers nos élèves, mais surtout envers nous-mêmes.

Issu d'un milieu professionnel dans lequel le travail coopératif était au cœur de tout projet, il m'est apparu que construire de tels dispositifs n'est pas une tâche facile pour des professeurs souvent isolés.

Pourtant, comme le souligne le Collectif didactique pour enseigner, « le travail collectif, en relation étroite avec la recherche et la formation, est une dimension du métier de professeur à privilégier pour affronter le défi de l'hétérogénéité » (2019).

BIBLIOGRAPHIE

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de Doctorat, université de Paris Diderot, Paris. https://hal.archivesouvertes.fr/tel-01249807/document.

Assali, G. (2024). Les fractions, c'est pas du gâteau ! *Au fil des maths*, 553, 14-26. APMEP. Consulté le 06/12/2024. url : https://afdm.apmep.fr/rubriques/eleves/les-fractions-cest-pas-du-gateau/

Bautier, E. et Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, 148, 97-98.

Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence.* IREM d'Aquitaine.

Camenisch, A., Petit, S. (2018), Artéfact, sémiosis et construction du système de numération de position décimale au cycle 2. Manipulation, Représenter, Communiquer. *Actes du 45e colloque COPIRELEM* (198-206). Paris : ARPEME.

Collectif Didactique pour enseigner. (2019). *Didactique pour enseigner*. Université de Bretagne Occidentale : Paideia.

Connac, S. (2018). Neuroéducation et pédagogie. *Éducation et socialisation*, 49. Consulté le 10 septembre 2024.

url : http://journals.openedition.org/edso/3556.

IREM Pays de Loire (2020). *Une séquence sur l'introduction des fractions*. Pays de Loire : IREM.

Margolinas, C. (2020). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N*, 106, 5 - 30.

Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (MENJ) (2020). Programmes du cycle 3. Eduscol.

Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (MENJ) (2024). Cycle 3, Mathématiques, Repères de progression. Consulté le 13 septembre 2024, url : https://eduscol.education.fr/document/14026/download.

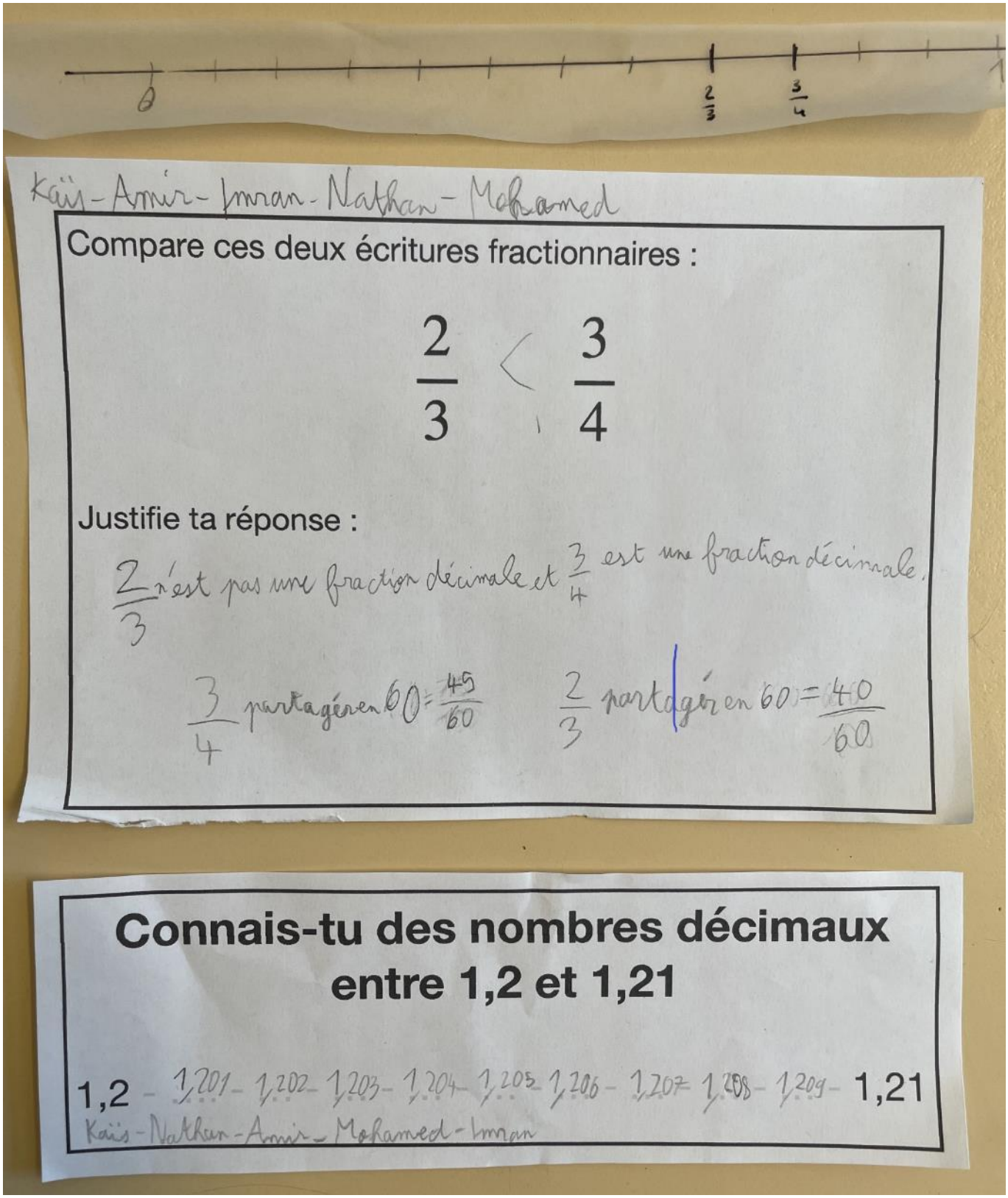
Petit, S. (2023). Faire parler les nombres ? *Au fil des maths*, 553. APMEP. Consulté le 06/12/2024. url : https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/faire-parler-les-nombres/

Petit, S., Assali, G. (2024). Enseigner les fractions en REP+, comment aider les élèves ? *Actes du 49e colloque COPIRELEM (198-206).* Paris : ARPEME.

Tremeje, J., Winder, C. (2012) *Le jeu des fractions*. ARPEME

ANNEXE 1

Production d'un même groupe d'élèves sur trois défis



SAVOIRS PROFESSIONNELS DE L'ENSEIGNANT ET SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE DANS UN DISPOSITIF DE FORMATION DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE

Mickaël DA RONCH
Professeur/Chargé d'enseignement
Haute École Pédagogique du Valais, Suisse
Mickael.daronch@hepvs.ch
Ismaïl MILI
Maître d'enseignement
Université de Fribourg, Suisse
Ismail.mili@edufr.ch

Résumé

Dans cet article nous présentons nos réflexions sur la conception, l'implémentation et la mise en œuvre d'un dispositif proposé à des étudiants en formation initiale à l'enseignement primaire dans une Haute École Pédagogique de Suisse romande (HEP-VS). Ce dispositif vise à faire évoluer les conceptions et les pratiques des étudiants sur l'activité mathématique en résolution de problèmes. Il est né de besoins relevés dans des recherches récentes qui pointent à la fois des carences aussi bien au niveau curriculaire (Da Ronch, Gardes et Mili, 2023 ; Mili, Da Ronch et Gardes, 2025) que dans les conceptions et les pratiques des étudiants primo-entrants en formation à l'enseignement primaire sur l'activité mathématique en contexte de résolution de problèmes (Da Ronch et Mili, 2024). Ce dispositif, basé sur une stratégie par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996), s'appuie sur des situations de formation issues des Situations de Recherche pour la Classe (Grenier et Payan, 2003). À cette occasion, des savoirs professionnels relatifs aux savoirs à enseigner d'ordre mathématique et aux savoirs pour enseigner d'ordre didactique feront l'objet d'un point d'attention particulier afin de contribuer, en plus des dispositifs de formation préexistants, au développement professionnel des futurs enseignants du primaire.

I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET ELEMENTS DE PROBLEMATISATION

L'objectif de cet article est de présenter un dispositif mis en place à l'entrée de la formation initiale des enseignants du primaire à la Haute École Pédagogique du Valais (HEP-VS, Suisse), visant à transformer les conceptions et les pratiques des étudiants sur l'activité mathématique en résolution de problèmes. Pour justifier l'objectif, les contenus et les conditions d'implémentation de ce dispositif centrés sur la résolution de problèmes, quelques préalables sont nécessaires. Tout d'abord, après avoir décrit certaines spécificités du contexte institutionnel suisse romand, nous mettons en évidence, à travers des recherches récentes ; certaines carences relevées aussi bien au niveau curriculaire (Da Ronch, Gardes et Mili, 2023 ; Mili, Da Ronch et Gardes, 2025) qu'au niveau des conceptions et des pratiques de l'activité mathématique en résolution de problèmes chez les étudiants primo-entrants en formation à l'enseignement primaire (Da Ronch et Mili, 2024). Ceci permet donc de justifier la nécessité d'une réflexion autour de la conception et de la mise en œuvre d'un dispositif de formation permettant d'accompagner les étudiants dans l'évolution de leurs conceptions et de leurs pratiques de l'activité mathématique, et ce, dès leur entrée en formation initiale. Pour ce faire, nous développons par la suite un cadre théorique qui s'inscrit dans le champ de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), en donnant une acception possible de l'activité mathématique en tant qu'activité humaine à partir de la recension des écrits

scientifiques réalisée dans Da Ronch (2022). Cette définition permettra de justifier l'utilisation des Situations de Recherche pour la Classe (Grenier et Payan, 2003), comme situations de formation, s'inscrivant dans un dispositif basé sur une stratégie par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996). À partir de ces considérations contextuelles et théoriques, nous détaillerons enfin le contenu du dispositif, conçu comme un levier dans l'évolution des concepts et des pratiques de l'activité mathématique en résolution de problèmes chez les futurs enseignants du primaire. Nos propos seront illustrés à partir de l'exemple d'une situation proposée aux étudiants dans ce dispositif de formation. Enfin, nous conclurons et proposerons des perspectives de travail pour affiner notre questionnement.

1 Le contexte scolaire en Suisse romande

En Suisse, ce sont les cantons qui ont la prérogative de tout ce qui a trait à la formation. Sur le territoire helvétique, ce sont donc 26 entités qui sont autonomes en termes de formation. Une des conséquences de ceci est que les Hautes Écoles Pédagogiques (HEP), qui sont donc des institutions cantonales, ont une certaine latitude, voire une latitude certaine, dans l'élaboration de leur plan de formation. Cette liberté se répercute aussi chez les formateurs qui ont, de fait, un choix peu contraint dans leur transposition externe ; il n'y a pas vraiment de cadre institutionnel précis, ce qui expliquera un peu plus tard la latitude que nous avons prise et la liberté que nous avons de proposer notre dispositif de formation.

En ce qui concerne les savoirs disciplinaires à enseigner, de manière à fédérer les cantons et harmoniser les apprentissages, un plan d'études romand (PER) a été introduit il y a une douzaine d'années à peu près ; ce PER va faire consensus sur l'intégralité de la partie francophone du pays. Le PER consiste ainsi en un programme, officiel – qui constitue d'ailleurs la seule injonction que les enseignants doivent suivre dans leur classe –, dont un des axes majeurs consiste à faire travailler la résolution de problèmes.

Les extraits suivants, témoignent de l'intention des rédacteurs du PER de travailler la discipline mathématique et de « promouvoir une attitude de recherche, […], par essai-erreur, par généralisation, par conjecture et par validation ». L'idée étant d'agripper l'activité mathématique en général et celle de résolution de problèmes en particulier « selon une posture scientifique, d'identifier des questions, de développer la capacité de problématiser des situations, de mobiliser des outils et des démarches »[1].

À noter que ce commentaire, qui accompagne le plan d'études, est valable pour l'intégralité des degrés scolaires, de l'école maternelle jusqu'à la fin du Cycle d'Orientation, qui correspond peu ou prou à la fin du collège en France.

L'accent mis sur la résolution de problèmes se décline d'ailleurs dans chacune des thématiques du Plan d'Études Romand : « Nombres » ; « Opérations » ; « Grandeurs et mesure » ; « Espace » (qui regroupe tout ce qui touche au repérage et à la géométrie) et « Modélisation ». Chaque domaine comporte des objectifs formulés en lien avec la résolution de problèmes, tels que « résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels », ou encore « résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs ». La problématisation et la résolution de problèmes sont donc omniprésentes dans les directives institutionnelles et il apparaît impératif de préparer les futurs enseignants à ces exigences.

2 Les ressources institutionnelles (Moyens d'Enseignement Romands) : le cas de l'Aide à la Résolution de Problèmes

Au regard de leur prérogative, les cantons éditaient ou choisissaient jusqu'en 2015 leurs propres supports de cours : la compatibilité avec le PER n'étant alors pas assurée, ceux-ci ont choisi de mandater des rédacteurs pour élaborer des Moyens d'Enseignement Romands (MER). On y retrouve une structure basée sur les thématiques du

[1] Extrait des "Commentaires généraux du domaine MSN" (Mathématiques et Sciences de la Nature) disponible à https://portail.ciip.ch/per/domains/2

PER mentionnées ci-avant, à savoir des Axes Thématiques intitulés « Espace », « Nombres », « Opérations », « Grandeurs et mesure » et « Modélisation ». Toute une banque de problèmes est proposée pour chacune de ces thématiques (à l'exception de « Modélisation » qui ne comprend aucun énoncé). En revanche, étant donné l'emphase mise par le PER sur la résolution du problèmes, en ajout des Axes Thématiques *disciplinaires*, figure dans les MER une section intitulée « Aide à la résolution de problème » (ARP), qui propose de multiples énoncés, lesquels seront regroupés en chapitres, afin d'« aider les élèves dans leur résolution du problème »[2]. Cette section des MER est également structurée en chapitres qui s'inscrivent dans une progression proche des phases de résolution de problèmes de Polya (1945) : « S'approprier un problème mathématique », « Résoudre un problème », « Vérifier la réponse d'un problème », et « Communiquer le résultat obtenu ». « Vérifier la résolution d'un problème », consiste à estimer si sa réponse semble correcte ; « Communiquer le résultat obtenu » concerne tout ce qui est usage de tableaux, de schémas explicatifs etc.

Les travaux récents autour de l'analyse curriculaire d'ARP ont permis d'étudier plus de 300 problèmes mathématiques proposés au cycle 2 (Da Ronch, Gardes et Mili, 2023 ; Mili, Da Ronch et Gardes, 2025). Ces auteurs ont mis en évidence des critères didactiques permettant d'évaluer le potentiel des problèmes à générer une activité mathématique combinant, au sens de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) des phases d'actions, de formulation et de validation. Le calcul du coefficient statistique de Kappa de Fleiss (Fleiss, 1971), à partir du codage de ces problèmes en triple aveugle selon ces critères, a permis de mettre en lumière la fiabilité de ces derniers (Mili, Da Ronch et Gardes, 2025). Cette étude fait ressortir que presque aucune ressource d'ARP au cycle 2 ne permet de générer pour un même problème des phases d'action, de formulation et de validation relative à la pratique de l'activité mathématique telle que les auteurs la définissent. Par ailleurs, cette recension pointe également que les problèmes proposés admettent presque toujours une et une seule solution. La non-existence de solution n'est quasiment jamais présente, l'unicité n'est pas non plus discutée et la recherche de solutions multiples à un problème est quasiment absente. En outre, le PER exige de travailler la notion de conjecture et d'effectuer un travail de validation ; or presque aucun problème ne permet en l'état à l'enseignant de travailler ces notions. Nous inférons ainsi que les élèves n'ont que très peu de chances d'être amenés à discuter de la « nature » des solutions (non-existence, unicité, pluralité), de la validité d'un raisonnement dans le processus de preuve ou encore de l'enjeu de vérité en mathématiques concernant le vrai et le faux (Gandit et Massé-Demongeot, 1996).

Ceci nous amène à postuler que les conceptions et les pratiques de l'activité mathématique des futurs enseignants du primaire, auparavant élèves, ne tiennent donc *a priori* pas compte de ces objets car leurs croyances sont vraisemblablement influencées par les ressources institutionnelles utilisées jusque-là dans leur parcours scolaire.

3 Conceptions et pratiques des étudiants primo-entrants en formation d'enseignement primaire

En Suisse romande, la formation des futurs enseignants du primaire dure trois ans dans la plupart des cantons romands et est sanctionnée par un diplôme de *Bachelor* universitaire (équivalent d'une licence en France). L'entrée en formation s'effectue généralement aux alentours de l'âge de 19 ans, à la suite d'une scolarité secondaire (après le baccalauréat dans le contexte français par exemple), sans autre formation universitaire préalable. Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, nous faisons l'hypothèse que les futurs enseignants possèdent un rapport personnel à l'activité mathématique et aux pratiques de résolution de problèmes en rapport avec ce qu'ils ont vécu au cours de leur scolarité. Cette hypothèse a été mise à l'épreuve

[2] Extrait du texte d'accompagnement des MER intitulé "La résolution de problèmes et les moyens d'enseignement de 1ère à 8e" disponible à (identifiant université suisse nécessaire) :https://www.ciip-esper.ch/#/discipline/5/5/?sidepanel={%22contentType%22:%22LA_RESOLUTION_DE_PROBLEMES_ET_LES_MOYENS_DENSEIGNEMENT_DE_1_SUP_RE_SUP_A_8_SUP_E_SUP%22,%22fullscreen%22:false}

grâce à un questionnaire proposé depuis trois ans aux étudiants primo-entrants en formation primaire à la Haute École Pédagogique du Valais (HEP-VS).

L'étude que nous avons réalisée sur l'analyse des productions écrites de ce questionnaire (Da Ronch et Mili, 2024) concerne 84 étudiants de la cohorte 2021. Cette étude montre que la grande majorité les étudiants ont des conceptions très scolaires de l'activité mathématique comme étant une activité calculatoire et procédurale et qui doit être nécessairement reliée à un domaine spécifique, relevant d'un savoir particulier, rencontré au cours de leur scolarité. Par ailleurs, les pratiques des étudiants relevées en résolution de problèmes à travers ce questionnaire pointent une maîtrise dans les processus liés à l'expérimentation en résolution de problèmes par l'étude de cas particuliers par exemple, mais des difficultés certaines dans la formulation de conjectures et dans les processus de preuve. L'étude met en évidence que les preuves, lorsqu'elles sont présentes dans les productions, relèvent presque toujours de preuves pragmatiques et non de preuves intellectuelles au sens de Balacheff (1988 ; 2019). Les processus liés à la formulation et à la validation, essentiels au raisonnement et au processus de preuve dans l'activité mathématique, sont donc très souvent absents chez ces étudiants (Da Ronch et Mili, 2024).

Ces carences pourraient alors impacter leurs futures pratiques professionnelles dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Dès lors, il nous apparaît crucial de faire évoluer leurs conceptions et leurs pratiques de l'activité mathématique en résolution de problèmes dès le début de leur formation à l'enseignement primaire. Cela passe par l'intégration d'un dispositif spécial dans leur parcours de formation. Mais alors, quel dispositif et quelle stratégie de formation seraient adéquats pour travailler ces pratiques et faire évoluer ces conceptions très scolaires de l'activité mathématique ? Et comment l'inscrire dans les dispositifs de formation préexistants dans la formation à l'enseignement primaire de la HEP-VS ? Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous présentons dans la prochaine section des éléments théoriques qui nous serviront à l'élaboration et à la mise en œuvre de notre dispositif de formation.

II - CADRE THÉORIQUE

1 Acception de l'activité mathématique

Le travail de Da Ronch (2022) autour de la recension des écrits scientifiques sur l'acception donnée de l'activité mathématique en tant qu'activité humaine montre que la grande majorité de la communauté scientifique, aussi bien chez les mathématiciens que chez les didacticiens des mathématiques, s'accorde à dire que cette activité est étroitement liée à la résolution de problèmes (par exemple Halmos, 1980 ; Nimier, 1989 ; Thurston, 1994 ; Brousseau, 1998 ; Chevallard, 1998 ; Colomb, Douaire et Noirfalise, 2003 ; Perrin, 2007 ; Da Ronch, 2022). Il ne s'agit pas simplement d'apprendre des définitions et des théorèmes dans l'unique but de les appliquer dans certaines situations (Brousseau, 1998). Il ne s'agit pas non plus ici de mettre au premier plan de cette activité le résultat du problème mathématique comme étant le seul et unique objectif. En effet, ce sont avant tout les processus impliqués dans la résolution du problème qui sont importants (Brousseau, 1998 ; Da Ronch, 2022 ; Da Ronch et Mili, 2024). D'ailleurs les connaissances mathématiques mobilisées et visées par les élèves ou les étudiants dans une situation didactique impliquant la résolution d'un problème sont ensuite décontextualisées, dépersonnalisées et détemporalisées en des savoirs ou des savoir-faire mathématiques qui sont institutionalisés par l'enseignant, et socialement et culturellement partagés par la communauté (Margolinas, 2014). Ces savoirs ont donc une certaine forme d'universalité qui va bien au-delà du contexte du problème proposé dans la situation effective. Le résultat du problème est donc seulement un objectif secondaire à cette activité (Chevallard, 1998). Les processus mobilisés dans l'activité mathématique sont en fait étroitement liés aux trois dialectiques évoquées chez Brousseau (1998), celle de l'action, celle de la formulation et enfin celle de la validation. Ainsi, faire des mathématiques demande donc à l'élève ou l'étudiant :

> *qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc.* (Brousseau, 1998, p. 49)

Il s'agit donc de construire des situations qui permettent l'articulation de ces différentes phases dans la recherche du problème et de sa vérité mathématique. Cela passe donc par exemple par l'étude de cas particuliers, qui est une connaissance relative au processus d'expérimentation. Le changement de registre de représentations sémiotiques (Duval, 2006) et l'émission de conjectures sont quant à elle des connaissances relatives au processus de formulation. La vérité ou la fausseté de ces conjectures émises en situation impliquent des processus de preuve régis par les règles de la logique telles que le principe du tiers-exclu, l'implication, etc., qui sont quant à eux des connaissances liées au processus de validation (Da Ronch, 2022). Pour construire de telles situations en formation à l'enseignement primaire qui permettent de mobiliser ce type de connaissances, nous nous appuierons sur le modèle théorique des Situations de Recherche pour la Classe (Grenier et Payan, 2003).

2 Situations de Recherche pour la Classe et savoirs visés à travers ces situations dans la formation à l'enseignement primaire

Le modèle des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) a été développé par Grenier et Payan (2003) et s'appuie sur des problèmes issus du champs des mathématiques discrètes. Une SiRC se caractérise par plusieurs conditions épistémologiques et didactiques. Tout d'abord, elle s'inscrit dans une problématique issue de la recherche professionnelle. La question est facilement compréhensible pour l'élève ou l'étudiant et des stratégies initiales existent, sans que des prérequis mathématiques spécifiques soient indispensable ou hors de portés de l'élève ou de l'étudiant pour aborder la résolution du problème. En outre, elles sont très souvent présentées avec du matériel tangible, proche des objets mathématiques en jeu dans les situations, ce qui facilite d'autant plus le processus d'enrôlement et de dévolution de la situation et son utilisation en classes de primaire ou dans la formation à l'enseignement primaire. Par ailleurs, dans une SiRC plusieurs stratégies de résolutions et plusieurs développements sont possibles pour avancer dans la recherche d'une solution. Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question et permet donc de formuler un nouveau problème, plus général ou faisant appel à des instances différentes. Enfin, des variables de recherche existent. Elles pourraient être des variables didactiques dont les valeurs seraient fixées par l'enseignant ou le formateur, mais dans le cas des variables de recherche, ce sont les élèves ou les étudiants qui fixent eux-même leurs valeurs dans l'étude du problème. Ils instancient donc le problème sur des valeurs particulières permettant de traiter une étude de cas.

Les nombreux travaux autour des SiRC montrent que ces situations permettent de développer une activité mathématique authentique proche de celle du chercheur en mathématiques (voir Da Ronch, 2022 ; Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020 ; Giroud, 2011 ; Grenier et Payan, 1998 ; 2003 ; Godot, 2005 ; Gravier et Ouvrier-Buffet, 2022). Ces situations favorisent en effet les différentes phases d'action, de formulation et de validation nécessaires pour faire des mathématiques et qui rejoignent l'acception donnée ci-avant sur l'activité mathématique. En outre, les SiRC permettent à l'étudiant ou à l'élève de mobiliser des connaissances mathématiques. Ces connaissances sont reliées à des savoirs et des savoir-faire mathématiques que l'on retrouve aussi dans les prescriptions curriculaires en Suisse romande, notamment dans le Plan d'études Romand (PER). Par exemple, l'expérimentation, par l'étude de cas particuliers, est initiée par le fait de l'existence de variable de recherche qui permet de développer une pluralité de stratégies et d'obtenir des premiers résultats locaux sur le problème. Ce processus d'expérimentation amène très souvent à la formulation d'une nouvelle question, plus générale, à des changements de registres de représentations sémiotiques (Duval, 2006), voire à la formulation de nouvelles conjectures pour lesquelles une phase de validation est nécessaire pour pouvoir statuer sur la vérité ou la fausseté des conjectures émises en situation (preuve, contre-exemple).

Outre ces savoirs mathématiques, nous faisons l'hypothèse que ces situations permettent aussi de faire émerger chez les étudiants, et ce de manière assez naturelle, des connaissances didactiques lorsqu'elles sont investies en situation de formation. En effet, ces connaissances sont reliées à des savoirs didactiques relatifs à des concepts

majeurs de l'analyse didactique de situations d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques, notamment des notions relevant de l'analyse *a priori* (Artigue, 1988 ; 2014). Cela passe par exemple par l'identification des connaissances mathématiques mobilisées et visée à travers la situation proposée en lien avec les savoirs curriculaires prescrits, par l'analyse mathématique du problème qui amène à identifier différentes stratégies de résolution. L'émergence de ces stratégies s'opère *in fine* en situation grâce à la modification des valeurs des variables laissée à la charge de celui qui résout le problème. Ainsi, fixer et modifier certaines valeurs de ces variables vont permettre d'influencer ou au contraire de rendre inopérantes certaines stratégies dans la résolution du problème. À cette occasion, les notions de variables didactiques (Brousseau, 1981) et de variables de recherche (Grenier et Payan, 2006) pourront être évoquées. De plus, le concept de milieu (Brousseau, 1988) fondamental dans les situations d'enseignement et d'apprentissage pourra facilement être illustré, notamment par son caractère antagoniste puisqu'il est suffisamment riche pour renvoyer, grâce au matériel utilisé dans la progression de la résolution du problème, des rétroactions adéquates lors de certaines phases de validation permettant à l'étudiant d'auto-réguler ses stratégies de résolution.

D'autres savoirs didactiques concernant la gestion de ces situations pourront également être abordés dans un dispositif de formation mobilisant ces situations. Ces savoirs relèvent principalement de notions liées à la posture de l'enseignant ou du formateur (Bucheton et Soulé, 2009), aux formes sociales de travail des élèves ou des étudiants, ainsi que certaines phases de mise en commun conduites sous la forme de débat scientifique (Polia1993 ; Gandit et Massé-Demongeot, 1996) permettant de statuer sur la vérité des énoncés mathématiques émis dans le contexte de la situation proposée. Les différents moments d'institutionnalisation permettront à cette occasion de rendre visible certains de ces savoirs mathématiques et didactiques.

Ainsi avec les SiRC, nous pouvons faire travailler dans le contexte de la formation des enseignants du primaire, d'une part des savoirs mathématiques permettant de faire évoluer les conceptions et les pratiques de l'activité mathématique des étudiants en résolution de problèmes, et d'autre part, des savoirs didactiques qui s'inscrivent dans le parcours des étudiants en formation initiale à l'enseignement primaire, et qui leur permettront de les outiller pour conduire ce type de situations dans leur contexte professionnel.

Par conséquent, le dispositif de formation mis en place autour des SiRC permettra de travailler des savoirs professionnels (savoirs à enseigner et savoirs pour enseigner), qui seront à la fois d'ordre mathématique et d'ordre didactique. Dans ce travail, nous ne prenons pas en compte le « troisième savoir » relatif au « savoir d'expérience » ou au « savoir pédagogique » introduit par Houdement et Kuzniak (1996), puisque ce dispositif s'inscrit au début de la formation initiale des enseignants du primaire, et ils n'ont, *de facto*, que peu voire aucune expérience professionnelle dans l'enseignement.

3 Une stratégie de formation basée sur l'homologie

Enfin, nous souhaitons également que les étudiants puissent réinvestir ce type de situations dans un contexte de classe ordinaire, que cela soit à travers leurs stages de pratique durant leur formation, mais aussi dans leurs futures pratiques d'enseignants titulaires. Ainsi, pour répondre à cette volonté, le dispositif sera mis en place autour d'une stratégie de formation basée sur l'homologie (ibid., 1996). C'est-à-dire que nous proposerons dans ce dispositif un modèle de stratégies de formation

> *[…] fondé sur l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par l'étudiant. Ce dernier devrait mettre en place un modèle de formation inspiré de celui qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Les formateurs enseignent conformément à leur conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.* (ibid., 1996, p. 301)

Dans la poursuite de ce texte, nous explicitons notre dispositif de formation basé sur ces considérations théoriques en montrant comment il s'inscrit, comme dispositif complémentaire, dans le parcours de formation initiale des étudiants de la Haute École pédagogique du Valais (HEP-VS) en formation à l'enseignement primaire.

Nous l'illustrerons ensuite par le biais d'une des situations proposées (Grenier et Payan, 1998 ; Gravier, Payan et Colliard, 2008).

III - PROPOSITION DE DISPOSITIF DE FORMATION À PARTIR DE SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

1 Inscription du dispositif dans le plan de formation de la HEP-VS à l'enseignement primaire

Comme nous l'avons relevé au sein de la section précédente, il est possible, grâce aux SiRC, d'intégrer, dans le cadre d'un dispositif de formation des enseignants du primaire, des savoirs professionnels relatifs aux savoirs à enseigner mais aussi aux savoirs pour enseigner. On retrouve ainsi deux types de savoirs essentiels. D'une part, des savoirs mathématiques à enseigner, visant à faire évoluer les conceptions et pratiques des étudiants en matière de résolution de problèmes mathématiques. D'autre part, des savoirs didactiques pour enseigner, inscrits dans leur parcours de formation initiale, qui leur fourniront les outils nécessaires pour mener ce type de situations dans leur futur environnement professionnel. Pour introduire et inscrire notre dispositif de formation dans un plan de formation (en didactique des mathématiques) des enseignants du primaire, il est nécessaire d'en présenter les grandes lignes. Ce plan de formation dure trois ans et est structuré comme suit.

- Au premier semestre, un cours introductif aborde la nature de la discipline mathématique et les fondamentaux de son enseignement. Au-delà des seuls concepts disciplinaires, l'objectif du cours tend à questionner la discipline mathématique (« qu'est-ce que c'est que faire des mathématiques ? ») ainsi que les particularités de son enseignement (1ère année).
- Au deuxième semestre, un cours mutualise et introduit des concepts de didactique issus de différentes disciplines (que nous appelons « didactique générique » ou « didactique comparée »). Il s'agit d'éléments qui rassemblent des concepts de didactique disciplinaire et tentent de les décrire et les décliner dans le cadre de la pratique professionnelle (1ère année).
- Au troisième et quatrième semestre, les cours spécifiques de didactique des mathématiques sont introduits (2e année).
- Au cinquième et sixième semestre, les formateurs en didactique des mathématiques interviennent de manière ponctuelle avec des cours moins orientés vers la didactique disciplinaire mais consistant en des analyses de pratiques enseignantes sous un cadre didactique (3ème année).

La mise en place de ce dispositif, structuré sous forme d'ateliers[3] (quatre séances d'environ 1h30 chacune) autour des Situations de Recherche, vient compléter le plan de formation existant. Son introduction, prévue au second semestre, s'appuie sur plusieurs éléments clés : les contraintes institutionnelles, la nécessité de déconstruire certaines conceptions et croyances de l'activité mathématique avant d'aborder la didactique disciplinaire, ainsi que l'importance de réinvestir des notions déjà abordées dans la formation telles que par exemple la notion de milieu (voir ci-dessous). Ces ateliers visent également à faire émerger des concepts didactiques que les étudiants réutiliseront ultérieurement dans leur parcours de formation, notamment dès le troisième semestre.

Par exemple, la notion de milieu est introduite au second semestre, en parallèle à ces ateliers, sous une forme « générique » ou « comparatiste » (dans le sens où elle est présentée aux étudiants hors du cadre de la didactique disciplinaire spécifique) ; la présence de matériel lors de la résolution de problème offre ainsi aux étudiants l'opportunité de revisiter ce concept de manière opérationnelle. Les spécificités des SiRC, notamment la prise en charge de la validation laissée à la charge des étudiants, qui leur confère une certaine forme de responsabilité

[3] L'Université Grenoble Alpes propose d'ailleurs depuis plusieurs années un module optionnel qui se base sur les SiRC à destination des étudiants de licence (toute discipline confondue, hors formation des enseignants). Ce module s'intitule « Jeux combinatoires et raisonnement mathématique ».

scientifique, permettent au formateur d'illustrer la notion de milieu selon un double aspect. D'abord le caractère antagoniste du milieu grâce au matériel proposé, — où les rétroactions renvoyées permettent une autorégulation des étudiants dans le déploiement des stratégies mobilisées lors de la résolution du problème. Ensuite, cette notion peut être discutée du point de vue du contexte cognitif des étudiants — qui mobilisent leurs connaissances antérieures et ajustent leurs stratégies face aux obstacles rencontrés. Certains concepts-clés, qui seront approfondis plus tard dans la formation, sont également abordés de manière pragmatique, comme « les variables didactiques et les variables de recherche », dont les différences peuvent être exemplifiées par les choix du formateur ; les « procédures ou les stratégies » que les étudiants adaptent en modulant certaines valeurs de variables ; ou encore la notion de « résolution experte », validée par une preuve apportée par les étudiants eux-mêmes dans l'analyse mathématique du problème.

Enfin, un lien direct est établi avec les exigences du domaine Mathématiques du PER (savoirs mathématiques de nature prescriptive) et les connaissances mobilisées et visées à travers la Situation de Recherche proposée. Le focus est mis en particulier sur certaines composantes essentielles à l'activité mathématique en résolution de problèmes telles que la généralisation, l'élaboration de conjectures, souvent issues d'un raisonnement de plausibilités purement inductif, et la validation reposant sur un raisonnement déductif. Ces compétences nous semblent donc essentielles à développer pour leurs futures pratiques professionnelles.

2 Proposition d'un dispositif de formation axée sur les SiRC : un levier pour combler les carences constatées ?

Ces ateliers ont été proposés durant trois années académiques et se poursuivent encore actuellement. Au semestre d'hiver 2024, un seul formateur encadrait une dizaine d'étudiants volontaires, orientés à la suite d'un test de positionnement en résolution de problèmes permettant d'objectiver les différents processus liés à l'expérimentation, à la formulation et à la validation (voir par exemple Da Ronch et Mili, 2024). Aux semestres d'hiver 2023 et 2022, deux formateurs intervenaient auprès d'une vingtaine d'étudiants, répartis en deux groupes, dans deux salles différentes.

Il est important de souligner que, en référence aux travaux de Houdement et Kuzniak (1996) sur les stratégies de formation basées sur l'homologie, nous avons cherché à recréer un environnement aussi proche que possible de celui d'une classe ordinaire. Ceci dans le but que les étudiants puissent transposer et réinvestir au sein de leur classe ce qu'ils ont vécu à travers cette formation. Ce choix impliquait une posture volontairement en retrait de la part du formateur, laissant le milieu artéfactuel fournir aux étudiants les rétroactions nécessaires quant à la validité de leurs productions. Le travail en îlots de quatre étudiants nous a semblé essentiel pour favoriser le débat scientifique, en mettant en lumière à la fois l'importance de la formulation entre pairs dans un langage communicable, formalisé et acceptable (Da Ronch, 2022), et celle de la dimension sociale de l'activité mathématique. Cette dimension se retrouve notamment au niveau des phases de formulation et de validation où l'enjeu de vérité en mathématiques (le vrai et le faux) repose sur la nécessité de preuve (validation) afin de statuer sur ce qui est vrai (preuve) et sur ce qui est faux (contre-exemple).

Ce dispositif étant complémentaire à la formation des étudiants et uniquement à visée formative (sans crédit ECTS alloués), seule une évaluation formative des productions des étudiants attendues a donc été réalisée. À cet effet, les étudiants ont donc été invités à produire un texte narratif décrivant leurs démarches de recherche, c'est-à-dire les différentes étapes dans leurs processus de résolution du problème ainsi que les résultats qu'ils pensaient avoir établis. Cette production, réalisée par chaque groupe, peut être considérée comme une forme de narration de recherche (Sauter, 1998). Les écrits produits par les étudiants ne font pas l'objet d'un retour direct de la part des formateurs ; ces derniers adoptant une posture visant à encourager le débat de validation, ils s'appuient ponctuellement sur des extraits de ces narrations pour mettre en évidence le travail effectué sur certaines composantes de l'activité mathématique mentionnées dans le PER, telles que l'élaboration de conjectures ou l'engagement dans une démarche de validation (voir section I-1).

2.1 L'exemple du problème de pavage d'un carré par des dominos

Concernant la SiRC retenue, bien que de nombreuses autres existent, y compris des plus récentes (voir Da Ronch, 2022 ; Ouvrier-Buffet, Alvès et Acker, 2017 ; Grenier et al., 2017), notre choix s'est porté sur la SiRC décrite dans le paragraphe suivant en raison des connaissances mathématiques mobilisées et visées et de leurs cohérences par rapport aux savoirs mathématiques prescrits et donc exigés par le PER.

La SiRC étudiée au cours des quatre séances porte sur des conditions d'existence de pavages d'une grille carrée discrète tronquée d'une case par des pavés rectangulaires de taille 2×1 que l'on appelle des dominos (Figure 1). Ces dominos peuvent être orientés verticalement ou horizontalement. Le contexte est présenté ainsi : « On souhaite paver à l'aide de dominos une salle de bain carrée dont la grille ci-jointe est une vue de dessus. Cependant, cette salle de bain doit contenir un lavabo occupant une case, dont l'emplacement est aléatoire et ne doit donc pas être pavé. La question est la suivante : pour n'importe quelle taille de la salle de bain, est-il toujours possible de la paver par ces dominos, et cela, quel que soit le positionnement du lavabo ? »[4]

Le matériel donné pour chaque groupe d'étudiants est composé d'une grille carrée de taille 10×10 (suffisamment grande pour permettre l'étude de cas particuliers et travailler sur la généralisation) ; d'une réglette permettant de délimiter la taille du carré à paver ; de dominos suffisamment nombreux pour paver des grilles de grandes tailles ; ainsi que d'un unomino (carré unitaire noir) représentant le lavabo (Figure 1).

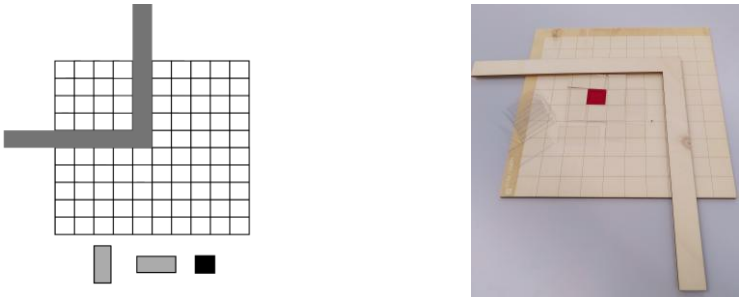


Figure 1. Présentation du matériel proposé aux étudiants (schéma et photo)

Comme pour toute SiRC, il s'agit d'un problème issu de problématiques de recherche professionnelle dont certains problèmes sont encore non résolus ou très compliqués voire impossible à résoudre du point de vue de la théorie de la complexité algorithmique ou de la théorie de la calculabilité (indécidabilité).

2.2 Déroulement de la première séance

La première séance débute par une familiarisation avec le problème et par des premières expérimentations avec le matériel disponible, qui joue d'ailleurs un rôle de facilitateur dans la dévolution de la situation et en particulier au niveau de l'enrôlement. Nous laissons donc la responsabilité scientifique aux étudiants par rapport au problème à résoudre. Il s'agit donc pour les étudiants de s'approprier le problème en commençant par étudier des cas particuliers. En effet, le problème ne demande pas explicitement de résoudre des cas particuliers, comme étudier le problème sur des grilles 4×4 ou 5×5 ; il fait uniquement référence à une grille carrée de taille quelconque ($n \times n$, avec n entier strictement positif). Après quelques essais fastidieux sur des grilles assez grandes (8×8 ou 9×9), les étudiants s'orientent assez rapidement vers l'étude de cas particuliers de plus petite taille.

[4] Le lecteur ou la lectrice intéressé·e par cette situation trouvera des analyses mathématiques et didactiques dans différents travaux (par exemple Grenier et Payan, 1998 ; 2003 ; Grenier et al., 2017 ; Gravier, Payan et Colliard, 2008).

Si, au cours d'une première discussion, les étudiants concluent généralement que le pavage d'une grille 4×4 avec un lavabo est impossible[5], ils réalisent rapidement qu'une généralisation peut être formulée à partir de l'exemple traité : dans le cas d'une grille carrée de taille paire, le nombre total de cases est pair (le carré d'un nombre pair). Le lavabo occupant une case, le nombre de cases restantes à paver devient impair. Or, chaque domino recouvre deux cases, ils ne peuvent donc pas recouvrir un nombre impair de cases, ce qui rend le pavage impossible.

Il est intéressant de noter qu'à l'origine, l'énoncé ne demandait pas d'examiner la parité du nombre de cases. Les étudiants mobilisent des connaissances éloignées du problème initial, puisent dans un répertoire de résultats et théorèmes pour les appliquer à cette situation *a priori* déconnectée.

Ce processus conduit non seulement à une généralisation à partir d'un exemple, mais aussi à une mise en relation de différents savoirs mathématiques, comme le préconise le plan d'étude. Les directives du PER soulignent en effet non seulement l'importance de la généralisation, mais aussi l'adoption d'une démarche scientifique consistant à appliquer des résultats externes à une situation donnée, renforçant ainsi l'interconnexion des concepts et des méthodes dans l'apprentissage des mathématiques.

Une discussion intéressante peut aussi émerger sur le statut de l'exemple en mathématiques. En effet, un exemple qui ne fonctionne pas ne suffit pas pour prouver une impossibilité et donc la non-existence d'un objet. Soit on est capable de traiter tous les cas (ce qui peut être très rapidement fastidieux), soit on donne un argument mathématique qui permet de le prouver. Les étudiants ont d'ailleurs tendance à penser, à tort, qu'un exemple ou quelques exemples suffisent pour prouver la non-existence d'un objet. Ceci permet juste de formuler une conjecture concernant cette impossibilité qui n'a pour l'heure, ni été prouvée, ni réfutée, et en aucun cas ne peut être considérée comme une preuve de non-existence. Cela amène à discuter du statut de certains résultats mathématiques énoncés (prouvés ou seulement en l'état de conjectures). Par ailleurs, dans le cas des grilles impaires et suivant la disposition de l'unomino (lavabo), les étudiants trouvent rapidement des exemples de pavage, cela permet d'amorcer des discussions sur l'existence d'une solution, et dans certains cas sur la pluralité des solutions trouvées, mais aussi sur les conditions d'apparition des solutions. Par exemple, à cette occasion, un exemple suffit pour prouver l'existence d'un objet, ce qui n'était pas le cas pour la non-existence. Ainsi, cela amène à discuter des différentes approches dans les preuves d'existence (un exemple suffit, il n'est cependant parfois pas unique) ou de non-existence d'objets mathématiques (un exemple ne suffit plus, d'autres approches sont nécessaires : exhaustivité des cas…). Des discussions de nature axiomatique peuvent également apparaître sur le fait qu'un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux mais ne peut pas être à la fois vrai et à la fois faux (principe du tiers exclu). Enfin, on observe souvent que des résultats obtenus dans une dimension inférieure sont réinvestis dans des dimensions supérieures. Par exemple, un pavage identifié pour une grille 5×5 peut servir de base pour résoudre une situation analogue dans une grille 7×7. Cela permet de pointer l'importance de travailler sur des cas particuliers de petites tailles lorsqu'on amorce la résolution d'un problème général, puisque cela permet de trouver des invariants qui peuvent être réinvestis dans l'étude de cas particuliers de plus grande taille et qui peuvent amener parfois à une généralisation.

2.3 Déroulement de la deuxième et troisième séance

Les séances 2 et 3 sont consacrées à l'étude des cas 3×3 et 5×5, ainsi qu'à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de pavage. En effet, si un premier résultat général relatif à la parité émerge chez les étudiants après une première séance, ceux-ci optent ensuite pour tester l'existence de pavages sur des dimensions réduites (3×3 et 5×5) et si ce n'est pas le cas le formateur propose de les étudier finement. Les résultats d'existence de pavages à partir d'exemples émergent facilement. Si l'unomino (lavabo) est posé sur une des cases noires de la figure 2, un pavage par des dominos existe (nous laissons le lecteur ou la lectrice s'en

[5] 16 – 1 = 15 cases, or il n'est pas possible de recouvrir 15 cases avec des dominos, car les dominos peuvent recouvrir seulement un nombre pair de cases.

convaincre). En revanche si l'unomino est posé sur une des cases blanches, le pavage est impossible (Figure 2). Après plusieurs essais infructueux et une prise de conscience chez les étudiants qu'un exemple ne suffit pas pour prouver la non-existence d'un pavage, ils commencent alors à structurer un peu mieux leurs stratégies de résolution.

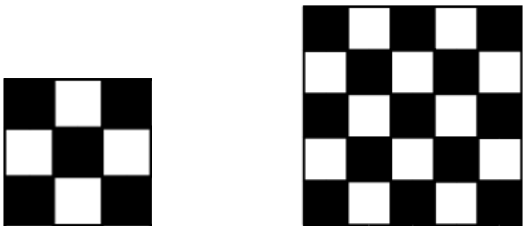


Figure 2. Les cases noires représentent le positionnement du lavabo pour lequel il est possible d'exhiber un pavage

En effet, une fois l'emplacement du trou défini et l'existence du pavage supposée, l'objectif est d'identifier les cases qui doivent nécessairement être pavées d'une unique manière. Lorsque de telles cases n'existent plus, il s'agit alors d'examiner tous les sous-cas possibles. Les étudiants raisonnent en fait par conditions nécessaires (forçage), on retrouve des indices sémantiques tels que « on est obligé », « il faut », etc., jusqu'à ce qu'ils aboutissent à une contradiction. C'est-à-dire jusqu'à obtenir 2 cases non adjacentes par un côté commun, qui ne peuvent donc pas être recouvertes par un domino. C'est en fait le raisonnement par l'absurde qui est implicitement mobilisé par les étudiants. Par ailleurs, certains étudiants réinvestissent dans le cas de la grille 5×5, des résultats de non-existence obtenus dans le cas de la grille 3×3[6]. On retrouve aussi des arguments de symétrie pour l'existence ou la non-existence de pavage. En effet, une fois prouvés, à symétrie près, on peut avoir des résultats sur d'autres configurations. Ce travail permet l'amorce de discussions importantes sur la nature variée des solutions trouvées dans des problèmes mathématiques (unicité, pluralité, non-existence) ; sur les différents raisonnements mobilisés (condition nécessaire, raisonnement par l'absurde, exhaustivité des cas) ; ainsi que sur la distinction importante entre condition suffisante et condition nécessaire pour lesquelles les preuves reposent sur des arguments mathématiques différents. Ce à quoi nous supposons qu'ils ont été très peu confrontés au cours de leur scolarité (par exemple Mili, Da Ronch et Gardes, 2025).

2.4 Déroulement de la quatrième séance

Lors de la séance 4, les étudiants travaillent en général sur la grille 7×7 et tentent de généraliser leurs résultats à n'importe quelle taille de grille carrée de côté impair (puisqu'ils ont déjà prouvé lors de la séance 1 qu'il était impossible de paver une grille carrée de côté pair). À cette occasion, les étudiants prouvent encore des cas d'existence à l'aide d'exemples, toutefois on remarque qu'une mauvaise structuration du pavage amène parfois à conjecturer chez les étudiants, lors d'un premier essai, la non-existence d'un pavage pour une configuration où il est pourtant possible d'en trouver un. Cela amène certains groupes (ou des personnes du même groupe) à réfuter cette conjecture en proposant un contre-exemple, c'est-à-dire en donnant un exemple de pavage, qui permet de réfuter la non-existence du pavage annoncée au départ. Ce point permet de faire émerger qu'un contre-exemple en mathématiques suffit pour réfuter une proposition. Dans le cas où il est impossible d'obtenir un tel pavage, les étudiants tentent là encore de réinvestir le raisonnement par forçage déjà mobilisé dans le cas de l'étude des grilles 3×3 et 5×5. Mais à partir de cette taille, l'étude des sous-cas à traiter devient très fastidieuse et oblige les étudiants à changer de stratégie et de point de vue sur le problème. Le formateur leur propose alors de retourner le plateau correspondant à la grille carrée sur lequel repose un échiquier dessiné (alternance de cases noires et blanches). Ceci est un étayage proposé pour faire émerger la stratégie de bicoloration qui va permettre

[6] Le lecteur ou la lectrice intéressé·e pourra trouver le détail de ces stratégies dans Gravier, Payan et Colliard (2008) par exemple.

de prouver la non-existence du pavage (condition nécessaire). À cet effet, et bout d'un certain temps, les étudiants comprennent qu'il y a sur la grille 7×7, 25 cases noires et 24 cases blanches. Or, un domino recouvre nécessairement une case noire et une case blanche. Ainsi, il faut avoir autant de cases noires que de cases blanches. Il faut donc positionner l'unomino (lavabo) sur une case noire ce qui permettra d'avoir un « équilibre » entre les cases noires et blanches. Or, si l'unomino est positionné sur une case blanche cet état d'équilibre ne sera pas atteint. Cet argument de bicoloration permet de prouver la non-existence du pavage lorsque l'unomino est positionné sur une case blanche et montre donc que si le pavage existe, l'unomino est nécessairement sur une case de couleur dominante. Cet argument est en plus complètement généralisable à n'importe quelle taille de gille carrée. Cette condition nécessaire (prouvée) est également suffisante. La preuve de la condition suffisante repose sur des arguments qui concernent la structuration de l'objet relevant d'une partition ou d'un découpage inductif de la grille carrée (voir Grenier et Payan, 1998 ; 2003). L'idée de structuration d'objet émerge parfois chez les étudiants notamment au niveau du découpage inductif sans toutefois être formalisée et communiquée de manière assez claire. Le résultat sur le problème énoncé sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante reste souvent à l'état de conjecture ou est juste partiellement prouvé. Il est important ici de noter pour les étudiants qu'il n'est pas toujours vrai qu'une condition nécessaire soit également suffisante. Un contre-exemple très simple permet de l'illustrer (Figure 3). Le polyomino ci-dessous possède bien autant de cases noires que de cases blanches, il est donc parfaitement équilibré sans pour autant être pavable par des dominos (Figure 3).

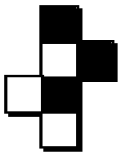


Figure 3. Exemple d'un polyomino « équilibré » non pavable par des dominos

2.5 Savoirs mathématiques et savoirs didactiques

Durant le déroulement de ces ateliers plusieurs moments de mise en commun sous la forme de débat scientifique sont proposés pour les étudiants. Le formateur est juste le gestionnaire du débat et laisse la responsabilité scientifique aux étudiants sur leurs résultats (« Est-ce que c'est vrai ? » « Est-ce que c'est faux ? » Et les raisons de « pourquoi c'est vrai ou pourquoi c'est faux ? »). Des moments d'institutionnalisation des connaissances mobilisées par les étudiants sont pris en charge par le formateur. Ils consistent à détemporaliser, décontextualiser et dépersonnaliser les connaissances mobilisées par les étudiants sur la situation proposée en savoirs socialement et culturellement partagés. Concernant les savoirs mathématiques un lien étroit est fait avec les exigences du PER. En particulier ils pointent l'importance de l'expérimentation par l'étude de cas particuliers, de la formulation de conjectures, de recherche d'invariants, de processus de généralisation et de validation requis par le PER. Bien entendu d'autres connaissances mathématiques émergent de la situation et sont relatives à des savoirs et savoir-faire mathématiques qui sont aussi institutionnalisés : pavage, symétrie, condition nécessaire, condition suffisante, raisonnement par l'absurde (forçage), raisonnement par récurrence, statut de l'exemple, du contre-exemple, de la preuve (nécessité de preuve), etc.

Ce dispositif basé sur une stratégie par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996) nous amène à échanger avec les étudiants sur les conditions de mise en œuvre dans les classes. Ces discussions permettent de faire émerger chez les étudiants la nécessité, dans ce type de situation, de réaliser une analyse mathématique du problème (résolution du problème), de l'identification des différentes procédures de résolution envisageables et des changements de registres de représentations qui peuvent émerger par le choix effectué sur les valeurs des variables. À ce moment-là nous avons la possibilité de définir et évoquer brièvement le rôle des variables didactiques ou de recherche qui peuvent impacter les procédures des élèves mais aussi orienter l'enseignant vers les connaissances qu'il souhaite viser à travers la situation proposée en lien avec les savoirs prescrits du PER (distinction entre connaissance et savoir). Les échanges pointent également l'importance de la socialisation dans

le travail mathématique des élèves, de la responsabilité scientifique laissée à leur charge mais aussi l'importance du débat scientifique dans la classe de mathématiques notamment dans les phases de formulation et de validation. Cela permet de discuter de la posture de l'enseignant, des formes sociales de travail des élèves et des conditions pour faire vivre de tels débats scientifiques en classe de mathématiques. Tout cela permet en fait de faire émerger l'importance de l'analyse *a priori* dans l'analyse de situations complexes d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques ainsi que les conditions d'orchestration de ces situations en classe. Ces savoirs didactiques, relevant des gestes professionnels de l'enseignant, seront d'ailleurs travaillés spécifiquement au cours des semestres 3 et 4 dans le cours de didactique des mathématiques.

Ce dispositif a ainsi permis de faire travailler les étudiants sur l'activité mathématique en résolution de problèmes et pourrait, selon nous, être un levier pour contribuer aux carences pointées dans nos précédents travaux (Da Ronch et Mili, 2024 ; Da Ronch, Gardes et Mili, 2023 ; Mili, Da Ronch, Gardes, 2025). Il pourrait ainsi contribuer à une évolution positive de leurs conceptions et de leurs croyances sur l'activité mathématique et sur sa pratique et permettre d'enrichir aussi leurs répertoires de connaissances au niveau des savoirs à enseigner et des savoirs pour enseigner d'un point de vue mathématique et didactique.

IV - CONCLUSION, DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Un constat sur les conceptions et les pratiques de l'activité mathématique chez les futurs enseignants nous a conduits à interroger les pratiques pédagogiques et les ressources mises à leur disposition. Une analyse curriculaire a révélé que ces derniers ne proposent que très peu d'activités permettant de travailler des savoir-faire pourtant exigés par le Plan d'Études Romand (PER), telles que la généralisation, la formulation de conjectures ou encore la validation. C'est donc pour cette raison que nous avons élaboré un dispositif de formation à la Haute École Pédagogique du Valais (Suisse), s'inscrivant dans les dispositifs existants et destiné aux futurs enseignants du primaire. Ce dispositif est basé sur des ateliers inspirés des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC). Pour illustrer ce dispositif, nous avons donné l'exemple d'une SiRC proposée dans ce contexte, qui porte sur l'étude de conditions de pavabilité par des dominos d'une grille carrée tronquée d'une case.

À partir de cet énoncé, nous avons pu, en tant que formateurs, confronter les étudiants à différentes configurations sur une même grille : certaines où un exemple permet de prouver l'existence d'une solution, et d'autres où un exemple isolé ne suffit pas pour prouver la non-existence de solution. Cette opposition a permis d'alimenter les débats sur le statut de l'exemple en mathématiques et sur la nécessité de preuve. En exploitant l'hétérogénéité des résultats ou des avancées (« Moi, je n'ai pas trouvé de solution. » ; « Moi, j'ai réussi. »), nous avons voulu recréer un véritable débat scientifique en classe. Cela afin de questionner la notion de vérité en mathématiques, de souligner l'importance du vrai et de faux et la raison du « pourquoi c'est vrai ?» ou « pourquoi c'est faux ? ». Les dernières séances de ce dispositif ont permis d'approfondir la réflexion sur la validité et la rigueur des raisonnements adoptés.

Ce débat est renforcé par les rétroactions fournies par le matériel : la possibilité ou l'impossibilité d'un pavage devient visible et concrète lorsque les étudiants testent leurs hypothèses avec du matériel tangible à leur disposition. Ces rétroactions les aident à s'autoréguler et à ajuster leurs stratégies. C'est pourquoi, lors de la conduite de ces ateliers, notre posture de formateur est résolument celle du retrait. Ce choix met en lumière l'importance du travail par narration de recherche, car nous souhaitons que les étudiants explicitent leur démarche, justifient leurs réponses, et les soumettent à l'épreuve de la vérité et de la validité logique à travers des raisonnements mathématiques.

Bien entendu, l'objectif des ateliers n'est pas d'aboutir à une formalisation stricte ou de rédiger une démonstration formelle, mais plutôt de mettre en évidence la présence de différents types de raisonnement. Il s'agit de montrer que l'étude de cas particuliers de petite taille peut éclairer la résolution d'un problème plus général. Quant à l'intérêt de ces situations, il tient au fait de la capacité des étudiants à déterminer eux-mêmes les valeurs des variables de recherche, en choisissant et ajustant les paramètres et les cas à étudier, comme le ferait un

mathématicien. Cela leur permet d'articuler les composantes inductive et déductive du raisonnement, un aspect essentiel selon les exigences du PER, tout en distinguant les conditions nécessaires des conditions suffisantes. Un autre aspect essentiel, concerne la gestion des registres de représentation. L'utilisation de matériel tangible oblige les étudiants à changer de registres de représentations lorsqu'ils passent aux outils papier-crayon. Ainsi, tout ceci permet de mobiliser plusieurs savoir-faire mathématiques, conformément aux exigences du PER, qui valorisent les registres de représentation, la preuve, et l'exhaustivité des cas par exemple.

Enfin, cette situation permet de questionner des savoirs professionnels d'ordre didactique avec les étudiants, notamment la posture de l'enseignant. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'adoption d'une posture de retrait est cruciale pour laisser les étudiants vivre de manière autonome les dialectiques d'action, de formulation et de validation et ainsi laisser la responsabilité scientifique de la résolution du problème aux étudiants. L'objectif est donc de laisser le groupe interagir avec le milieu – à la fois matériel et cognitif –, en les plaçant dans une posture de chercheurs. Ce processus leur permet de passer du statut d'étudiants à celui d'étudiants-chercheurs.

En fin de compte, si l'on examine les savoirs professionnels d'ordre mathématique abordés dans cette activité, on retrouve des éléments inhérents au PER qui ne sont que peu travaillés dans les dispositifs d'Aide à la Résolution de Problèmes. Les concepts de conditions suffisantes et nécessaires, bien qu'ils ne soient pas explicitement mentionnés dans le PER, apparaissent ici comme des outils indispensables pour l'apprentissage des mathématiques, notamment en résolution de problèmes, permettant de combler un manque dans la transposition didactique et de préparer les étudiants aux exigences ultérieures des curricula.

En ce qui concerne les perspectives, nous avons remarqué que nos étudiants arrivent en formation avec une conception très scolaire de l'activité mathématique. En réponse, nous avons introduit ces ateliers. La question que nous nous posons désormais est la suivante : avons-nous réussi à suffisamment modifier leurs conceptions de l'activité mathématique pour que ce changement soit durable ? Et, surtout, est-ce que cela aura un impact sur leurs futures pratiques professionnelles ? L'un des enjeux serait de déterminer si ce dispositif influence leurs conceptions *a posteriori* et s'ils intègrent, dans leur enseignement, des éléments issus de ce type d'approche, notamment en termes d'homologie dans leurs pratiques de classe. Il serait d'ailleurs nécessaire de suivre certains de nos étudiants lorsqu'ils entreront en activité, afin d'observer si ces apprentissages sont réinvestis, car pour l'instant, nous ne sommes pas en mesure de l'objectiver.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281 – 308.

Artigue, M. (2014). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. Dans A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, N. Presmeg (éd.). *Approaches to qualitative research in mathematics education: examples of methodology and methods* (467 – 496). Springer, Dordrecht.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse de doctorat. Grenoble : Institut National Polytechnique de Grenoble ; Université Joseph-Fourier-Grenoble I. Consultée le 25/03/2025, Url : https://theses.hal.science/tel-00326426/

Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *Actes du XXVIe Colloque de la CORFEM*. Consultée le 25/03/2025, Url : https://hal.science/hal-02981131/

Colomb, J ; Douaire, J. et Noirfalise, R. (éd.). (2003) *Faire des maths en classe. Didactique et analyse de pratiques enseignantes.* ENS Editions

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37 – 127.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309 – 336. Consultée le 25/03/2025, Url : https://revue-rdm.com/1988/le-contrat-didactique-le-milieu/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bucheton, D., et Soulé, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation et didactique, 3,* 29 – 48.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques,* La Rochelle, 91 – 118.

Da Ronch, M., Gandit, M. et Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, *121*, 77 – 108.

Da Ronch, M. (2022). *Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Grenoble Alpes. Consultée le 25/03/2025, Url : https://cnrs.hal.science/tel-04089443/

Da Ronch, M., Gardes, M-L., et Mili, I. (2023). Study of the potential of problems to practice a research activity in mathematics at elementary school in French-speaking Switzerland. In Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K., et Kónya, E. (éd.*). Proceedings of the Thirteenth Congress of the ERME (CERME13)* (96 – 103). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. Consultée le 25/03/2025, Url : https://hal.science/hal-04408292v1

Da Ronch, M., et Mili I. (2024). Conceptions et pratiques de l'activité mathématique des étudiants de première année en formation à l'enseignement primaire. Dans. I. Mili, I. Demonty et et C. Mangiante (resp.), *Dispositifs et pratiques de formation d'enseignants en mathématiques : Développement professionnel des enseignants et effets produits sur les enseignants [symposium].* 18e Rencontres du REF, Fribourg, Suisse.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM* (67 – 89).

Fleiss, J. L. (1971). Measuring nominal scale agreement among many raters. *Psychological Bulletin, 76*(5), 378–382. Consultée le 25/03/2025, Url : https://doi.org/10.1037/h0031619

Gandit, M., et Massé-Demongeot, M.-C. (1996, réed. 2001). *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée*. IREM de Grenoble.

Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat. Grenoble : Université de Grenoble). Consultée le 25/03/2025, Url : https://theses.hal.science/tel-00649159/

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Gravier, S., et Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization—Exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM–Mathematics Education, 54*(4), 925 – 940.

Gravier, S., Payan, C., et Colliard, M. N. (2008). Maths à modeler. Pavages par des dominos. *Grand N, 82*, 53 – 68.

Grenier, D., et Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques,18*(1), 59 – 100.

Grenier, D., et Payan, C. (2006). Les « situations de recherche » pour l'apprentissage de savoirs transversaux. *Actes du colloque.de l'EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Grenier, D., et Payan, C. (2003). Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (éd.), *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques* (189 – 205). IREM de Paris 7.

Grenier, D., Bacher, R., Barbe, H., Bicaïs, Y., Charlot, G., Decauwert, M., Deraux, M., Gezer, T., Meilhan, J.-B. et Mouton, F. (2017). *Situations de recherche pour la classe. Pour le collège et le lycée... et au-delà*. IREM de Grenoble.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519 – 524. Consultée le 25/03/2025, Url : https://doi.org/10.2307/2321415

Houdement, C., et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(3), 289 – 322.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM*, *10*, 123 – 159.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie*, *188*, 13 – 22.

Mili, I., Da Ronch, M. et Gardes M-L (2025). Combining a theoretical framework and a statistical measure to assess the reliability of didactic criteria in the analysis of large corpora. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the ERME (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano, Italy.

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : A. Lichnérowicz, C. Berge, A. Joyal, N. Kuiper, B. Malgrange, C. Pisot, J. Riguet, R. Thom : (l'heuristique mathématique)*. Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, Lyon.

Ouvrier-Buffet, C., Alvès, M., et Acker, C. (2017). La chasse à la bête, une situation recherche pour la classe. *Grand N*, *100*, 5 – 31.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 73*(6), 6 – 34.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Sauter, M. (1998). Narrations de recherche : une nouvelle pratique pédagogique. *Repères IREM*, *30*, 9 – 21.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American mathematical Society, 30(*2), 161–177.

DEPLACEMENT DU CORPS ET CONCEPTUALISATION GEOMETRIQUE AU CYCLE 3 : IMPACT DU DISPOSITIF LEARN-O

Arnaud SIMARD
Maitre de Conférences, INSPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, IREM de Besançon
Arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Résumé

Un groupe de 61 élèves de cycle 3 (10 ans) a suivi une séquence de 4 séances de mathématiques en mouvement basée sur le concept Learn-O durant une année scolaire. Les progrès de ces élèves ont été mesurés par un plan expérimental pré-test / post-test et comparés aux progrès de 93 élèves témoins. L'originalité de cette comparaison se situe dans le questionnaire proposé aux élèves. En effet, les mesures sont effectuées non seulement sur les notions travaillées expérimentalement (TE) mais également sur d'autres aspects géométriques non travaillés expérimentalement (NTE). L'analyse des données montre que les groupes expérimental et témoin ne sont pas significativement différents en termes de progrès concernant les notions géométriques NTE mais que le groupe expérimental a nettement plus progressé que le groupe contrôle concernant les notions géométriques TE.

I - INTRODUCTION ET CADRES THÉORIQUES

La note n°6 de Février 2022 du Conseil Scientifique de l'Education Nationale (CSEN) porte sur « Activité physique, fonctionnement cognitif et performances scolaires ». L'intérêt de cette méta-analyse est de regrouper l'ensemble des résultats scientifiques connus concernant l'influence de l'activité physique sur le fonctionnement cognitif et les performances scolaires. La conclusion de cette note est la suivante :

> *Les preuves basées sur les études de haute qualité méthodologique ne montrent pas d'effet global des interventions d'activité physique sur l'ensemble des fonctions cognitives et des résultats scolaires. Cependant, le niveau de preuve soutenant un effet bénéfique de l'activité physique sur la performance en mathématiques est solide. Par ailleurs, les activités physiques les plus exigeantes sur le plan cognitif semblent avoir un effet bénéfique renforcé. (CSEN, 2022, p. 1)*

Les recherches en psychologie cognitive sur la cognition incarnée (embodiment) suggèrent que les expériences sensori-motrices influencent la manière de penser et l'abstraction :

> *Cette théorie (cognition incarnée) trouve une validation empirique dans des recherches comportementales et en neuro-imagerie qui montrent que les systèmes cognitif et sensorimoteur sont intimement liés et que l'interaction entre le corps et l'environnement favorise les apprentissages dans des domaines variés tels que la lecture, l'arithmétique, le langage, la résolution de problèmes. (Bara et Tricot, 2017, p. 6).*

Mais ces recherches mettent également en garde contre la surcharge cognitive potentielle que peuvent engendrer des situations trop incarnées : « agir plus ne correspond pas forcément à apprendre plus » (Bara et Tricot, 2017, p. 28).

> *Ces recherches conduisent à une vision plus modérée des effets d'un apprentissage incarné et tendent à minimiser l'intérêt de manipulations réelles et virtuelles de l'environnement d'apprentissage. Si les activités perceptives et motrices apportent de la richesse aux apprentissages elles peuvent également provoquer une surcharge cognitive qui va venir détériorer les performances. (Bara et Tricot, 2017, p. 7).*

Des recherches ont été menées sur la relation entre cognition incarnée et représentations spatiales (Dutriaux et Gyselink, 2017 pour une revue de questions). Dans cet article, les auteurs notent que :

> *(…) un nombre conséquent de recherches a montré que l'exploration d'un environnement en marchant est plus efficace pour son apprentissage qu'une exploration passive, et que cet effet est dû aux informations motrices, vestibulaires et proprioceptives plutôt qu'à un effet attentionnel. (Dutriaux et Gyselink, 2017, p. 447)*

Cette étude n'est pas centrée sur l'apprentissage de notions mathématiques mais ses conclusions corroborent le sentiment d'impact positif de l'engagement du corps dans la conceptualisation de notions géométriques spatiales.

Si l'activité physique a une influence positive sur la performance en mathématiques et que les expériences sensori-motrices ont un impact positif sur l'abstraction, il paraît naturel de supposer qu'une activité motrice orientée sur les mathématiques aura un impact fort sur les performances mathématiques. C'est cette hypothèse que nous allons tenter de mesurer en nous focalisant sur une notion mathématique particulière (aire – périmètre) avec des élèves de CM2 (10 ans) et grâce à un dispositif, Learn-O, qui lie mouvement du corps et mathématiques.

Les mathématiques sont fondamentalement théoriques et abstraites. La manipulation semble être une porte d'entrée au monde mathématique, encore faut-il que cette manipulation soit réfléchie et contrainte (Briand, 2007, 2021). Dans l'approche proposée, la manipulation et l'utilisation du corps en mouvement se veulent un vecteur de développement d'images mentales manipulables, c'est-à-dire un point d'accroche pour l'abstraction. L'apprentissage scolaire des mathématiques passe par des phases de répétition afin d'acquérir des automatismes et de rendre mobilisables, sans coût cognitif, certaines pratiques. Le jeu est sans doute un moyen de rendre ces phases attrayantes pour les élèves car il amoindrit le coût de l'erreur, il motive et agit sur la persévérance (Pelay, 2011, Esseyric et al, 2012, Haye, 2019, Aberkane, 2017, Villani et Torrosian, 2018).

La géométrie se prête particulièrement bien à une approche kinesthésique de l'apprentissage de par sa fonction de mesure de la terre (« géo – métrie »). En outre, pour Duval et Godin (2005) la conversion d'un registre de représentations sémiotiques à un autre joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. Il est donc primordial de mettre les élèves en situation de pouvoir jouer sur différentes représentations des concepts dans des contextes variés et de faire dialoguer ces différentes représentations. En géométrie à l'école, différents environnements géométriques (Petitfour, 2015) co-existent et génèrent des représentations différentes qui s'enrichissent mutuellement. Les plus classiques sont l'environnement papier-crayon, la manipulation de formes 2D et 3D, la géométrie dynamique et la géométrie algorithmique (dont SCRATCH est un exemple). L'étude présentée dans cet article donne à voir la plus-value de l'environnement « immersif et collaboratif » (Simard et al., 2021) en complément des environnements classiques. L'environnement de géométrie immersive et collaborative met l'élève en activité motrice (déplacement) dans le méso-espace (Brousseau, 1998). Ce changement d'échelle induit des prises d'initiative individuelles pour changer de registre et des écrits intermédiaires pour garder la mémoire des travaux. Les élèves se déplacent physiquement dans un réseau pointé dans l'espace de la cour de récréation pour résoudre des problèmes géométriques. Dans cette activité, l'incarnation de la géométrie a pour but de développer des images mentales et de les rendre mobilisables chez les élèves (on s'affranchit ici de la précision des tracés géométriques pour se centrer sur la pensée géométrique). Le travail sensori-moteur de l'élève développe des représentations mentales. Ce travail de synthèse de l'information génère des stratégies abstraites que l'élève utilise alors pour améliorer sa pratique. La liberté d'interaction entre pairs génère des discours entre élèves et des gestes explicatifs, qui sont autant de signes porteurs de sens qui sont théorisés par Bartolini-Bussi et Mariotti (2008) dans la théorie de la médiation sémiotique.

II - MÉTHODOLOGIE DE L'ÉTUDE

1 Plan expérimental

Pendant l'année scolaire 2021-2022, une classe de CM2 a servi de laboratoire d'essai pour vérifier la faisabilité de l'expérimentation. Un questionnaire (pré-test) composé de 6 exercices regroupant 11 items a été donné aux élèves en octobre 2021. Les élèves ont été exposés à une séquence didactique regroupant 4 séances d'environ 1 heure réparties sur l'année scolaire (novembre 21 – janvier 22 – mars 22 – mai 22). En juin 2022, les élèves ont de nouveau été testés sur le même questionnaire (post-test) que celui proposé en octobre 2021. Les items des deux questionnaires ont été corrigés de manière binaire (« 0 » pour échec ou non réponse et « 1 » pour réussite, quelle que soit la procédure utilisée). La réalisation effective et réussie de cette expérimentation a motivé une étude renouvelée en 2022-2023 sur un panel élargi, avec constitution d'un groupe contrôle. Ainsi, sur l'année scolaire 2022-2023, deux autres classes de CM2 ont bénéficié de l'expérimentation pré-test en octobre 2022 / séquence didactique / post-test en juin 2023 pour créer un groupe expérimental regroupant 61 élèves. Un groupe contrôle a été formé par 6 autres classes de CM2 totalisant un effectif de 93 élèves. Les classes du groupe contrôle ont uniquement été sollicitées pour passer le pré-test (oct. 22) et le post-test (juin 23) dans les mêmes conditions que le groupe expérimental. Ces classes ont par ailleurs eu un enseignement « normal » des notions géométriques au programme, elles ont travaillé sur toutes les notions qui font l'objet du questionnaire. Seules les réponses des élèves ayant participé aux deux tests et aux 4 séances de la séquence didactique ont été pris en compte. Les écoles retenues pour constituer le groupe contrôle ressemblent (au sens du Zonage en Aires Urbaines de l'INSEE), autant que faire se peut, aux écoles du groupe expérimental : écoles rurales ou de périphérie d'un pôle urbain, une seule classe par niveau scolaire.

2 Questionnaire

Le questionnaire du pré-test est le même que celui du post-test avec les mêmes consignes de passation (annexes 1 et 2).

Les six exercices proposés n'ont pas vocation à poser de difficulté autre que la notion mathématique en jeu, ils peuvent être considérés comme des exercices d'application.

Lors de la séquence didactique qui est le cœur de l'expérimentation, certaines notions sont spécifiquement travaillées (symétrie sur réseau pointé, aire – périmètre, déplacement sur réseau pointé). D'autres ne le sont pas (vocabulaire, tracé aux instruments, programme de construction, algorithme). L'originalité du plan expérimental en découle. Le pré-test / post-test porte sur des notions travaillées expérimentalement (notées TE) et sur des notions non-travaillées expérimentalement (notées NTE).

Exercice 1 : (item 1 TE) Tracer du symétrique d'une figure sur réseau quadrillé, axe vertical, figure dont les sommets sont des nœuds du quadrillage, figure non intersectée avec l'axe, l'axe est axe de symétrie du quadrillage.

Exercice 2 : (item 2 TE) Tracer du symétrique d'une figure sur réseau pointé, axe horizontal, figure dont les sommets sont des nœuds du quadrillage, figure non intersectée avec l'axe, l'axe est axe de symétrie du quadrillage.

Pour ces deux exercices, les procédures attendues sont les mêmes : l'élève peut relier point à point les symétriques des différents sommets de la figure. La précision et le soin des tracés ne sont pas pris en compte pour l'évaluation.

Exercice 3 : (items 3-4-5) Aire et périmètre sur un papier quadrillé qui donne les unités de mesures de longueur et d'aire. Deux figures A (périmètre 6 côtés et 2 diagonales, aire 5 carrés) et B (périmètre 10 côtés, aire 4 carrés) sont données.

- (Item 3 TE) Construire une figure de même périmètre que la figure A mais de forme différente.

- (Item 4 TE) Construire une figure de même aire que la figure B mais de forme différente.
- (Item 5 TE) Construire une figure de même périmètre que la figure A et même aire que la figure B.

Cet exercice est certainement le plus délicat pour les élèves de CM2 car il n'a pas de solution unique et nécessite de prendre des initiatives. Il met en défaut les élèves dont la seule approche de la notion d'aire est une formule (« longueur fois largeur » pour un rectangle). L'item 5 est complexe car il combine aire et périmètre.

Exercice 4 : (items 6-7) Deux droites D1 et D2 sont données sur une feuille quadrillée. Les deux droites sont sécantes et passent chacune par des sommets du quadrillage.

- (Item 6 NTE) Tracer une droite parallèle à D1.
- (Item 7 NTE) Tracer une droite perpendiculaire à D2.

La confusion « parallèle / perpendiculaire », qui est une question de vocabulaire, est abordée dans cet exercice. L'élève peut utiliser les points du quadrillage pour réaliser des tracés exacts ou utiliser sa règle de façon perceptive pour placer des droites qui répondent « visuellement » aux attentes (le test porte sur le vocabulaire et l'image mentale afférente). Ces items n'ont pas de réponse unique.

Exercice 5 : (items 8-9) Programme de construction sur réseau pointé. Un segment (oblique) [AB] qui relie deux sommets du réseau est donné.

- (Item 8 NTE) Placer C et D pour que ABCD soit un carré.
- (Item 9 NTE) Tracer l'arc de cercle de centre A et d'extrémités B et D.

L'élève peut utiliser le réseau pointé pour placer les points C et D, il peut (comme dans l'exercice 4) les placer grâce à ses connaissances sur le carré (angles droits, côtés de même mesure). La position non prototypique du carré ne devrait pas être une difficulté en CM2. L'item 9 est mal formulé car il y a deux arcs de cercle possibles (intérieur ou extérieur au carré). Cet item permet néanmoins d'évaluer les connaissances liées aux notions de cercle, de centre, d'arc de cercle et d'extrémité. Encore une fois, la précision et le soin des tracés ne sont pas évalués.

Exercice 6 : (items 10-11) Déplacement algorithmique sur papier quadrillé. Une image (un petit éléphant) est placée sur une case du quadrillage.

- (Item 10 TE) Déplacer le petit éléphant selon le programme : ↓→↓↓→↑.
- (Item 11 NTE) Réaliser 3 fois de suite ce déplacement.

L'item 10 évalue la capacité de l'élève à suivre un déplacement codé dans un quadrillage. L'item 11 tente d'aborder la notion de boucle algorithmique de manière implicite. La procédure qui consiste à refaire 3 fois le déplacement en suivant chaque indication est fastidieuse donc piégeuse. La procédure qui consiste à translater 3 fois de suite l'éléphant du même motif (ou « vecteur » pour employer le terme mathématique adéquat) est plus efficace. On peut noter que dans cet exercice, le quadrillage est utilisé pour ses cases alors que dans un tracé géométrique on utilise les nœuds et les lignes de la grille du quadrillage.

Les notions NTE permettent de vérifier que les groupes expérimental et témoins progressent de la même manière et par effet de contraste, les notions TE serviront à tester nos hypothèses.

Pour chaque élève testé, nous nous intéressons uniquement à la différence de réussite entre octobre et juin pour focaliser sur le progrès au cours de l'année scolaire. Ce choix fort est assumé pour ne pas prendre en compte les différences de niveaux potentiels des élèves lors du pré-test et faire l'hypothèse que tous les élèves ont la même capacité de progrès. Chacun des 11 items est ainsi noté selon 2 modalités :

- « 0 » note l'absence de progrès et regroupe trois cas. Le cas octobre 0 – juin 0 : l'élève a échoué ou n'a pas répondu lors du pré-test et du post-test. Le cas octobre 1 – juin 1 : l'élève a réussi au pré-test et au post-test, on ne peut donc pas conclure à un progrès. Et enfin le cas « litigieux » octobre 1 – juin 0. Pour ce dernier cas nous avons choisi de privilégier « l'erreur par inadvertance » plutôt que la « réussite par inadvertance » en partant du principe que l'élève ne peut que progresser ou stagner mais qu'il ne « régresse » pas.
- « 1 » note le progrès et correspond au cas unique octobre 0 – juin 1.

Si l'on considère les 11 items, chaque élève reçoit une « note » de progrès qui s'étale entre 0 et 11 qui correspond à la somme de ses 11 notes progrès (0 ou 1) pour chacun des items.

III - DESCRIPTIF DU DISPOSITIF LEARN-O

L'expérimentation est basée sur l'utilisation du dispositif Learn-O créé par Thierry Blondeau en 2013. Le nom de ce dispositif est un acronyme qui affiche le terme « to learn » (apprendre en anglais) en s'appuyant sur les initiales « L » pour ludique, « E » pour éducatif, « A » pour autonome, « R » pour réflexif, « N » pour neuro ergonomique et « O » pour ouvert.

Le lecteur pourra trouver dans Simard & Blondeau (2016, 2023), Simard, Blondeau & Al. (2021, 2022), Simard et al. (2020, 2023), Simard (2019,2021) un descriptif précis de ces termes en lien avec les cadres théoriques sous-jacents ainsi que des expérimentations qui explorent le potentiel de l'outil avec différents publics.

Le dispositif nécessite un espace suffisamment grand pour que l'ensemble des élèves participant en puissent se déplacer (marche / course) même temps (cour d'école, terrain de sport). Le matériel utilisé est conséquent : de 10 à 26 balises électroniques fixées sur des cônes de chantier parfaitement identifiables et plusieurs ordinateurs. La disposition des balises (figure 1) dépend de l'activité proposée.



Figure 1. Exemple d'implantation Learn-O

Chaque balise électronique possède son propre identifiant informatique. L'élève possède un « doigt électronique » (figure 2) qui lui permet de biper les balises qu'il choisit en conservant l'identifiant ainsi que l'ordre des balises bipées. L'architecture des cônes sur le terrain est un environnement collectif et collaboratif, le doigt électronique permet un usage individuel de cet espace dans le but de réaliser des tâches personnelles.



Figure 2. Balises, doigts électroniques

La plupart des problèmes proposés se présentent sous la forme de petites cartes à jouer (format CB). L'élève choisit une carte de jeu dans la « boite à pioche » (Figure 3 : la liberté de choix est une variable importante pour l'élève). Cette carte contient des informations qu'il faut croiser avec la répartition des balises dans l'espace de jeu pour réaliser un parcours en bipant de manière consécutive sur les balises pour enfin venir vérifier sur un ordinateur si le parcours réalisé (qui correspond à la résolution du problème proposé sur la carte de jeu) est correct ou non (la validation se fait de deux manières : écran vert « c'est bon », écran rouge « il y a une erreur » ou alors par comparaison entre le parcours attendu et le parcours réalisé). L'élève peut prendre le temps de comprendre son erreur (indications à l'écran et discussion entre pairs). Il peut alors choisir entre recommencer son parcours ou changer de problème.



Figure 3. La « pioche » engage l'élève

Toutes les activités Learn-O proposées sont fondées sur le déplacement du corps dans l'espace et peuvent être reliées à la lecture/compréhension ou à la création d'un plan (mental ou concret). La mémorisation, la localisation et le repérage sont au cœur de chacune des activités mais il relève de l'enseignant de le rendre explicite ou de le laisser implicite.

IV - LA SÉQUENCE DIDACTIQUE

La séquence imaginée consiste en 4 séances réparties précisément sur l'année scolaire (novembre / janvier / mars / mai) et d'une durée d'environ 1h chacune.

<u>Séance 1 :</u> Première rencontre avec le dispositif Learn-O dans un schéma 10 balises

Le principal enjeu d'apprentissage de cette séance est le déplacement selon un chemin dans un maillage de balises en lisant un plan figuratif (voir figure 4). Les objectifs intermédiaires sont les suivants :

Découverte et familiarisation avec l'outil (doigt électronique, balises, ordinateurs) ;

Régulation des incompréhensions liées à la rupture de contrat didactique (autonomie, déplacement, communication, auto-validation) ;

Divers jeux de mémorisation et de localisation (enchainer 3, 5 ou 10 balises dans le bon ordre avec ou sans visuel sur les balises pour mémoriser les emplacements) ;

Jeux de déplacement sur un chemin, lecture de plan (la figure 4 montre 2 types de plans : un chemin sur plan « normal » et le même chemin sur plan « en miroir », ces deux cartes sont symétriques l'une de l'autre).

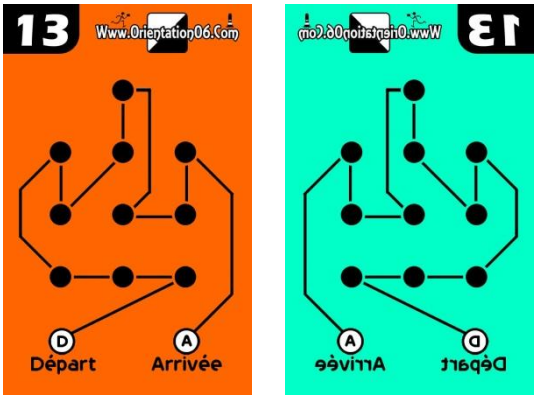


Figure 4. Exemples de cartes de déplacement « normal » et « en miroir »

<u>Séance 2 :</u> Géométrie immersive et collaborative dans un schéma 25 balises

Dans ce dispositif, les cônes sont placés en quadrillage 5 par 5. Les cartes de jeux sont remplacées par des géoplans (« planches à clous 5 par 5 »). Le géoplan devient le fond de carte qui représente la répartition des cônes.

Un élastique est placé sur le géoplan, le joueur doit suivre le parcours défini par l'élastique en bipant sur les balises qui en structurent le contour et se rendre à l'ordinateur pour valider par lui-même en comparant le géoplan physique avec la représentation à l'écran du tracé réalisé sur le terrain (voir figure 5). Hormis le nombre de balises qui augmente passant de 10 à 25, l'évolution entre les exemples donnés en figure 4 et en figure 5 réside dans l'absence d'orientation absolue du plan : l'élève doit choisir une orientation et s'y tenir (dans la version 10 balises, le départ et l'arrivée sont pointés ainsi que la dixième balise qui permet d'avoir une orientation absolue, ces référents sont absents dans la version 25 balises). La vérification à l'écran implique la compréhension (implicite) de l'invariance d'une figure géométrique à rotation près.



***Figure 5**. Un parcours sur géoplan et la représentation de sa réalisation*

Les objectifs se succèdent :

- Tracé point par point.

- Reconnaissance de figures et auto-évaluation : l'élève a sous les yeux un géoplan physique avec une forme géométrique concrète, il transforme mentalement cette forme en un parcours qu'il réalise à pied en bipant sur les sommets représentés et enfin il compare la représentation obtenue de son parcours à l'écran avec la forme concrète sur son géoplan.

- Invariance des figures par rotation. Lors de la validation, l'élève reconnait la figure tracée indépendamment de sa position relativement au quadrillage (la position du tracé dépend du choix d'orientation initial de l'élève).

- Symétrie axiale. Dans un premier temps, les élèves utilisent un géoplan translucide (le retournement du géoplan permet une procédure incarnée de la symétrie axiale). Ensuite ils sont confrontés au géoplan opaque pour faire évoluer les procédures vers une construction point par point. Attention les consignes orales lorsque n'utilisent des termes mathématiques que « voici c'est nécessaire. Ici la consigne peut être : l'écran la moitié d'un papillon, fais apparaitre à le papillon en entier » (voir figure 6).

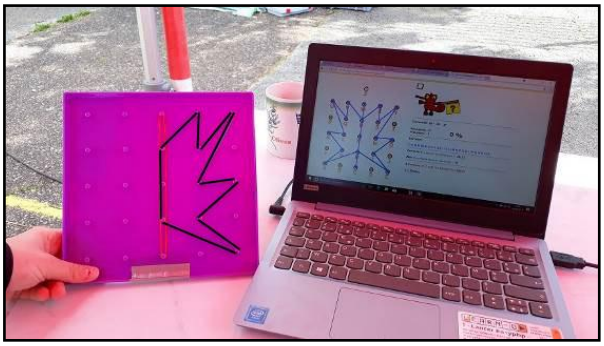


Figure 6. « Voici la moitié d'un papillon, fais apparaitre à l'écran le papillon en entier »

Séance 3 : Aire et périmètre dans un schéma 25 balises

Les cônes sont disposés en un quadrillage 5 par 5. La longueur entre deux balises (sur les bords du quadrillage) est définie comme étant l'unité de longueur. Le logiciel donne pour chaque figure réalisée la mesure de son périmètre (en unité U) et son aire (en unité au carré U²). Il devient alors possible de travailler sur les notions d'aire et de périmètre par le biais de défis géométriques (figure 7). Les géoplans physiques sont à disposition ainsi que des feutres effaçables pour chercher en traçant directement sur la carte de jeu.

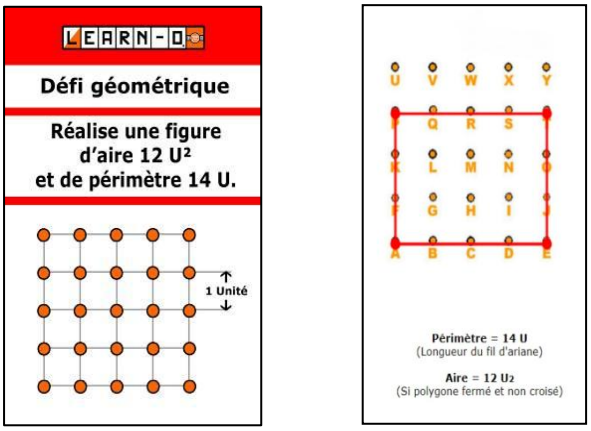


Figure 7. A gauche, une carte de jeu « défi » et à droite la copie d'écran d'une solution

Séance 4 : Consolidation

Cette séance est dédiée à un retour sur les séances 2 et 3 en maximisant l'investissement de chaque élève par le biais de jeux, de défis individuels ou collectifs (voir Simard 2021, pp. 27-28), de défis de vitesse ou de mémorisation.

V - LES RÉSULTATS STATISTIQUES

Les items testés permettent d'obtenir des réponses statistiques à plusieurs questions. Pour réaliser ces tests statistiques nous employons le logiciel JASP (logiciel libre et open-source). Nous noterons GE pour Groupe Expérimental et GC pour Groupe Contrôle.

Nous ferons le choix du test de Student pour les différentes comparaisons statistiques qui suivent. Les hypothèses de normalité des variables sont assumées dans la population dont sont extraits les échantillons proposés à l'étude. Les deux échantillons (expérimental et contrôle) sont indépendants et sont de tailles différentes (groupe expérimental : 61, groupe contrôle : 93). Nous utiliserons donc principalement un test T de Student à 93 + 61 – 2 = 152 ddl. Les conditions d'application de ce test sont vérifiées. D'une part, les deux échantillons ont un effectif supérieur à 30. D'autre part un test de Levenne sera toujours pratiqué pour vérifier que les échantillons proviennent de populations homogènes (variances non significativement différentes).

Les groupes contrôle et expérimental seront comparés sur leur progrès au cours de l'année écoulée. Nous faisons l'hypothèse que ce choix nous permet de ne pas prendre en compte les différences de résultats lors du pré-test. Pour information, les résultats de chaque groupe au pré-test et post-test sont donnés dans les diagrammes ci-dessous pour avoir une vue d'ensemble.

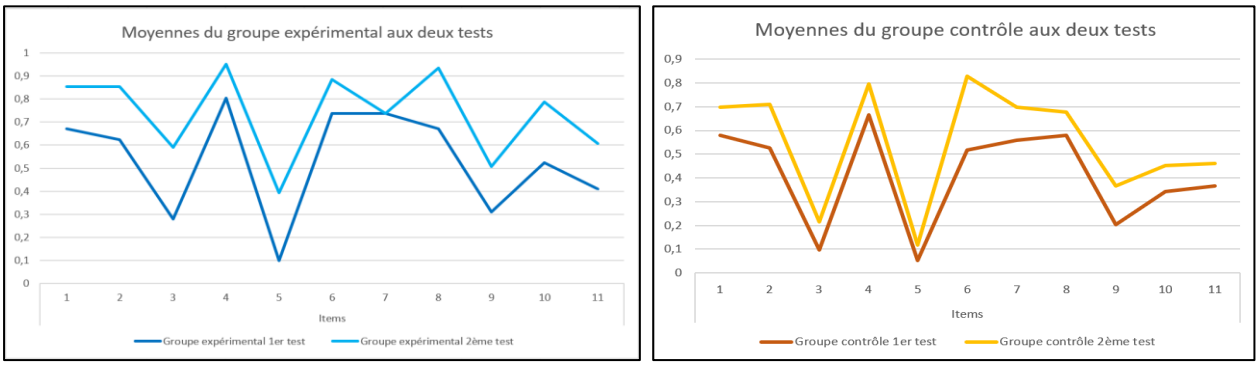


Figure 8. Résultats aux pré-test et post-test pour chaque groupe

1 Statistiques de référence de progrès scolaires sur l'année

Dans un premier temps nous vérifions que les deux groupes ont significativement progressé durant l'année scolaire sur l'ensemble des items. Pour chaque groupe nous réalisons une comparaison de moyennes (après VS avant) en corrigeant les données du post-test selon les mêmes règles que celles énoncées dans la méthodologie de l'étude (le résultat d'un item du post-test est mis à 1 lorsque le résultat au même item était 1 au pré-test).

Les deux tests suivants (figures 9 et 10) sont des tests de Student de comparaison de moyennes sur échantillons appariés (mêmes élèves avant et après l'année scolaire).

Paired Samples T-Test

Paired Samples T-Test

Measure 1		Measure 2	t	df	p
après	-	avant	12.632	60	< .001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that après is greater than avant.
Note. Student's t-test.

Figure 9. Test unilatéral de comparaison de moyennes après VS avant pour GE

Le test unilatéral (figure 9) réalisé sur les résultats aux 11 items avec l'année scolaire écoulée (avant / après) comme facteur intra-sujets montre que la moyenne des scores est significativement meilleure après l'année scolaire (M = 8,83) par rapport au début de l'année scolaire (M = 5,86) avec $t(60) = 12.632$ et $p < 0.001$ pour le groupe expérimental (GE).

Le test unilatéral (figure 10) réalisé sur les résultats aux 11 items avec l'année scolaire écoulée (avant / après) comme facteur intra-sujets montre que la moyenne des scores est significativement meilleure après l'année scolaire (M = 7,06) par rapport au début de l'année scolaire (M = 4,49) avec $t(92) = 16,530$ et $p < 0.001$ pour le groupe contrôle (GC).

Paired Samples T-Test

Paired Samples T-Test

Measure 1		Measure 2	t	df	p
après	-	avant	16.530	92	< .001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that après is greater than avant.
Note. Student's t-test.

Figure 10. Test unilatéral de comparaison de moyennes après VS avant pour GC

La conclusion de ce double test est rassurante, les élèves des groupes expérimental et témoin ont progressé (significativement) pendant leur année scolaire.

2 Statistiques sur l'ensemble des items

On considère tous les items de l'expérimentation (de 1 à 11) et on cherche à comparer la moyenne des progrès du groupe expérimental versus la moyenne des progrès du groupe contrôle. On fera l'hypothèse de la normalité de la répartition des différences de moyenne.

Statistiques à étudier :

- Hypothèse nulle (H0) : les deux groupes ont une même moyenne de progrès pour l'ensemble des items.
- Hypothèse alternative (H1) : les deux groupes ont des moyennes de progrès différentes pour l'ensemble des items.

Le test de Levenne (figure 11) n'est pas significatif (p = 0.207), il permet ainsi de s'assurer de la condition d'homogénéité des variances dans les échantillons.

Un test bilatéral (figure 11) a été effectué sur les progrès moyens des élèves avec exposition à la séquence didactique Learn-O (expérimental versus contrôle) comme facteur inter-sujets. Le test montre que le niveau moyen de progrès n'est pas significativement différent entre les deux groupes expérimental et contrôle avec t(152) = 1.417 et p = 0.158.

On ne peut pas conclure que la séquence didactique ait produit un effet significatif sur la moyenne des progrès concernant les 11 items testés.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	1.417	152	0.158

Note. Student's t-test.

Assumption Checks

Test of Equality of Variances (Levene's)

	F	df_1	df_2	p
résultats progrès	1.604	1	152	0.207

Figure 11. Test bilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour l'ensemble des items

3 Statistiques sur les items représentatifs des notions travaillées expérimentalement (TE)

On considère maintenant les items 1-2-3-4-5-10 représentatifs des notions travaillées expérimentalement (TE) et on cherche à comparer la moyenne des progrès du groupe expérimental versus la moyenne des progrès du groupe contrôle sur ces items.

Statistiques à étudier :

- Hypothèse nulle (H0) : les deux groupes ont une même moyenne de progrès aux items 1-2-3-4-5-10.
- Hypothèse alternative (H1) : les deux groupes ont des moyennes de progrès différentes aux items 1-2-3-4-5-10.

Le test de Levenne (figure 12) n'est pas significatif, les deux échantillons proviennent de populations dont on ne peut pas dire que les variances soient statistiquement différentes. La condition d'utilisation du test de Student (n1>30 et n2>30) est respectée. Un test bilatéral (figure 12) a été effectué sur les progrès moyens des élèves avec exposition à la séquence didactique (expérimental versus contrôle) comme facteur inter-sujets. Le test montre que le niveau moyen de progrès est significativement différent entre les deux groupes expérimental et contrôle avec t(152) = 3.103 et p = 0.002.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	3.103	152	0.002

Note. Student's t-test.

Assumption Checks

Test of Equality of Variances (Levene's)

	F	df_1	df_2	p
résultats progrès	1.617	1	152	0.205

Figure 12. Test bilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour les items 1-2-3-4-5-10

Le test unilatéral correspondant (figure 13) confirme que les élèves du groupe expérimental ont une moyenne de progrès (M = 1,80) significativement supérieure à la moyenne des progrès des élèves du groupe contrôle (M = 1,19) avec t(152) = 3.103 et p = 0.001.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	3.103	152	0.001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that group *expérimental* is greater than group *contrôle* .
Note. Student's t-test.

Figure 13. Test unilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour les items 1-2-3-4-5-10

La conclusion de ce test est probante pour la séquence didactique menée. Le groupe expérimental a progressé significativement plus que le groupe contrôle. Cette conclusion pourrait être le cœur de l'article mais nous nous proposons de regarder plus précisément certains résultats.

Par complémentarité, nous pouvons également regarder les items 6-7-8-9-11 représentatifs des notions non travaillées expérimentalement (NTE). On cherche à comparer la moyenne des progrès du groupe expérimental versus la moyenne des progrès du groupe contrôle sur ces items.

Statistiques à étudier :

- Hypothèse nulle (H0) : les deux groupes ont une même moyenne de progrès aux items 6-7-8-9-11.
- Hypothèse alternative (H1) : les deux groupes ont des moyennes de progrès différentes aux items 6-7-8-9-11.

Le test de Levenne (figure 14) n'est pas significatif, les deux échantillons proviennent de populations dont on ne peut pas dire que les variances soient statistiquement différentes. La condition d'utilisation du test de Student (n1>30 et n2>30) est respectée. Un test bilatéral (figure 13) a été effectué sur les progrès moyens des élèves avec exposition à la séquence didactique (expérimental versus contrôle) comme facteur inter-sujets. Comme attendu, le test montre que le niveau moyen de progrès ne peut pas considéré comme significativement différent entre les deux groupes expérimental et contrôle avec t(152) = -1,279 et p = 0.203. On ne peut pas rejeter l'hypothèse H0.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	−1.279	152	0.203

Note. Student's t-test.

Assumption Checks

Test of Equality of Variances (Levene's)

	F	df_1	df_2	p
résultats progrès	3.160	1	152	0.077

Figure 14. Test bilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour les items 6-7-8-9-11

La conclusion de ce test est significatif, la séquence didactique a eu un effet positif sur les progrès du groupe expérimental en comparaison de progrès du groupe contrôle concernant l'ensemble des notions travaillées expérimentalement.

Nous allons maintenant regarder plus précisément certains items.

4 Statistiques sur les items de construction du symétrique d'une figure (TE)

On considère les items 1-2 concernant la construction de symétriques de figures données par rapport à un axe sur réseau quadrillé ou pointé. On compare alors la moyenne des progrès du groupe expérimental versus la moyenne des progrès du groupe contrôle sur ces deux items.

Statistiques à étudier :

- Hypothèse nulle (H0) : les deux groupes ont une même moyenne de progrès aux items 1 et 2.
- Hypothèse alternative (H1) : les deux groupes ont des moyennes de progrès différentes aux items 1 et 2.

Le test de Levenne (figure 15) n'est pas significatif, les deux échantillons proviennent de populations dont on ne peut pas dire que les variances soient statistiquement différentes. La condition d'utilisation du test de Student (n1>30 et n2>30) est respectée.

Un test bilatéral (figure 15) a été effectué sur les progrès moyens des élèves avec exposition à la séquence didactique Learn-O (expérimental versus contrôle) comme facteur inter-sujets.

Le test montre que le niveau moyen de progrès n'est pas significativement différent entre les deux groupes expérimental et contrôle avec t(152) = 0.574 et p = 0.567.

Il n'y a pas de mise en évidence d'une plus-value de l'activité concernant les progrès aux items 1 et 2 sur la construction du symétrique d'une figure sur papier quadrillé ou pointé. Nous pouvons émettre des hypothèses sur ces résultats. Les items évaluatifs ne présentaient aucune difficulté spécifique et la symétrie axiale est travaillée depuis le début du cycle 3 par tous les élèves. Il nous semble cependant intéressant de regarder les résultats concernant ces deux items dans chacun des groupes expérimental et contrôle afin de vérifier statistiquement les progrès.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	0.574	152	0.567

Note. Student's t-test.

Assumption Checks

Test of Equality of Variances (Levene's)

	F	df_1	df_2	p
résultats progrès	0.675	1	152	0.413

Figure 15 : Test bilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour les items 1-2

Le test unilatéral (figure 16) réalisé sur les résultats (0-1-2) aux items de symétrie axiale avec l'année scolaire écoulée (avant / après) comme facteur intra-sujets montre que la moyenne des scores est significativement meilleure après l'année scolaire (M = 1,70) par rapport au début de l'année scolaire (M = 1,29) avec t(60) = 3.551 et p < 0.001 pour le groupe expérimental.

Paired Samples T-Test

Paired Samples T-Test

Measure 1		Measure 2	t	df	p
après	-	avant	3.551	60	< .001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that après is greater than avant.
Note. Student's t-test.

Figure 16. Test unilatéral de comparaison des résultats Après VS Avant du Groupe Expérimental pour les items 1-2

Le test unilatéral (figure 17) réalisé sur les résultats (0-1-2) aux items de symétrie axiale avec l'année scolaire écoulée (avant / après) comme facteur intra-sujets montre que la moyenne des scores est significativement meilleure après l'année scolaire (M = 1,41) par rapport au début de l'année scolaire (M = 1,10) avec t(92) = 3.354 et p < 0.001 pour le groupe contrôle.

Paired Samples T-Test

Paired Samples T-Test

Measure 1		Measure 2	t	df	p
après	-	avant	3.354	92	< .001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that après is greater than avant.
Note. Student's t-test.

Figure 17. Test unilatéral de comparaison des résultats Après VS Avant du Groupe Contrôle pour les items 1-2

Les moyennes de réussite passent de 1.29 à 1.70 (+0.41) pour le groupe expérimental et de 1.10 à 1.41 (+0.31) pour le groupe contrôle. Ces résultats prouvent que les élèves ont statistiquement progressé mais l'écart de progrès n'est pas statistiquement suffisant pour parler de différence de progrès entre les deux groupes.

5 Statistiques sur les items aire et périmètre (TE)

On considère les items 3-4-5 concernant les notions d'aire et de périmètre. On souhaite comparer la moyenne des progrès du groupe expérimental versus la moyenne des progrès du groupe contrôle sur ces 3 items.

Statistiques à étudier :

- H0 : les deux groupes ont une même moyenne de progrès aux items 3-4-5.
- H1 : les deux groupes ont des moyennes de progrès différentes aux items 3-4-5.

Un test unilatéral (figure 18) a été effectué sur les progrès moyens des élèves avec exposition à la séquence didactique Learn-O (expérimental versus contrôle) comme facteur inter-sujets. Le test montre que les élèves du groupe expérimental ont une moyenne de progrès (M = 0,91) significativement supérieure à la moyenne des progrès des élèves du groupe contrôle (M = 0,51) avec t(152) = 3.409 et p < 0.001. Le test de Levenne confirme la vérification des hypothèses de variance pour le test de Student.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test

	t	df	p
résultats progrès	3.409	152	< .001

Note. For all tests, the alternative hypothesis specifies that group *expérimental* is greater than group *contrôle* .
Note. Student's t-test.

Assumption Checks

Test of Equality of Variances (Levene's)

	F	df_1	df_2	p
résultats progrès	0.299	1	152	0.585

Figure 18 : Test unilatéral de comparaison des progrès GE VS GC pour les items 3-4-5

La conclusion de ce test est significative. La séquence didactique a eu un effet positif sur les progrès du groupe expérimental en comparaison de progrès du groupe contrôle concernant les notions d'aire et de périmètre.

Les progrès des élèves concernant la dernière notion travaillée expérimentalement (déplacement sur quadrillage) donne des résultats qui ne vérifient pas les conditions de Levenne donc nous préférons nous abstenir de dégager des tendances même si elles corroborent les résultats détaillés précédemment.

VI - CONCLUSION

Un groupe expérimental composé de 61 élèves a bénéficié d'une séquence didactique de 4 interventions de 1h reparties sur l'année scolaire. Ces interventions ont eu pour objectifs de mettre les élèves en mouvement, par l'intermédiaire du dispositif Learn-O, afin de traiter de notions géométriques (symétrie axiale, aire et périmètre, déplacement sur quadrillage). Les progrès de ces élèves ont été mesurés dans un plan expérimental pré-test, post-test. Les mesures ont porté sur des notions travaillées expérimentalement (TE) et des notions non travaillées expérimentalement (NTE). Ces mesures de progrès ont été comparées aux mesures de progrès d'un groupe témoin composé de 93 élèves comparables (même niveau scolaire, même structure d'école, même implantation géographique et sociale). Les tests statistiques réalisés permettent d'affirmer que la séquence didactique a eu un impact positif sur les notions traitées (TE) pour le groupe expérimental tout en laissant les notions non traitées (NTE) dans le même ordre de progrès que pour le groupe témoin. Le dispositif Learn-O est basé sur l'effet kinesthésique de l'apprentissage et sur la cognition incarnée mais son environnement recèle bien d'autres points qui le distinguent d'un apprentissage classique en classe (jeu physique, autonomie, auto-validation, individualisation, collaboration, numérique…). Toutes ces singularités agissent comme un amplificateur de motivation pour l'élève. Le faible nombre de séances réparties sur l'année scolaire permet de laisser cette motivation intacte (l'attrait de la nouveauté ne s'estompe pas). L'étude réalisée permet de conclure à l'influence positive de 4 séances conduites avec le dispositif Learn-O sur les notions de périmètre et d'aire. Ces résultats ne peuvent être directement corrélés à la mise en mouvement des élèves indépendamment du dispositif utilisé. Il serait donc intéressant, dans un premier temps, de conduire une étude identique à celle présentée dans cet article en basant la séquence didactique sur un dispositif intégrant le déplacement du corps sans outil numérique. Puis, dans un second temps, il s'agirait de réaliser une étude comparative entre deux séquences d'enseignement basées sur le déplacement du corps pendant l'apprentissage (avec ou sans outil numérique) afin d'identifier si le dispositif Learn-O est à l'origine de la plus-value.

VII - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Aberkane, I. (2017). *Libérez votre cerveau*. Robert Laffont.

Bara, F., Tricot, A. (2017). Le rôle du corps dans les apprentissages symboliques : apports des théories de la cognition incarnée et de la charge cognitive. *Recherches sur la philosophie et le langage, 33*, 219-249. Paris : Vrin.

Bartolini-Bussi, M.G., Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in : *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second revised edition, L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh, eds., Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ., 746-805.

Brousseau, G., (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

Billy, C., Cabassut, R., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. (2017). Quels apports de la programmation pour la reproduction d'une figure géométrique ? Perspectives pour la formation. Dans *Manipuler, représenter, communiquer : Quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?. Actes 44e colloque COPIRELEM.* Paris : ARPEME.

Briand, J. (2007). La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe, *Petit x, 75*, 7–33.

Briand, J. (2021). Manipuler en mathématiques … oui mais, *Au fil des Maths*, *Bulletin de l'APMEP, hors-série 1 spécial « premier degré »*, 142-145.

Conseil Scientifique de l'Education Nationale (2022). Activité physique, fonctionnement cognitif et performances scolaires : niveau de preuve et grade de recommandations, *Note n° 6*.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N, 76*.

Dutriaux, L. et Gyselinck V. (2017). Cognition incarnée : un point de vue sur les représentations spatiales, *L'année psychologique / Topics in Cognitive Psychology, 116*, 419-465.

Eysseric, P., Simard, A., Winder, C. (2012). Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques, *Actes Colloque EMF2012*. Genève.

Haye, T. (2019). *Étude des conditions et des contraintes d'implémentation d'un jeu de société à l'école, comme vecteur d'apprentissages mathématiques : cas du jeu de Go au cycle 3*. Montpellier : Université de Montpellier.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Lyon : Université Claude Bernard.

Petitfour E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Paris : Université Paris 7.

Simard, A., Blondeau, T., (2016). Learn-O : faire des maths en courant. *Math-École, 226*. Genève.

Simard, A. (2019). Learn-O : Des mathématiques autrement, Dans *Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXIe siècle. Actes 46e colloque COPIRELEM.* Lausanne : HEP-Vaud.

Simard, A., Rage, J. (2020). Course d'orientation. Navigation spatiale et apprentissages scolaires, *Revue EP&S. Education physique et sport, 387*, 63-65.

Simard, A .(2021). Learn-O : Former à l'enseignement des mathématiques en primaire sans table ni chaise. Dans *Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Actes 47e colloque de la COPIRELEM.* Grenoble : ARPEME.

Simard, A., Blondeau, T., & Coste, J. (2021). Learn-O : Des maths en plein air. *Repères-IREM*, *124*, 9-36.

Simard, A., Cece, V., Lentillon-Kaestner, V., Roure, C., & Blondeau, T. (2022). Innovations numériques : apprentissages interdisciplinaires en mathématiques et en éducation physique. *Revue suisse de pédagogie spécialisée*, *12(1),* 23-31.

Simard, A., Blondeau T., (2023). Impliquer le corps pour faire des maths grâce à Learn-O. *« Dehors les maths ! », Au fil des Maths, Bulletin de l'APMEP, 548*, 13-19.

Villani C., Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Paris :Ministère de l'Education Nationale.

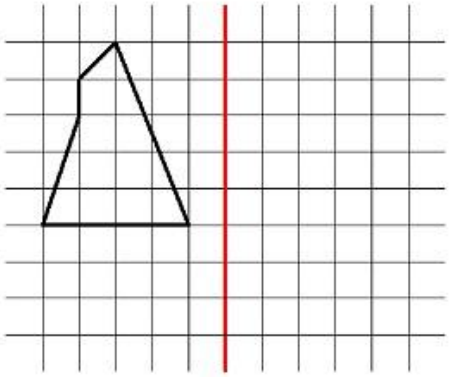
ANNEXE 1

LE QUESTIONNAIRE PRÉ-TEST / POST-TEST (RÉDUIT À 25%)

Prénom et NOM :

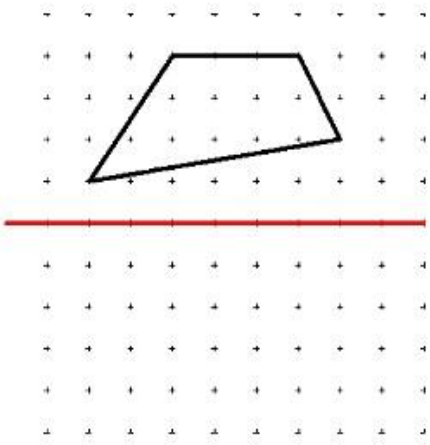
Exercice 1 :

Trace le symétrique de la figure par rapport à l'axe rouge.



Exercice 2 :

Trace le symétrique de la figure par rapport à l'axe rouge.

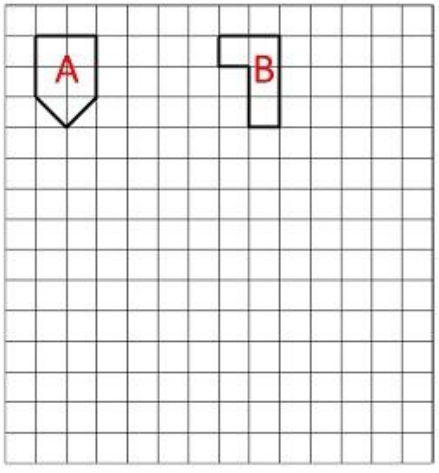


Exercice 3 :

Construis une figure C de même périmètre que la figure A mais qui n'a pas la même forme que la figure A

Construis une figure D de même aire que la figure B mais qui n'a pas la même forme que la figure B.

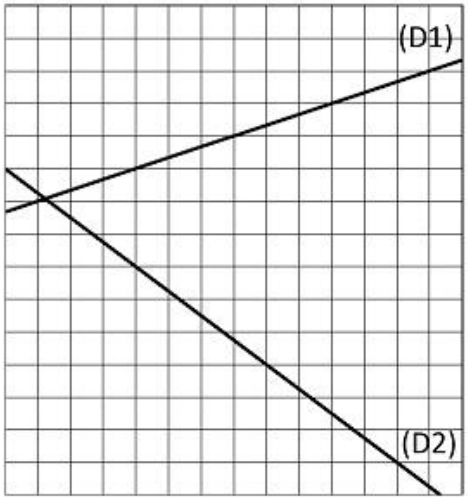
Construis une figure E qui a même périmètre que la figure A et même aire que la figure B.



Exercice 4 :

Trace une droite parallèle à la droite (D1).

Trace une droite perpendiculaire à la droite (D2).



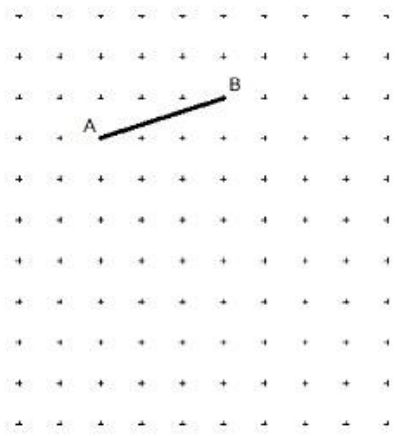
Exercice 5 :

Le segment [AB] est tracé.

Place les points C et D pour que ABCD soit un carré.

Trace le carré ABCD.

Trace l'arc de cercle de centre A d'extrémités B et D.



Exercice 6 : Les flèches permettent à l'éléphant de se déplacer.

→ Une case vers la droite de la feuille

← Une case vers la gauche de la feuille

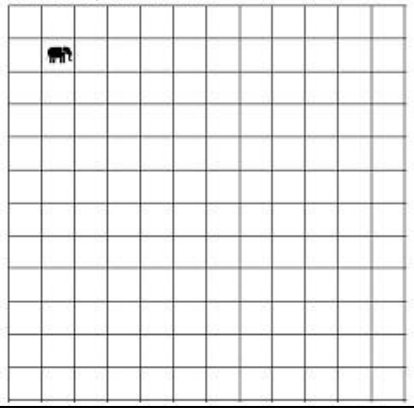
↑ Une case vers le haut de la feuille

↓ Une case vers le bas de la feuille

Le parcours de l'éléphant est le suivant : ↓ → ↓↓ → ↑

Place une croix sur la case où l'éléphant arrive après avoir fait une fois le parcours.

Place un cercle sur la case où l'éléphant arrive après avoir fait 3 fois le parcours de suite.



ANNEXE 2

CONSIGNES DE PASSATION DU TEST

CONSIGNES de PASSATION

Protocole de passation :
20-30 minutes.
Individuel.
Uniquement avec un crayon de papier, une gomme, une règle et un compas.
Les copies sont nominatives mais seront anonymées lors de la correction.
Les tests sont envoyés aux écoles en septembre 2022 et avril 2023.

Rôle de l'enseignant :
Aucune préparation ni aucune correction n'est souhaitée.
Elle/il assure la bonne passation du test.
Elle/il renvoie les copies à :

Arnaud Simard
INSPE de L'Université de Franche-Comté
57 avenue de Montjoux
25042 Besançon Cedex

Une enveloppe libellée est associée à l'envoi des tests.

Protocole du projet d'évaluation :
Protocole classique test / re-test.
Plusieurs classes de CM2 sont contactées et proposées aux tests. Les écoles doivent être le plus semblables possible.

Octobre 2022 : les élèves des différentes classes passent le test.
-> L'enseignant renvoie le paquet de copies à Arnaud Simard

Juin 2023 : les élèves passent à nouveau le même test.
-> L'enseignant renvoie le paquet de copies à Arnaud Simard

Objectif de l'expérimentation :
Il ne s'agit pas de comparer les écoles entre elles, ni même les élèves entre eux, mais de comparer chaque élève avec lui-même à 8 mois d'intervalle. Il s'agit d'essayer de « mesurer » les progrès de chaque élève au cours de l'année scolaire 2022/2023 et de comparer ces progrès à trois classes expérimentales.

QUELLES CONDITIONS POUR UNE CONCEPTUALISATION DES FRACTIONS DANS LE MANUEL FRANÇAIS « LA MÉTHODE DE SINGAPOUR » EN CE1-CE2 ?

Laurence LEDAN
Doctorante, PARIS CITE
LDAR
laurence.ledan@univ-tlse2.fr

Résumé

Ce travail s'inscrit, au moment du colloque, dans un contexte de projets institutionnels qui pouvaient modifier significativement l'enseignement des fractions en France. Il était envisagé d'enseigner les fractions plus précocement, dès le CP, alors qu'actuellement elles sont enseignées au CM1. L'objectif est d'analyser les manuels intitulés *La méthode de Singapour* en CE1 et CE2 (édités en 2020 et 2021) car ils présentent un enseignement des fractions (inférieures à un). La théorie des champs conceptuels a été mobilisée pour étudier des possibles en termes de situations, de signifiants (écritures chiffrées, verbalisations, représentations imagées) et d'invariants opératoires. Les choix effectués par un manuel en termes de situations, de signifiants peuvent engager trois théorèmes-en-acte qui réduiraient le sens de fraction et pourraient avoir une grande opérationnalité. Il s'agit d'observer les conditions permettant de dépasser ou renforcer l'usage strict de ces trois théorèmes. Deux analyses sont exposées, l'une portant sur la ressource globale associée au manuel et l'autre sur les corpus d'exercices. Ces dernières montrent une grande opérationnalité des trois théorèmes-en-acte repérés. L'étude qualitative de la minorité d'exercices ne pouvant pas être résolus à l'aide des trois théorèmes-en-acte anticipés nous permet d'envisager des conditions propices à une conceptualisation plus complète des fractions.

Fin 2023, de nombreuses communications institutionnelles dont celle du conseil scientifique de l'éducation nationale (CSEN) ont mis sur le devant de la scène « la méthode de Singapour » précisant qu'elle serait adoptée à la rentrée 2024. En effet, cette « méthode » a été évoquée notamment pour pallier l'« inquiétante mécompréhension des nombres et surtout des fractions à l'entrée en sixième » (Dehaene, Potier-Watkins et Cauté, 2023, p. 2). En France, un manuel existe sous le nom de « La méthode de Singapour » (publié à La librairie des Écoles) qui serait une traduction adaptée de l'un des manuels utilisé à Singapour (Chambris, 2017) et qui propose un enseignement des fractions dès le CE1.

En avril 2024, un projet de programmes de cycle 2 en mathématiques est paru, intégrant la notion de fraction dès le CP[1]. Sur les 3 niveaux de classe (CP, CE1, CE2) sont évoquées uniquement les fractions inférieures à un, dans un contexte de partage d'un tout en parts égales où les représentations surfaciques sont très prégnantes. Pour ce texte, nous retenons de ces projets de programme, une introduction des fractions comme résultat d'un partage[2]. Ce partage est opéré sur un objet, qui est, en troisième année (CE2) une modélisation d'une grandeur. Cette approche semble se différencier de celle choisie dans les programmes précédents qui précisaient que « les fractions […] apparaissent comme de nouveaux

[1] Le 31 octobre 2024, de nouveaux programmes sont parus dans une version où les fractions sont enseignées à partir du CE1.

[2] En annexe 1, le lecteur pourra retrouver l'analyse des projets de programme d'avril 2024 présentée lors de la communication.

nombres introduits pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée » (MEN, 2020). De plus, cette dernière approche se faisait plus tardivement, au début du cycle 3, et semblait plutôt prendre racine dans un monde des grandeurs en englobant d'emblée des fractions supérieures à un.

Ainsi, nous nous demandons quelle approche est proposée dans le manuel « La méthode de Singapour » en CE1-CE2 et souhaitons l'analyser afin d'envisager ce qu'un élève pourrait être amené à concevoir sur les fractions. Nous mobilisons la théorie des champs conceptuels pour définir le concept de fraction. Cette définition nous permet d'identifier des choix possibles que les auteurs d'un manuel peuvent faire, en termes de classes de problèmes, de représentations imagées, de sens évoqués. De tels choix nous conduisent à définir la notion de théorème-en-acte et à en envisager trois, qui pourraient appauvrir le sens de fraction que se construirait un élève. Cela nous conduit à étudier la place des représentations imagées ainsi que celle de ces théorèmes-en-acte, mais aussi à observer la diversité des tâches proposées afin de comprendre le sens véhiculé dans le manuel « La méthode de Singapour » en CE1-CE2. Suite à ces résultats, nous envisageons quelques pistes qu'un enseignant pourrait explorer s'il s'appuyait sur ce manuel pour enseigner les fractions et émettons quelques points de vigilance quant à l'utilisation stricte de ce manuel.

I - LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Vergnaud définit « un concept » comme

> *« un triplet de trois ensembles : C = (S, I, f)*
> *S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)*
> *I: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)*
> *f: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). » (Vergnaud, 1990, p. 145).*

Il définit les fractions comme un concept au sein du champ conceptuel des structures multiplicatives (Vergnaud, 1983, 1988). Les situations peuvent être classées selon « les relations de base des données connues et inconnues, lesquelles correspondent à autant de questions possibles » (Vergnaud, 1990, p. 151), ce qui nous permet d'identifier des classes de problèmes. Les trois ensembles définissant un concept sont dépendants. C'est pourquoi nous avons fait le choix de présenter des éléments relatifs à chaque ensemble en commençant par présenter quelques signifiants (f) puis des classes de problèmes (S), des sens possibles du concept de fraction et quelques invariants opératoires.

1 Des signifiants qui peuvent représenter le concept de fraction

Nous distinguons trois grands types de signifiants : sous forme langagière, sous forme d'écriture chiffrée et sous forme de représentation imagée, que nous présentons et exemplifions ci-après.

Parmi les signifiants sous forme langagière, nous retrouvons des expressions comme « a sur b[3] » ou « a b-ièmes » pouvant être contextualisées « a parts sur un total de b parts ».

[3] Dans tout l'article, a est un entier naturel, b est un entier naturel non nul.

Parmi les signifiants sous forme d'écritures chiffrées, nous retrouvons des écritures verticales $\frac{a}{b}$ ou horizontales a/b ainsi que des écritures d'une ou plusieurs sommes de fractions, d'une ou plusieurs sommes d'entiers et de fractions.

Toromanoff (2019) explicite la difficulté de dissocier le concept de nombre de son écriture chiffrée. Notons que cette difficulté est renforcée avec le concept de « fraction » car une même fraction peut s'écrire à l'aide de plusieurs écritures chiffrées équivalentes, mettant potentiellement en jeu des chiffres différents (Par exemple, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$).

Enfin, nous proposons de classer les signifiants sous formes de représentations imagées selon le nombre de dimensions géométriques, puis d'exemplifier avec $\frac{2}{5}$, comme étant la fraction d'éléments bleus dans chaque ensemble (tableau 1[4]).

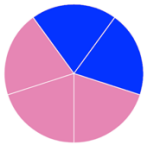
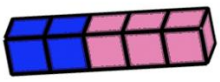
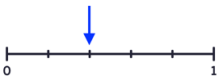
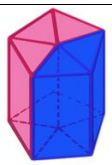
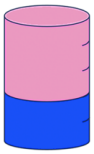
0D	1D	2D	3D
			
 (non sécables et dispersées)	 Ou  (chaque segment peut être étendu en une portion de droite numérique ou peut être proposé sur [*n* ;*n+1*] avec $n \in \mathbb{N}$.)		 Ou 

Tableau 1. Signifiants pouvant représenter une fraction : représentations imagées en 0D, 1D, 2D, 3D

Il semble nécessaire de préciser la distinction faite entre les termes « objets » et « éléments ». Parmi les objets, il s'agit de considérer à la fois les pommes (sécables), les billes (insécables), les figures géométriques, les solides, etc. En revanche, « un élément » est la plus petite sous-unité perceptible dans une représentation imagée par exemple. Présentons cette classification de signifiants :

• les représentations imagées en 0D, qui représentent des quantités discrètes, sont proposées sous forme d'objets[5] non sécables et dispersés (billes, jetons, etc.) dont une sous-partie de cette collection est identifiée (colorée, hachurée, etc.) ;

• les représentations en 1D sont sous forme de segments ou de portions de droites graduées, dont une partie est identifiée (soit en repérant une origine et un point à une distance donnée de cette origine, soit en identifiant une partie du segment) ;

[4] Dans cet article, les illustrations proposées évoquent des fractions inférieures à un comme le propose le manuel analysé, comme les projets de programmes et les programmes parus en 2024 le préconisent.

[5] Dans ce cas, les mots « objets » et « éléments » sont synonymes.

• les représentations en 2D sont sous forme de surfaces géométriques (disque, rectangle, etc.) déjà prédécoupées et dont une partie est identifiée. Le prédécoupage peut être en parts exactement superposables (comme dans le tableau 1), en parts non superposables de même aire, en parts d'aires différentes ;

• les représentations planes représentent des objets 3D (un solide ou un matériel tangible modélisant un volume ou une contenance) déjà prédécoupés et dont une partie est identifiée.

2 Des classes de problèmes permettant de convoquer le concept de fraction

Pour définir des classes de problèmes, intéressons-nous au champ multiplicatif défini par Vergnaud (1983). Reprenons les quatre classes de problèmes issues de la structure des « isomorphismes de mesure » (tableau 2, première colonne). Seules les classes de problèmes de partage et de proportion peuvent permettre d'introduire les fractions. Les deux autres classes de problèmes permettent de mobiliser le concept de fraction, comme les problèmes de quotition et les problèmes multiplicatifs, également issus de la structure des isomorphismes de mesure. Exemplifions ces quatre classes de problèmes dans le tableau 2.

Classes de problèmes	Exemple
Partage (recherche de la valeur de la part)	Partager 3 cakes identiques entre 4 personnes afin que chaque personne ait la même quantité. Quelle est la quantité de cake que chacun aura ?
Quotition (recherche du nombre de parts)	Combien de rubans, de mesure de longueur $\frac{1}{2}$, peut-il découper dans un ruban de mesure de longueur 2 ?
Multiplication	Lorsqu'on accole bout-à-bout 10 rubans de mesure de longueur $\frac{1}{2}$, quelle est la longueur totale ?
Proportion (règle de trois, cas général)	Il faut 1 volume de sirop pour un total de 3 volumes d'eau, combien faut-il de volumes de sirop pour 1 volume d'eau ?

Tableau 2. Exemples pour les classes de problèmes issus de la structure des isomorphismes de mesure

Enfin, nous avons déterminé plusieurs autres classes de problèmes (la recherche d'exhaustivité est toujours en cours). Des classes de problèmes peuvent travailler la notion d'ordre comme comparer deux fractions ou ordonner des fractions alors que d'autres reposent sur du calcul comme ajouter ou soustraire deux fractions. Des classes de problèmes peuvent proposer le passage d'un signifiant à un autre. Certaines demandent de produire un nouveau signifiant de fraction à partir d'un signifiant donné, tandis que d'autres consistent à associer entre eux les signifiants d'une même fraction. Exemplifions cela dans le tableau 3 ci-après.

Classes de problèmes	Exemple
À partir d'un signifiant de fraction donné, en produire de type différent (langagier, représentation imagée, écrit chiffré).	Quelle fraction de bleu est représentée dans l'une des images du tableau 1 ?

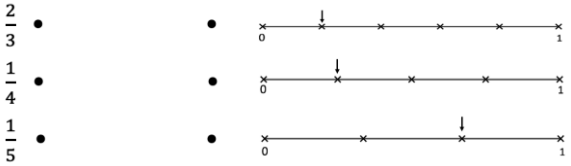
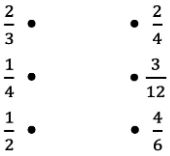
À partir d'un signifiant de fraction donné, en produire de même type.	Produire une autre représentation imagée représentant la même fraction de bleu que celle-ci-après.
Associer des signifiants de types différents (langagier, représentation imagée, écrit chiffré).	Associer écriture chiffrée d'une fraction à sa position sur la droite graduée. 
Associer des signifiants de même type	Associer les écritures chiffrées équivalentes d'une même fraction. 

Tableau 3. Exemples de classes de problèmes proposant de passer d'un signifiant de fraction à un autre

Pour cette dernière classe de problèmes « associer des signifiants de même type », notons que si une représentation imagée est en jeu et que le dénominateur attendu est congruent au nombre total de parts égales, la difficulté est moindre.

3 Deux sens de fraction

« Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants » (Vergnaud, 1990, p. 158). Ainsi, le sens que se fait un sujet de ce qu'est une fraction peut notamment découler des situations qu'il a associées au concept. Selon les situations (partage ou proportion) auxquelles un sujet a été confronté, il peut avoir développé deux sens de fraction.

Nous adoptons donc une classification large[6] des sens possibles que peut prendre une fraction. Desjardins et Hétu (1974) distinguent la fraction-quantité (que nous nommons sens partage) de la fraction-relation (que nous nommons sens proportion).

Ces deux sens se distinguent notamment par l'univers qui est perçu comme absolu ou relatif (Adjiage et Pluvinage, 2000). En effet, dans le sens partage, l'univers est absolu, un demi d'une petite pizza n'est pas le même qu'un demi d'une grosse pizza. Alors que, dans le sens proportion, l'univers est relatif, c'est la relation entre la partie et le tout qui est considérée, donc un demi représente toujours une moitié, peu importe la taille du tout. Dans le sens partage, une fraction $\frac{a}{b}$ est obtenue après un partage de chaque unité « en b parts égales ce qui donne des *b*-ièmes ; il s'agit ensuite de prendre a *b*-ièmes ». Le sens « proportion » relie deux quantités dans un raisonnement proportionnel (Vergnaud, 1983, p. 162).

[6] De nombreuses classifications plus fines (bien que perméables) existent comme par exemple celle de Kieran (1976) ou de Berh et al. (1983) et bien d'autres.

4 Conceptualisation

La conceptualisation consiste, selon Vergnaud, à « l'identification des objets du monde [parfois implicite], de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction » (Vergnaud, 2007, p. 4). L'accès à la conceptualisation peut donc être servi ou desservi selon le type de signifiants convoqué et les situations proposées.

Par exemple, des signifiants langagiers peuvent donner des indices sur ce que le sujet conceptualise. En effet, des verbalisations du type « a morceaux sur un total de b morceaux » évoqueraient plutôt une prise d'appui sur le sens proportion alors qu'une verbalisation du type « *a b*-ièmes parce que j'ai partagé l'unité en *b* parts égales et j'ai pris *a* parts » évoquerait davantage le sens partage. Coulange et Train (2018) avaient d'ailleurs qualifié de tels éléments langagiers comme pouvant provoquer des « effets de brouillage » lorsqu'il y a discordance entre la situation et la verbalisation.

Les représentations imagées peuvent engager plusieurs conceptualisations possibles selon la situation dans laquelle nous les retrouvons et selon le sujet. Par exemple pour la classe de problème « à partir d'une représentation surfacique de fraction donnée, produire l'écriture chiffrée correspondante » rien ne nous garantit le sens qui serait convoqué chez l'élève. Il peut percevoir a éléments identiques sur un total de b éléments comme une relation d'une partie au tout (sens proportion) ou comme un partage en parts égales d'une unité. Enfin, le classement des représentations imagées semble incontestable du point du vue dimensionnel (tableau 1) mais peut être identifié de manière non univoque selon le sujet. En effet, un sujet peut percevoir un objet (un lot de points, une tarte, une bande) ou percevoir différents types de grandeurs, discrètes ou continues (longueur, aire, angle, volume, contenance, etc.). Une controverse existe et a été présentée lors de la communication, quant au fait de fonder le partage sur des objets ou des grandeurs. Il semble possible d'effectuer une première approche de la fraction dans le sens partage en prise d'appui sur des objets, mais il se pourrait que dans un deuxième temps, une prise d'appui sur des grandeurs puisse être porteuse d'une conceptualisation plus favorable au renouvellement des invariants opératoires (annexe 2). Précisément, chaque représentation imagée peut être perçue comme une grandeur discrète en fonction de la perception des éléments. Par exemple, en percevant le grand segment non pas comme découpé en sous-segments, mais comme un assemblage de segments mis bout à bout, ou en voyant une figure non comme découpée mais comme un assemblage de sous-surfaces, etc.

5 Les représentations imagées prédécoupées génératrices de trois théorèmes-en-acte

Pour Vergnaud, « les théorèmes-en-acte sont des propositions tenues pour vraies sur le réel » (Vergnaud, 2013, p. 139), alors que les « concepts-en-acte » permettent de prélever dans l'environnement les informations pertinentes. Selon les situations et les signifiants qui sont proposés à un sujet, il peut développer des théorèmes-en-acte qui pourraient réduire (ou étendre) la construction du sens que le sujet en développera.

Il est possible qu'un sujet perçoive la fraction à travers le concept-en-acte dont les effets correspondent à l'énoncé : la fraction est une relation entre deux quantités perçues de manière discrète dont l'une est incluse dans l'autre, sans envisager la relativité de l'univers.

Au sein de la classe de problèmes « à partir d'une représentation imagée de fraction donnée, produire l'écriture chiffrée associée », le concept-en-acte énoncé ci-avant engagerait potentiellement un théorème-en-acte qui pourrait s'énoncer de la manière suivante : « produire l'écriture chiffrée d'une

fraction, c'est écrire au-dessus du trait le nombre d'éléments identifiés et en-dessous le nombre total d'éléments ».

Ce théorème est faux dans le cas des fractions supérieures à un puisqu'il est nécessaire d'identifier l'unité en amont. Mack (1990) avait signalé une erreur courante, chez les élèves, lorsque deux disques sont donnés, tous deux partagés en quarts et que cinq quarts sont colorés, les élèves encodent $\frac{5}{8}$ car ils effectuent un double dénombrement (nombre de parts colorées, nombre total de parts)[7].

Dans le tableau 1, il est simple d'identifier les plus petits éléments semblables et d'effectuer ces double-dénombrements quelles que soient les représentations imagées proposées, quel que soit le choix dimensionnel proposé.

Une autre recherche confirme que les élèves français convoquent ce théorème-en-acte. Martinez-Ibanez (2018) a recensé une tâche extraite de l'évaluation TIMSS (M0704), où les élèves doivent produire un signifiant « écriture chiffrée de fraction » à partir d'une représentation 0D. Il précise qu'en France, les programmes actuellement en vigueur à l'école primaire ne prévoient pas de convoquer le concept de fraction appliqué aux quantités discrètes. Pourtant, le score des élèves français se situe, pour cette tâche, autour de la moyenne des autres pays.

À présent, identifions deux théorèmes-en-acte qui permettent de traiter des problèmes issus de la classe « comparer ou ordonner des fractions » lorsqu'une représentation imagée est donnée.

Le premier théorème-en-acte serait la « comparaison perceptive de grandeur » (Fénichel et Pfaff, 2005, p. 194), pour cela « la différence concernant la grandeur des objets en jeu doit être visible » (ibid.). Le second théorème-en-acte s'applique à certaines représentations imagées présentées dans des configurations particulières, c'est-à-dire « mises à la même origine » (Pfaff, Hannon, Newiadomy, Saliou, Visgueiro, 2019). En effet, dans ce cas, nous pouvons déterminer celle qui a la plus grande grandeur de manière perceptive également grâce à un repère, une origine.

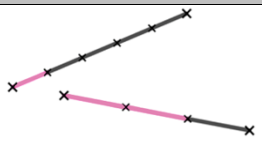
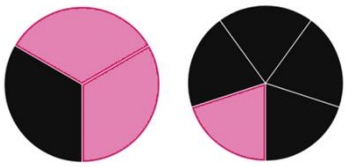
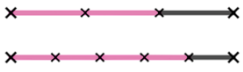
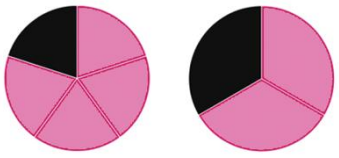
Dimension	1D	2D
Comparaison perceptive (écart important) de $\frac{1}{5}$ à $\frac{2}{3}$		
Comparaison perceptive selon certaines dispositions spatiales de $\frac{4}{5}$ à $\frac{2}{3}$.	 (Mise à la même origine, alignement vertical des origines)	 (Origine verticale, comme pour les heures, ici)

Tableau 4. Théorèmes-en-acte de comparaison perceptive de grandeurs

[7] Remarquons que si l'unité est un couple de disques, alors la réponse est correcte.

Ces théorèmes reposent sur des superpositions effectives ou mentales. En effet, les élèves auront à imaginer la superposition des parties identifiées (portion de droite, surface).

La portée de ces théorèmes-en-acte est restreinte. Si les unités sont représentées par deux formes isométriques, le premier théorème de comparaison perceptive, lorsque la différence entre les grandeurs est visible peut s'appliquer à des représentations variées (1D de type segment ou ligne brisée ou courbe, 2D type rectangle ou autres formes, 3D solide ou liquide représentés sous formes variées). Cependant, le second théorème-en-acte de « mise à la même origine » a une portée limitée, il s'applique à des représentations imagées de type portions de droite, surfaces, solides, contenances, partagés, dont seule la longueur varie (pas les autres dimensions) et aux représentations circulaires.

II - PROBLÉMATISATION ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

L'objectif principal de l'analyse du manuel « La méthode de Singapour » (Neagoy, Caira, Kritter, Szikora, Touchard, 2020 ; Neagoy et al. (2021)) en CE1-CE2 est de déterminer les conditions de conceptualisation proposées pour l'enseignement des fractions.

Nous avons déterminé trois théorèmes-en-acte dont l'opérationnalité[8] nous semble grande (un de double-dénombrement et deux autres de comparaison perceptive des grandeurs). Nous émettons l'hypothèse qu'en CE1-CE2, les conditions de conceptualisation proposées par le manuel (choix de situations, nature et présence de signifiants) engagent une grande opérationnalité de ces théorèmes-en-acte. La prégnance de ces derniers pourrait faire obstacle à d'autres théorèmes-en-acte plus efficients utiles à la conceptualisation d'une fraction. Ensuite, nous tenterons également d'identifier des potentialités offertes (choix de situations, nature et présence de signifiants) et des pistes permettant de ne pas se restreindre à la mobilisation stricte des trois théorèmes-en-acte évoqués.

Présentons les matériaux étudiés et la méthodologie de recherche. Nous nous intéressons à la collection « La méthode de Singapour », publiée par « La librairie des écoles ». Cette collection est découpée par niveau, puis en unités d'enseignement. Les sommaires nous ont permis de délimiter le périmètre de travail. C'est pourquoi le manuel de CP n'a pas été analysé, car aucune unité ne semblait traiter les fractions. En annexe 4, le lecteur trouvera les éléments saillants retenus des sommaires ainsi que le découpage par séances des unités consacrées aux fractions.

Sauf pour les séances bilans (une sur chaque niveau de classe), chaque séance est découpée en trois phases. La première phase peut s'appuyer sur l'usage d'objets tangibles ou l'observation d'une illustration et permet d'expliciter le savoir aux élèves. Souvent, la seconde phase consiste à proposer les exercices du fichier, et durant la dernière phase, l'enseignant choisit des exercices du fichier photocopiable.

Deux analyses sont proposées. La première, à l'échelle globale, prend en compte l'ensemble des ressources de « La méthode de Singapour » en CE1 et CE2 (guides pédagogiques, fichiers de l'élève, fichiers photocopiables, ressources numériques). Elle s'appuie sur des citations issues des guides pédagogiques (GP) et analyse le nombre d'occurrences de mots-clés (signifiants langagiers) qui permettent notamment d'analyser si les grandeurs sont explicitées ou non et d'envisager quel sens de

[8] L'opérationnalité recouvre à la fois le fait que le théorème-en-acte soit convocable sur différentes classes de problèmes en amenant à une réponse correcte mais aussi la fréquence d'usage de ce dernier.

fraction est véhiculé. Cette première analyse a pour objectif de définir des éléments de balisage, choisis par les auteurs du manuel, fondant le sens de fraction.

La seconde analyse se centre sur les corpus d'exercices (issus des fichiers élèves et photocopiables) et a pour objectif de mesurer l'opérationnalité des théorèmes-en-acte (double-dénombrement et comparaison perceptive des grandeurs). Pour ce faire, nous relevons les classes de problèmes proposées dans l'ensemble du corpus d'exercices. Un exercice peut proposer plusieurs classes de problèmes ou peut proposer de répéter ou non une classe de problèmes sur plusieurs cas, ce qui nous a amené à effectuer ce travail par item (tâche ou sous-tâche demandée à l'élève) au sein des exercices. Ensuite, pour chaque exercice, nous déterminons la présence ou l'absence de représentation imagée. Puis sur l'ensemble des exercices, nous relevons la nature et le nombre de ces représentations (0D, 1D, 2D, 3D). Pour les représentations 1D, 2D, 3D, nous observons si les partages sont déjà prédécoupés, s'ils sont en parts exactement isométriques ou de même grandeur ou s'ils sont inégaux. Enfin, nous effectuons une analyse qualitative afin de percevoir l'opérationnalité des théorèmes-en-acte cités et afin de repérer les exercices n'amenant pas à une réponse correcte à l'aide de ces derniers.

III - RÉSULTATS

1 Éléments de balisage du sens des fractions dans La méthode de Singapour CE1 et CE2

En CE1, nous pouvons lire « Aidez-les à voir aussi dans le symbole « $\frac{1}{3}$ » le résultat obtenu après une division, un partage ou un découpage. Ainsi $\frac{1}{3}$ désigne la part de chacun. » (GP CE1, p. 244). Ainsi en CE1, les fractions sont introduites comme le résultat obtenu après un partage d'un objet réel ou représenté.

En CE2, nous trouvons des éléments de discours, à la fois proposés à l'enseignant (via le guide pédagogique) et pour les élèves (à travers les consignes) qui reposent sur les objets et d'autres sur la longueur ou la distance. Un travail en prise d'appui sur la longueur est proposé, par exemple, nous pouvons lire « Je divise d'abord le segment de 0 à 1, ou segment-unité, en quatre segments égaux : la longueur de chacun est $\frac{1}{4}$ » (GP, CE2, p. 231). Sur 9 séances, 6 séances travaillent uniquement sur objets, favorisant les bandes, ce qui permet de parfois évoquer la notion de longueur, 3 séances reposent sur les droites graduées et explicitent que la grandeur modélisée est la longueur. Dans le tableau 5 ci-dessous, est présenté le nombre d'occurrences de termes perçus comme des indicateurs du sens de fraction. En annexe 3, le lecteur retrouvera le nombre d'occurrences des types de supports de fraction (objets, grandeurs).

	CE1	CE2
Partage (partager et conjugaison de ce verbe)	27	11
Unité-s (hors sens unité d'enseignement) + segment-(unité-s ; segment-unité)	10 (10 ; 0)	34 (27 ; 7)
Tout (un tout, 1 tout ; le tout ; du tout)	61 (10 ; 10 ; 25 ; 16)	51 (6 ;7 ; 23 ; 15)
Longueur, distance ; aire	3 ; 0 ; 0	17 ; 7 ; 0
Moitié-s	13	1

Tableau 5. Occurrences de termes relevés en CE1 et CE2 (guides pédagogiques, fichiers élèves, fichiers photocopiables) dans l'unité « fractions ».

Au CE1 comme au CE2, les expressions « un tout » « 1 tout » « le tout » « du tout » sont également très présentes pour qualifier l'objet. En CE2, deux grandeurs sont citées (la longueur et la distance). Certains termes semblent davantage correspondre au sens proportion, comme « moitié », qui semble opérer sur un univers relatif, mais aussi l'idée de « tout ». D'autres semblent davantage référer au sens partage comme « partage », « unité-s », « segment-unité ».

2 Résultats de l'analyse du corpus d'exercices dans les unités « fractions » en CE1-CE2

L'analyse du corpus d'exercices (en CE1 et CE2) permet de définir l'opérationnalité des théorèmes-en-acte et la part d'exercices ne pouvant pas être résolus à l'aide des trois théorème-en-acte identifiés.

La méthodologie de dénombrement des items et des représentations imagées est détaillée et exemplifiée en annexes 5 et 6.

2.1 Classes de problèmes proposées

En CE1, nous avons dénombré 158 items au sein de 44 exercices. En CE2, 247 items sont proposés au sein de 54 exercices. La classe de problème « produire une écriture chiffrée de fraction à partir d'une représentation imagée » représente respectivement, environ 47% et 54% des items, en CE1 et CE2.

Cette classe de problème est déclinée de deux manières « compléter une écriture chiffrée de fraction (numérateur ou dénominateur imposé) à partir d'une représentation imagée » et en CE2 « écrire la fraction qui correspond à l'abscisse sur une droite graduée ». Ces déclinaisons représentent respectivement environ 16% et 5% des items en plus.

La classe de problème inverse, qui consisterait à « réaliser une représentation imagée à partir d'une écriture chiffrée de fraction », est déclinée comme simple coloriage en CE1 sur 13% des items et sur 4% des items en CE2.

La classe de problème « déterminer si une représentation imagée correspond à une écriture chiffrée de fraction » représente environ 11% des items en CE1 et n'est pas proposée en CE2. Les classes de problèmes « comparer ou ordonner deux fractions » représentent environ 9% des items en CE1 et 11% en CE2. En CE1, la part faite à l'item « compléter la phrase « ☐ parties sur ☐ parties égales » représente environ 5% des items.

D'autres classes de problèmes sont proposées (15% restant en CE1, 10% restant en CE2), mais elles correspondent à des classes de problèmes peu représentées (5 items ou moins, annexe 5). Pourtant, certaines retiennent notre attention comme « associer une représentation possible du tout lorsqu'on connait une représentation d'une partie, elle-même associée à une écriture chiffrée de fraction » en CE1 (annexe 5, tableau 13C) et « établir le rapport entre le numérateur et le dénominateur d'une fraction unitaire » en CE2 (annexe 6, tableau 16, séance 114-A).

2.2 Présence et nature des représentations imagées dans les exercices

Nous avons pris en compte toutes les représentations imagées proposées dans les exercices (sauf celles illustrant un protocole chronologique de pliage). Sur l'ensemble du corpus d'exercices, nous avons repéré des représentations 1D, 2D et 3D. Pour les représentations 1D, la portion de droite graduée commence systématiquement légèrement avant 0 et termine légèrement après 1, ces graduations étant toujours marquées et codées.

	CE1	CE2
Nombre d'exercices présentant au moins une représentation imagée	37	45
Nombre d'exercices demandant à l'élève d'utiliser un matériel tangible	0	2
Nombre d'exercices sans représentation imagée ou avec représentation imagée vierge	7	7
Nombre total d'exercices	44	54

Tableau 6. Présence ou absence de représentation imagée par exercice

Pour chaque niveau de classe, la majorité des exercices est accompagnée de représentations imagées. Analysons les types de représentations proposés sur l'ensemble du corpus et observons si elles peuvent permettre d'engager l'un des trois théorèmes-en-acte cité (tableau 7[9]) notamment parce qu'elles seraient prédécoupées en parts isométriques.

		CE1	CE2
1D Portion de droite graduée…	**… prédécoupée en intervalles de même longueur**	0	25
	… partiellement prédécoupée à subdiviser	0	2
	… sur support carreaux	0	1
2D Représentation surfacique…	**… prédécoupée en surfaces isométriques**	107	85
	… prédécoupée en surfaces d'aires différentes	7	2
3D Solide-Contenance		1	3
Multi-représentation	**Portion de droite prédécoupée et représentation surfacique (prédécoupées en sous-parties isométriques)**	0	12
	Portion de droite prédécoupée et solide cube-emboités	0	4
Total		115	134

Tableau 7. Nombre de représentations imagées, par type, sur les exercices des fichiers (élèves, photocopiable)

En CE1, 37 des 44 exercices sont accompagnés d'au moins une représentation imagée. Parmi ces exercices, tous sauf un (celui accompagné d'un solide représenté) sont accompagnés de représentations surfaciques. Une majorité de ces représentations surfaciques (107 sur 114) sont partagées en sous-surfaces isométriques. En CE2, 47 des 54 exercices sont accompagnés d'au moins une représentation imagée. Les représentations imagées proposées sont plus diversifiées en CE2 et certaines sont couplées. Nous avons dénombré 87 représentations surfaciques, 28 représentations sous forme de portion de droite graduée entre 0 et 1, 3 représentations planes représentant des solides et 16 représentations couplant deux types de représentations.

2.3 Analyse qualitative pour compléter l'analyse quantitative

Deux analyses qualitatives complémentaires semblent nécessaires afin d'interpréter les données des tableaux 6 et 7. La première concerne les exercices dénombrés sur fond blanc (tableau 6) et ceux dont les représentations imagées sont prédécoupées en parts isométriques (tableau 7). L'objectif est d'observer si les représentations imagées représentent l'ensemble des fractions d'un même exercice ou seulement

[9] Le tableau ne recense que les représentations imagées proposées dans les manuels La méthode de Singapour CE1-CE2. Aucune représentation 0D n'a été recensée.

une partie, et si elles amènent à une réponse correcte en ayant recours aux trois théorèmes-en-acte. Il en est ressorti que les exercices qui présentent des représentations imagées prédécoupées en parts isométriques amènent, pour chaque item de ces exercices, à produire une réponse correcte en ayant recours aux trois théorèmes-en-acte cités. En effet, la nature de ce prédécoupage (parts isométriques) génère une congruence entre le nombre d'éléments représentés et le dénominateur attendu.

Une seconde analyse qualitative nécessite d'examiner les exercices dénombrés sur fond jaune[10] (tableau 6) et ceux présentant des représentations imagées dénombrées sur fond jaune (tableau 7). L'objectif est de percevoir si les trois théorèmes-en-acte amènent à produire une réponse correcte ou non. Si ce n'est pas le cas, nous pourrons peut-être en déduire des conditions permettant de dépasser le recours strict aux trois théorèmes-en-acte cités. Commençons par présenter des exemples d'exercices qui convoquent les représentations imagées dénombrées sur fond jaune dans le tableau 7 (tableau 8).

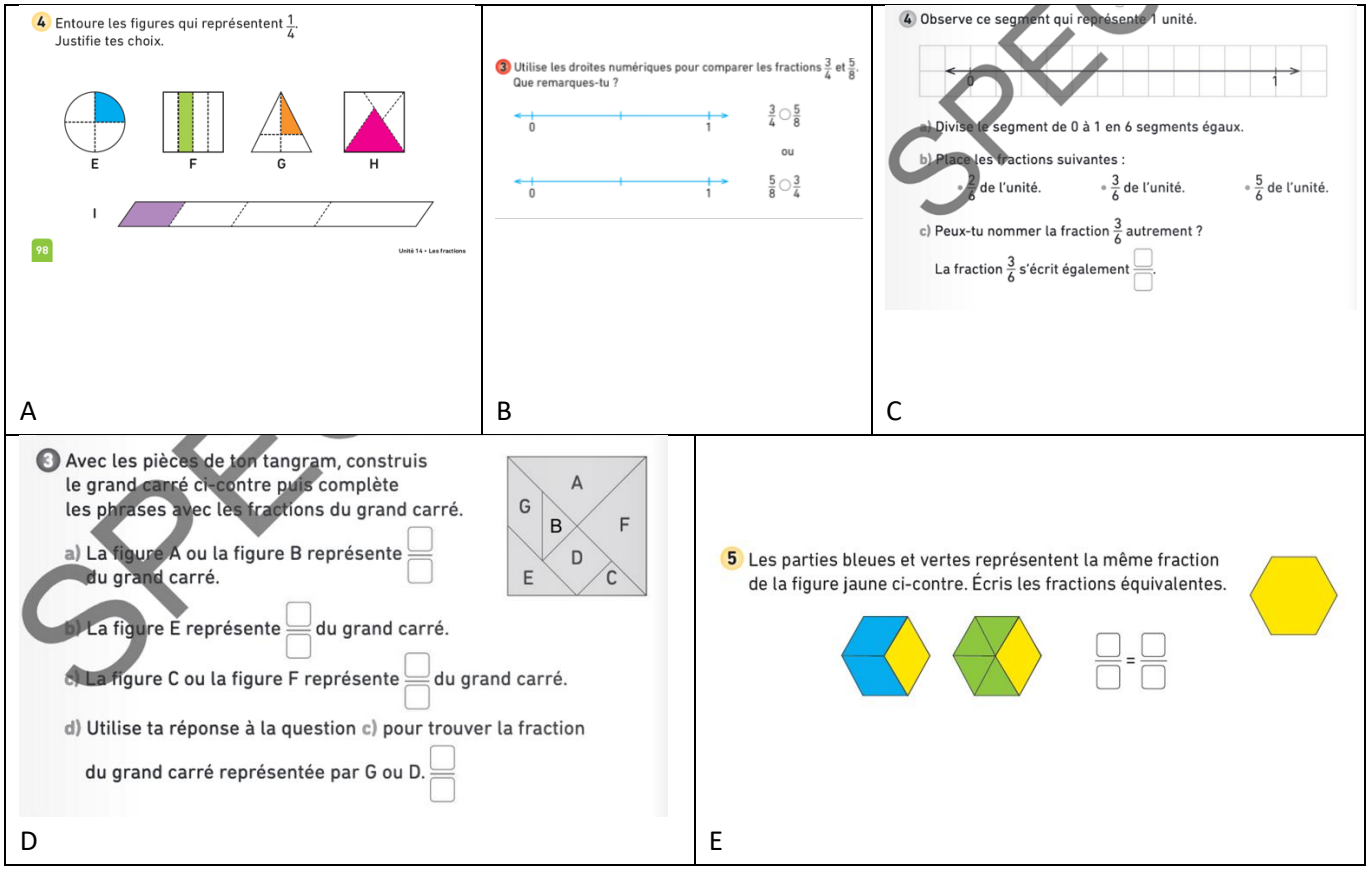


Tableau 8: Exemples d'exercices dénombrés dans le tableau 7 afin d'en faire une étude qualitative

En CE1, 7 représentations surfaciques prédécoupées en parts d'aires différentes sont proposées (quelques exemples dans le tableau 8A), cependant ces dernières ne sont pas amenées à être perçues comme des fractions possibles mais comme ne représentant pas la fraction donnée via une écriture chiffrée ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$). En CE2, un exercice propose 2 représentations de portions de droite nécessitant d'être subdivisées par l'élève car les prédécoupages ne coïncident pas avec la tâche demandée (tableau 8B). Une

[10] L'intérêt pour les cases sur fond jaune des tableaux 6 et 7, repose sur une potentielle absence de prédécoupage des représentations imagées (ou un prédécoupage partiel qui ne serait pas en parts isométriques) ou parce que le dénominateur attendu pourrait ne pas être congruent au nombre de parts représentées.

seule représentation de portion de droite est proposée sur des carreaux, mais la première question demande de la « diviser en 6 segments égaux » (tableau 8C), ce qui accompagne la tâche d'une représentation partagée en parts isométriques (ici segments de même longueur). Enfin, deux exercices de CE2 (tableau 8D et 8E) proposent de subdiviser des parts de représentations surfaciques puisqu'elles sont prédécoupées en parts d'aires différentes.

À présent, présentons les exercices dénombrés sur fond jaune (tableau 6, annexe 6). En CE1, deux de ces exercices (séance 116) s'appuient sur les représentations surfaciques présentes sur la même page du fichier au sein de l'exercice précédent, ce qui permet de considérer qu'ils comportent une représentation imagée prédécoupée en parts isométriques. Un autre de ces exercices (séance 114) propose d'associer une écriture chiffrée de fraction à une désignation orale. Un autre (séance 113) propose de produire une représentation surfacique de $\frac{1}{8}$ en pliant un papier carré.

Les trois derniers exercices (séances 115, 117, 118) amènent à se représenter mentalement (ou à produire une représentation sans qu'elle soit demandée) afin d'associer des écritures chiffrées de fractions dont la somme est égale à 1 et d'ajouter ou de soustraire des fractions de même dénominateur.

En CE2, trois exercices du fichier de l'élève (séance 108, 112 et 113) offrent des représentations surfaciques vierges, qui amènent l'élève à effectuer par lui-même un partage, puis à le subdiviser sur une autre représentation. Ces exercices demandent respectivement de produire des écritures de fractions équivalentes, d'ajouter ou soustraire des fractions dont l'un des dénominateurs est multiple de l'autre.

Trois exercices proposent des items ouverts ne permettant pas de savoir quels schèmes seront mis en œuvre par les élèves (séances 112,113). Ces items sont du type « compléter les écritures suivantes : $-+-+-=1$ ». Ce degré de liberté est évoqué dans le guide pédagogique précisant que les élèves peuvent choisir des fractions de même dénominateur ou non, ce qui n'engage pas la même complexité. L'exercice, « explorons », proposé dans la séance 114, amène à représenter un quart sur un disque et représenter plus qu'un quart et moins qu'un quart, sans chercher à quantifier cette nouvelle représentation imagée. La séance 114 se termine par un exercice original dans la partie « mon journal ». Celui-ci amène les élèves à découvrir, à travers des écritures équivalentes de fractions unitaires, la relation entre le dénominateur et le numérateur (annexe 6, tableau 16, séance 114-A).

IV - DISCUSSION

Avant de discuter des résultats, signalons quelques limites de la méthodologie utilisée. Tout d'abord un premier tri a été effectué sur les sommaires à partir des titres des unités d'enseignement. Rien n'a été recherché dans les autres unités d'enseignement ni même dans le calcul mental. À cela s'ajoute une partie de l'analyse qui se limite à l'analyse du corpus d'exercices, ce qui n'est pas entièrement représentatif du contenu de la ressource. Comme l'autre partie de l'analyse traite l'ensemble des ressources concernant les unités d'enseignement relatives aux fractions, nous pouvons d'ores et déjà préciser que le savoir véhiculé est plus large que celui proposé dans les exercices. En effet, le dispositif didactique de Rey (2001) cité par Grapin et Mounier (2018) adopté par ce manuel est « explication application », ce qui signifie que c'est l'enseignant qui montre le savoir à retenir à l'élève. Précisons que cette partie du savoir n'est, la plupart du temps, pas nécessaire lors des tâches proposées à l'élève.

Les résultats issus de la partie précédente confirment notre hypothèse : l'usage des théorèmes-en-acte (double dénombrement, comparaison perceptive des grandeurs) permet de réussir une grande majorité d'exercices en CE1 et CE2. Les tableaux 6 et 7 ainsi que l'analyse qualitative nous conduisent à affirmer que ces théorèmes-en-acte amènent à réussir 40 des 44 exercices de CE1 et 43 des 54 exercices de CE2. Examinons maintenant les conditions proposées par ce manuel afin de potentiellement dépasser un recours strict à ces théorèmes-en-acte.

En CE1, 4 exercices, parmi les 44 proposés, ne peuvent pas être réussis. Ces 4 exercices sont présentés dans le tableau 15 de l'annexe 6 (exercices des séances 114, 115, 117 et 118) et figurent dans le fichier photocopiable. 3 d'entre eux proposent un travail basé uniquement sur les écritures chiffrées, ce qui permet à l'élève de faire appel à une représentation imagée s'il en ressent l'utilité ou d'utiliser d'autres schèmes. Un autre exercice propose une situation de partage et le dernier propose un signifiant langagier à une écriture chiffrée de fraction.

Pour ce niveau de classe, les occasions semblent peu nombreuses pour que l'élève se construise un sens de ce qu'est une fraction et développe une vigilance sur l'usage des représentations imagées. Roditi (2024) se demande si un élève pourra identifier la fraction représentant la partie grisée de la bande (figure 1). En effet, si on étalonne la bande avec la bande grisée, la partie grisée représente le quart de la bande, mais si les élèves associent une fraction à un partage égal, ils pourraient penser que la partie grisée correspond au quart de la bande.



Figure 1. Exemple d'une représentation imagée potentiellement non perçue comme une fraction (Roditi, 2024)

En CE2, 11[11] exercices sur un total de 54, ne permettent pas d'obtenir une réponse correcte en utilisant les théorèmes-en-acte mentionnés. L'un de ces exercices soulève même la question de la notion abordée (séance 114 intitulée « explorons »). Parmi les 10 exercices restants, certains permettent d'identifier des conditions pouvant amener à dépasser l'usage exclusif des théorèmes-en-acte mentionnés. Un de ces exercices fait utiliser du matériel tangible (annexe 6, CE2, séance 106). Dans son état actuel, une stratégie consistant à prendre une pièce de chaque sorte mentionnée pour constituer l'ensemble conduirait à une réussite sans véritable sens. Pour remédier à cela, des adaptations pourraient être envisagées, comme cela est illustré en figure 2 (inspirée de l'approche de Corriveau, Jeannotte et Michot, 2022). Nous pourrions alors demander, de représenter 1 ou $\frac{1}{3}$, en supposant que le triangle orange représente $\frac{1}{12}$.



Figure 2. Recherche l'unité à partir de la valeur d'une part (matériel tangible)

De plus, l'exercice présenté dans le tableau 8C propose une portion de droite tracée sur carreaux, ce qui aurait pu offrir l'opportunité d'envisager des groupements de carreaux et de percevoir une sous-unité

[11] Il y en a 7 non illustrés présentés en annexe 6 (tableau 16), 2 présentant des représentations surfaciques en parts d'aires différentes (tableau 8, cas D et E), 1 présentant les deux représentations de portions de droites partiellement graduées (tableau 8 cas B), 1 seul de manipulation également présenté en annexe 6.

relative (Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021). Mais la question 1 impose de « diviser le segment de 0 à 1 en 6 segments égaux » ce qui est regrettable car cette tâche n'est pas laissée à l'initiative de l'élève. L'illustration en figure 3 permet de choisir une sous-unité relative amenant à quantifier la partie rose comme étant $\frac{4}{12}$ ou $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ de la bande.

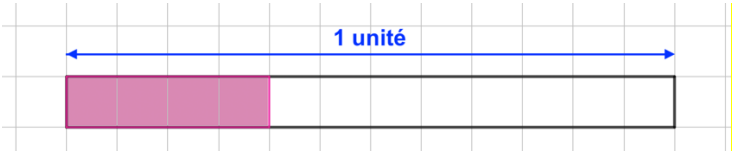


Figure 3. Usage des carreaux pour faire percevoir l'unité relative amenant à quantifier $\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Enfin, en CE2, la tâche « explique pourquoi il faut plus de douzièmes que de quarts pour obtenir une unité » est proposée mais elle est accompagnée de représentations imagées, l'une prédécoupée en 12 et l'autre en 4. Ce type de question semble être intéressant pour arriver à formuler des éléments de conceptualisation, car il inciterait un élève à produire une représentation imagée, éventuellement mentale ou approximative et à déduire une généralité du type « plus on partage une unité en un grand nombre de parts égales, plus la taille des parts est petite ».

Nous proposons plusieurs pistes à propos des représentations imagées qui permettraient d'offrir des conditions propices au dépassement de ces théorèmes-en-acte. Cela pourrait consister à :

- ne pas proposer de représentations imagées afin que l'élève les produise lui-même ;
- proposer des représentations imagées vierges ;
- proposer des représentations imagées partagées en parts non isométriques ;
- proposer des représentations imagées sur carreaux permettant d'envisager des sous-unités relatives ;
- proposer à l'élève de produire des représentations imagées approximatives.

Les premiers résultats indiquent que ce manuel aborde le concept de fraction à travers les deux sens de fraction (partage et de proportion). Afin d'enrichir l'accès à une conceptualisation de fraction à travers l'un de ces sens, nous pourrions envisager une variété de situations (plutôt que de multiplier les situations où l'on demande d'associer des signifiants) comme des situations de partage d'une pluralité d'unités ou des situations de proportion, des situations où l'on demande de reconstruire une unité (figure 2). Les situations de partage pourraient amener à conceptualiser que plus le nombre de parts isométriques est grand, plus la part est petite. Les situations de comparaison (sans représentation imagée) pourraient permettre de percevoir que pour comparer deux fractions, il faut représenter une même unité. Les situations de proportion pourraient aider à comprendre la relativité de l'univers d'une fraction (le demi de 1, le demi de 2) et pourraient être mises en lien avec le calcul mental.

Finalement, l'enseignement proposé dans La méthode de Singapour en CE1, CE2 pourrait être qualifié comme visant « essentiellement à fixer un symbolisme conforme à celui que propose la mathématique, et [qui] utilise des objets réels à titre de procédé pédagogique pour illustrer la signification du symbolisme » (Desjardins et Hétu, 1974). Le risque est qu'ils proposent des schèmes ne permettant pas de renouveler les connaissances du sujet lors de problèmes nouveaux.

V - CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons analysé le manuel *La méthode de Singapour* en CE1, CE2. Ce manuel offre à voir un enseignement des fractions plus précoce (dès le CE1) alors que les programmes actuellement en vigueur proposent de commencer en CM1, en se limitant aux fractions inférieures à un. Ce manuel aborde le concept de fraction à travers le sens partage et le sens proportion qui se construisent de manière concomitante. La conceptualisation des fractions proposée se limite potentiellement au recours à trois théorèmes-en-acte (double dénombrement et deux autres de comparaison de grandeur) qui pourraient faire obstacle à un enrichissement du concept de fraction. Plusieurs choix sont en cause, à la fois la forte présence de la classe de problèmes « produire ou associer un signifiant écrit chiffré à un signifiant de type représentation imagée » mais surtout la forte présence de représentations imagées qui rend opérationnels les trois théorèmes-en-acte sur une grande variété de classes de problèmes.

Pour autant, c'est grâce à cette analyse que nous pouvons identifier quelques points de vigilance afin d'offrir des conditions pouvant conduire à une conceptualisation plus complète.

Ces conditions consistent, tout d'abord, à proposer des situations davantage ancrées sur le développement d'un sens de fraction (partage ou proportion) plutôt que majoritairement autour d'un travail d'association de signifiants. À cela s'ajoute une volonté de limiter l'opérationnalité des théorèmes-en-acte de double dénombrement et de comparaison perceptive des grandeurs dont la portée se limite à la présence de représentations imagées prédécoupées en parts isométriques. Faire produire des représentations imagées approximatives aux élèves pourrait davantage amener à alimenter la conceptualisation de fraction. Par exemple, ils pourraient conceptualiser la relativité de la taille de la part selon le nombre de parts, la nécessité de définir ce qui est « un » ou « l'unité ».

Des questions restent en suspens, faut-il accepter d'aborder de manière concomitante plusieurs sens ? S'il faut choisir, quel sens de fraction privilégier en premier ? et quelle transition opérer ?

En guise d'ouverture, il serait intéressant d'investiguer l'acception de la quantité de Chambris (2022a, 2022b) pour, peut-être, mieux décrire ce qui se passe lorsque le sens « partage d'un tout » n'engage pas explicitement de grandeur et est proche du sens proportion. De même, il serait intéressant de regarder la part d'exercices qui positionne la fraction en tant qu'objet et celle qui la positionne en tant qu'outil (Douady, 1984).

VI - BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R. et Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(1), 41 – 88.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. et Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. Dans R.Lesh et M.Landau (éds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (91 – 125). New York: Academic Press

Chambris, C., Coulange, L., Rinaldi, A.M. et Train, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux Potentialités ». Dans Chaachoua H., Bessot, A. et al. (éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*, vol. 2 (373 – 395). La pensée sauvage, Grenoble.

Chambris, C. (2017). L'enseignement des maths à l'école et la méthode de Singapour. *Bulletin de liaison de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques*, *44*, 13 – 22.

Chambris, C. (2022a). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. CY Cergy Paris Université.

Chambris, C. (2022b). La notion de quantité est-elle encore d'actualité ? (ressource en ligne). Séminaire de l'IREM de Paris. Consulté le 12/11/2014, url : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/13908235-54cb-4d1c-897e-3b2e39731bb0

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43 – 76.

Coulange, L. et Train, G. (2018). Gestes langagiers didactiques professionnels et usages d'une ressource visant à introduire les fractions à l'école. Dans *Conception, diffusion et usages des ressources. Actes du colloque international de l'Espace Mathématique Francophone (*677-695). Cergy-Pontoise.

Coulange, L et Train, G. (accepté). Fraction à l'école primaire en France : un « objet » à (re)questionner, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg

Corriveau, C. et Jeannotte, D. (2015). L'utilisation de matériel en classe de mathématiques au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles. *Bulletin AMQ*, *55*(3), 32 – 49.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Cauté, M. (2023) Note alerte n°2 de septembre 2023, Une inquiétante mécompréhension des nombres et surtout des fractions à l'entrée en sixième. Consultée le 12/10/2024, url : https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_alerte_CSEN_02_V2.pdf

Desjardins, M. et Hétu, J. C. (éds.) (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Presses de l'Université du Québec.

Douady, R. (1981). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *1*(1), 77 – 111.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Thèse de doctorat. Université paris VII.

Fenichel, M. et Pfaff, N. (éds) (2005) *Donner du sens aux Mathématiques. Tome 2. Nombres, opérations et grandeurs*. Paris : Bordas.

Grapin, N. et Mounier, E. (2018). Méthodologie d'analyse de manuels et étude du manuel *Méthode de Singapour* CP. *Grand N, 102,* 57 – 92.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical cognitive, and instructional foundations of rational number. Dans Lesh, R. A. (éd), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (101 – 144.). Columbus.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building an informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 16 – 32.

Martinez-Ibanez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. Thèse de doctorat. Université Paris 5 Sorbonne Descartes.

MEN (2020). Programmes du cycle 3 en vigueur à la rentrée 2020. BOEN cycle 3, n° 31 du 30 juillet 2020. Consulté le 12/11/2024, url : https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm

Neagoy, M., Nakatani, N., Szikora, A. et Touchard, E. (éds) (2019). *Maths CP La méthode de Singapour*. Librairie des Ecoles.

Neagoy, M., Caira, S., Kritter, C., Szikora, A. et Touchard, E. (éds) (2020). *Maths CE1 La méthode de Singapour*. Librairie des Ecoles.

Neagoy, M., Kritter, C., Caira, S., Szikora, A. Bourhis-Lainé, F. et Giauffret, L. (éds) (2021). *Maths CE2 La méthode de Singapour*. Librairie des Ecoles.

Pfaff, N., Hannon, C., Newiadomy, N., Saliou, S. et Visgueiro, A. (éds.) (2019). *Enseigner les grandeurs et les formes : Maternelle*. Retz.

Roditi, E. (2024) La France face à la diversité de l'enseignement des mathématiques. Programmes scolaires, pratiques enseignantes et effets sur les apprentissages. Dans *Actes du 50e Colloque COPIRELEM.*

Rouche, N. (éd.) (1992). *Le sens de la mesure*. Edition Didier Hatier

Toromanoff, J. (éd.) (2019). *Promenade dans dix symboles de base des mathématiques*. Librairie des Maths.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (127 – 174). New York: Academie Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Dans J. Hiebert et M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (141 – 161). Hillsdale N.J: Erlbaum/Reston, VA, NCTM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G., (2007) Réponse de Gérard Vergnaud. Dans *Activité humaine et conceptualisation : Questions à Gérard Vergnaud* (341 – 357). Toulouse : Presses universitaires du Midi

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Journal for the Study of Education and Development*, *36*(2), 131 – 161

Manuels étudiés :

Institutionnel :

VII - ANNEXE 1 : BRÈVE ÉTUDE DU PROJET DE NOUVEAUX PROGRAMMES, PARUS EN AVRIL 2024

Sur les trois niveaux de classes, les propositions de programmes s'appuient sur des représentations surfaciques nombreuses et les fractions à enseigner sont inférieures à un.

Au CP, le travail proposé s'appuie uniquement sur des désignations langagières (pas d'écriture chiffrée) et uniquement sur le demi et le quart « d'un tout ». Le document fait travailler la reconnaissance des « parts égales » et des dénombrements de demis (ou quarts) qu'il y a dans un tout ainsi que la relation entre quart et demi.

Au CE1, sont introduites les écritures chiffrées des fractions unitaires, puis celles des fractions non unitaires. Le travail proposé en CP sur le demi et le quart est prolongé sur les autres fractions unitaires. « Le tout » est parfois écrit comme étant 1. Les représentations surfaciques permettent aux élèves de comparer des fractions unitaires. L'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur sont travaillées.

Au CE2, les projets parlent aussi bien de fraction d'un tout que de fraction d'unité de longueur. Les fractions permettent donc de mesurer des longueurs. Des longueurs de plus d'une unité sont écrites en chiffre via un entier ajouté à une fraction inférieure à un. Les équivalences d'écritures chiffrées de fractions sont travaillées. Enfin, les comparaisons de fractions inférieures à un, sont faites lorsque les numérateurs ou les dénominateurs sont égaux, ou lorsqu'un dénominateur est multiple de l'autre. Les additions et soustractions de deux fractions pourront être proposées dans les cas de dénominateurs égaux ou d'un dénominateur multiple de l'autre, ce qui fait appel à l'équivalence des fractions.

CP	CE1	CE2
Fractions inférieures ou égales à un		
Désignations langagières et représentations surfaciques		
	Écriture chiffrée $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$	
		Écriture chiffrée n+ $\frac{a}{b}$ $(n, a, b \in \mathbb{N}^*)$
Demi, quart	Unitaires puis non unitaires dont le dénominateur est 2;3;4;5; 6; 8 ou 10	Fractions inférieures à un Somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un
- Fraction d'un tout	- Fraction d'un tout - Le tout s'écrit 1	- Fraction d'un tout - Fraction d'unité de longueur
- Reconnaissances de « parts égales » - Relation entre demi et quart ; entre demi et le tout ; entre quart et tout	- Lien écriture chiffrée et représentation surfacique - Partage d'un tout ET recomposition du tout - Comparer des fractions de même dénominateur - Comparer des fractions dont le numérateur est 1. - Additionner, soustraire des fractions de même dénominateur	- Fractions pour mesurer des longueurs (de moins d'une unité, de plus d'une unité) - Écritures chiffrées équivalentes par subdivision des parts - Comparer, additionner, soustraire des fractions de même dénominateur ou lorsqu'un dénominateur est multiple de l'autre

Tableau 9. Bref résumé de la progression proposée autour des fractions dans les projets de programmes d'avril 2024

VIII - ANNEXE 2 : CONTROVERSE SUR LES PROBLÈMES DE PARTAGE, EN PRISE D'APPUI SUR DES GRANDEURS OU DES OBJETS ?

Plusieurs recherches pointent la nécessité de travailler les fractions en prise d'appui sur les grandeurs géométriques (longueur, aire, etc.) et non sur des objets (tarte, pomme, etc.). Rouche a précisé une limite d'une approche reposant sur des raisonnements sur objets car ce « n'est [pas] une image complète et fidèle de la théorie des fractions et des rationnels » (Rouche, 1992, p.7) et il précise l'impossibilité de représenter le produit de rationnels en un tout. Adjiage et Pluvinage confirment cela et ajoutent des difficultés liées à la verbalisation sur objet « $\frac{4}{3}$ de tarte est toujours gênant (et ajouter une deuxième tarte ne change pas grand chose car on parlera toujours d'une tarte au singulier !) » (Adjiage et Pluvinage, 2000, p. 48).

Chevallard et Bosch (2002) ont critiqué « l'oubli historiquement récent dans la culture mathématique scolaire, des grandeurs au profit des seuls objets supports des grandeurs ».

Ils justifient qu'il existe une pluralité de représentations surfaciques, d'aire $\frac{1}{2}$ unité, associées à une même surface d'aire $1u$. Si la surface de la case A du tableau 10 est considérée comme 1 gâteau et que l'on demande de le partager en deux personnes, il est possible de considérer plusieurs représentations surfaciques qui communiquent le résultat obtenu à la suite de ce partage. Observer seulement les résultats de ces partages (tableau 10, case B) pourrait poser des questions sur ce qui les rend semblables, sans utiliser le concept d'aire. Douady (1981) évoquait ce problème, même lorsque les élèves s'appuyaient sur le concept d'aire, car ils essayaient de passer par des procédures de découpages-recollements ce qui ne les aidait pas à percevoir l'égalité d'aire.

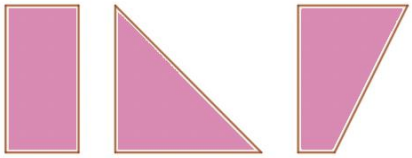
Surface d'aire 1u	**Exemples de surfaces d'aire $\frac{1}{2}u$**
	
(A)	(B)

Tableau 10. Exemples de signifiants différents associés à une même fraction

Finalement, plusieurs recherches questionnent l'exigence vis-à-vis de la déclaration nécessaire de la grandeur géométrique. Rien ne semble assurer que cela simplifie les raisonnements des élèves ni même que ça les aide à mieux conceptualiser ce qu'est une fraction pour un début d'apprentissage.

Certaines recherches récentes semblent même avancer que les élèves peuvent avoir des raisonnements en prise d'appui sur des objets, sans convoquer la grandeur aire, mais convoquent la notion de quantité (naïve) au sens de Chambris (2022b). Coulange et Train (2024) ont analysé des copies d'élèves à propos de problèmes de partage d'une pluralité d'objets (pizzas, gâteaux) entre personnes. Les élèves représentent ces objets du quotidien à l'aide de surfaces et ne convoquent pas le concept d'aire. Pour autant, ils réussissent à recomposer l'unité en partant de 17 tiers pour arriver à $5+\frac{2}{3}$ à l'aide de raisonnement sur des objets. Dans cette même étude, d'autres potentialités sont présentées comme le

benchmarking permettant de comparer des fractions en prise d'appui sur des fractions références ($\frac{1}{2}$; 1) et des tailles de parts relatives ($\frac{1}{7}$ est plus grand que $\frac{1}{8}$ car si un même tout est partagé en 7, les parts seront plus grosses que si elles sont partagées en 8).

IX - ANNEXE 3 : NOMBRES D'OCCURRENCES DES MOTS INDICATEURS DU SUPPORT FRACTIONNÉ

	CE1	CE2
Aliment (biscuit, gâteau, pizza, etc.)	41	81
Discret (Structure [de cubes] ou train [de cubes] ou couverts)	5	14
Mosaïque ou tangram	7	29
Figure, disque, carré, rectangle, triangle	101	56
Solide	0	2
Segment, droite (sens droite graduée)	0 ; 0	45 ; 97
Surface interprétable selon la longueur (Bande, barre (hors chocolat))	26 (25 ; 1)	48 (28 ; 20)

Tableau 11. Occurrences de termes relevés en CE1 et CE2 (guides pédagogiques, fichiers élèves, fichiers photocopiables) dans l'unité « fractions ».

Au CE1 comme au CE2, différents types d'objets sont représentés, des aliments, des objets du quotidien (structure de cubes, train de cubes, couverts), des objets géométriques représentés (figure, disque, carré, rectangle, etc.) et d'autres également interprétables en termes de longueur comme les bandes ou barres.

X - ANNEXE 4 : ORGANISATION (UNITÉS, SÉANCES) DANS LA MÉTHODE DE SINGAPOUR CE1-CE2

	La méthode de Singapour CE1	La méthode de Singapour CE2
Nombre d'unités	16 unités	14 unités
Éléments, de progressivité, relatifs à la notion de grandeur	Unité 5 : La longueur Unité 10 : La masse Unité 14 : Les fractions Pas d'unité sur l'aire. (7 séances) Unité 15 : La date, l'heure et la durée Unité 16 : La contenance et le volume	Unité 9 : Les mesures (dont une partie sur la longueur, la masse, la contenance) Unité 12 : Les fractions (9 séances) Unité 13 : L'heure et la durée Unité 14 : L'aire et le périmètre
Unités sur les fractions	113 : Découvrons les fractions 114 : Écrivons les fractions 115 : Les parties et le tout 116 : Comparons et ordonnons les fractions 117 : Additionnons les fractions 118 : Soustrayons les fractions 119 : Bilan de l'unité	106 : Revoyons les fractions 107 : Représentons les fractions sur une droite numérique 108 : Les fractions équivalentes 109 : Représentons les fractions équivalentes sur une droite numérique 110 : Comparons et ordonnons les fractions

		111 : Représentons les comparaisons de fractions sur une droite numérique 112 : Additionnons les fractions 113 : Soustrayons les fractions 114 : Bilan

Tableau 12. Éléments de contextes extraits des sommaires et guides pédagogiques de La méthode de Singapour CE1 et CE2

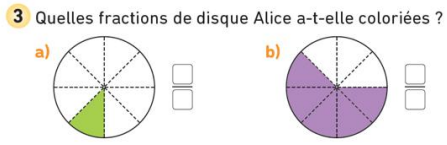
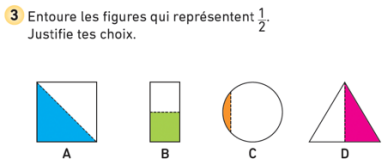
XI - ANNEXE 5 : EXPLICITATION DE LA MÉTHODE DE DÉNOMBREMENT DES REPRÉSENTATIONS IMAGÉES PAR EXERCICE ET DES ITEMS

Exemplifions quelques représentations planes représentant des objets en 3D, où un solide est représenté de manière prédécoupée en parts isométriques (figure 4).



Figure 4 : Exemples de représentations du type 3D « solides prédécoupés en parts de même volume »

Des représentations 2D sont proposées, certaines prédécoupées en parts isométriques, certaines prédécoupées en surfaces d'aires différentes et aucune n'est proposée en surfaces de même aire mais non superposable.

 Cas A : •2 représentations surfaciques découpées en parts exactement superposables • 2 items dénombrés.	 Cas B : •3 représentations surfaciques découpées en parts exactement superposables et 1 représentation découpée en parts d'aires différences. • 4 items dénombrés.

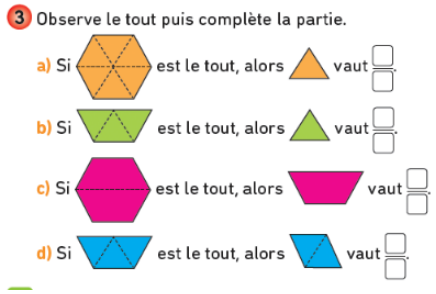
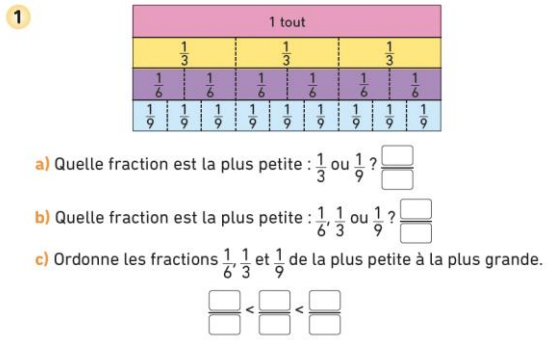
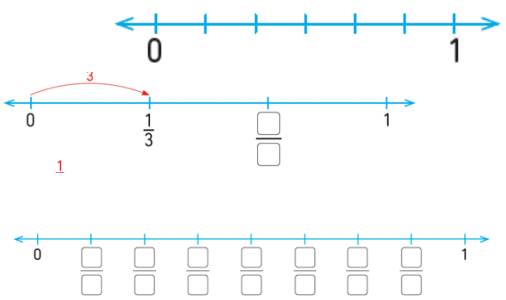
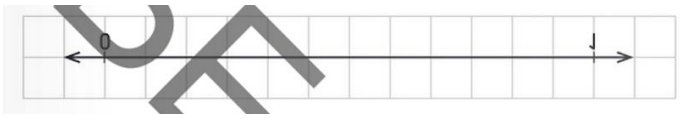
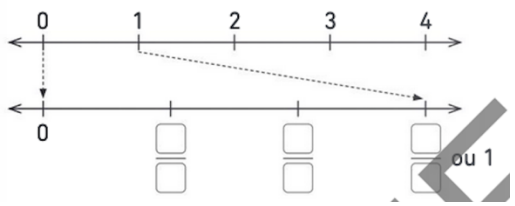
 Cas C : • 4 représentations surfaciques découpées en parts exactement superposables • 4 items dénombrés	 Cas D : • 3 représentations surfaciques découpées en parts exactement superposables • 3 items dénombrés.

Tableau 13. Explicitation de la méthodologie de dénombrement des représentations et des items

Le cas C, du tableau 13, moins présent dans les fichiers d'exercices, présente une représentation double, en séparant une représentation surfacique du tout et une autre représentation surfacique de la part identifiée. Cette proposition n'est présente que trois fois dans le corpus d'exercice du CE1 et absente en CE2. Nous avons choisi de ne dénombrer que 4 représentations surfaciques découpées en parts exactement superposables. Enfin le cas D, présente 4 bandes mises à la même origine, dont 3 sont découpées en parts exactement superposables, d'où un dénombrement de 3 et non de 4. Le choix retenu, est de ne pas dénombrer les représentations surfaciques indiquant un tout vierge.

Enfin, les représentations 1D sont de natures différentes. Bien que toujours restreintes sur [0 ; 1] et prédécoupées en intervalles de même longueur, certaines présentent des graduations explicites, d'autres proposent une subdivision à l'aide de carreaux qu'il est possible de graduer de plusieurs manières, un seul cas propose une portion de droite partiellement prédécoupée à subdiviser. Enfin, nous remarquons que, parfois, cette représentation 1D est également proposée couplée à une représentation surfacique.

 3 exemples de représentations « droites graduées prédécoupées sur [0 ;1] ».	a)  b) 

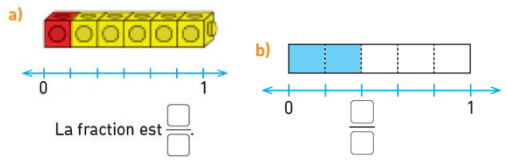
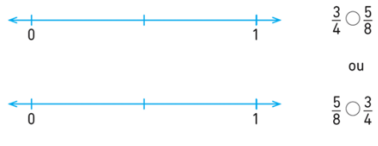
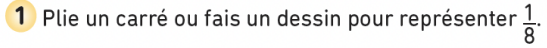
 2 exemples de représentations multiples (1D+ 2D ou 1D+3D)	 c) Le cas d) est intéressant car il ne présente pas les graduations, bien que des carreaux aident à la subdivision. Le cas e) est un exemple où nous n'avons dénombré qu'une seule représentation de type « droite graduée prédécoupées sur [0 ;1] » car la première n'est pas nécessaire. Le cas f) est unique, il demande à l'élève d'effectuer des sous-découpages.

Tableau 14. Exemplifications des dénombrements de représentations imagées effectués dans La Méthode de Singapour en CE1 et CE2

XII - ANNEXE 6 : EXERCICES PRÉSENTANT DES REPRÉSENTATIONS IMAGÉES VIERGES OU N'EN PRÉSENTANT PAS DU TOUT

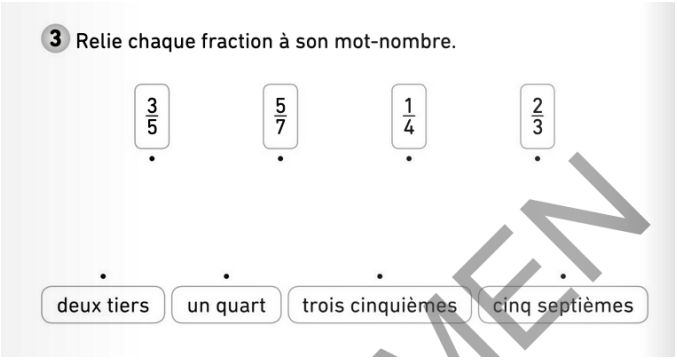
7 Exercices de CE1

Séance 113



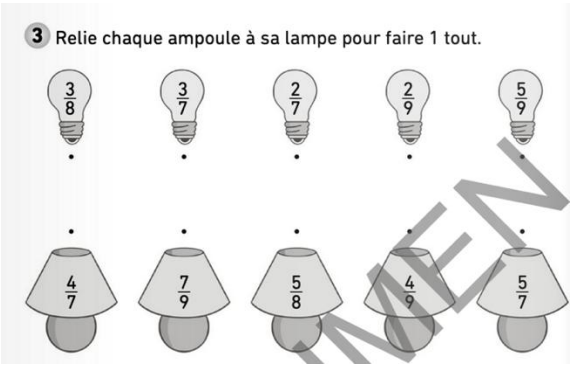
(1 item dénombré)

Séance 114



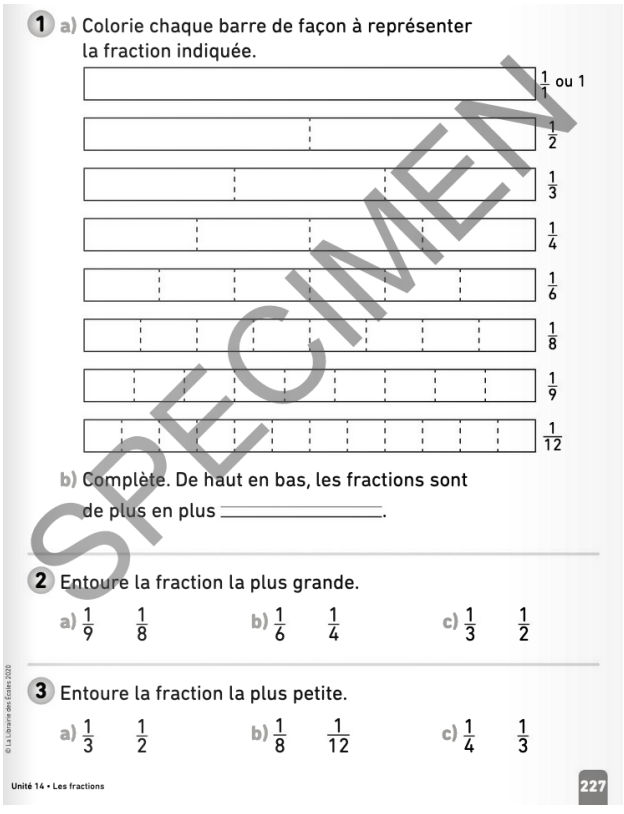
(4 items dénombrés)

Séance 115



(5 items dénombrés)

Séance 116 :



(Exercice 1 : 9 items dénombrés
Exercice 2 : 3 items dénombrés.
Exercice 3 : 3 items dénombrés.)

Séance 117	Séance 118

SPECIMEN

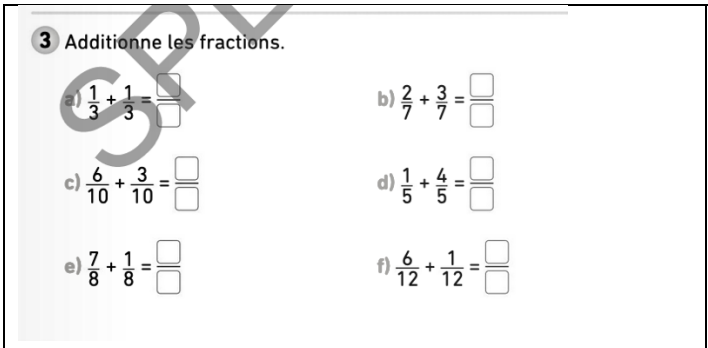
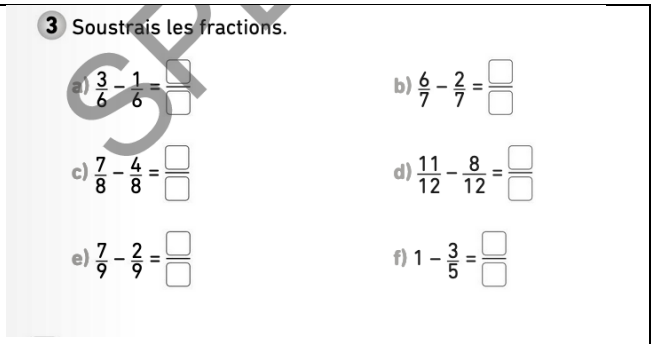
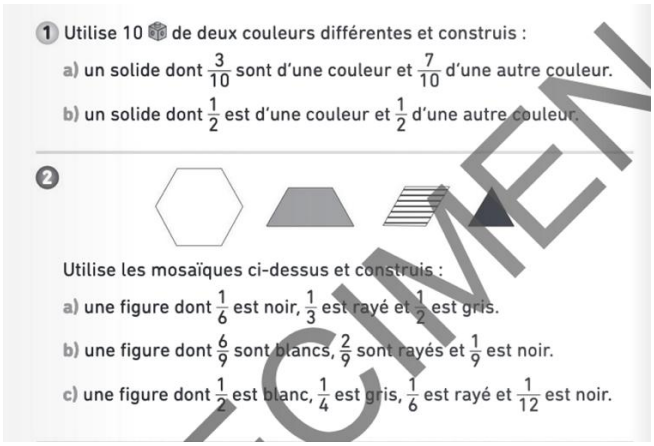
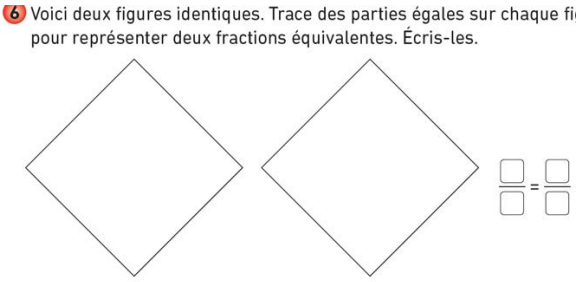
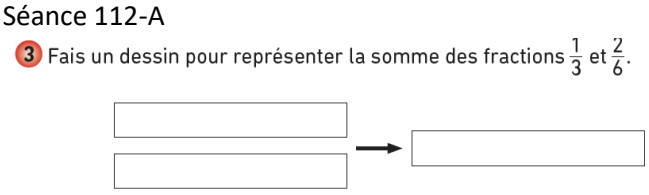
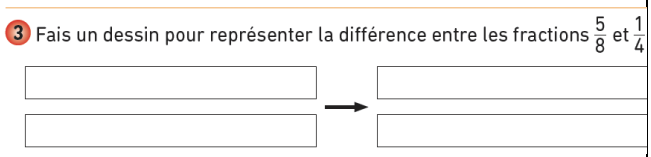
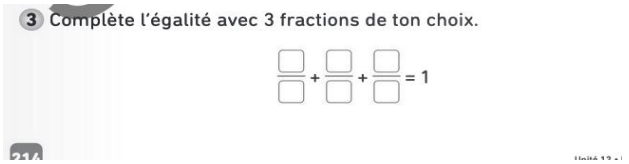
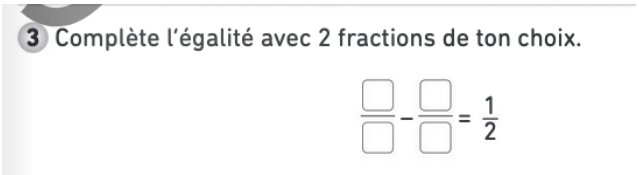
 3 Additionne les fractions. a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{\square}{\square}$ b) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{\square}{\square}$ c) $\frac{6}{10}+\frac{3}{10}=\frac{\square}{\square}$ d) $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{\square}{\square}$ e) $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=\frac{\square}{\square}$ f) $\frac{6}{12}+\frac{1}{12}=\frac{\square}{\square}$ (6 items dénombrés)	 3 Soustrais les fractions. a) $\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{\square}{\square}$ b) $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{\square}{\square}$ c) $\frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{\square}{\square}$ d) $\frac{11}{12}-\frac{8}{12}=\frac{\square}{\square}$ e) $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{\square}{\square}$ f) $1-\frac{3}{5}=\frac{\square}{\square}$ (6 items dénombrés)

Tableau 15. Exemples d'exercices ne présentant pas d'illustration ou présentant une illustration vierge (La Méthode de Singapour CE1)

9 Exercices de CE2	
Séance 106 : 2 exercices demandant à l'élève d'utiliser un matériel tangible  1 Utilise 10 de deux couleurs différentes et construis : a) un solide dont $\frac{3}{10}$ sont d'une couleur et $\frac{7}{10}$ d'une autre couleur. b) un solide dont $\frac{1}{2}$ est d'une couleur et $\frac{1}{2}$ d'une autre couleur. 2 Utilise les mosaïques ci-dessus et construis : a) une figure dont $\frac{1}{6}$ est noir, $\frac{1}{3}$ est rayé et $\frac{1}{2}$ est gris. b) une figure dont $\frac{6}{9}$ sont blancs, $\frac{2}{9}$ sont rayés et $\frac{1}{9}$ est noir. c) une figure dont $\frac{1}{2}$ est blanc, $\frac{1}{4}$ est gris, $\frac{1}{6}$ est rayé et $\frac{1}{12}$ est noir. (Exercice 1 : 2 items dénombrés Exercice 2 : 3 items dénombrés)	Séance 108  6 Voici deux figures identiques. Trace des parties égales sur chaque figure pour représenter deux fractions équivalentes. Écris-les. $\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$ (4 items dénombrés)
Séance 112-A  3 Fais un dessin pour représenter la somme des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{6}$. (3 items dénombrés)	Séance 113-A  3 Fais un dessin pour représenter la différence entre les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{1}{4}$ (3 items dénombrés)
Séance 112-B  3 Complète l'égalité avec 3 fractions de ton choix. $\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=1$ (1 item dénombré)	Séance 113-B  3 Complète l'égalité avec 2 fractions de ton choix. $\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}=\frac{1}{2}$ (1 item dénombré)

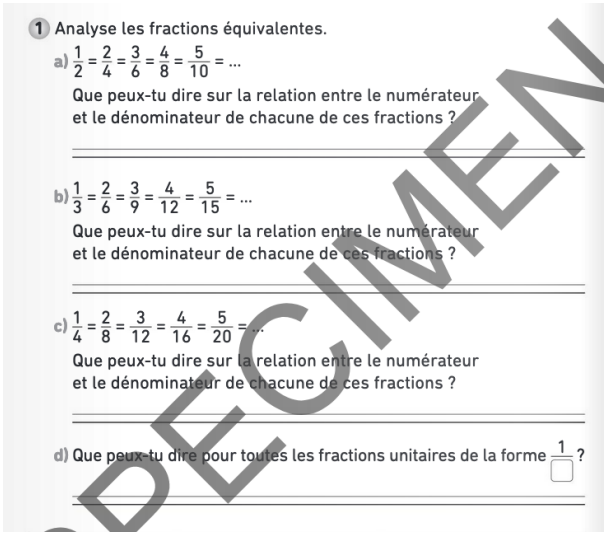
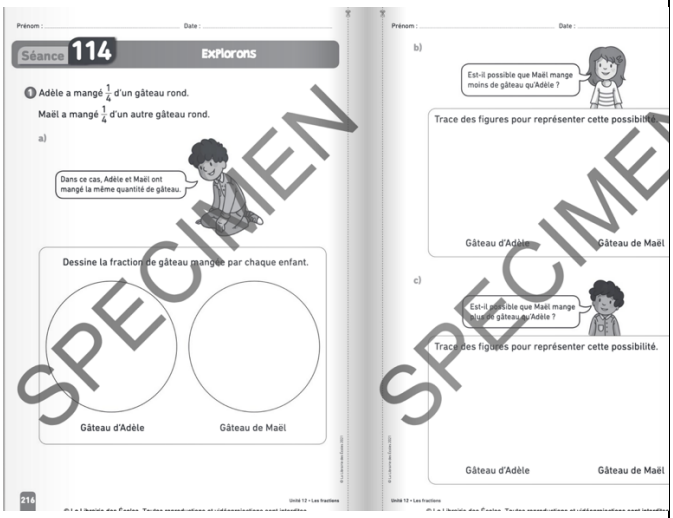
Séance 114-A	Séance 114-B
	
(4 items dénombrés)	(6 items dénombrés)

Tableau 16. Exemples d'exercices ne présentant pas d'illustration ou présentant une illustration vierge (La Méthode de Singapour CE2)

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES AU CYCLE 2. ENSEIGNER LA REPRÉSENTATION. PRESENTATION D'UN DISPOSITIF DE FORMATION.

Frédéric DALEY LE MERRER
Conseiller pédagogique à mission départementale
Mission académique mathématiques 1er degré de Paris
frederic.daley-le-merrer@ac-paris.fr

Résumé
L'objet de la communication est de présenter un dispositif de formation conçu par un groupe de Conseillers pédagogiques du 19e arrondissement à Paris. Le dispositif, qui accorde une place centrale à la compétence représenter, s'appuie sur une démarche d'enseignement adaptée du manuel *Résoudre des problèmes. Cycle 3. Maths en ateliers* (Allard et Cavelier, 2020). Si la démarche s'inspire de celle proposée par le manuel, elle s'en écarte sur plusieurs points : centration sur les problèmes élémentaires, modification de la consigne, utilisation de matériel didactique. Elle s'en distingue aussi par un parti-pris, celui de l'exploitation par comparaison de brouillons d'élèves en vue de l'enseignement du schéma à « barre double » (MEN, 2022, p.110). La communication expose le contexte professionnel dans lequel le dispositif de formation s'inscrit puis présente la démarche d'enseignement et le dispositif lui-même avant de proposer des éléments de discussion.

I - PRÉAMBULE

« On n'invente que ce que l'on est prêt à emprunter dans les dilemmes où l'on séjourne.[1] » Cette citation détournée illustre *a posteriori* la démarche qui est la nôtre dans la conception et le déploiement du dispositif de formation durant les deux années scolaires de la période 2021-2023. Tout d'abord, parce que le dispositif, élaboré en contexte professionnel, se façonne dans le jeu constant de tensions et de dilemmes qui caractérise l'activité du formateur du premier degré. Ensuite parce que nous n'inventons rien. Nous empruntons à des démarches d'enseignement ou des dispositifs de formation déjà existants que nous adaptons en fonction d'hypothèses de travail et de partis-pris didactiques. Et si nous nous appuyons sur les préconisations institutionnelles et des travaux de la recherche, nous n'empruntons sans doute que ce que nous sommes prêts à emprunter, au regard de notre compréhension progressive des questions didactiques et de la cristallisation de nos réflexions sur le rôle cardinal de la compétence « représenter » dans l'enseignement-apprentissage de la résolution des problèmes arithmétiques. En cela, cette communication se veut avant tout le témoignage d'un travail forgé dans et par la dynamique créatrice que suscitent parfois les contraintes de métier.

II - CONTEXTE

Le dispositif de formation et la démarche d'enseignement à laquelle il est adossé sont indissociables du contexte professionnel dans lequel ils se sont progressivement concrétisés et qui a, en grande partie, déterminé leurs formes respectives. Les appuis théoriques qui nourrissent notre réflexion, orientent nos choix didactiques et guident notre action sont pour une large part eux-aussi déterminés par le contexte

[1] « On n'emprunte que ce que l'on est sur le point d'inventer dans les dilemmes où l'on séjourne. » Clot, Y. (2015). *Le travail à cœur* (2015, p.63). Paris : La Découverte.

et le choix des programmations nationales et académiques de formation de formateurs, qui dès l'année scolaire 2019-2020, se centrent sur la résolution des problèmes arithmétiques.

1 Contexte professionnel

A la rentrée 2021, les quatre circonscriptions de l'Education nationale du 19e arrondissement à Paris s'engagent dans la mise en œuvre du plan annuel de formation en constellation. La thématique, commune, porte sur la résolution des problèmes arithmétiques à énoncés verbaux au cycle 2. Les écoles concernées sont majoritairement des écoles composées de classes dédoublées à faible effectif. Le public enseignant est de composition hétérogène, d'expérience et d'expertise variables, partageant globalement l'idée que la compréhension lexicale et syntaxique prévaut comme facteur général explicatif des difficultés d'apprentissage et des obstacles à l'enseignement en résolution de problèmes. Depuis plusieurs années, le groupe des conseillers pédagogiques du 19e arrondissement[2], qui présente la particularité de s'être constitué en pôle, élabore des modules de formation mutualisés. Ces modules se fondent sur des axes de formation définis collectivement. Conçus pour être dupliqués, ils proposent un déroulé modulable ménageant la possibilité d'une déclinaison adaptée en fonction des spécificités locales tout en préservant les choix didactiques des formateurs, choix qui s'expriment dans la déclinaison du dispositif selon plusieurs variantes. Par ailleurs, le 19e arrondissement dispose jusqu'en mars 2023 d'un poste spécifique de conseiller pédagogique chargé à mi-temps de la conduite d'une partie des formations en constellation et de l'appui à la mise en œuvre du volet formation du plan mathématiques. Ces éléments de contexte ne sont pas sans effet sur le dispositif de formation qui se caractérise par l'articulation de la formation autour d'un axe principal, le choix d'une entrée en formation par une situation d'homologie, l'arrimage du dispositif de formation à une démarche d'enseignement et enfin, par le parti-pris d'une implication directe du formateur dans la mise en œuvre dans les classes de la séance de référence. Si la mise en œuvre du dispositif couvre les deux années scolaires 2021-2023, l'article se réfère essentiellement au déploiement des formations sur l'année scolaire 2022-2023 et se centre sur la présentation et l'analyse d'une variante.

2 Contexte didactique

Nous nous intéressons aux problèmes arithmétiques à énoncés verbaux, désignés dans la littérature sous le vocable de problèmes arithmétiques classiques ou ordinaires (Houdement, 2011), dont l'objet est de quantifier des éléments évoqués par la situation verbale à partir de données numériques indiquées dans le texte. Nous nous centrons plus particulièrement sur les problèmes qualifiés parfois d'élémentaires (Houdement, 2011, 2016) à structure additive et multiplicative, de type « parties-tout » (MEN, 2022, p.113), caractérisés par un énoncé court, une syntaxe simple, ne comportant aucune donnée superflue, catégorie incluant les problèmes basiques (Houdement, 2014) pour lesquels il est attendu une résolution automatisée. Nous considérons que ces problèmes de réinvestissement ou d'application, qui engagent les élèves dans la recherche d'une solution calculable en mobilisant la totalité des données numériques, constituent des exercices de modélisation (Houdement, 2014).

2.1 Hypothèses

Dans le guide fondamental pour enseigner « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » (MEN, 2022, p.48), la compétence « représenter » est décrite comme faisant le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. Sans la précéder, la représentation vient soutenir l'activité de modélisation. Le guide souligne que « la compétence représenter ne se développe pas de

[2] Que soient ici tout particulièrement et très chaleureusement remerciés Anne FÉDOU, Professeur maître formateur, Amine KANSOUSSI, Conseiller pédagogique, pour leur contribution décisive à la mise en œuvre et à l'analyse rétrospective du dispositif de formation et de la démarche d'enseignement ainsi que Fanny CASANELLI D'ISTRIA, Conseillère pédagogique – Professeur maître formateur, initiatrice du tout premier retour d'expérience.

façon spontanée » (MEN, 2022, p.49), et qu'il ne suffit pas d'inviter les élèves à s'appuyer sur un dessin ou un schéma personnel. La compétence « représenter » se développe au contraire par un enseignement construit « visant à faire acquérir des outils pour construire des représentations efficaces et porteuses de sens facilitant la modélisation » (Ibid.). En conséquence, l'enseignement de la représentation revêt une importance cruciale et questionne les formes de schémas les plus favorables. Dans cette perspective, l'utilisation d'une représentation collective de référence sous la forme d'un schéma à barre double nous semble présenter un intérêt tout particulier. En effet, le schéma à barre double (MEN, PNF, 2020) est constitué de barres rectangulaires qui représentent une grandeur attachée à un objet dont elles indiquent une mesure si cette grandeur est connue ou un point d'interrogation si elle est inconnue (Cabassut, 2020 p.2). L'épaisseur des barres permet ainsi « de donner davantage de matérialité aux grandeurs ou objets en jeu et de rapprocher les représentations des objets manipulés » (MEN, 2022, p.110). De plus, le schéma à barre double, comme variante du schéma en barre, peut fonctionner dans le cas des problèmes élémentaires comme « un opérateur d'analogie » (CSEN, 2022, p.20) contribuant à la constitution d'une mémoire de problèmes au sens de Julo (1995, 2002). Enfin, contrairement au schéma à barre simple (MEN, 2022, p.110), la barre double matérialise la relation d'égalité entre le tout et la représentation du tout selon les parties qui le composent. Ainsi, comme registre de représentation sémiotique au sens de Duval (1993), le schéma à barre double peut faciliter les opérations de conversion vers le registre des écritures mathématiques en particulier pour le signe égal comme signifiant l'équivalence d'écritures d'une même quantité. Par ailleurs, le schéma à barre double figure parmi les quatre schémas qui « peuvent être utilisés » pour la résolution de problèmes de type parties-tout (MEN, 2022, p.110). Et si le schéma à barre simple « permet de ne pas matérialiser deux fois les mêmes objets » (MEN, 2022, p.110), il ne traduit pas de façon aussi visuelle que le schéma à barre double la relation d'équivalence entre la valeur du tout et celle des parties qui le constituent.

2.2 Emprunts

Le dispositif de formation, objet de la communication, est adossé à une démarche d'enseignement qui emprunte très largement aux propositions développées dans le manuel *Résoudre des problèmes. Cycle 3. Maths en atelier* (Allard et Cavelier, 2020). Dans cet ouvrage les auteurs présentent une démarche d'enseignement de la résolution de problèmes complexes au cours moyen. La démarche, articulée en plusieurs phases, a pour objectif de favoriser la schématisation du problème en vue de sa résolution. Lors de la première phase, durant laquelle les élèves prennent connaissance de l'énoncé à l'oral, sans disposer du texte écrit, l'objectif est de soutenir la mémorisation du texte, d'assurer sa compréhension et la mise en lien des informations. Une deuxième phase, couplée à la seconde lecture du problème, engage individuellement les élèves à noter sur une feuille de brouillon ce qu'ils jugent nécessaire pour raconter l'histoire du problème afin de pouvoir le résoudre. L'usage de la feuille de brouillon vise, par l'exercice de la prise de notes et le passage progressif à la schématisation, à produire les traces écrites d'une activité de recherche matérialisant par du signe graphique (flèche, rectangle, accolade, point d'interrogation) la mise en relation des données du problème et l'identification de l'inconnue. Une troisième phase repose sur une alternance de mise en commun, de travail de groupe et de recherche individuelle. Lors de la première mise en commun, l'enseignant affiche un nombre restreint et significatif de brouillons qu'il incite collectivement à interroger au regard du critère de réussite porté par la formulation de la consigne : *« noter tout ce qui semble nécessaire pour pouvoir répondre à la question posée »* (Allard et Cavelier, 2020). L'objectif est, en comparant les brouillons, de procéder à leur réorganisation afin, en les complétant et en qualifiant les données, de les améliorer. Un retour sur les productions individuelles permet ensuite aux élèves de procéder seuls à la révision de leur brouillon avant de résoudre le problème en groupe. Une dernière mise en commun permet de vérifier la cohérence des solutions proposées et de clore la séance par un temps d'institutionnalisation.

III - DÉMARCHE D'ENSEIGNEMENT

A la démarche proposée par Allard et Cavelier (2020), nous empruntons la trame générale, le déroulé en trois phases et le rôle central dévolu à l'activité de représentation. Cependant si la démarche présentée s'inspire du manuel « *Résoudre des problèmes. Cycle 3. Maths en atelier* », elle s'en distingue par la centration sur les problèmes élémentaires de parties-tout de cycle 2 et l'introduction d'un matériel didactique dans le processus de représentation. De plus, l'adaptation de la phase finale d'exploitation des brouillons en vue d'une institutionnalisation du schéma à barre double entraîne une modification de la consigne qui vise à placer les élèves dans la situation de produire une trace graphique de la mise en relation des données en vue de sa résolution par autrui. Dans un premier temps nous présentons la consigne avant de proposer, à partir d'entrées thématiques, une série de commentaires, puis nous exposons et commentons la trame générale de la séance de référence.

1 La consigne

« Je vais vous lire un problème. Je vais vous le lire plusieurs fois. Il faudra bien le garder dans sa tête, bien le garder en mémoire, bien le retenir. Puis, je vous donnerai une feuille de papier et il faudra expliquer le problème. Mais attention, il ne faudra pas faire de calculs ! Il faudra expliquer le problème. L'expliquer tellement bien que si on montre votre explication à un élève de la classe d'à côté, qu'on lui lit l'énoncé et qu'on lui donne la question, il pourra résoudre le problème tout de suite, très vite, d'un simple coup d'œil. »

Figure 1. La consigne – version finale

1.1 Point d'application

La consigne dépend étroitement du problème auquel elle s'applique et du déroulé de la séance qui la soutient. Elle n'a de sens que si son point d'application, le problème élémentaire de référence, pose de nouvelles difficultés de représentation. Si le problème n'est pas adapté, si sa résolution est par exemple déjà automatisée, alors la consigne peut « tourner à vide » et la séance aller paradoxalement à l'encontre du but recherché. Elle contraint les élèves à traduire par du signe graphique un problème qu'ils savent d'emblée modéliser. Ce qui peut générer parfois, lors des premiers essais engageant des problèmes de référence au calibrage mal ajusté, des productions discordantes où cohabitent sur une même feuille de brouillon une modélisation experte du problème et une représentation figurative et perceptive de la situation, la première chronologiquement antérieure à la seconde. La question du problème de référence et de son ajustement est donc nodale. Elle ouvre vers des problématiques d'enseignement (catégorisation, progression et programmation) auquel le dispositif de formation s'efforce d'apporter des éléments de réponse (Annexe 1). Lors de l'expérimentation, les premières sessions des formations intervenant au plus tôt en deuxième période d'année scolaire, le choix des problèmes élémentaires supports de la mise en œuvre de la séance de référence prend en compte la programmation au sein des classes. Les problèmes types proposés sont de type parties-tout, comprenant plus de deux parties de valeur inégale, avec la connaissance de la valeur du tout et la recherche de la valeur d'une partie.

1.2 Enonciation

À la suite des premières mises en œuvre de la séance par les formateurs, il apparaît nécessaire de faire précéder la consigne d'une présentation qui précise à la fois le champ disciplinaire et le contexte énonciatif dans lesquels la séance se situe. L'objectif est d'amortir le choc d'une consigne que de nombreux élèves ont des difficultés à relier à un domaine d'enseignement, et dont ils ont du mal à saisir le sens, à comprendre l'intention et à traduire sous forme de tâche. Avant la passation de la consigne, la séance est resituée dans le champ disciplinaire des mathématiques *(« Aujourd'hui, nous travaillons en*

mathématiques. ») et dans le domaine de la résolution de problèmes *(« Nous travaillons en résolution de problèmes. »).* La question : *« Qu'est-ce qu'il y a dans un problème et que faut-il faire ? »* permet de préciser les contours et les attendus de l'objet scolaire. Le contexte d'énonciation est explicité ainsi que la fonction de l'environnement de travail papier, support d'une activité de recherche utilisant de l'écrit pour penser et communiquer afin de permettre à un destinataire fictif de résoudre d'un simple coup d'œil le problème.

1.3 Mémorisation

La première tâche dévolue aux élèves est de « bien garder le problème dans sa tête, de bien le garder en mémoire, de bien le retenir ». La consigne, bien que redondante, est délibérément imprécise. Elle entretient intentionnellement le flou tant sur les éventuelles techniques de mémorisation à mobiliser que sur les informations verbales et numériques sur lesquelles l'activité de mémorisation doit porter. L'objectif est d'éviter de polariser l'attention des élèves sur les indices superficiels sémantiques ou de les engager dans un calcul précipité que, par sa formulation, la consigne neutralise d'emblée (*« (…) il ne faudra pas faire de calculs ! »*). Les lectures successives du problème s'appuient sur une mise en scène qui vise, par un jeu de questions et de réponses (mots erronés, données oubliées, trou de mémoire), à soutenir le travail de mémorisation et à lever les éventuels obstacles à la compréhension. De plus, l'accompagnement gestuel du texte lu (Claracq, Fayol et Vilette, 2022, p.5) par le mime des grandeurs respectives des parties et du tout, engage les élèves dans une « pensée relationnelle » (Polotskaia, Gervais, Gélinas et Savard, 2023) qui les conduit à reconnaître et manipuler les relations quantitatives entre les données du problème.

1.4 Explication

D'une certaine façon, nous adoptons un parti-pris, celui de considérer que l'enjeu de la séance est la production d'une représentation du problème traduisant par du signe graphique la mise en relation des données. La schématisation est alors appréhendée comme la connaissance la plus appropriée pour répondre à la question, de nature sociale, qui se pose : permettre au premier venu de pouvoir résoudre le problème. En conséquence, la consigne s'efforce de ne pas contenir en elle-même la réponse à la question. Pour cette raison nous proscrivons volontairement les verbes « schématiser » et « représenter ». De même nous évitons « dessiner » qui induit potentiellement des productions de nature perceptive ou figurative. Nous faisons de plus le choix de ne pas nous appuyer sur les termes et expressions tels que « raconter », « décrire » ou encore « prendre des notes » qui peuvent conduire les élèves à se focaliser sur des enjeux de compréhension de texte ou à tenter de prendre en copie l'énoncé. Nous retenons le verbe « expliquer » qui présente l'intérêt de ne pas induire, *a priori*, une manière de procéder restreinte au seul registre graphique tout en suggérant, par la définition même du mot, l'intention de faire comprendre quelque chose à quelqu'un. La démarche expérimentée rejoint ainsi celle du « Jeu du Capitaine » (Polotskaia, 2010), situation de communication dans laquelle une équipe d'élèves produit à destination de son capitaine un message, afin de lui permettre de résoudre un problème à énoncé verbal auquel il n'a pas accès. Le scénario pédagogique, par un jeu de contraintes sur le message, concourt au déplacement de regard des élèves des « données (…) et des opérations possibles » vers les « relations entre les quantités » et le « rôle de chaque donnée dans la situation » (Polotskaia, 2010, p.13). Les règles du « Jeu du Capitaine » (pas de lettres, pas de symbole d'opérations, pas de nombres autres que ceux de l'énoncé), traduisent cependant une différence de dimension entre les deux dispositifs. La démarche présentée, si elle vise le développement d'outils intellectuels en vue de la résolution de problèmes, reste centrée sur la question de la représentation graphique. Le dispositif du « Jeu du Capitaine » s'inscrit dans un cadre plus large et plus ambitieux, celui du développement de la pensée algébrique à l'école primaire.

1.5 Manipulation

L'aménagement de l'espace de travail et les conditions matérielles d'exécution de la tâche sont très vite perçus par les formateurs comme des paramètres déterminants de l'activité. Ainsi, les élèves ne disposent sur leur plan de travail que de leur trousse et d'une feuille de papier blanche de format A4 ou A3 appelée « sous-main ». Dans les classes de CP et de CE1, le milieu matériel est modifié pour inclure une dimension manipulatoire et permettre aux élèves de répondre à la consigne par une action tangible sur les cubes connectés emboités sous la forme de trains de cubes afin de représenter les grandeurs de longueur associées aux données. Les élèves peuvent ainsi proposer directement une explication du problème à l'aide des trains de cubes connectés disposés sur le « sous-main ». La nécessité sociale de présenter les brouillons lors de la phase collective d'exploitation des productions significatives contraint le passage par la trace écrite. L'explication est complétée par du signe écrit (flèche, accolade, ligne fermée) afin de désigner la valeur des représentations matérielles et de garder la mémoire des trains de cubes par le tracé des contours rectangulaires. La consigne, articulée autour du mot clef expliquer, autorise *a priori*, par le sens même du verbe, des propositions de représentations variées et des modalités de présentation et d'agencement des traces graphiques diversifiées. Il n'en demeure pas moins que dans sa formulation, la consigne s'efforce de faire advenir une certaine forme « d'explication ». En effet, en plus de l'enjeu social fictif d'une communication adressée, elle induit un critère de réussite qui vise à faire émerger les productions qui traduisent visuellement les relations qui se tissent entre les grandeurs en jeu, entre les grandeurs connues et la grandeur inconnue, entre le tout et les différentes parties. Le critère de discrimination visuelle, qui s'inscrit dans la juxtaposition finale des locutions « tout de suite, très vite, d'un simple coup d'œil », s'il n'exclut *a priori* aucune représentation, favorise l'émergence d'un type de production. Le schéma à barre double, par la traduction des données sous la forme de grandeur de longueur associée, par la relation d'égalité basée sur la correspondance de longueurs entre le tout et les parties et la matérialisation de l'inconnue, répond particulièrement bien à l'attendu de résolution immédiate, quasi visuelle du problème.

2 Le déroulé de la séance

Le déroulé de la séance, qui reprend la trame générale de la séance de référence développée par Allard et Cavelier (2020) dans leur manuel, se déploie, pour reprendre une expression imagée, *en deux temps, trois mouvements*. En effet, si la séance emprunte le rythme ternaire en différenciant les trois phases successives de production individuelle, d'exploitation de productions significatives par comparaison puis d'institutionnalisation en vue d'une schématisation de référence, elle inclut un décalage temporel, situé entre la première phase et les deux suivantes. L'objectif est de permettre aux enseignants de choisir les productions significatives les plus adaptées à la visée finale d'une représentation de référence basée sur le schéma à barre double. Nous proposons une analyse du déroulé d'une séance selon deux points de vue, celui des productions des élèves et celui de l'exploitation de ces mêmes brouillons en vue de l'institutionnalisation.

2.1 Productions des élèves

La nature, la quantité et la qualité des productions des élèves, desquelles dépend en grande partie la phase d'exploitation des brouillons, présentent une grande variabilité selon les pratiques scolaires de la classe. L'usage de la feuille de brouillon, la pratique des écrits réflexifs, l'acculturation aux situations de recherche conditionnent en grande partie la capacité des élèves à s'autoriser ou non à s'engager dans la tâche dont l'attendu engage un travail de la pensée concrétisé par un écrit. Suite aux premières mises en œuvre dans les classes, les formateurs font évoluer la consigne afin d'inclure un critère explicite de non-résolution du problème : *« Mais attention, il ne faudra pas faire de calculs ! Il faudra expliquer le problème. »* Un critère qui ne va pas forcément de soi. En effet, les élèves, lors de la première séance, rencontrent des difficultés à intégrer le principe d'une résolution différée, dévolue, qui plus est, à un

destinataire fictif. En conséquence, de nombreuses productions peuvent de façon contradictoire exposer les traces d'une explication adressée à autrui tout en intégrant la réponse numérique à la question du problème. Ce biais est possiblement lié à la difficulté de désigner ou de s'autoriser à représenter matériellement l'inconnue.

2.2 Exploitation

La phase d'exploitation est subordonnée à l'objectif d'enseignement d'une représentation de référence basée sur un schéma à barre double. En conséquence, le choix des brouillons significatifs se limite à quelques représentations favorables. Le critère de résolution quasi immédiat par autrui invalide les productions qui ne traduisent pas une tentative de mise en relation des données. Dans les faits, le choix se restreint à une seule production pivot et deux ou trois productions d'appui. La production pivot se caractérise par une représentation ou une tentative de représentation des données sous la forme de grandeurs de longueurs associées. Les productions d'appui, elles, contiennent un élément de représentation qui vient compléter et enrichir la représentation pivot. Parmi les éléments de représentation ou les tentatives de représentation, deux d'entre eux apparaissent comme décisifs : la représentation de l'inconnue et la représentation d'équivalence ou d'inclusion entre le tout et les parties.

Illustration

Nous exemplifions la phase d'exploitation en nous appuyant sur la mise en œuvre illustrée et commentée d'une séance de référence d'une durée de quarante-cinq minutes, conduite dans une classe de CP en février 2023. Le problème choisi est un problème de type parties-tout, comprenant trois parties avec connaissance de la valeur du tout et recherche de la valeur d'une partie. L'énoncé est le suivant : « *Dans une boîte, il y a six billes bleues, trois billes rouges et des billes jaunes. Il y a dix-sept billes en tout. Combien y a-t-il de de billes jaunes ? ».* Les élèves disposent pour la phase d'explication, s'ils souhaitent en faire usage, d'une boite de cubes connectés.

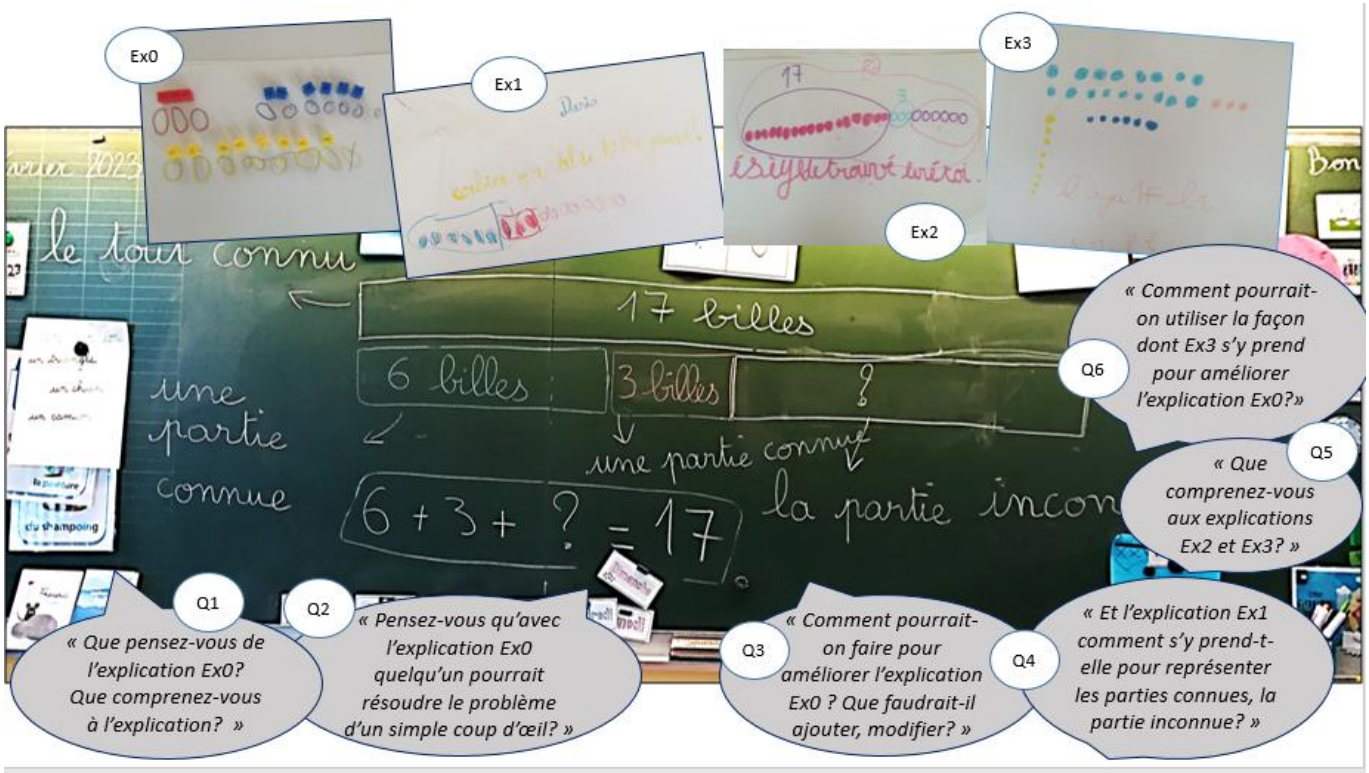


Figure 2. Phase d'exploitation – Illustration

Suite à la passation de la consigne et à la production des brouillons individuels une explication pivot Ex0 accompagnée d'une explication d'appui Ex1 sont retenues. Deux explications complémentaires Ex2 et Ex3

sont utilisées pour leur forme. En effet, en dépit d'une erreur manifeste liée à une qualification défaillante des données pour l'une (Ex2) et du choix d'une « représentation possible des données du problème, sans être pour autant un schéma permettant sa résolution » (Laparra et Margolinas, 2009, p.12) pour l'autre (Ex3), ces deux explications viennent soutenir, par leur traduction graphique d'une possible mise en relation entre un tout et des parties, l'introduction du schéma à barre double. L'explication pivot Ex0 utilise les cubes connectés pour amorcer une représentation traduisant la valeur des données selon la grandeur de longueur associée. La réalisation d'un train de cubes, engagée pour la partie correspondant à la quantité de billes rouges, facilite le passage de la compréhension de la situation à une représentation mathématique. L'explication d'appui Ex1 différencie les parties connues de la partie inconnue par un tracé à main levée qui délimite les parties connues (billes bleues et billes rouges) à l'aide de rectangles. L'explication complémentaire Ex2 fait apparaître une relation d'inclusion entre un tout et des parties. L'explication Ex3 représente, quant à elle, sans que l'on puisse préjuger de son intentionnalité, le tout et ses parties sur l'exemple de la collection témoin, « mémoire[3] » de la quantité. Une série de questions Q1-Q6, dont les bulles de la figure 2 proposent une formulation générique, soutient la phase d'exploitation. Les deux premières questions Q1 et Q2 (Figure 3) portent sur l'attendu de la résolution du problème par autrui du premier coup d'œil à partir de l'explication Ex0. Les questions Q3 et Q4 proposent une première schématisation collective de référence au tableau sous la forme de deux trains de cubes pour les parties connues et d'un schéma rectangulaire portant un point d'interrogation *(« Comment faire pour indiquer dans le rectangle de la partie inconnue que l'on ne sait pas combien il y a de billes ? »)* pour la partie inconnue. Les termes « partie connue », « partie inconnue », sont introduits afin d'identifier, de désigner et de qualifier les données pertinentes du problème. Ils visent à instituer les conditions langagières qui permettent aux élèves de ne plus simplement *parler du* problème mais de *parler sur* le problème en tant que structure mathématique générique de type parties-tout (Richard et Sander, 2015). L'objectif d'institutionnalisation d'une représentation commune basée sur le schéma à barre double s'appuie sur une troisième série de questions Q5 à Q6. Suite à l'analyse collective des explications Ex2 et Ex3, La barre représentant le tout connu est introduite *(« Alors, à votre avis que représente le grand rectangle que je trace au tableau ? Que peut-on indiquer à l'intérieur du rectangle ? »).* Elle donne à voir la relation d'égalité entre le tout, dont la valeur est connue et donnée dans l'énoncé *(« Il y a dix-sept billes en tout »),* et ses parties déjà représentées. Une opération de traitement permet, par effacement au tableau des bordures intérieures délimitant les cubes des parties connues *(« Si j'efface les cubes à l'intérieur, comment peut-on faire pour se souvenir qu'il y en avait six ? »)*, de représenter les quantités connues par un schéma rectangulaire et d'écrire la valeur correspondante des quantités. La série de questions ouvertes de Q1 à Q6 vise ainsi à stimuler un travail individuel et collectif de la pensée qui donne à voir et à comprendre l'émergence d'un schéma commun basé sur la représentation du tout sous la forme d'un rectangle « coiffant » les parties qui rend congruente la modélisation du problème avec le schéma.

Socialisation

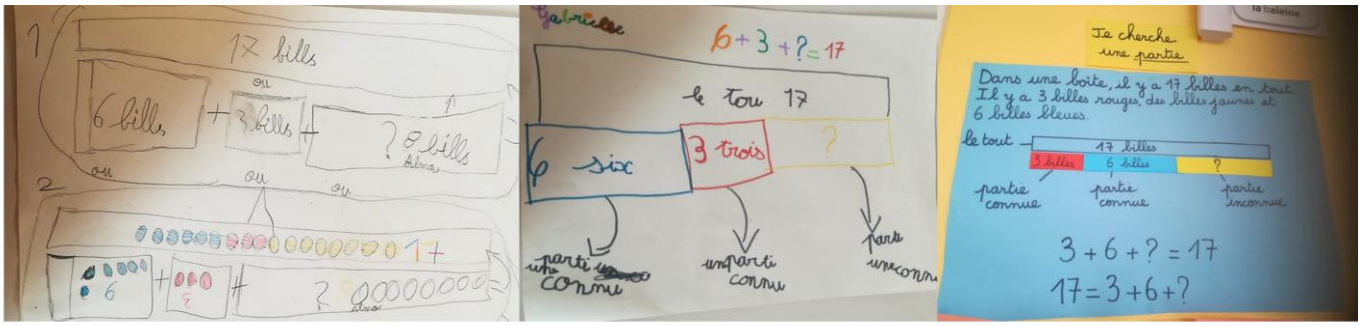
La série des questions Q1 à Q6 vise tout autant à faire advenir le schéma à barre double que de permettre aux élèves de comprendre le sens de l'activité, de clarifier les attendus de la phase de production individuelle et d'expliciter les moyens d'y parvenir. La phase d'exploitation prend tout son sens parce que le processus de socialisation qui, par les interactions langagières, donne à voir et à comprendre comment ont procédé certains élèves pour répondre favorablement à la consigne, n'est pas occulté par l'objectif d'enseignement du schéma de référence. De plus, la réitération de la séance de référence assure la compréhension progressive de la consigne, encourage les processus d'autorisation et d'engagement dans l'activité, favorise la diffusion, par emprunt, par copiage, de techniques, de façons de faire, collectivement

[3] Ifé (2019) « Les lapins dans le jardin » https://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/thematiques/mathematiques-en-education-prioritaire/premieres-annees-de-mathernelle-1/situations-de-classe-et-entretien/les-lapins-emilie-et-elisabeth

partagées, socialisées et verbalisées. La phase d'exploitation repose donc sur la sélection de quelques productions significatives. En conséquence, elle met délibérément de côté une majorité de brouillons d'élèves. En effet, l'objectif de la phase d'exploitation n'est pas « d'exposer des brouillons » mais bien de les « exploiter[4] » en fonction d'une visée d'enseignement. Au regard du but poursuivi toutes les productions n'ont donc pas la même valeur. Dans les classes de cycle 2 dédoublées, l'absence de production de certains élèves lors la phase d'explication couplée au traitement volontairement inégalitaire et hiérarchisé des brouillons peuvent heurter certaines croyances ou valeurs de métier. Dans les classes dédoublées dans lesquelles l'impératif de la réussite pour tous qui entraîne parfois une centration de l'activité enseignante sur l'individu, le dispositif permet d'éprouver les vertus et les ressorts féconds des interactions langagières collectives.

2.3 Institutionnalisation

La séance se clôt par une phase d'institutionnalisation. Cette phase se déroule en deux temps. Dans un premier temps, les élèves réalisent une affiche mémoire individuelle *(« Comment faire pour garder la mémoire de la séance ? »)*. Dans un second temps, la séance donne lieu à une affiche collective (Figure 3) comprenant le titre générique, le problème de référence, le schéma parties-tout à barre double, la désignation des parties et du tout ainsi que la modélisation du problème selon une double écriture traduisant l'égalité entre la valeur du tout et celles des parties. Objet de référence, le schéma à barre double permet de parler ensemble des problèmes et participe de la constitution progressive d'une mémoire des problèmes élémentaires résolus. Il n'a en aucun cas vocation à être employé systématiquement par les élèves lors de leurs activités ultérieures de résolution de problèmes.



Classe de CP – EE 43 rue Armand Carrel 19ème arrondissement – fév. 2023

Figure 3. Phase d'institutionnalisation – Illustration

IV - DISPOSITIF DE FORMATION

Comment former les enseignants à la prise en compte dans la pratique quotidienne de la question de la représentation afin de développer chez leurs élèves la capacité à traiter les problèmes élémentaires comme de simples « exercices de modélisation » (MEN, 2022, p.9) ? Présentée ici sous sa formulation la plus exhaustive, la problématique de formation détermine, en lien avec la démarche d'enseignement, le dispositif lui-même. Ce dernier se déploie dans le cadre d'une formation dite d'approfondissement sur une durée de trente heures selon les modalités propres de la constellation. Il repose sur deux principes organisateurs qui, tous deux, font l'objet d'une présentation et d'une analyse commentée : une entrée par une situation d'homologie et un accompagnement à la mise en œuvre de la démarche d'enseignement par le formateur.

[4] Allard, C. (2018). Former les enseignants à la résolution de problèmes : prise en compte des pratiques et effets sur les élèves. *Conférence du 20-11-2018*, Paris.

1 Mise en situation

Si la formation inclut une session préparatoire dédiée au recensement des premières questions d'enseignement et d'apprentissage sur la résolution de problèmes et à la présentation de l'objet de travail commun, c'est la session suivante consacrée à la situation d'homologie qui en constitue le premier temps fort. La situation repose sur une déclinaison de la séance de référence. La consigne, identique dans sa formulation, s'applique à un problème de nature algébrique pour lequel les enseignants doivent proposer une « explication ». L'idée est, en neutralisant le recours au traitement algébrique, de faire éprouver aux enseignants la « force des représentations » (CSEN, 2022, p.17) et la puissance visuelle de la représentation linéaire des quantités par comparaison avec les représentations de type boite nombres mobilisées très majoritairement par les enseignants en formation (Annexe 2 – problèmes n°3). Le second objectif est de faire percevoir l'intérêt d'une démarche, utilisable en classe, qui se présente comme une réponse à des questions d'enseignement possiblement non perçues lors de la première session, notamment celle, cardinale de la représentation. Le formateur dispose d'une série de trois problèmes (Annexe 2). La prise en compte du contexte de la constellation guide le choix de l'énoncé de référence. Un premier problème interroge les enjeux du cycle 2 et en particulier ceux posés par l'enseignement des problèmes de comparaison additive et multiplicative. Le deuxième problème centre la réflexion sur l'enjeu de la résolution des problèmes algébriques au cycle 3. Le troisième problème est tiré d'un manuel antérieur à la réforme des mathématiques modernes. L'idée est d'apporter un éclairage sur les choix qui ont prévalu à la conception d'une démarche d'enseignement basée sur la représentation linéaire des quantités, renouant ainsi, en quelque sorte, avec une tradition pédagogique où enseignement des nombres et des grandeurs et mesures étaient étroitement liés.

2 Mise en œuvre dans les classes

La formation à la mise en œuvre de la démarche d'enseignement repose sur deux actions : un accompagnement à la conduite de la séance de référence au sein de la classe par le formateur dans le cadre des visites d'observation croisées et l'intégration de la séance de référence dans le cadre plus large d'une séquence d'enseignement adossée à une programmation annuelle. C'est l'analyse de la mise en œuvre de ces deux actions qui est traitée dans cette partie.

2.1 Implication du formateur

Le choix de l'implication du formateur dans la prise en charge de la séance de référence repose sur deux hypothèses.

La première est fondée sur le fait que la mise en œuvre de la séance en classe ne va pas nécessairement de soi. Les appuis didactiques, la passation de la consigne, le choix des productions significatives et plus encore la maîtrise des interactions langagières qui accompagnent la phase d'exploitation constituent un ensemble de facteurs qui rend difficilement envisageable une mise en œuvre immédiate et autonome par les enseignants. Le formateur propose, dans le cadre des visites croisées, de prendre en charge la conduite d'une séance de référence. Les visites croisées qui se déroulent les mardis et mercredis matin sont suivies l'après-midi par des sessions consacrées au retour sur les observations. L'analyse de la séance devant dégager les grands principes organisateurs de l'action, les gestes de métier déployés lors des différentes phases, les modèles langagiers structurant les temps d'échanges, les points d'attention didactiques et pédagogiques, afin de constituer, en quelque sorte, un filet de protection qui permet aux enseignants de se lancer seuls.

La seconde hypothèse procède de la première. Elle est basée sur l'effet d'adhésion que l'implication du formateur ne peut manquer d'entrainer, lequel prenant en charge la classe, *mouillant sa chemise* selon l'expression consacrée, doit créer, par la seule valeur de son exemple, les conditions de l'engagement des enseignants dans l'appropriation de la démarche proposée. Force est de constater que la confrontation au réel invalide en partie la seconde hypothèse. L'implication du formateur ayant ceci de paradoxal que

sa présence en classe peut être tout autant désirée que son action d'enseignement postérieurement disqualifiée. Conditions exceptionnelles d'écoute de la classe, effet de surprise liée à une présence inhabituelle, hétérogénéité des réponses et écarts entre les élèves, réussite apparente liée à la maîtrise d'un format de séance jugé complexe, autant de raisons, parfois contradictoires, mises en avant pour minorer l'effet ou l'intérêt de la séance, voire objecter sa réplication possible dans les conditions de la pratique quotidienne. Il est possible qu'une contractualisation préalable entre le formateur et les enseignants selon les modalités conditionnelles d'une prise en charge progressive de la séance basée sur le triptyque « Je fais seul, nous faisons ensemble, vous faites seuls » puisse contribuer à faciliter l'intégration du format de séance dans les pratiques enseignantes. Et modérer les attitudes précitées, minoritaires certes, mais qui trahissent des préoccupations fort légitimes quant à l'intégration de la séance au sein d'une pratique quotidienne qui repose sur des choix pédagogiques déjà entérinés de progressions, de manuels ou de fichiers. Pour le dire à l'emporte-pièce : *« Votre séance, c'est bien joli, mais qu'est-ce qu'on en fait dans la pratique de tous les jours ? ».* C'est en partie pour répondre à cette question fictive et prendre en considération les points de tension évoqués que la formation envisage une adaptation du dispositif.

2.2 Adaptation

L'adaptation du dispositif de formation repose sur deux principes. Le premier consiste à repositionner la séance de référence afin de l'intégrer dans le cadre plus large d'un modèle de séquence d'enseignement adossé à une programmation de cycle, par année et par période. Le second consiste à adjoindre à la séance de référence un format de séance complémentaire basé sur une activité de comparaison de problèmes.

Programmation

Nous nous appuyons sur la programmation de la DSDEN 38 (Broin, Divisia et Semanaz, 2021) que nous réinterrogeons (Annexe 2) au filtre du tableau synthétique des problèmes additifs et multiplicatifs de parties-tout et de comparaison du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » (MEN, 2022, p.113). Nous retenons ainsi pour les problèmes élémentaires à structure additive les problèmes de parties-tout (composition et transformation) et de comparaison. Pour les problèmes de comparaison, nous distinguons trois cas selon qu'il s'agit de la recherche de la valeur de la différence, d'une partie ou la recherche de la valeur du tout connaissant la valeur d'une partie et la valeur de la différence. Pour les problèmes élémentaires à structure multiplicative, nous conservons les problèmes de parties égales avec recherche de la valeur du tout, de produit rectangulaire avec recherche de la valeur du tout ou d'une partie, les problèmes de partage équitable avec recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts ainsi que les problèmes de comparaison. Pour ces derniers, nous retenons les problèmes de comparaison avec recherche de la valeur du rapport, d'une partie ou du tout connaissant la valeur d'une partie et la valeur du rapport.

La programmation quant à elle, repose sur deux options. La première porte sur la périodicité d'enseignement des nouveaux types de problèmes. La seconde concerne la planification des séquences d'enseignement. Le rythme d'enseignement des nouveaux types de problèmes est bimensuel. L'objectif est de permettre le déploiement de la séquence sur un temps long. La séquence est composée, lors de la première semaine, d'une séance de découverte d'un nouveau problème ainsi que d'une séance de structuration basée sur la résolution d'une variante du problème de référence. Lors de la deuxième semaine, une séance d'appropriation propose une série de problèmes variant les contextes à partir du problème type. La séance d'automatisation qui suit vise la résolution d'une nouvelle série de problèmes à partir de ceux enseignés lors des précédentes semaines. Deux séances consacrées à des problèmes oraux, dans le cadre dévolu à l'enseignement du calcul mental, viennent compléter la séquence. Enfin, une séance dite de consolidation, en fin de quinzaine, propose des situations de fabrication de problèmes

avec contrainte de structure. Le déroulé des séances est calibré pour une durée de trente minutes afin de tenir compte des tensions sur les emplois du temps et de favoriser le passage d'une séance hebdomadaire longue à deux séances courtes. Quant aux séquences d'enseignement, elles sont regroupées par modules de quatre à cinq semaines par période. Cette option confère à la programmation une relative souplesse, accordant une marge de manœuvre pour la programmation des séquences au cours de la période. Le regroupement libère des plages hebdomadaires qui peuvent être consacrées aux séances de résolution de problèmes à étapes, à des situations d'évaluation, de réactivation ou d'ancrage de la mémoire de problèmes.

Comparaison de problèmes

La séance complémentaire repose sur une comparaison de problèmes. Des énoncés de deux ou plusieurs problèmes de catégories différentes (Annexe 2) sont conjointement interrogés. La consigne : *« A votre avis, est-ce que ces problèmes se ressemblent ? Selon vous, en quoi se ressemblent-ils ou ne se ressemblent-ils pas ? »* induit un critère de ressemblance dont l'interprétation volontairement ouverte permet de faire émerger, pour mieux les distinguer, des arguments portant tout autant sur des indices superficiels de nature sémantique que sur des indices mathématiques liés à la structure parties-tout des problèmes comparés (Figure 4). La séance de comparaison peut s'intégrer dans la séquence et venir s'insérer en seconde semaine pour prendre le relais de la séance de référence lors de l'introduction d'une nouvelle catégorie de problèmes (Annexe 2).

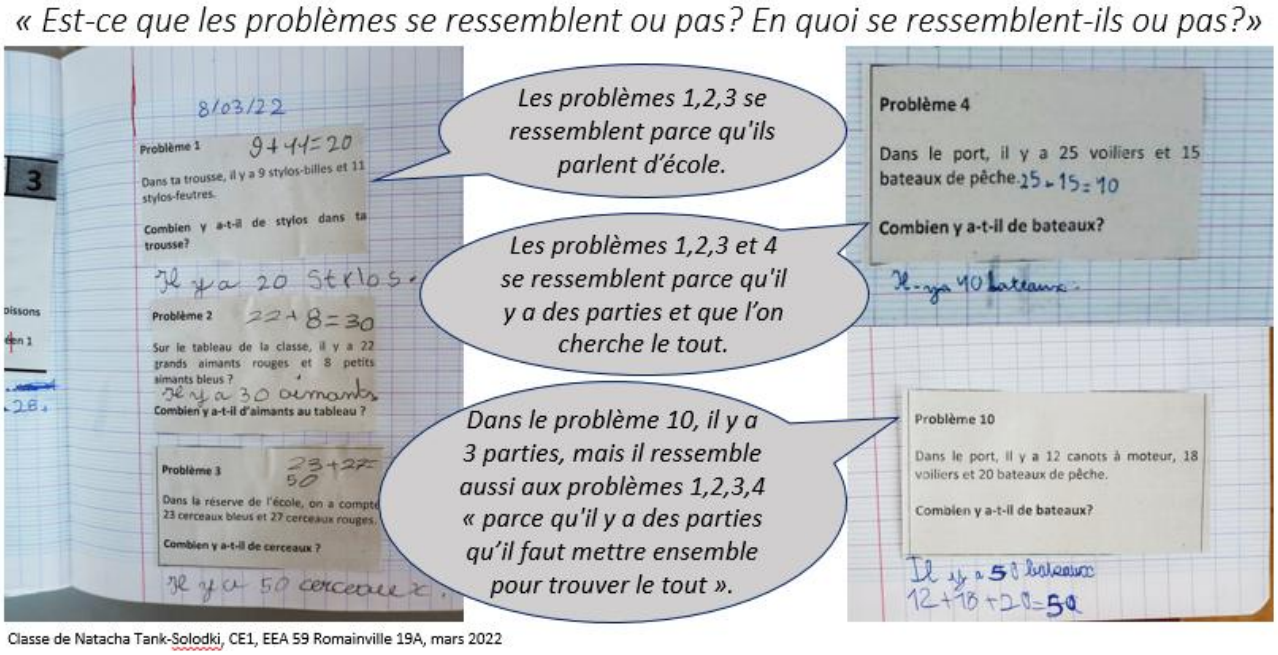


Figure 4. Séance de comparaison - Illustration

V - DISCUSSION

Dans cette partie, nous aborderons la question des effets de la formation tant du point de vue des enseignants que des formateurs. La question de l'impact de la formation sur les résultats des élèves n'est pas abordée. En effet, elle ne s'appuie pas sur des prises d'indices quantitatifs et qualitatifs suffisamment étayées et précises pour être ici traitée.

1 Du côté des enseignants

En l'absence d'un suivi outillé, les effets de la formation sur les enseignants sont complexes à mesurer. L'intégration de la séance de référence dans la pratique quotidienne demeure, *in fine*, une question de choix personnel. Certains enseignants s'en emparent, générant de nouvelles situations, expérimentant

même la démarche dans le champ des problèmes atypiques de dénombrement. D'autres infléchissent leur pratique privilégiant l'intégration d'objets circonscrits (affichage, progression, désignation générique parties-tout). Il est cependant possible d'envisager une modification globalement partagée de la perception de l'objet d'enseignement à deux niveaux. Le premier niveau concerne la question de la schématisation. Le second a trait à la dimension collective de l'action.

1.1 La pensée relationnelle

La centration de la formation sur l'appropriation et la mise en œuvre de la séance de référence aura eu un double effet. Tout d'abord, elle aura confronté les enseignants à la question de la schématisation. Les enseignants auront été conduits à envisager le schéma davantage comme « un projet d'enseignement » et « un objet d'apprentissage » que comme une production intermédiaire de nature individuelle à caractère transitoire, simple « objet à regarder » (Laparra et Margolinas, 2009). La mise en œuvre de la situation de référence dans les classes aura de plus contribué à déplacer le regard des enseignants sur l'enseignement de la résolution de problèmes arithmétiques. Elle les aura amenés à passer d'une « pensée opérationnelle » centrée sur les actions « d'ajout, de retrait, de partage, de répétition (…) » à « une pensée relationnelle » (Polotskaia, Gervais, Gélinas et Savard, 2023, p.20) privilégiant l'analyse et la recherche des relations entre les quantités. Par ailleurs, la situation d'homologie, en début de formation, aura montré, par la matérialisation de l'inconnue et sa mise en relation avec les données, l'intérêt de la traduction des données numériques selon la grandeur de longueur associée. L'effet visuel *(« On voit tout de suite la réponse ! »)* de la traduction graphique de la situation par une schématisation rectangulaire aura contribué à préparer ce renversement de regard.

1.2 La dimension collective de l'action

Paradoxalement, le choix d'une formation centrée sur un enjeu didactique précis et une démarche ciblée, articulée autour d'une séance spécifique, aura eu pour effet, par diffraction, d'élargir le champ des interrogations bien au-delà de la mise en œuvre de la démarche d'enseignement. La formation aura ainsi permis aux équipes enseignantes de se questionner tout autant sur la dimension collective de l'action et l'identification des objets de travail et de référence communs que sur une mise en œuvre individuelle de la démarche d'enseignement portée par la formation. L'intérêt d'une programmation de cycle, l'importance cardinale d'une désignation générique commune des données, matérialisée par les termes partie, tout, connu, inconnu, la cohérence des affichages de référence, la diffusion et l'utilisation du matériel de manipulation constituent quelques-unes des pistes d'un travail d'équipe et d'école à l'émergence duquel la formation, peut-être est-ce là son principal mérite, aura contribué.

2 Du côté des formateurs

Nous nous centrerons sur des questionnements didactiques restés en suspens et des pistes pédagogiques non explorées, en particulier la question du lien entre le matériel et le schéma à barre double ainsi que la place de la verbalisation de l'enseignant lors de la phase d'exploitation.

2.1 Renforcer l'effet de congruence entre le matériel de manipulation et le schéma à barre double

Lors des phases d'exploitation, la représentation du tout comme seconde barre « chapeautant » les différentes parties ne constitue pas une représentation qui va de soi. Il semble que l'introduction du schéma à barre double aurait été facilitée par un travail préalable d'enseignement des faits numériques. L'utilisation des réglettes Cuisenaire®, l'appui sur les situations d'apprentissage des compléments, qui mettent matériellement en jeu la symétrie des opérations et font apparaître une représentation avec deux barres figurant la relation d'égalité de longueurs entre le tout et la somme de ses parties, auraient contribué à la compréhension de la double représentation du tout et renforcer le sens du signe égal.

2.2 Outiller la verbalisation lors des phases collectives

Le dispositif de formation, centré sur les conditions de la mise en œuvre de la séance de référence, aura par un effet de polarisation excessive, privilégié l'appropriation de la consigne et le repérage des productions significatives au détriment de ce qui sera perçu avec le recul comme un point aveugle de la formation, la question de la verbalisation de l'enseignant lors des phases d'exploitation et d'institutionnalisation. Les modèles langagiers qui soutiennent les opérations de traitement et de conversion représentent pourtant un enjeu tout particulier de développement professionnel. Ils auraient gagné à être davantage explicités dans leur structure et dans leur enchaînement. Le relevé écrit des échanges oraux, la captation vidéo d'extraits de séances, auraient constitué un matériau de travail dont l'analyse aurait certainement contribué à enrichir le dispositif et permis sans doute de soutenir les enseignants dans la mise en œuvre autonome des phases collectives de la séance de référence.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Allard, C. et Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes au cycle 3. Cycle 3. Maths en ateliers.* Paris : Nathan.

Broin, P., Divisia, A. et Semanaz, Y. (2021). Un dispositif de formation pour construire collaborativement un outil d'enseignement au service de la réussite des élèves de CP et de CE1 en résolution de problèmes numériques. Dans *Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Actes du 47e Colloque COPIRELEM* (655- 667). Paris : ARPEME.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : *« ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». APMEP, Au fil des maths, 537.*

Claracq, I., Fayol, M. et Vilette B. (2022). Comprendre d'abord, calculer ensuite. Améliorer la résolution de problèmes en CM1. *ANAE, Approche Neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant, 180,* 1-10.

CSEN (2022). *Synthèse de la recherche et recommandations. De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique*. Consultée le 01-04-2024, Url : https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/CSEN_Synthese_structures-mutliplicatives_web.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 67-96.

Houdement, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des sciences de l'éducation, 36,* 7-34.

Houdement, C. (2016). Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes. Dans *Former et se former… Quelles ressources pour enseigner les mathématiques à l'école ?. Actes du 42e Colloque COPIRELEM*. Paris : ARPEME.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N, 69,* 31-52.

MEN (2020). Plan National de Formation des Référents Mathématiques de Circonscription. M@gistere. Moment 4. Partie 1. Règles de construction du schéma en barres.

Laparra, M., Margolinas, C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir? *Pratiques : linguistique, littérature, didactique. 143-144* (Numéro spécial : les écrits de savoir), 51-82.

MEN (2021). *Un guide fondé sur l'état de la recherche. Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. Consulté le 01-04-24, Url : https://eduscol.education.fr/media/3738/download

MEN (2022). *Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.* Consulté le 01-04-2024, Url : https://eduscol.education.fr/document/32206/download

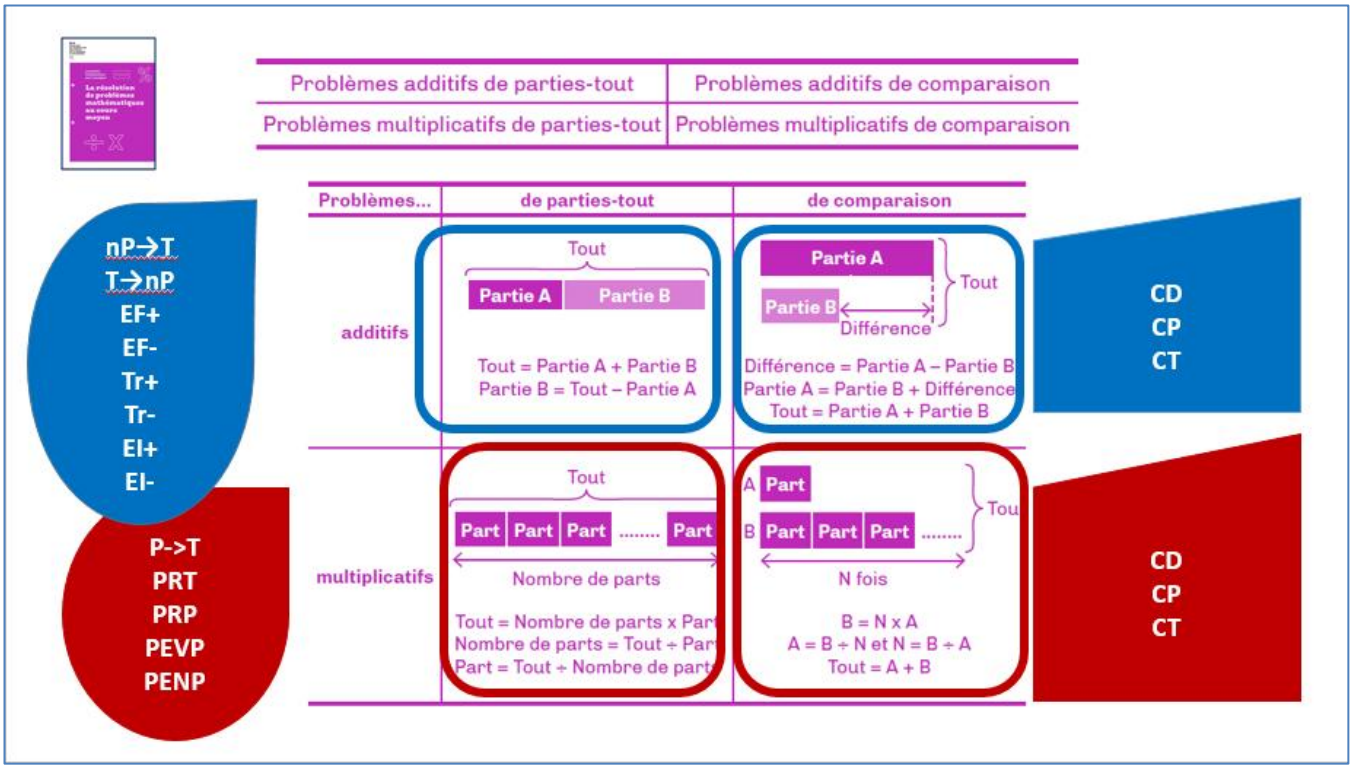
Polotskaia, E., Gervais, C., Gélinas, M-S. et Savard A. (2023). *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits de multiplication et de division*. Montréal, QC: JFD. Extrait. Consulté le 31-10-24. Url : https://api.pageplace.de/preview/DT0400.9782897991593_A47717764/preview-9782897991593_A47717764.pdf

Polotskaia, E. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques. Deux jeux pour apprendre. *Bulletin A.M.Q,* Vol. L, n°1, mars 2010. Consultée le 22-11-24. Url : https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/vol50/no1/article_polotskaia.pdf

Sander, E. Richard, J.F. (2015). *Influence des connaissances quotidiennes, du phénomène de congruence et apport du recodage sémantique.* CNESCO. Conférence de consensus numération : nombres et opérations, premiers apprentissages.

ANNEXE 1 - PROGRESSION EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES CYCLE 2

La progression concerne les problèmes élémentaires (Houdement, 2011, 2016) à structure additive et multiplicative, de type parties-tout (MEN, 2022, p.113), caractérisés par un énoncé court, une syntaxe simple et ne comportant aucune donnée superflue. La progression, dont la mouture initiale fut élaborée par un groupe de Conseillers pédagogiques de l'académie de Paris en décembre 2022, a été réactualisée en juin 2024, en tenant compte du projet de programme du cycle 2 d'avril 2024. C'est cette version réactualisée qui est présentée ici.



nP -> T ; T -> nP
Composition. Recherche de la valeur d'une partie ; de la valeur du tout.

EF+/-
Transformation. Recherche de la valeur de l'état final.

TR+/-
Transformation. Recherche de la valeur de la transformation.

EI+/-
Transformation. Recherche de la valeur de l'état initial.

CD
Comparaison. Recherche de la valeur de la différence.

CP
Comparaison. Recherche de la valeur d'une partie.

CT
Comparaison. Recherche de la valeur du tout.

P -> T
Parties égales recherche de la valeur du tout.

PRT
Produit rectangulaire. Recherche de la valeur du tout.

PRP
Produit rectangulaire. Recherche de la valeur d'une partie.

PEVP
Partage équitable. Recherche de la valeur de la part.

PENP
Partage équitable. Recherche du nombre de parts.

CD
Comparaison. Recherche de la valeur de la différence.

CP
Comparaison. Recherche de la valeur d'une partie.

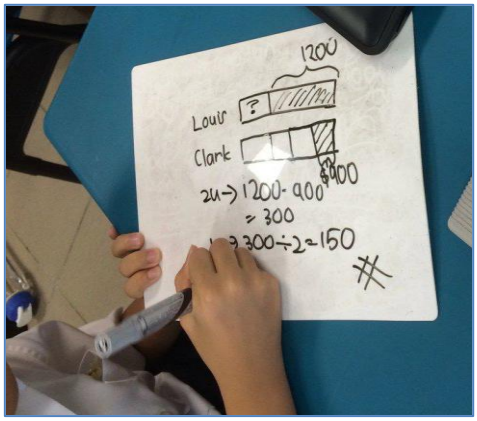
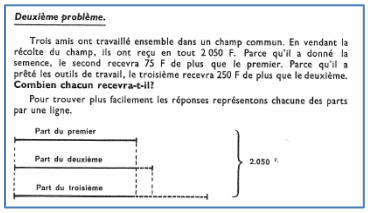
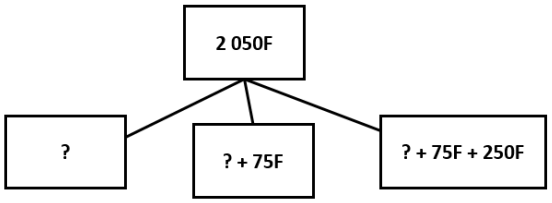
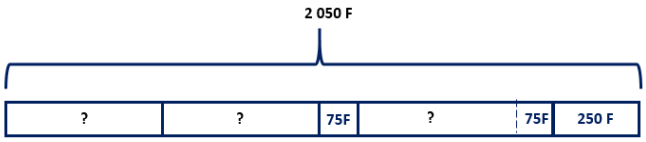
CT
Comparaison. Recherche de la valeur du tout.

CP	Période1	Période2	Période3	Période4	Période5
S1				P->T	PRT
S2			CD	P->T	PRP
S3		EF+	CD	PEVP	PEVP
S4	2P→T	EF+	CP	PENP	PENP
S5	2P→T	EF-	CP		
S6	T→2P	EF-			
S7	T→2P				

CE1	Période1	Période2	Période3	Période4	Période5
S1			CD	P->T	PRT
S2		TR-	CP	P->T	PRP
S3	3P→T	EI+	CP	PEVP	PEVP
S4	T→3P	EI+	CT	PENP	PENP
S5	EF+/-	EI-	CT	CD	CD
S6	EF+/-	EI-			
S7	TR+				

CE2	Période1	Période2	Période3	Période4	Période5
S1				P->T	CD
S2			P->T	PRT / PRP	CP
S3		CD	PRT / PRP	PEVP	CP
S4	nP→T / EF+	CP	PEVP	PENP	CT
S5	T→nP / EF-	CP	PENP		
S6	TR+/-	CT			
S7	EI+ /-				

ANNEXE 2 - SÉRIE DE PROBLÈMES – SITUATION D'HOMOLOGIE

	Enoncé	Commentaires
Problème n°1	« Dans un paquet de billes rouges, vertes et bleues, il y a 158 billes. Il y a 3 fois plus de billes rouges que de billes vertes et 3 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes vertes ? »	 D'après IGÉSR INSPECTION GÉNÉRALE DE L'ÉDUCATION, DU SPORT ET DE LA RECHERCHE
Problème n°2	« Louis et Clark ont chacun la même somme d'argent. Après que Louis a dépensé 1 200 $ et que Clark a dépensé 900 $, Clark avait 3 fois plus d'argent que Louis. Combien d'argent reste-t-il à Louis? »	 D'après Clivaz, S et Dindyal, J. (2018). Un aperçu du curriculum de mathématiques à Singapour. *Grand N, 102.*
Problème n°3	*« Trois amis ont travaillé ensemble dans un champ commun. En vendant la récolte du champ, ils ont reçu en tout 2050 F. Parce qu'il a donné la semence, le second recevra 75 F de plus que le premier. Parce qu'il a prêté les outils de travail, le troisième recevra 250 F de plus que le deuxième. Combien chacun recevra-t-il ? »* 	 Proposition de représentation rectangulaire sous forme de boites nombres. La mise en relation des données de type ensembliste ne traduit pas visuellement les relations entre les quantités et n'assure pas, a priori, l'unicité de valeur de l'inconnue.  Proposition de représentation rectangulaire de la grandeur associée à la grandeur longueur qui donne davantage de matérialité aux données numériques, qui montre les relations entre les données et permet par déplacement des rectangles de manipuler l'inconnue dont l'unicité est ici visuellement caractérisée.

UTILISER LE PLANETAIRE POUR MESURER ET REPRESENTER L'EVOLUTION AU COURS DU TEMPS DE LA DISTANCE ENTRE DEUX PLANETES

Vincent HEUSSAFF
Professeur des écoles, École Arthur Rimbaud, Chanteloup-les-Vignes
IREM de Paris
vincent.heussaff@ac-versailles.fr

Assia NECHACHE
Maîtresse de Conférences, CY Cergy Paris Université
LDAR, IREM de Paris
assia.nechache@cyu.fr

Emmanuel ROLLINDE
Maître de Conférences, CY Cergy Paris Université
LDAR, IREM de Paris
emmanuel.rollinde@cyu.fr

Résumé
Le planétaire (Abboud & Rollinde, 2021 ; Lapaire et al., 2025) est un outil permettant de faire vivre aux enfants le mouvement des planètes autour du Soleil avec leur corps. Il peut être utilisé dans l'apprentissage de notions mathématiques (Heussaff, Nechache & Rollinde, 2024).
Dans le cadre d'un projet de recherche action mené au cours de cette année scolaire avec trois classes du CE2 au CM2 de l'école Marsinval de Vernouillet, une séance portant sur la notion de grandeur prenant appui sur le planétaire a été construite puis mise en œuvre dans ces trois classes.
Dans cette séance, il a été proposé aux élèves de déterminer à quel moment envoyer une sonde spatiale depuis la Terre vers Mars afin qu'elle parcoure le moins de distance possible.
Après une séance découverte du planétaire, il leur a été proposé d'utiliser cet outil pour résoudre le problème. Les enfants ont d'abord dû comprendre la représentation des mouvements des planètes sur le planétaire afin de déterminer les positions simultanées de Mars et de la Terre au cours du temps. La durée est ici appréhendée dans le contexte d'une succession d'événements localisés dans le temps et dans l'espace. Ils ont ensuite pris les mesures de distance entre la Terre et Mars sur le planétaire au cours d'une année terrestre. Enfin, ils ont pu mettre en forme les données collectées dans un tableau, afin de construire un graphique présentant l'évolution de la distance entre les deux planètes au cours d'une année terrestre pour en déterminer le minimum.
A travers le contexte de l'astronomie, les élèves ont pu travailler sur la mesure de la grandeur distance et sur la collecte d'information correspondant à la grandeur temps, ainsi que l'utilisation de tableaux et de graphes pour mettre en relation ces deux grandeurs.

I - INTRODUCTION

La compréhension des concepts de grandeur et de leur mesure est essentielle dans la formation des élèves en mathématiques et en sciences au cycle 3, mais elle nécessite également des connaissances solides et nuancées chez les enseignants. Ces notions sont présentes dans les programmes scolaires français, mais demeurent complexes à appréhender dans leur dimension théorique et expérimentale. Passelaigue

(2011) indique que les professeurs des écoles se focalisent sur la mesure de certaines grandeurs (telles que la longueur et l'aire), abordant moins fréquemment la mesure de la grandeur temps à travers la « durée ».

Or, selon De Coster (2004), « notre conscience du temps est si intériorisée que nous avons tendance à oublier cet apprentissage du temps chez l'enfant. Nous perdons souvent de vue qu'il n'a pas les mêmes représentations et conceptions temporelles que l'adulte ». Ainsi, le concept de temps, qui fait partie des apprentissages fondamentaux dès le cycle 2, est souvent abordé de façon fragmentée dans les ressources pédagogiques. Mounsamy (2019) montre que la notion de durée, essentielle pour comprendre la succession des événements et pour effectuer des mesures temporelles, est parfois mal explicitée dans les manuels, compliquant pour les élèves l'appréhension des implications pratiques. Cette fragmentation complique l'enseignement du temps en tant que grandeur mesurable et entrave l'établissement de liens entre les concepts de durée et de succession dans des contextes concrets.

Enfin Pizarro et al. (2016) signalent que certains professeurs des écoles semblent favoriser des stratégies de mesure ou de comptage plutôt que des estimations. Maisch (2024) confirme que de nombreux professeurs débutants associent la mesure à la précision et perçoivent la grandeur comme quelque chose de flou et imprécis, ce qui met en lumière un besoin de formation spécifique sur la notion de mesure comme recueil de valeurs, intégrant la gestion de la variabilité et de l'erreur.

Ces constats soulignent l'importance d'une approche didactique renouvelée pour les enseignants de primaire, qui les prépare à transmettre à la fois des savoirs conceptuels sur les grandeurs distance et durée, mais aussi à en faire un objet d'expérimentation à travers un processus de mesurage et de mise en relation. L'objectif de cet article est donc de proposer une situation pédagogique particulière, autour de l'astronomie et d'un planétaire humain afin de permettre aux élèves de s'approprier ces concepts de manière concrète, tout en développant des compétences d'analyse et d'interprétation des données dans un contexte de mesure et de variabilité. Nous présentons une analyse a priori de cette situation, suivi de l'analyse des obstacles observés et des remédiations proposées lors de sa mise en œuvre dans la classe. Notre objectif est de permettre aux lecteurs de mettre en place cette situation.

Ainsi, lors de l'année scolaire 2023-2024, un projet de recherche action financé par l'INSPE a permis la construction puis la mise en œuvre en classe d'une séquence d'apprentissage autour du planétaire. Ce projet impliquant 3 classes du CE2 au CM2 de l'école Marsinval de Vernouillet a permis aux élèves de se familiariser avec cet outil avant de l'utiliser pour déterminer le meilleur moment pour envoyer une sonde de la Terre vers Mars. La séquence d'apprentissage permet de travailler le repérage dans le temps et dans l'espace, la mesure de distance et la collecte d'informations sur la grandeur durée et leur mise en forme, ainsi que la recherche de relations entre ces deux grandeurs, grâce à l'organisation de données numériques sous la forme d'un graphique.

II - LE PLANÉTAIRE HUMAIN

Le planétaire humain est un outil pédagogique permettant aux enfants de vivre le mouvement des planètes autour du Soleil avec leur corps. Cet outil permet de contextualiser des notions de physique et de mathématiques via l'astronomie et une approche incarnée (Lapaire et al., 2025 ; http://planetaire.overblog.com), ou encore de « faire des mathématiques en plein air en marchant dans le Système Solaire » (Abboud & Rollinde, 2021, p. 37). Il a été diffusé en France et en Europe par l'association F-HOU (Rollinde et al., 2019 ; http://handsonuniverse.org/france).

1 Les objets représentés

Le planétaire humain représente les différentes positions des quatre planètes les plus proches du Soleil dans un référentiel héliocentrique (elles constituent le système solaire interne). Chacune dispose d'un code couleur afin de pouvoir suivre la succession de ses positions lorsqu'elle tourne autour du Soleil

(médaillons de couleur selon la couleur de la planète), formant ainsi son orbite discontinue (Cf. Figure 1). Mercure figure en gris, Vénus en jaune, la Terre en bleu et Mars en rouge. Le Soleil est positionné au centre dans l'un des foyers des ellipses que forment les orbites de tous les objets du système solaire. L'orbite d'une comète (Encke) est également représentée sur le planétaire humain (en vert). La position de départ est représentée par l'image de la planète. Elle correspond à la position relative de la planète par rapport au Soleil à la date figurant en légende (21 mars 2019 sur le modèle de la figure 1). L'intervalle de temps entre deux positions, noté en légende, est de 16 jours terrestres.

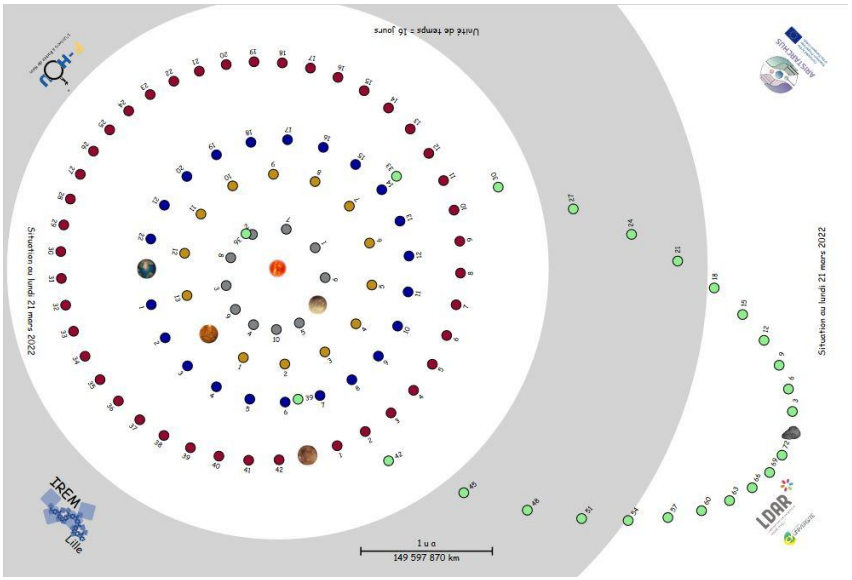


Figure 1. Image du planétaire utilisé pour l'activité décrite dans cette contribution

S'agissant d'une représentation à échelle réduite du système solaire interne (les quatre planètes telluriques – Mercure, Vénus, Terre et Mars, situées avant la première ceinture d'astéroïdes autour du Soleil), il faut souligner plusieurs points d'importance. Premièrement, si les échelles de distance sont respectées, ce n'est pas le cas pour les échelles de taille des planètes comme du Soleil. Deuxièmement, la période de révolution n'est, a priori, pas un multiple exact de l'échelle de temps. Ainsi, lorsque les planètes font leur première révolution à partir du point 0 et à la date initiale indiquée, les positions au cours du temps sont exactement celles indiquées sur le planétaire. Par contre, lorsqu'elles arrivent au dernier point, la durée réelle entre ce dernier point et le point de départ n'est pas égale à l'intervalle de temps entre deux positions. Or, la planète – sur le planétaire – continue à suivre les points en supposant un intervalle de temps constant. Ceci crée un décalage entre la position de la planète sur le planétaire et la position réelle dès la seconde révolution autour du Soleil. Ce décalage est de l'ordre de quelques jours et ne sera pas pris en considération dans la suite.

La représentation du Système Solaire, espace à trois dimensions, sur un dessin à deux dimensions, peut poser question. Cependant, les orbites des objets du Système Solaire sont essentiellement coplanaires, pour des raisons liées aux processus dynamiques lors de sa formation. Il est donc raisonnable de ne pas tenir compte des différentes inclinaisons des plans orbitaux. Cependant, l'absence de troisième dimension va poser des difficultés pour expliquer certains phénomènes, telles que les saisons (dues à l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre) ou les « transits planétaires » (voir Rollinde, 2019b).

2 Format et choix de représentation

Les choix de représentation effectués conduisent à l'existence de différents formats pour le planétaire humain. Le modèle que l'on qualifiera de classique consiste en une bâche de 3m par 6m logeant assez aisément dans une salle de classe standard. Il est également facilement transportable dans une valise permettant son utilisation dans différents lieux au cours d'une année. Un format plus important (12m par 12m) permet de faire également figurer l'orbite de Jupiter ainsi qu'une comète supplémentaire

(Churyumov-Gerasimenko) mais demande plus d'espace et est bien moins facilement transportable. Plusieurs planétaires humains ont également été peints dans des cours d'école ou d'autres lieux. Cela permet de faire figurer également les autres planètes du système solaire mais suppose son utilisation sur le lieu de construction limitant la diffusion de cet outil. Des modèles au format A3 permettent également un réinvestissement de ce qui a été vu lors des séances sur le planétaire humain mais ne permettent pas d'utiliser la dimension kinesthésique de cet outil.

Plusieurs choix d'unités de temps ont été fait. Le plus courant correspond à 16 jours terrestres. Il est également possible de diviser avec exactitude l'orbite de la Terre en 24 positions. Cela présente l'avantage de revenir exactement à la même position pour la Terre au bout d'une révolution, mais produit une unité de temps non entière plus difficile à appréhender pour les élèves. Cependant, elle peut être raisonnablement considérée égale à 15 jours terrestres.

Concernant l'unité de longueur, le choix le plus courant est de représenter la distance Terre-Soleil (définition d'une unité astronomique) par un mètre, ce qui facilite les conversions d'échelle par la suite.

3 La découverte du planétaire

Le travail sur le planétaire humain commence par une première séance de découverte (voir les séquences proposées sur le site du projet européen Aristarchus, https://aristarchusproject.eu/e-learning/). Lors de celle-ci, les enfants vont d'abord découvrir l'outil en identifiant les différents éléments présents dessus (planètes, médaillons de couleur figurant les différentes positions des planètes au cours du temps, comètes, unités de temps et de longueur).

Une analyse détaillée de cette séance fera l'objet d'une publication en cours de préparation. Il apparaît dès à présent que les élèves de cycle 3 sont capables de retrouver tous les éléments en se déplaçant librement sur le planétaire humain. Pour les élèves de cycle 2, certains éléments peuvent être laissés de côté pour être évoqués si besoin plus tard. C'est notamment le cas pour l'unité de longueur.

Une fois les différents éléments explicités aux élèves, les élèves sont invités à réaliser la chorégraphie des planètes. Pour cela, ils devront se déplacer sur le planétaire humain en respectant certaines règles. La première correspond au sens de révolution des planètes sur leur orbite qui est indiqué par la numérotation des différentes positions. La seconde concerne le rythme de déplacement. Il est ainsi demandé de se déplacer sur le médaillon de couleur suivant à chaque clap dans les mains ou en utilisant un métronome. Lors des premières chorégraphies, les élèves ont tendance à s'arrêter à chaque disque, et à faire un pas rapide en entendant le « clap ». L'objectif est de les amener à un mouvement continu au cours duquel ils feront un pas entre deux claps et poseront un pied sur un disque à chaque « clap ». Le rythme doit être choisi de manière que Mercure (la planète la plus rapide) ne doive pas courir et que Mars (la planète interne la plus lente) ne soit pas trop lente.

Lors de la séance découverte, les élèves ne peuvent être tous en même temps sur le planétaire humain. Dans l'idéal, il devrait y avoir un élève sur le Soleil et un sur chaque planète soit cinq élèves en tout sur un modèle de taille classique. Il est toutefois possible de mettre plus d'élèves en action avec deux élèves sur Vénus, et jusqu'à quatre pour la Terre et six pour Mars. Toutefois, cela réduit la lisibilité du mouvement et les conclusions sur la variation de la vitesse en fonction de la distance au Soleil que les élèves pourront en tirer. Il est possible également de faire se déplacer un petit groupe d'élèves sur chaque planète successivement en gardant le même rythme pour leur permettre de ressentir plus clairement les différentes vitesses (Rollinde, 2019a[1]). C'est pourquoi, selon notre expérience, l'optimal est de travailler lors de ces séances avec un groupe de 10 à 15 élèves. La moitié sera alors sur le planétaire humain tandis que l'autre moitié se retrouvera dans le rôle d'observateurs avant d'échanger les rôles.

[1] Pour une version abrégée et en français du « dictionnaire du planétaire » proposée par Rollinde et al. (2020), voir le site planetaire.overblog.com

Il est important de souligner que les deux rôles sont essentiels à la compréhension du fonctionnement du planétaire. Ils doivent à la fois expérimenter avec leur corps mais aussi regarder le mouvement en tant qu'observateurs extérieurs.

Cette séance peut se mener avec des élèves allant du cycle 2 au cycle 4 et même des adultes. Il est également envisageable de la réaliser en fin de cycle 1 en prenant le temps de construire la chorégraphie (par exemple sur plusieurs séances plus courtes) et en mettant de côté les notions trop complexes comme les unités de mesure de longueur. La durée typique est de 45 minutes en cycle 2. Cette durée permet d'optimiser l'attention d'un élève de cet âge en alternant trois phases de découverte ou mise en action individuelle de 10 minutes avec trois phases collectives de mise en commun de 5 minutes. Avec des adultes, une quinzaine à une vingtaine de minutes suffisent à réaliser cette phase de découverte. Ce temps correspond ainsi à un temps raisonnable de médiation scientifique dans le cadre d'une manifestation grand public proposant le planétaire. Il correspond également à une durée raisonnable d'explicitation de l'utilisation d'un outil pédagogique entre pairs sur un temps informel.

III - LE PROJET

1 Question de recherche

La recherche présentée ici porte sur la mesure par les élèves de la grandeur distance et la collecte d'informations sur la grandeur durée à l'aide du planétaire humain. Nous ne nous intéressons pas à l'acquisition de cette approche didactique et du planétaire par les enseignantes, mais à l'impact sur les élèves de cette séance, mise en place par les enseignantes. Ainsi, par l'observation des vidéos et l'analyse croisée des enseignants et des chercheurs, nous interrogeons les obstacles rencontrés par les élèves et les solutions mises en œuvre par les enseignantes. A travers ces obstacles, nous interrogeons l'intérêt de l'usage du planétaire humain pour améliorer la compréhension des grandeurs distance et durée, ainsi que du processus de prise de mesures par des élèves de cycle 2 et cycle 3.

2 Participants et chronologie

La séquence présentée par la suite a été construite et mise en œuvre en classe dans le cadre d'un projet de recherche-action financé par l'INSPE dont l'objectif était la production d'une séquence d'apprentissage autour du planétaire. Ce projet a été proposé et coordonné par deux chercheurs en didactique de Cergy Paris Université : Assia Nechache (mathématiques) et Emmanuel Rollinde (Physique). Il a impliqué trois enseignantes de l'école Marsinval de Vernouillet Mesdames Margot Douglas, Cécile Malingrez et Catarina Januario et un enseignant déjà utilisateur du planétaire (Vincent Heussaff).

Le temps de formation de 12h (11h + 1h de travail en équipe) proposé a été inclus dans le cadre des 18h de formation annuelle des professeurs des écoles. Nous avons conçu et mis en œuvre un dispositif de formation inspiré de celui des Micro-Teaching Lesson Study (Fernandez et Robinson, 2006). Ce dispositif s'insère dans un processus de développement professionnel, favorisant une alternance entre les mises en pratique dans la classe, et les retours ou apports de connaissances avec les formateurs. Cette alternance nous a également permis un recueil de données de recherche sur la mise en place d'une séquence d'apprentissage autour des grandeurs distance et durée par les enseignantes et son impact sur les élèves.

Il s'est initié en présentiel avec la présentation du planétaire aux enseignantes (15/11/2023) qui leur a permis d'appréhender la séance de découverte de cet outil qu'elles devront réaliser ensuite avec les élèves. Au cours du mois de janvier, cette séance a ainsi été mise en œuvre et filmée en classe. Ces vidéos ont permis de réaliser un retour sur cette séance de découverte (2h en distanciel le 10/01/2024). Un second temps de réflexion (3h en distanciel le 07/02/2024) a permis la construction de la séquence d'apprentissage qui a été mise en œuvre et filmée en classe sur le mois de mars. Enfin, un dernier temps (3h en présentiel le 13/03/2024) a permis de réaliser un retour sur les productions des élèves à l'origine du travail présenté par la suite.

3 Séquence d'apprentissage

La séquence d'apprentissage proposée aux élèves avait pour objectif de déterminer le meilleur moment pour lancer une sonde depuis la Terre vers Mars. Cela revient à se demander quand la distance entre les deux planètes est la plus courte en utilisant les orbites représentées sur le planétaire.

Pour cela, une première séance a permis de faire découvrir aux élèves le planétaire suivant les modalités présentées en II-3. La suite de la séquence d'apprentissage s'est décomposée en quatre objectifs intermédiaires. La première étape avait pour objectif d'apprendre à se repérer simultanément dans le temps et dans l'espace en comprenant le fonctionnement du modèle en réduction du système solaire que constitue le planétaire. Ensuite, il s'agissait de réaliser les mesures de distance entre la Terre et Mars en fonction du temps. Une fois les données numériques complétées, il a été question de les mettre en ordre sous la forme d'un graphique. La dernière étape consistait à utiliser le graphique produit pour répondre à l'objectif principal.

4 Analyse a priori et hypothèses

Nous faisons l'hypothèse qu'en se confrontant aux difficultés qu'ils rencontreront, les élèves pourront identifier les étapes par lesquelles ils doivent passer avant de trouver la solution. Toutefois, cela pouvant s'avérer complexe, un guidage plus important peut être envisagé dès le départ. Le mode d'organisation sous forme de graphique étant rarement abordé dans le parcours scolaire des élèves, nous pouvons supposer que cela constituera un obstacle. Associer les deux grandeurs durée et distance est également un obstacle probable car les grandeurs sont travaillées indépendamment dans les activités traditionnelles en classe. Nous faisons l'hypothèse que le passage par l'observation directe (pour les acteurs sur le planétaire) et indirecte (pour les élèves en dehors du planétaire) facilitera la compréhension de cette relation entre les deux grandeurs. Les mesures de distance ne devraient pas poser de difficultés particulières, car l'usage de règle pour mesurer des distances entre deux points est classique dès le cycle 2. Cependant, si la mesure sur l'espace de la feuille est classique, celle sur l'espace d'une bâche telle que le planétaire l'est moins. Les enseignants proposent majoritairement des mesures sur feuilles et oublient souvent pour des raisons pratiques la mesure dans des espaces plus grands. Nous nous demandons également si les caractéristiques de ces « points » représentés par des disques de diamètre important (quelques centimètres) sur une grande bâche vont engendrer naturellement une discussion sur le protocole de mesure, et donc sur les incertitudes associées. Enfin, les enseignantes devront probablement aider pour le passage des mesures à la construction d'un graphe. Pour conclure, la découverte de la distance minimale devrait être facilitée par l'analyse visuelle du graphe, qui est probablement plus directe que la lecture d'un tableau de mesures.

Les deux premiers objectifs (chorégraphie et mesure) ont été l'objet d'une séance tout comme les deux derniers (construction du graphique et interprétation). Il est toutefois possible d'étaler le travail sur trois ou quatre séances avec un seul objectif par séance. Cela dépend du temps disponible, du niveau de concentration des élèves mais aussi du niveau de classe.

Par la suite, nous détaillerons les quatre objectifs intermédiaires en mettant en avant les productions des élèves, les difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre, les solutions apportées pour y remédier et les perspectives d'amélioration de la séquence d'apprentissage.

IV - SE REPÉRER SUR LE PLANÉTAIRE DANS L'ESPACE ET DANS LE TEMPS

Le planétaire est un modèle en réduction du système solaire concernant à la fois les échelles spatiale et temporelle. En effet, la distance Terre-Soleil d'une unité astronomique correspond à 1m sur le planétaire. La réduction de l'échelle spatiale est directement perceptible par les élèves, cependant la représentation mentale que l'on peut avoir de distances à l'échelle astronomique n'est pas évidente.

La réduction de l'échelle temporelle est moins directement perceptible. En effet, lors de la chorégraphie, il faut comprendre que la durée perçue pendant la chorégraphie entre deux claps de main ou deux pulsations d'un métronome correspond à une durée réelle pour le Système solaire de 16 jours terrestres. Cette réduction peut s'expliciter d'ailleurs plus facilement pour les élèves à partir du cycle 3 en passant par la définition d'une année (révolution de la Terre autour du Soleil). Ils perçoivent alors la différence de temps vécu entre une année réelle et une année sur le planétaire (24 claps de main soit environ 24 secondes).

Tout l'enjeu de la seconde séance réalisée avec les élèves consiste à leur permettre de se repérer dans l'espace et dans le temps sur le planétaire en appréhendant la réduction simultanée de ces deux échelles.

1 Les difficultés rencontrées et les productions des élèves

Pour cela, une fois la séance de découverte effectuée, il s'agit de réaliser la chorégraphie sur le planétaire uniquement avec la Terre et Mars soit un élève sur chaque position. Les autres élèves sont alors placés en position d'observateurs. La consigne doit être mise en relation avec l'objectif final de la séance à savoir : déterminer le moment le plus opportun pour envoyer une sonde de la Terre vers Mars soit parcourir pour cette dernière le moins de distance possible. La consigne est alors de suivre le mouvement de la Terre et de Mars pour repérer à quel moment ce critère est atteint.



Figure 2. Chorégraphie de la Terre et de Mars.



Figure 3. Proposition de distance minimale Terre-Mars

Si lors de la chorégraphie, le positionnement sur le planétaire est correct pour tous les binômes Terre-Mars (les élèves se déplacent bien de point en point, et ils avancent chacun d'un point en même temps, Figure 2), cela ne signifie pas pour autant que la compréhension des échelles temporelles et spatiales soit parfaitement claire. En effet, comme cela est visible sur la figure 3, l'erreur commise par le groupe classe (cette phase est collective) est de considérer l'orbite formée par la succession des disques de couleur de la Terre et de Mars comme un tout, soit de prendre en compte uniquement l'échelle spatiale en oubliant l'échelle temporelle. Ainsi, l'identification du moment où la distance entre les deux planètes est minimale est proposée à l'endroit où les deux orbites sont les plus rapprochées soit entre la position initiale de Mars et la position 18 de la Terre.

2 La remédiation envisagée

Pour remédier à cette difficulté, il faut alors prendre un temps de réflexion pour revenir à la compréhension de la chorégraphie des planètes et à la signification du pas de temps. La réponse proposée peut alors être questionnée et sa réfutation justifiée. La distance minimale ne peut être identifiée entre la position initiale de Mars et la position 18 de la Terre car les planètes ne peuvent se trouver en cette position au même moment. Il faut ainsi prendre en compte l'aspect temporel du déplacement.

Pour vérifier la compréhension de cet aspect du planétaire, l'activité suivante a été proposée aux élèves : 1) Demander à un élève de se placer sur la position 6 de la Terre. 2) Demander à un autre élève de se placer à la position occupée par Mars au même moment. L'élève en question devra alors aller sur la

position 6 de Mars. En renouvelant cette activité avec plusieurs élèves pour différentes positions de la Terre (entre 0 et 24), cela permet de faire émerger le fonctionnement de la chorégraphie sur le planétaire et de conclure sur l'institutionnalisation suivante : la mesure d'une distance sur le planétaire humain ne peut se faire qu'entre les positions occupées au même moment par les deux objets étudiés.

Pour approfondir la compréhension du fonctionnement du planétaire, il est possible de demander aux élèves où est située la Terre quand Mars se trouve sur une position au-delà de 24 (30 ou 40 par exemple). Cela revient à identifier la position 30 ou 40 de la Terre et permet de retravailler la cyclicité du mouvement de révolution des planètes autour du Soleil. Ainsi, la position 30 de la Terre équivaut à la position 30 – 24 = 6. La Terre a ainsi déjà réalisé une première révolution autour du Soleil lorsque Mars arrive à la position 30. Un même travail peut également se faire avec les autres objets représentés (Mercure, Vénus ou la comète). Pour le Soleil, la question peut alors se poser de l'absence de changement de position. C'est alors une occasion de rappeler que le modèle utilisé pour la représentation du planétaire est réalisé dans le cadre d'un référentiel héliocentrique soit en considérant le Soleil comme immobile pour ne regarder que le mouvement des objets du système solaire autour de ce dernier.

V - MESURER DES DISTANCES SUR LE PLANÉTAIRE

1 Les difficultés rencontrées

Une fois le fonctionnement des échelles spatiales et temporelles compris par les élèves, l'étape suivante consiste à réaliser les mesures de la distance Terre-Mars au cours du temps sur le planétaire. Une première approche de mesure sur le planétaire peut être réalisée avec la mesure de la distance entre la Terre et le Soleil qui présente l'intérêt d'être déjà connue et figurée sur le planétaire à travers l'échelle représentant une unité astronomique. Cette mesure permettra de valider le protocole de mesure choisi par les élèves.

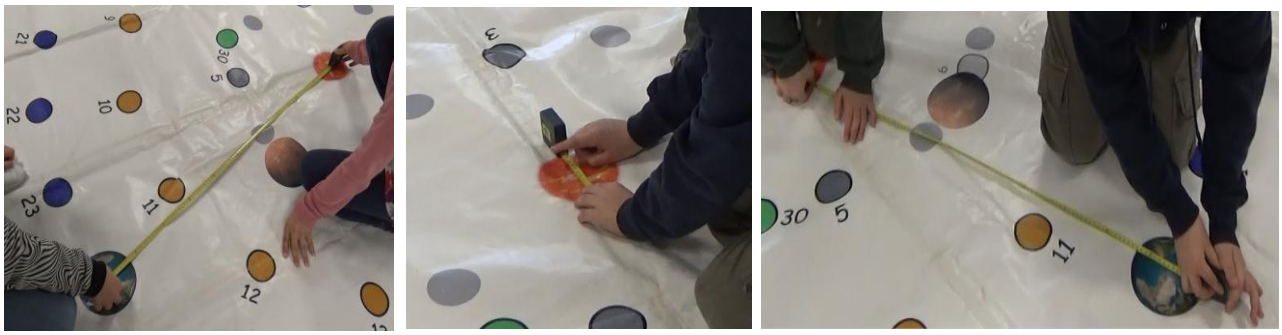


Figure 4. Mesure centre-centre (gauche). Recherche du centre (milieu). Mesure bords extérieur-intérieur (droite).

Très rapidement, la figuration des positions des objets représentées à travers des disques de couleurs questionne les élèves. La première difficulté rencontrée est en effet de savoir comment placer les instruments de mesure (qui peuvent être des mètres ou des bouts de cordes, nous y reviendrons plus tard). Une première méthode consiste alors à mesurer la distance entre les centres des disques de couleur (figure 4, gauche) ce qui nécessite tout d'abord de déterminer le centre des disques (figure 4, centre). Une autre solution consiste à utiliser les bords des disques de couleur (figure 4, droite) pour positionner l'instrument de mesure. Cependant, cette solution n'est valable que pour mesurer la distance parcourue entre deux disques de couleur sur une même orbite. Elle n'est pas valable pour la position 0 qui est illustrée par un disque de diamètre supérieur aux autres. Elle n'est pas non plus valable pour la mesure de distance entre le Soleil et une position car le disque du Soleil n'a pas non plus le même diamètre…

Une autre possibilité plus complexe consiste à prendre les bords intérieurs des deux disques ce qui permet d'obtenir une valeur minimale de la distance ou les bords extérieurs pour obtenir alors une valeur

maximale. Ces deux solutions permettent d'entamer les discussions sur les erreurs de mesures en plaçant sur les valeurs moyennes obtenues des barres d'incertitude.

2 Les productions des élèves

Le protocole choisi par les classes lors du projet a été la mesure avec un mètre entre les bords intérieurs des disques de couleur (voir figure 5 qui montre que la main de l'élève est situé sur le bord et non pas au centre du disque) ce qui donne pour chaque couple de positions Terre-Mars une valeur minimale de la distance. Un exemple de tableaux de mesures réalisées est présenté en figure 6. La consigne donnée par les enseignantes a été de ne mesurer qu'au cours d'une année terrestre. Nous remarquons que les élèves semblent avoir bien compris que, pour chaque mesure, un seul numéro est associé au couple Terre-Mars.

Il est important de souligner qu'une fois la discussion réalisée avec les élèves sur le protocole de mesures à adopter et ce dernier défini en collectif, la phase de prise de mesures des différents couples de position Terre-Mars peut se dérouler très rapidement avec plusieurs binômes (deux ou trois) travaillant en parallèle et en se répartissant les différentes mesures. Pour une discussion sur l'erreur de mesure, il est toutefois important que plusieurs binômes réalisent les mesures sur les mêmes couples de position afin de disposer d'un panel de mesures sur chaque couple.

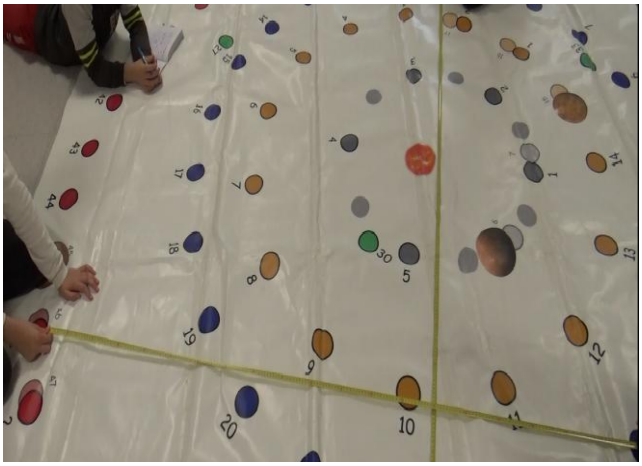


Figure 5. Mesures de distance par les élèves.

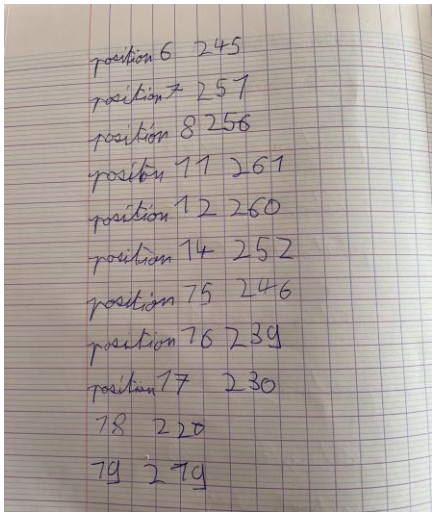


Figure 6. Exemple de relevés de mesures.

VI - ORGANISER LES MESURES SOUS LA FORME D'UN GRAPHIQUE

Une fois les mesures organisées sous la forme d'un tableau, une seconde séance en classe sans la présence du planétaire doit permettre d'organiser les mesures collectées sous la forme d'un graphique.

1 Les difficultés rencontrées et les productions des élèves

La première étape a été de convertir les mesures dans une même unité. Par exemple, les mesures ont parfois été prises sous la forme 2 m et 45 cm qui doit alors être convertie en 245 cm. Ce travail peut donc être proposé en fin de cycle 2 et surtout en cycle 3 en tant que réinvestissement de la conversion de longueurs. Il est possible, mais inutile ici, de demander aux élèves de calculer les distances réelles en unité astronomique. Une fois ce travail préparatoire réalisé, il faut alors reporter les mesures sur un graphique. Lors de cette mise en œuvre, les élèves ont alors été confrontés à plusieurs difficultés.

La première est de bien comprendre la nature des données collectées. Pour cela, il est important de faire le lien avec l'objectif principal. Cela permet de mettre en évidence les deux grandeurs à considérer. La première est la plus facilement perçue par les élèves : la distance. En effet, il est question de trouver la distance minimale entre la Terre et Mars. De plus, les élèves mesurent la distance entre la Terre et Mars

sur le planétaire avec un mètre et collectent ces données. Cela rend naturelle leur utilisation dans le graphique.

La seconde est moins directement évoquée dans l'objectif puisqu'il s'agit de trouver à quel moment envoyer la sonde. De plus, la grandeur temps n'a pas été mesurée par les élèves mais simplement collectée. Cette collecte ne fait d'ailleurs pas apparaître une unité de mesure du temps mais simplement le numéro d'une position. Il faut donc bien comprendre à quoi correspondent ces numéros pour y voir la trace de données temporelles à placer sur le graphique. Pour faciliter le travail des élèves, il est possible de guider très rapidement en cours de séance la construction du graphique en proposant la nature des axes. En abscisses, le temps soit les numéros des positions successives (qui est le même pour les planètes Terre et Mars pour une durée inférieure à une année terrestre) et donc un pas de temps de 16 jours terrestres. En ordonnées, les valeurs de la distance entre la Terre et Mars mesurées sur le planétaire en cm.

Une fois cette première étape franchie, les élèves doivent faire preuve d'anticipation et d'organisation. Pour que le graphique soit visible, il faut ainsi que l'origine de l'axe des ordonnées ne soit pas 0 cm mais un peu en dessous de la valeur minimale mesurée. Il faut aussi choisir une échelle adaptée. Toutes ces questions fondamentales dans la construction d'un graphique peuvent être difficiles à appréhender lorsqu'il s'agit d'une première confrontation avec ce mode d'organisation des données. C'est pourquoi, il peut être judicieux de mettre le doigt sur ces difficultés et aiguiller les élèves vers les solutions à apporter après une première phase de recherche et de confrontation à ces difficultés.

Un exemple de graphique produit par les élèves est présenté sur la Figure 7. On peut y voir en rouge l'origine de l'axe des ordonnées différente de 0 (200 cm) soit environ 20 cm en dessous de la valeur minimale mesurée sur le planétaire. Sur l'axe des abscisses, le temps n'apparaît pas directement puisqu'il s'agit des numéros des couples de positions relevées lors des mesures. Il aurait été souhaitable d'ajouter sur le graphique un axe du temps (en jours terrestres) ou les dates associées en dessous de chaque numéro. Il était également possible d'ajouter une légende précisant la date initiale au numéro 0, et la durée de 16 jours entre deux numéros. Ce point est d'importance pour l'exploitation du graphique afin de répondre à la question initiale qui porte sur le moment idéal pour envoyer une sonde.

Les points de mesure entourés de violet peuvent être sujets à une discussion. En effet, on voit visuellement qu'ils s'écartent d'une courbe qui se dessinerait avec les autres points. La question des erreurs de mesure peut ainsi être mise en avant, complétant la discussion sur la méthode de mesure de l'étape précédente. Il s'agit ici probablement d'une erreur dans le protocole, et non pas d'une incertitude sur la mesure elle-même. Une comparaison des graphes obtenus par chaque groupe aurait permis de

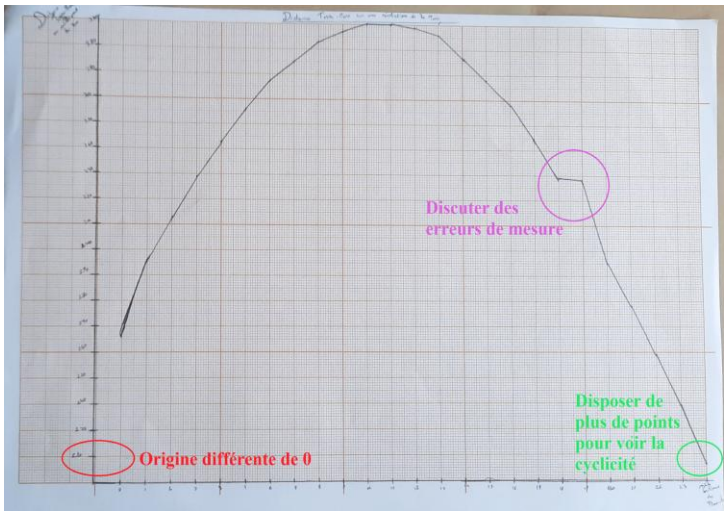


Figure 7. Exemple de graphique réalisé par les élèves.

conclure sur l'origine de l'erreur. Celle-ci n'a pas été menée pour des raisons de temps, mais également pour ne pas surcharger cognitivement les élèves dans une activité déjà complexe.

2 Une autre solution pour la prise de mesures facilitant la construction du graphique

Le travail réalisé nécessite des compétences qui en sont aux prémices de construction en début du cycle 3, ce qui peut poser des difficultés aux élèves. Ce travail peut donc se présenter sous la forme d'une situation problème résistante dans laquelle les élèves sont emmenés à se questionner, à essayer par tâtonnement, afin d'arriver, après un étayage plus ou moins important, à trouver la solution. Cette phase de construction du graphique nécessite donc d'y consacrer un temps suffisant afin que tous puissent prendre en considération les enjeux et bien comprendre les solutions apportées aux difficultés rencontrées.

Toutefois, il est possible de choisir un autre protocole lors des prises de mesures afin de faciliter par la suite la construction du graphique. Au lieu de mesurer avec un mètre, il est possible avec les élèves de collecter les distances en coupant des bandes de papier ou des bouts de ficelle à la longueur correspondant à la distance Terre-Mars pour chaque couple de positions. En légendant alors les bandes obtenues avec les numéros correspondants, il sera possible de construire directement et visuellement le graphique en plaçant au tableau ou sur une affiche les bandes dans l'ordre des positions. Le travail principal des élèves consistera alors à retrouver les axes des abscisses et des ordonnées sur le graphique ainsi formé afin d'en comprendre le sens.

Une telle solution permet d'éviter la conversion des mesures et le questionnement sur les échelles auxquels les élèves se trouvent confrontés dès qu'il s'agit de travailler avec des données numériques. Cela permet ainsi de proposer ce travail en cours de cycle 2 et de réaliser une première approche de la mise en forme de données sous forme de graphique.

VII - DÉTERMINER QUAND ENVOYER UNE SONDE VERS MARS

1 Les productions des élèves et les difficultés rencontrées

Une fois le graphique construit, il est temps d'utiliser cet outil afin de répondre à la question initiale à savoir : quel est le meilleur moment pour envoyer une sonde sur Mars soit lorsque la distance Terre-Mars est la plus courte ? Un exemple de réponse fournie par les élèves est présenté en figure 8.

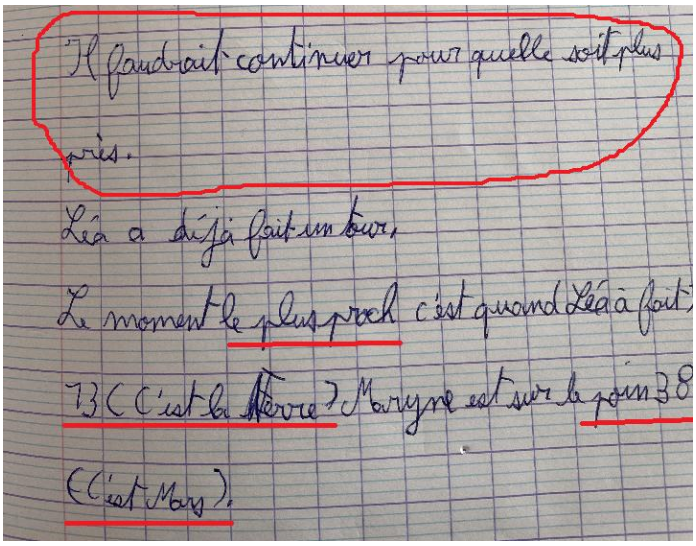


Figure 8. Exemple de réponse à la question de l'objectif principal.

L'exploitation du graphique permet de repérer la position correspond à la distance minimale qu'il est cependant possible d'extraire directement des données numériques. On voit dans la réponse apportée

par les élèves tout l'intérêt de la mise en forme visuelle sur un graphique. Dans ce cas, apparaît ainsi une tendance encourageant l'extrapolation ressentie dans l'expression « il faudrait continuer pour qu'elle soit plus près ». Apparaît également le lien avec la chorégraphie des planètes réalisée sur le planétaire faisant suite à l'extrapolation. Cela permet aux élèves de conclure sur la nécessité de disposer de plus de points de mesure pour apporter une réponse à cette question en allant au-delà d'une première révolution de la Terre autour du Soleil (« Léa a déjà fait un tour ») comme ressenti lors de la chorégraphie des planètes. Ainsi, lors de la chorégraphie, les élèves ont pu constater que la proximité entre leurs deux corps (donc les deux planètes) était maximale pour les positions 13 et 38 (« Le moment le plus proche c'est quand Léa a fait 13 (C'est la Terre) Maryne est sur le point 38 (C'est Mars). »). Sur le graphique, cette configuration n'est pas visible car elle correspond à une seconde révolution de la Terre autour du Soleil. Cette position ne doit pas être confondue avec la position 13 de la Terre lors de la première révolution. La confusion possible montre l'importance de mettre en abscisses le temps et non le numéro des positions qui devient ambiguë dès lors qu'il y a une seconde révolution de l'une des planètes.

2 Pour répondre à la question

Ainsi, pour répondre pleinement à la question il est nécessaire de prendre des mesures au-delà d'une révolution de la Terre autour du Soleil. Cela suppose de bien avoir travaillé sur le repérage simultané dans le temps et dans l'espace comme évoqué en IV-2 afin d'être capable d'identifier la position de la Terre correspondant à la position 30 ou 40 de Mars. L'objectif de ces prises de mesure est de faire apparaître sur le graphique la relative cyclicité dans la variation de distance entre la Terre et Mars ce qui nécessite au moins des mesures sur deux ou trois révolutions complètes de la Terre (soit trois années terrestres). En effet, le retour à une position minimale entre les deux planètes (opposition) survient environ tous les 780 jours. Du fait de la différence entre les paramètres orbitaux de la Terre et Mars (inclinaison et excentricité), la durée entre deux oppositions comme la distance minimale atteinte peut varier au cours des cycles.

La prise de mesures devenant quelque peu fastidieuse, il est possible de proposer un travail d'équipe sur plusieurs classes, chacune se répartissant les points de mesures à prendre. Ceci sera proposé dans le cadre d'une prochaine mise en œuvre. Attention, dans ce cas, il faut veiller à ce que les données collectées soient bien appréhendées. Ainsi, il n'est plus question de récupérer seulement des numéros de positions mais bien le temps écoulé. Au-delà de la position 44 de Mars, il n'y a pas de retour à zéro mais une continuité du pas de temps à 45, 46,... le temps ne revenant pas en arrière.

A partir de ces observations, nous faisons l'hypothèse (car les données ne permettent pas de l'attester) que la mise sous forme de graphique a permis de visualiser la cyclicité et donc d'identifier le maximum et le minimum de la distance Terre-Mars plus facilement qu'avec un tableau de données numériques qui ne permet pas toujours d'extraire aisément les informations recherchées.

VIII - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'étude présentée dans cet article met en évidence les bénéfices et les difficultés rencontrés par les élèves de cycle 2 et 3 dans l'apprentissage des concepts de durée et de distance à travers une séquence pédagogique centrée sur un planétaire humain. Dans cette séquence, les élèves participent à une chorégraphie reproduisant les orbites de la Terre et de Mars, ce qui leur permet de visualiser puis de mesurer les distances entre ces deux planètes à différents moments.

Les élèves éprouvent initialement des difficultés à prendre en compte à la fois l'évolution temporelle et les distances spatiales. Cet obstacle est levé à travers la mise en place de la chorégraphie qui permet de corréler, via l'observation directe des élèves, le déplacement des deux planètes et la variation de la distance. Cette relation entre les deux grandeurs est alors interprétée mathématiquement par les

mesures et l'utilisation des graphiques pour trouver le moment correspondant à une distance minimale entre les deux planètes.

Cette séquence permet également de discuter de l'erreur de mesure. L'observation directe des disques de couleur permet de comprendre, par la mise en place de l'acte de mesurage, que des choix doivent être faits : les élèves peuvent considérer les distances entre les bords extérieurs ou les bords intérieurs des disques de couleur, correspondant à une distance maximale et minimale. Ainsi, la prise en compte d'une incertitude arrive naturellement par le protocole de mesure, au lieu d'être demandée par l'enseignant sans justification concrète.

Pour finir, les séances permettent de proposer une première approche des graphiques soit de manière visuelle avec des bandes de papier ou des bouts de ficelle soit en s'essayant à sa construction à partir des données numériques. Il est ainsi possible d'envisager cette approche du milieu du cycle 2 jusqu'au cycle 3 en fonction du niveau de compétences de départ et des objectifs d'apprentissage que l'on souhaite se fixer. À travers l'exploitation du graphique, il est possible d'aborder la question du caractère cyclique et l'identification d'un minimum.

Ainsi, l'ensemble de ces résultats montrent l'intérêt de cette approche qui associe engagement corporel et actes de mesurage, et qui met en jeu simultanément les notions de durée et de distance par la perception directe et par la représentation graphique.

Les perspectives du travail mené en classe laissent entrevoir différents axes. Comme nous l'avons vu, il est nécessaire de disposer de suffisamment de mesures pour mettre en évidence la cyclicité. Cela nécessite de maîtriser parfaitement le repérage simultané dans le temps et dans l'espace et constitue une première piste d'amélioration de la séquence mise en œuvre. De plus, une extension de ce premier travail peut être proposée pour la distance entre d'autres planètes en incluant Mercure et Vénus. Cela permettrait alors de comparer les différentes courbes obtenues, leurs maximums et minimums et pourquoi pas de faire le lien avec l'observation astronomique à travers les tailles apparentes dans le ciel. Cela peut être l'occasion d'utiliser en parallèle des simulations du ciel visible comme S*tellarium*.

CREDITS

Ce projet a été financé par l'INSPE de Versailles dans le cadre de l'appel à projet recherche 2023.

Ce projet a bénéficié du soutien de la Commission européenne dans le cadre du projet :

ERASMUS+/ARISTARCHUS(2021-1-FR01-KA220-SCH-000032478)

Cette publication n'engage que son auteur et la Commission ne peut être tenue pour responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations contenues dans ce document.

BIBLIOGRAPHIE

Abboud, M., Hoppenot, P., & Rollinde, E. (2019). Enhancing mathematics and science learning through the use of a Human Orrery. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Abboud, M., & Rollinde, E. (2021). Les Mathématiques du Système Solaire en plein air. Le planétaire humain au collège. *Repères IREM*, (124), p. 37-62.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dahsah, C., Phonphok, N., Pruekpramool, C., Sangpradit, T., & Sukonthachat, J. (2012). Students' conception on sizes and distances of the earth-moon-sun models. *European Journal of Social Sciences*, *32*(4), p. 583-597.

De Coster, L. (2004). L'acquisition et la construction de la notion de temps chez les enfants de 5 à 9 ans. *Feuille d'IF*, 9, 1-26.

Fernandez, M.L., Robinson, M. (2006). Prospective teachers' perspectives on microteaching lesson study. *Education*, 127 (2), p. 203–215.

Heussaff, V., Nechache, A. & Rollinde, E. (2024). Découvrir et approfondir des notions mathématiques à l'aide du planétaire humain. *Actes du colloque COPIRELEM 2023*, ARPEME.

Lapaire, J. R., Maisch, C., Nogry, S., & Rollinde, E. (2025). À l'école du planétaire humain. *Cahiers pédagogiques*, 597(1), 58-59.

Maisch, C. (2024). Concepts de grandeur et de mesure. *RDST-Recherches en didactique des sciences et des technologies*, 35.

Mounsamy, A. (2019). *Les opérations sur la grandeur temps à l'école et au collège: l'exemple du calcul de durée dans le contexte Guadeloupéen* (Doctoral dissertation, Antilles).

Passelaigue, D. (2011). *Grandeurs et mesures à l'école élémentaire. Des activités de comparaison à la construction des concepts: le cas de la masse en CE1* (Doctoral dissertation, Thèse de didactique des sciences physiques, Montpellier: université Montpellier 2).

Pizarro Contreras, N., Gorgorió Solà, N., & Albarracín Gordo, L. (2016). A case study about an activity of measurement estimation of volume. In *ICME* (No. 13).

Rollinde, E., Ferlet, R., Melchior A.-L., Delva, P., Chagnon, G., Salomé, P. (2019). Enseigner la physique et les mathématiques autrement : EU-HOU, Hands-On Universe EU-HOU, Hands-On Universe. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*. ⟨hal-02303711⟩

Rollinde, E. (2019a). Learning Science through enacted astronomy. International Journal of Science and Mathematics Education, 17 (2), p. 237-252.

Rollinde, E. (2019b). Enacting planets to understand occultation phenomena. JOE - Journal of Occultation and Eclipse, ed. Dr. Soleiman Hosseinpour (6), p. 11-19 ⟨hal-02303664⟩

Rollinde, E., Couanon, L., & Ballenghien, S. (2020). Incarner la notion de vitesse en classe de 6e. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, 114(1023), 411-434.

LIRE, CODER, CRÉER : LE CODAGE NARRATIF AVEC *SCRATCH JUNIOR*

UNE EXPLORATION SÉMIOTICO-INSTRUMENTALE SUR L'INTERPRÉTATION DU RÉCIT CHEZ L'ÉLÈVE DU CYCLE 2

Dominique LAVAL
PRAG de mathématiques – Docteur en didactique des mathématiques
INSPE de l'académie de Versailles – CY Cergy Paris Université
dominique.laval@cyu.fr

Delphine PEUCH-LESTRADE
Professeure des écoles, Ecole Sainte Geneviève à Nanterre
Formatrice ISFEC – AFAREC IDF
d.peuchlestrade@isfec-idf.net

Résumé
Un chercheur de l'INSPE et des enseignantes du primaire, formatrices à l'ISFEC[1] de l'Île-de-France, mènent un travail de recherche-action collaborative sur le codage narratif comme outil pédagogique permettant aux élèves de créer des adaptations uniques de récits littéraires. L'objectif est de démontrer comment la combinaison de la lecture, du codage et de la création peut enrichir l'expérience de l'élève en l'initiant aux pensées algorithmique et computationnelle. L'hypothèse principale est qu'un travail sur ces pensées interroge la mobilisation du langage et du raisonnement logique chez l'élève du cycle 2 et que la transcription en algorithmes simples favorise la mémorisation du récit et sa reformulation en s'appuyant sur son contenu et sa logique. Ainsi, l'élève élabore une nouvelle représentation mentale liée au codage d'un texte littéraire puisqu'il en vérifie la validité en l'implémentant dans *Scratch Junior*.

I - INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous situons dans le cadre d'un enseignement polyvalent à l'école primaire en lien avec le développement d'ingénieries didactiques au sens d'Artigue (2002) intégrant de la *programmation informatique* ou *codage* dans le cadre de la Littérature de jeunesse (LJ). Nous faisons le choix d'explorer comment le *Codage narratif* (CN) peut permettre au jeune élève de créer des adaptations uniques de récits littéraires. Nous entendons par CN une méthode d'analyse qualitative qui vise à structurer et interpréter les récits (ou discours) en identifiant des thèmes et des motifs récurrents tout en respectant leur contexte subjectif et social. Ainsi, ce processus repose sur une approche inductive, voire abductive, où les données narratives sont d'abord codées en unités significatives, puis regroupées en catégories thématiques permettant de formuler des structures conceptuelles. En mobilisant une analyse fine des choix discursifs et des significations implicites, le CN permet d'explorer les dynamiques identitaires, sociales et culturelles des récits, offrant un éclairage sur les expériences vécues et leurs cadres d'interprétation. Dans notre cas, en transposant des contes ou des fables en un langage algorithmique, nous visons à démontrer comment cette approche enrichit la compréhension de structures narratives tout en stimulant la créativité de l'élève dans l'adaptation littéraire en lien avec la logique du récit. Par ailleurs, nous nous situons dans le prolongement des travaux de Papert (1980), pionnier de la Pensée

[1] N.D.L.R. Les Instituts Supérieurs de Formation de l'Enseignement Catholique (ISFEC) préparent aux concours de l'enseignement les candidats qui souhaitent exercer dans les établissements privés catholiques.

computationnelle (PC) avec l'introduction du langage Logo et plus récemment ceux de Wing (2006) avec l'étude des capacités cognitives spécifiques à l'informatique. Par PC, nous entendons l'idée d'un cadre cognitif et méthodologique, inspiré de l'informatique. En effet, elle vise à résoudre des problèmes complexes de manière logique, systématique et automatisable. Pour cela, elle repose sur quatre piliers principaux : la *décomposition* (le fait de diviser un problème en sous-problèmes), la *reconnaissance des motifs* (le fait d'identifier des régularités), l'*abstraction* (le fait de filtrer les informations importantes et d'ignorer les détails qui ne seraient pas pertinents) et la *conception d'algorithmes* (le fait de reconnaître et d'élaborer des étapes ou des règles pour résoudre le problème). Ici, nous nous situons dans une vision transdisciplinaire. En effet, la PC va au-delà de l'informatique pure. Elle s'applique dans des domaines variés, tels que les sciences, les mathématiques, les arts, les sciences sociales et bien d'autres, en aidant à structurer des problèmes, à analyser des données et à modéliser des phénomènes. Par ailleurs, elle favorise des compétences clés comme la pensée critique et la créativité, essentielles dans un monde guidé par la technologie et les données. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que le fait d'initier les élèves à la programmation informatique favorise le développement d'une Pensée procédurale (PP) chez l'enfant (Drot-Delange & Baron, 2016). La PP se réfère à la capacité d'organiser des actions en séquences ordonnées qui permettent de résoudre des problèmes de manière systématique, étape par étape. Selon des chercheurs comme Papert (1980), Brennan et Resnick (2012), mais aussi Angeli et Giannakos (2019), cette approche aide l'élève à comprendre les liens entre instructions, processus et résultats. Nous supposons que cela favorise l'apprentissage de concepts *pré-abstraits*[2] en les ancrant dans des démarches pratiques et logiques. L'hypothèse est qu'un travail fondé sur ces pensées interroge la mobilisation du langage et du raisonnement logique chez l'élève du cycle 2, et que la transcription de récits en algorithmes simples favorise à la fois la mémorisation et la reformulation des textes, en s'appuyant sur leur contenu et leur structure logique. Pour cela, nous demandons à l'élève d'élaborer au *papier-crayon* des algorithmes simples basés sur la logique des structures narratives, avant de les implémenter dans l'environnement numérique *Scratch Junior* (Vigot, 2018 et Laval & Peuch-Lestrade, 2024). Par ailleurs, selon Resnick et al. (2009), la capacité de programmer offre au jeune élève de nombreux avantages importants. Elle élargit considérablement la gamme de ce qu'il peut créer (et comment il peut l'exprimer) avec un ordinateur, tout en élargissant la gamme de ce qu'il peut apprendre. En particulier, la programmation informatique peut favoriser le développement de la PC, en aidant à apprendre d'importantes stratégies de résolution de problèmes et de conception, telles que la modularisation et la conception itérative qui s'appliquent à des domaines non liés à la programmation. De plus, selon Resnick et al. (2009), la programmation impliquant la création de représentations externes de nos processus de résolution de problème, offre des occasions métacognitives. Ce processus en lien avec l'algorithmique permet d'engager une nouvelle représentation mentale du texte littéraire, en structurant les actions à travers des schèmes cognitifs et moteurs, formant ainsi une mémoire de l'action, ce qui renforce la compréhension du texte et la maîtrise du langage. Cette approche met également en lumière les dimensions sémiotiques et instrumentales des *Espaces de Travail Connectés* (Lagrange & Laval, 2019), où le numérique et le récit vont interagir.

II - DIFFÉRENTES PENSEES EN LIEN AVEC L'INFORMATIQUE

Nous partons de l'idée que nous aurions ici trois modes de pensées : la *Pensée computationnelle* (PC), présentée en introduction, la *Pensée algorithmique* (PA) et la *Pensée informatique* (PI). Bien qu'elles soient liées à l'informatique, les deux premières pensées se distinguent par leurs approches et leurs objectifs. Cependant, elles partagent des points communs, notamment dans leur utilisation pour résoudre

[2] N.D.L.R. Notion située entre le concret et l'abstrait, permettant une transition progressive s'appuyant sur des représentations visuelles, des manipulations concrètes ou des situations familières aidant l'élève à construire sa compréhension avant d'accéder à une abstraction complète.

des problèmes de manière logique, mais elles ont également des différences notables. Quant à la PI, elle englobe les pensées computationnelle et algorithmique dans un cadre plus large. C'est ce que nous nous proposons de présenter dans cette section.

1 La pensée algorithmique (PA)

Nous avons vu, en introduction, que la PC était un processus de résolution de problèmes, issus de diverses disciplines, en s'inspirant de concepts et de techniques utilisées dans le domaine de l'informatique. En revanche, qu'en est-il de la PA ? Cette dernière fait référence à la capacité de générer des algorithmes, c'est-à-dire des ensembles de règles ou d'instructions précises et bien définies pour résoudre un problème. Nous rappelons qu'un algorithme est une séquence finie d'instructions menant à un résultat spécifique pour une même famille de problèmes. Cette pensée repose sur : l'*élaboration d'instructions claires et logiques* pour résoudre un problème de manière systématique ; l'*efficacité*, avec le fait de choisir l'algorithme le plus efficace possible en temps d'exécution et de consommation de mémoire ; l'*évaluation et la vérification*, avec la nécessité de tester la validité et la robustesse de l'algorithme en l'implémentant dans un environnement numérique, pour s'assurer qu'il résout bien le problème dans toutes les situations possibles. Par ailleurs, si nous regardons du côté des mathématiques, nous avons selon Knuth (1968) deux types de pensée qui séparent les mathématiciens des informaticiens. En effet, dans le champ des mathématiques, il n'y a quasiment aucune notion de *complexité* ou d'*économie de fonctionnement* (« Economy of operation » (Knuth, 1968)). De plus, l'autre concept absent dans le domaine des mathématiques est la notion de dynamique d'état de processus. L'évolution des états de fait semble être intimement liée aux algorithmes et à la PA :

> *[…] The other missing concept [...] is the dynamic notion of the State of a process […] Changing states of affairs […] seems to be intimately related to algorithms and algorithmic thinking.* (Knuth, 1980)

2 Pensée computationnelle (PC) vs pensée algorithmique (PA)

La PC présente un cadre plus large que celui de la PA. Elle inclut la PA comme sous-ensemble, car elle l'utilise pour concevoir des solutions, mais elle inclut aussi d'autres éléments, comme l'abstraction et la reconnaissance de motifs (cf. Introduction). Par exemple, pour essayer de résoudre un problème, nous pouvons utiliser la décomposition dans le cadre de la PC pour diviser le problème en sous-parties, puis appliquer la PA pour créer un (ou plusieurs) algorithme(s) qui résoudrait(aient) chaque sous-problème. Nous pouvons voir que la PC permet d'aborder des problèmes de manière plus globale, tandis que la PA est plus étroitement focalisée sur la conception de solutions procédurales, c'est-à-dire des algorithmes.

3 La pensée informatique (PI)

Cette pensée, plus vaste, inclut les pratiques des PC et PA, mais aussi d'autres compétences liées aux techniques propres au domaine de l'informatique. La PI est un terme souvent utilisé de manière synonyme avec la PC, mais elle désigne plus généralement l'approche et la méthodologie que les informaticiens adoptent pour résoudre des problèmes. Elle comprend non seulement la PC (incluant la PA), mais aussi d'autres aspects comme : la *programmation*, avec la transcription des algorithmes en code exécutable par la machine ; la *gestion des données*, i.e. comment collecter, structurer et utiliser des données suffisantes et efficacement ; l'*architecture des systèmes informatiques*, avec la compréhension de comment l'ordinateur traite l'information fournie par le programmeur.

III - UNE INTRODUCTION DU CODAGE ET DES PENSÉES LIÉES À L'INFORMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE FRANÇAIS

L'introduction du codage et de la PC dans l'enseignement primaire en France s'inscrit dans une démarche globale visant à préparer les élèves aux défis du 21ème siècle. Cette politique répond à la nécessité de doter les nouvelles générations de compétences numériques essentielles dans un monde de plus en plus

technologique. Pour cela, dans la continuité des directives de la commission Kahane[3] au début des années 2000 et de l'introduction progressive de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques au lycée à partir de 2010, nous avons, dans un cadre législatif et réglementaire, une inclusion de ces enseignements dans les programmes scolaires du cycle 1 depuis 2015 et, depuis 2016, des cycles 2 à 4. Ainsi, le codage et l'initiation à la programmation font partie intégrante du curriculum des écoles primaires. Les objectifs pédagogiques visent le développement de compétences clés autour de la PA en lien avec le raisonnement logique, où l'élève est initié aux concepts fondamentaux de la logique et de la résolution de problèmes, essentiels pour le développement de la PA. S'y ajoutent la créativité et l'innovation, qui avec le codage, sont utilisées comme moyens pour stimuler un esprit créatif chez l'élève, en utilisant des outils numériques. Par ailleurs, la mise en œuvre d'outils pédagogiques, de ressources, de formations est proposée aux enseignants, avec une utilisation de plateforme et d'outils adaptés, comme les environnements numériques *Scratch Junior* et *Scratch*, en fonction de l'âge de l'enfant. Par exemple, l'institution soutient diverses initiatives visant à promouvoir l'enseignement du codage, telles que la *Semaine du Code* (Code Week) et le concours *1, 2, 3… Codez !* organisé par la Fondation *La main à la pâte*.

1 Du côté du socle commun de connaissances, de compétences et de culture

Nous rappelons que dans le cadre du socle commun, nous avons cinq domaines (figure 1).

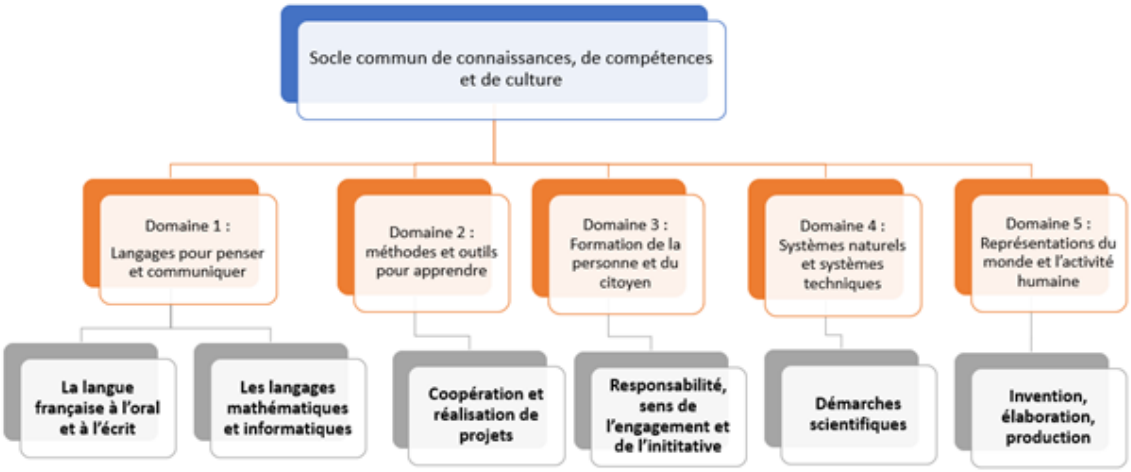


Figure 1. Le schéma des cinq domaines concernés

Nous partons de l'idée qu'un enseignement de l'algorithmique et de la programmation, associé à la logique et au raisonnement, s'inscrit dans les objectifs du socle commun. Par ailleurs, nous observons que trois des domaines sont directement concernés. Dans le domaine 1, nous distinguons deux aspects : d'une part, la langue française, avec l'exploration de la LJ qui renforce les compétences en lecture, écriture et expression orale ; d'autre part, les langages informatiques, avec la transcription du récit littéraire en algorithmes, ainsi que l'utilisation d'environnements numériques, comme *Scratch Junior* ou *Scratch*, qui favorisent l'apprentissage de la PI. Dans le domaine 2, nous postulons que l'intégration de l'algorithmique à l'analyse littéraire peut encourager les élèves à développer des méthodes de travail structurées et logiques. En apprenant à décomposer des récits en séquences, à identifier des motifs récurrents et à créer des algorithmes pour modéliser des histoires, l'élève développe des compétences analytiques tout en se familiarisant avec les technologies numériques à travers des environnements de programmation. Dans le domaine 4, nous supposons que l'élève enrichit ses compétences en matière de démarche d'investigation en posant des questions pertinentes et en organisant efficacement les informations recueillies. Ce processus implique l'élaboration et la vérification d'hypothèses à travers des essais et des erreurs dans le cadre de la programmation, ainsi qu'une utilisation complète des différentes étapes du cycle de

[3] http://www.cfem.asso.fr/ressources/rapports-enseignement-mathematiques/commission-kahane

modélisation (Laval & Peuch-Lestrade, 2024 et Couderette & Laval, 2024) (figure 2) pour représenter des situations complexes liées à la compréhension du récit. À travers ce cycle, nous proposons une démarche pédagogique intégrant des outils numériques et littéraires pour interpréter et transformer le récit littéraire, en s'appuyant sur une adaptation du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005).

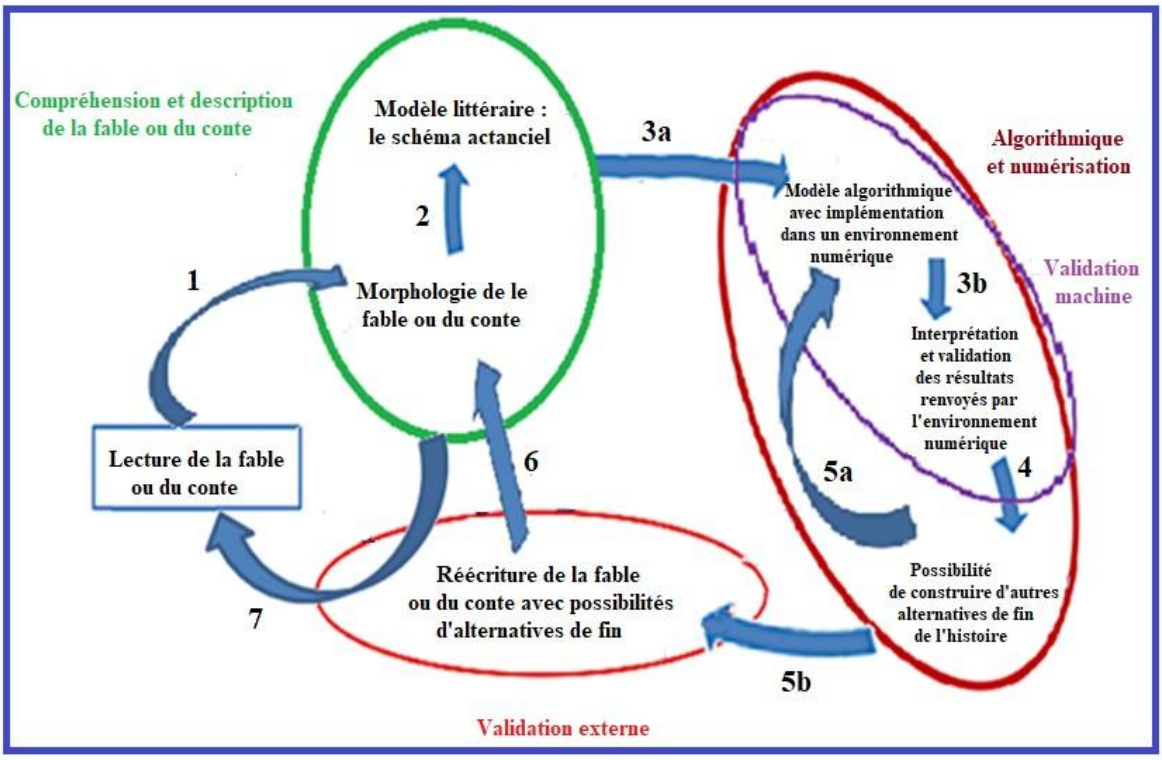


Figure 2. Cycle de modélisation avec un modèle littéraire de type algorithmique (Couderette & Laval, 2024)

Cette approche combine analyse littéraire, structuration algorithmique et interprétation créative pour favoriser une compréhension profonde du texte. Ainsi, lors d'un travail de compréhension du récit, l'élève s'inscrit dans une lecture approfondie (Cf. (1) de la figure 2) de la fable ou du conte pour identifier les éléments narratifs clés. Puis, dans une démarche visant à construire un modèle littéraire, nous nous appuyons sur un référentiel conceptuel (Cf. (2) de la figure 2) fondé, notamment, sur la *morphologie du conte* de Propp (fonctions narratives) et le *schéma actanciel* de Greimas (rôles et relations entre les personnages). Par ailleurs, pour l'élève, dans le cadre d'une transcription numérisée dans un environnement numérique, celui-ci se charge de numériser le récit littéraire, avec une identification des personnages, objets, et lieux, la création d'un modèle algorithmique (Cf. (3a) de la figure 2) et implémentation dans un environnement numérique (ex. animation ou simulation). À la suite de cette implémentation, l'élève peut alors valider et interpréter les résultats produits par cette simulation (Cf. (3b) de la figure 2). Suivant les possibilités qu'offrent l'environnement numérique (ex. une utilisation d'instructions conditionnelles avec *Scratch*), l'élève peut créer des fins alternatives, avec une exploration de variantes narratives, enrichissant sa compréhension du récit. Ainsi, il peut proposer une réécriture du récit avec une adaptation du modèle algorithmique pour intégrer les variations (Cf. (5a) de la figure 2) et il a alors la possibilité de tester différentes options narratives (Cf. (5b) de la figure 2). Cela lui permet de procéder à une nouvelle interprétation du texte littéraire, basée sur les analyses des significations nouvelles ou des perspectives issues des modifications apportées. L'élève peut revenir sur le texte initial pour une synthèse critique et littéraire. Ainsi, ce travail développe les capacités d'analyse, de raisonnement (y compris par analogie et déduction logique), ainsi que la capacité à exposer méthodiquement ses démarches.

IV - UN CADRE THÉORIQUE

Deux champs didactiques sont mis en action dans ce travail de recherche. En effet, nous nous situons dans une articulation de la didactique de la Littérature de jeunesse (LJ) et de la didactique de l'algorithmique.

1 Le cas de la didactique de la Littérature de la jeunesse (LJ)

La didactique de la LJ se définit comme l'étude et la pratique de méthodes et des pratiques pédagogiques visant à enseigner et à promouvoir la lecture, l'analyse et l'appréciation des œuvres littéraires destinées aux jeunes lecteurs, en particulier dans un contexte scolaire. Elle interroge les façons dont la LJ peut être utilisée pour développer diverses compétences langagières, culturelles et cognitives chez l'enfant lecteur, tout en prenant en compte son développement affectif et intellectuel. Elle permet d'introduire des concepts littéraires comme les genres, les thèmes, les personnages, les protagonistes, les structures narratives, ainsi que des valeurs sociales et culturelles à travers des récits adaptés à l'âge de l'élève. De même, elle encourage le goût de la lecture tout en renforçant les compétences en compréhension de texte, en enrichissant le vocabulaire et en stimulant l'expression orale et écrite chez le jeune lecteur. Par ailleurs, elle contribue au développement d'aptitudes plus larges, telles que la pensée critique, la créativité et une meilleure compréhension du monde. Les récits de la LJ offrent un terrain idéal pour initier les élèves aux différents genres (conte, fable, roman, poésie, etc.). L'enseignant joue un rôle de médiateur pour guider la compréhension et l'interprétation du texte, en s'appuyant sur des discussions, des activités de reformulation, de questionnement et d'analyse. Il s'agit d'encourager les élèves à analyser les protagonistes, les intrigues et les symboles, afin de comprendre les messages implicites du texte.

1.1 Méthodes d'exploitation

Cette didactique inclut souvent des activités créatives (illustration des textes, réécriture, adaptation en théâtre ou en film, création de récits inspirés des lectures), où les outils numériques, comme les environnements de codage ou de narration interactive qui peuvent être intégrés pour permettre à l'élève de recréer ou d'adapter les récits à travers des supports comme *Scratch Junior* ou *Scratch.*

1.2 Adaptation aux niveaux scolaires

Cette didactique est ajustée en fonction de l'âge et du niveau de l'élève, en prenant en compte sa capacité à comprendre les récits, à analyser des thèmes complexes ou à interpréter des symboles littéraires. Pour les plus jeunes, l'accent est souvent mis sur l'écoute, la narration et la reformulation, tandis que pour les plus âgés, une analyse plus approfondie des textes abordés est aussi possible.

1.3 Différentes Méthodes d'analyse structurale (MAS)

Nous situant dans un cadre d'une didactique de la LJ, des analyses fines des données obtenues (cf. V) sont menées à l'aide de différents *Modèles d'analyse structurale* (MAS) à savoir : la *morphologie du conte* de Propp qui « construit […] une grammaire des formes narratives qu'il présente comme des formules mathématiques » (Farahnak, 2010), le *schéma actantiel* de Greimas, où le modèle peut permettre le déchiffrage de la nature sémiolinguistique du texte littéraire et le *schéma quinaire* de Larivaille où « […] toute intrigue se présente comme le passage d'un état à un autre » (Jouve, 2006). Pour cela, nous partons de l'hypothèse qu'il existe « une structure matricielle de l'histoire, fondée sur l'enchaînement logique des séquences » (Ibid.). Pour Propp (1928 rééditée en 1965), l'étude de la morphologie du conte peut être vue comme un modèle d'analyse structuré autour de 31 fonctions narratives qui spécifient les différentes étapes et événements qui peuvent se produire dans le conte (Tableau 1). Son approche se base sur l'idée que les contes de fées partagent une structure narrative commune, avec des séquences événementielles prévisibles. Les fonctions identifiées par Propp se succèdent dans un ordre spécifique, toujours le même, et consistent en actions typiques, telles que l'interdiction, la violation, la quête, et la reconnaissance. Pour Greimas (1966), nous avons un modèle d'analyse structurale qui trouve ses fondements dans la

sémiotique inspirée de Saussure. En effet, Saussure considère la langue comme un système de signes structuré par des oppositions, où chaque élément n'a de sens que par contraste avec les autres. Greimas applique ces principes au domaine narratif. Il identifie des oppositions fondamentales, comme sujet/objet ou adjuvant/opposant, qui structurent les récits de manière universelle. En transposant les relations linguistiques au champ narratif, Greimas élabore une *grammaire des récits* capable de décoder les dynamiques de signification qui sous-tendent toute narration. Quelle que soit la nature du récit, ce modèle identifie six actants fondamentaux : le *Sujet* (qui cherche quelque chose), l'*Objet* (qui est cherché), le *Destinateur* (qui incite à la quête), le *Destinataire* (qui bénéficie de la quête), l'*Adjuvant* (qui aide le sujet), et l'*Opposant* (qui s'oppose au sujet). Par une telle approche, nous décortiquons les rôles et les relations entre les différents protagonistes, indépendamment du contenu narratif spécifique. Ainsi, ce schéma (Tableau 2) propose une représentation structurelle des actants (agents d'action) et de leurs relations dans une narration. Il est basé sur le concept de l'*actantialité*, qui considère les rôles des protagonistes comme des fonctions narratives plutôt que des entités spécifiques. Pour Larivaille (1974), nous avons un schéma quinaire (Tableau 3) s'appuyant sur un modèle structurant le récit littéraire en cinq étapes où sont décrites une progression linéaire du récit. Nous partons d'un *État initial* avec une situation de départ des protagonistes et du monde narratif, suivi d'une *Complication (provocation, détonateur, déclencheur)* où un événement perturbateur déclenche l'action, ensuite une *Action* où sont entrepris des efforts pour résoudre la Complication, puis une *Résolution (sanction ou conséquence)* avec un dénouement progressif de la Complication et enfin la *Situation Finale* avec un nouvel état stable des protagonistes et du monde narratif. Ce schéma permet de comprendre comment les différents événements s'enchaînent pour former l'histoire cohérente du récit. En tant que *transformation*, nous supposons avoir un élément qui enclenche (la *provocation*), une dynamique qui l'effectue (l'*action*) et un épisode qui clôt le processus (la *sanction*).

Les 15 fonctions des personnages	Les 16 fonctions de la trame narrative
1. **Absence** : Un membre de la famille quitte le foyer. 2. **Interdiction** : Une interdiction est imposée au héros ou au Personnage principal (pp). 3. **Violation de l'interdiction** : L'interdiction est violée, souvent par le héros ou par le pp. 4. **Difficultés** : Le héros ou le pp fait face à des difficultés initiales. 5. **Soutien ou protagoniste faible** : Un personnage bienveillant ou un protagoniste faible intervient pour aider le héros ou le pp. 6. **L'opposant** : Un antagoniste ou un opposant se manifeste. 7. **Secours** : Le héros ou le pp reçoit de l'aide ou des conseils. 8. **Combat Magique** : Un combat magique a lieu entre le héros (ou le pp) et l'opposant. 9. **Marque** : Le héros ou le pp reçoit une marque ou un signe distinctif. 10. **Voyage** : Le héros ou le pp entreprend un voyage. 11. **Arrivée** : Le héros ou le pp arrive quelque part. 12. **Reconnaissance** : Le héros ou le pp est reconnu d'une manière ou d'une autre. 13. **Délivrance** : Le héros ou le pp est délivré d'une situation difficile. 14. **Don** : Le héros ou le pp obtient un objet magique ou un don. 15. **Ruse** : Le héros ou le pp utilise une ruse pour surmonter un obstacle.	1. **Méprise** : Un personnage ou un objet est faussement identifié. 2. **Complication** : La situation devient plus compliquée. 3. **Ruse de l'opposant** : L'opposant utilise une ruse ou une tromperie. 4. **Tâche difficile** : Le héros ou le pp doit accomplir une tâche difficile. 5. **Déplacement** : Le héros ou le pp est déplacé, souvent de force. 6. **Déplacement par intérêt** : Le héros ou le pp est déplacé par intérêt. 7. **Première fonction de la donatrice** : La donatrice fournit au héros (ou au pp) des informations ou des objets. 8. **Transgression** : Une transgression est commise, généralement par le héros (ou par le pp). 9. **Intrigue des médiateurs** : Les médiateurs interviennent dans l'intrigue. 10. **Retour** : Le héros ou le pp retourne à la maison. 11. **Poursuite** : Le héros ou le pp est poursuivi. 12. **Arrivée inattendue** : Un personnage arrive de manière inattendue. 13. **Couronnement** : Le héros ou le pp est couronné ou récompensé. 14. **Fin** : La situation finale est établie. 15. **Épilogue** : L'épilogue conclut le récit. 16. **Réparation** : Les dommages sont réparés, et l'ordre est rétabli.

Tableau 1. Les 31 fonctions de la morphologie du conte de Propp (1928)

Les actants principaux	Les auxiliaires
1. **Sujet (S)** : L'agent principal qui réalise l'action. Il sera souvent le héros (ou l'héroïne), ou encore un protagoniste. 2. **Objet (O)** : L'élément sur lequel une action dirigée. C'est le but à atteindre. 3. **Opposant (O')** : L'antagoniste ou l'obstacle qui va s'opposer au sujet dans la l'objectif.	1. **Adjuvant (A)** : L'entité qui va aider le sujet dans la réalisation de l'action. 2. **Opposant secondaire (O'')** : Un autre obstacle ou antagoniste qui viendra compliquer l'intrigue. 3. **Adjuvant secondaire (A')** : Un second assistant qui va soutenir le sujet.
Les actants secondaires	**Les modalisateurs**
1. **Destinateur (D)** : L'entité qui va envoyer le sujet en mission ou qui va le pousser à agir. 2. **Destinataire (D')** : L'entité qui reçoit les effets de l'action du sujet.	1. **Séquenceur (Seq)** : L'élément qui va organiser l'intrigue dans le temps, en déterminant l'ordre des événements. 2. **Destinateur secondaire (D'')** : Une autre entité qui pourra influencer le destinataire.

Tableau 2. Le schéma actanciel de Greimas (1966)

Etape	Description	Questions clés
(1) Situation initiale	Présente l'état de départ, l'équilibre initial des personnages et du contexte.	Où sont les personnages ? Où et quand l'histoire se passe-t-elle ?
(2) Événement perturbateur	Un événement vient rompre l'équilibre initial et déclencher l'action.	Quel événement change la situation initiale ?
(3) Actions/transformation	Les personnages réagissent à la perturbation par une série d'actions ou d'événements.	Que font les personnages pour résoudre le problème ou réagir à la perturbation ?
(4) Résolution	L'équilibre est rétabli ou un nouvel équilibre est atteint.	Comment l'histoire se termine-t-elle ?
(5) Situation finale	Présente le nouvel état des personnages après la résolution.	Quel est le nouvel équilibre ?

Tableau 3. Le schéma quinaire de Larivaille (1974)

2 Le cas de la didactique de l'algorithmique

La didactique de l'algorithmique est une branche de la didactique de l'informatique. Elle est spécialisée dans l'enseignement des concepts algorithmiques. Nous rappelons que la didactique de l'informatique est la science qui s'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage des concepts, des méthodes et des outils de l'informatique. Elle englobe un large éventail de champs, dont l'algorithmique, la programmation, les systèmes informatiques, les réseaux, la sécurité informatique et bien plus encore.

2.1 Les Espaces de travail algorithmique (ETA)

Nous situant dans le cadre d'un travail sur la didactique algorithmique, nous utilisons le modèle des ETA (Laval, 2018) spécifique à *Scratch Junior*. Comme pour les *Espaces de travail mathématique* (ETM) (Kuzniak & Richard, 2014), les ETA sont définis sur deux niveaux (figure 3) : un *plan cognitif* et un *plan épistémologique*, « dont l'ouverture se fait en interaction à travers trois genèses avec le niveau cognitif et les composantes le constituant » (Laval et Peuch-Lestrade, 2024).

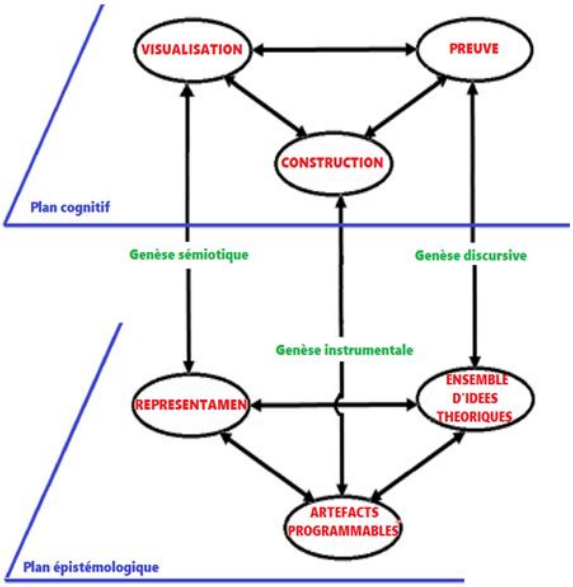


Figure 3. Une représentation des Espaces de travail algorithmique (Laval, 2018)

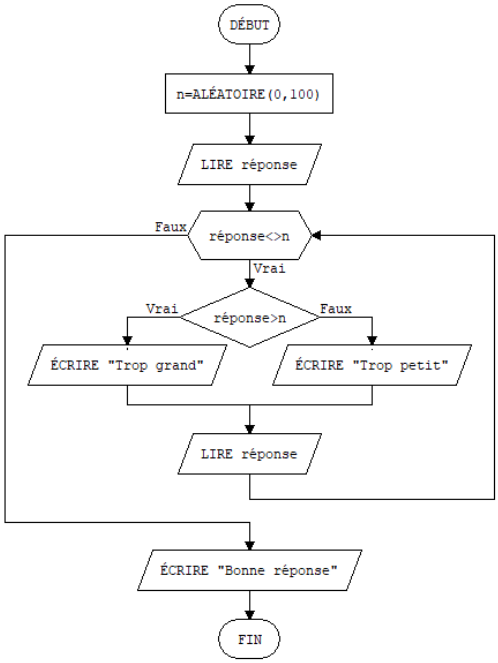
Nous supposons que cela va favoriser une meilleure compréhension de « la circulation des connaissances au sein du travail algorithmique » (Laval, 2018). Par ailleurs, comme pour les ETM, nous disposons de trois genèses produisant chacune une relation dynamique entre les deux plans : une *genèse sémiotique*, avec l'emploi de symboles, de graphiques et d'objets concrets compris comme des signes ; une *genèse instrumentale*, avec la construction et l'expérimentation de modèles qui représentent les relations entre objets dans une configuration donnée (algorithmes, programmes, organigrammes, etc.), les artéfacts utilisés sont des environnements numériques de programmation, comme *Scratch Junior* ; une *genèse discursive*, avec la justification et la validation des algorithmes mis en place. Nous percevons cela comme une introduction à la notion de *preuve*. Cela se place dans un cadre de référence théorique, comme la

programmation sur *Scratch Junior* où nous testons la robustesse de l'algorithme. Au niveau de l'enseignement primaire, l'essentiel du travail se situe sur les deux premières dimensions : sémiotique et instrumentale. Selon Laval et Peuch-Lestrade (2024), la dimension sémiotique dans l'ETA spécifique à *Scratch Junior* (ETA_{SJ}) se caractérise par une notation proche des symboles et objets mathématiques que sont les nombres, les orientations, l'introduction au concept de coordonnées dans le plan, de déplacements horizontaux ou verticaux, d'agrandissements, de rétrécissements, etc. Par ailleurs, l'affectation est spécifique à l'ETA_{SJ}. En effet, elle « est liée à l'idée de changement d'état » (Laval & Peuch-Lestrade, 2024). Chaque personnage ou objet jouant un rôle de protagoniste (par exemple, le fromage dans la fable du *Corbeau et le Renard* de Jean de La Fontaine), a ses propres scripts associés au programme informatique. La dimension instrumentale de l'ETA_{SJ} implique une implémentation de l'algorithme dans une machine afin de tester sa validité et sa robustesse, après sa construction au papier-crayon.

> *L'exécution n'implique pas l'accomplissement passif d'un programme, mais plutôt un processus de construction, où les implémentations sont exécutées avec des données sélectionnées* (Laval & Peuch-Lestrade, 2024)

2.2 Un exemple de plan épistémologique

Afin de comprendre à quoi correspond le plan épistémologique d'un ETA, nous proposons comme exemple le cas d'une procédure permettant à partir d'une série de questions-réponses dans un environnement numérique de programmation, de trouver un nombre entier secret compris entre deux nombres entiers connus. Pour cela, nous faisons le choix d'utiliser l'*algorithme de dichotomie discret* (Laval, 2018). Nous proposons deux représentations possibles de cet algorithme (figure 4).




```
DÉBUT
    n=ALÉATOIRE(0,100)
    LIRE réponse
    TANTQUE réponse<>n FAIRE
        SI réponse>n ALORS
            ÉCRIRE "Trop grand"
        SINON
            ÉCRIRE "Trop petit"
        FINSI
        LIRE réponse
    FINTANTQUE
    ÉCRIRE "Bonne réponse"
FIN
```

Figure 4. Représentations spatiale (fig. de gauche) et textuelle (fig. de droite) de l'algorithme (Laval, 2018)

Nous observons que les representamen sont le programme informatique et l'organigramme, les artefacts programmables sont les variables informatiques, les fonctions, les structures algorithmiques et le nombre aléatoire. Quant à l'ensemble d'idées théoriques, il est constitué des propriétés des artefacts sur les variables itératives (avec l'invariance) et les structures de boucles, ainsi que sur les instructions conditionnelles (TANTQUE, SI… ALORS… SINON, etc.).

2.3 Les paradigmes algorithmiques

Afin de compléter l'étude des travaux des élèves observés, nous sommes conduits à aborder le concept de *paradigmes algorithmiques* (Laval, 2018) qui peuvent être vus comme une adaptation à

l'enseignement des algorithmes, des *paradigmes géométriques* de Houdement et Kuzniak (2006). Ces paradigmes nous guident et permettent d'orienter le travail de l'élève lors des connexions entre l'étude littéraire du récit et sa transcription en algorithmes implémentable dans *Scratch Junior*. Par ailleurs, cette étude des niveaux de paradigmes est une aide pour observer quels espaces personnels l'élève se construit selon son niveau scolaire, et comment il articule des connaissances sur les algorithmes, le codage et la compréhension de la structure du récit. Selon Laval (2018), les *paradigmes algorithmiques* se découpent en trois niveaux. Au premier niveau algorithmique (A1), nous avons une approche intuitive des algorithmes issus de situations de la vie réelle. À ce niveau, par exemple, l'efficacité de l'algorithme suit naturellement sa description. Nous nous contentons d'une preuve de l'efficacité lors de l'exécution de l'algorithme après implémentation dans une machine ou lors d'un raisonnement intuitif. Au deuxième niveau (A2), il est fait référence à l'axiomatique naturelle des algorithmes. À ce niveau, l'efficacité de l'algorithme est utilisée. Nous construisons une preuve mathématique de cette efficacité. Par exemple, pour l'algorithme d'Euclide, la preuve de sa validité et de son efficacité repose sur des propriétés du PGCD, des suites positives d'entiers, strictement décroissantes jusqu'à atteindre zéro. Dans ce cas, l'algorithme devient un objet d'un travail mathématique. Par ailleurs, ici l'efficacité (moins de coût), l'effectivité et la complexité (complexité polynomiale et complexité non polynomiale) sont interrogées. Au troisième niveau (A3), nous prenons en compte l'intérêt de la science algorithmique qui porte aussi sur le traitement formel des algorithmes. Par exemple, c'est le cas des *machines de Turing.* Nous rappelons qu'une machine de Turing est une bande infiniment longue, divisée en cellules. Chaque cellule peut contenir un 1, un 0, ou un espace vide. Au-dessus de chaque cellule de la bande se trouve une *tête* pouvant être déplacée soit vers la gauche, soit vers la droite et est capable de lire les symboles dans les cellules. Au niveau du primaire, seul le niveau A1 est réellement abordé. Cependant, à partir du cycle 3, nous pouvons amener l'élève à entrer dans le niveau A2 (par exemple, la preuve de la conjecture de Kaprekar pour des nombres entiers à trois chiffres (Laval, 2018)). En revanche, dans le cadre d'un enseignement algorithmique dans le secondaire (premier et second cycles) les deux premiers niveaux sont ceux que nous retrouvons. Quant au niveau A3, il n'est étudié que dans l'enseignement supérieur.

2.4 Les Espaces de travail connectés (ETC)

L'étude des connexions entre ETA et les différentes MAS donne du sens au travail de l'élève dans des tâches impliquant différents domaines : la logique – l'algorithmique – la programmation informatique – la LJ. Cette étude tient compte des genèses sémiotique, instrumentale et discursive pour l'aspect algorithmique, et de la structure narrative du conte ou de la fable pour l'aspect littéraire. Nous parlons alors d'*Espaces de travail connectés* (ETC), au sens de Minh & Lagrange (2016) et de Lagrange & Laval (2019). Selon Minh et Lagrange (2016), les ETC s'appuient sur l'idée des ETM en considérant que, dans les activités impliquant des mathématiques et d'autres champs disciplinaires, l'élève doit travailler dans plusieurs espaces de travail et coordonner les dimensions sémiotiques, instrumentales et discursives de ces espaces. Par exemple, dans le domaine de l'analyse réelle, cela s'applique en particulier à l'approche des fonctions et à la modélisation. À travers cette étude des connexions entre ETC, notre choix consiste à nous situer entre deux espaces de travail (ETA/MAS) afin d'observer l'élève en situation scolaire à travers des études empiriques, mais aussi de construire une étude épistémologique de l'algorithmique comme champ disciplinaire conduisant à questionner le curriculum, à faire des propositions jusqu'ici sans étude empirique au niveau scolaire, en particulier au niveau de l'école primaire. En effet, encore trop peu de recherches portent sur les apprentissages des élèves en algorithmique en situation scolaire.

V - DES INGÉNIERIES DIDACTIQUES ET UNE MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous situant dans un modèle transmissif sur l'information et la communication dans le cadre d'une médiation, des ingénieries didactiques sont construites puis expérimentées dans quatre classes (une

MS/GS, un CE1/CE2, un CE1 et un CM1) de l'Île-de-France, pendant trois années scolaires, de la rentrée 2022 à la fin de l'année scolaire 2024-2025. Les élèves de ces classes construisent sur *Scratch Junior* des animations libres, puis des animations d'une fable et de deux contes, après un passage par une *algorithmitisation* du récit, introduisant divers objets de l'algorithmique : une première approche de variables informatiques (les protagonistes), de la boucle « Répéter »,... Par ailleurs, au cours de l'année scolaire 2024-2025, une classe de CM1 (celle du second auteur de cet article) aborde avec le premier auteur de cet article la problématique suivante : Comment envisager une exploitation de l'*Intelligence Artificielle* (IA) dans les pratiques (pédagogiques et didactiques) de l'enseignant en CM1, dans le cadre d'apprentissages liés à différents domaines disciplinaires : LJ, arts plastiques, raisonnement, logique, mathématiques, algorithmique et programmation ? Cela fera l'objet d'un article ultérieur.

1 Les ingénieries didactiques

De 2022 à 2024, trois ingénieries se situant sur plusieurs domaines connectés : littérature de jeunesse, logique et raisonnement et algorithmique/programmation(/robotique) sont mises en place. Elles sont complétées par une ingénierie autour de l'utilisation d'IA graphique et textuelle pendant l'année scolaire 2024-2025. Pour chaque phase de chacune des ingénieries, nous avons quatre étapes : des *analyses a priori*, la *décision d'agir* sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes, les déroulements des *expérimentations sur le terrain* et les *analyses a posteriori* s'appuyant sur les données recueillies. Le choix des textes est issu de la LJ : la fable *Le Corbeau et le Renard* de Jean de la Fontaine (1621-1695) et deux contes : *Le lion et les trois buffles* de Dhouib et Angeli (2014) et *Le Petit Prince* de Saint Exupéry (1943). Pour chaque texte étudié, l'élève analyse la situation littéraire et logique du récit. Puis, il construit une animation sur *Scratch Junior*, langage de programmation graphique conçu pour apprendre la programmation/codage aux enfants de 4 à 8 ans. Cette animation est proposée après un passage par une *algorithmisation* de l'histoire, introduisant divers objets de l'algorithmique : idée de variables informatique, de boucles, etc.

2 Notre méthodologie de recherche

Dans le contexte de la didactique de l'algorithmique associée à celle de la LJ, notre méthodologie de recherche est adaptée pour répondre aux besoins spécifiques de l'enseignement des concepts liés à l'algorithmique connectés à des champs caractéristiques de la LJ que sont la compréhension du conte et de la fable chez des enfants de 4 à 10 ans. Une méthode d'enseignement appropriée est proposée. Cela inclut des approches actives, des projets pratiques, des simulations, et l'utilisation d'outils pédagogiques spécifiques pour l'algorithmique et la programmation. Notre recherche impliquant des changements dans la manière dont l'algorithmique est introduite (voire non pratiquée par méconnaissance des enseignant.e.s) à l'école primaire, nous proposons une formation rapide aux enseignantes participant à cette recherche-action collaborative sur le concept d'algorithme et sur l'utilisation de l'environnement *Scratch Junior*. Cette formation assurée par le chercheur, un des auteurs de cet article, est organisée sur deux séances synchrones de 90 minutes où les différentes fonctions que possèdent *Scratch Junior* sont travaillées. L'objectif est de rendre les enseignantes rapidement autonomes avec l'outil tout en leur donnant confiance pour l'intégrer en classe. La formation est en organisée en étapes. Lors de la 1ère séance, nous commençons par une présentation d'environ 30 minutes des objectifs pédagogiques de l'outil pour des élèves des cycles 1 et 2, en particulier les usages didactiques, comme le fait de développer la logique, la créativité et la narration. Des exemples concrets réalisables en classe sont proposés (ex. : raconter une histoire, animer un personnage, interactions entre deux personnages, etc.). Par ailleurs, une courte démonstration est donnée avec la création rapide d'un projet simple : générer une figure géométrique usuelle (un carré ou un triangle par ex.) puis la faire se déplacer et changer de taille (grandir ou rétrécir) au cours de son déplacement. Ensuite, les enseignants manipulent *Scratch Junior* de manière guidée pendant environ 30 minutes. Ils découvrent l'interface avec les éléments clés que sont la scène, les blocs de programmation, les personnages, les décors. Par ailleurs, une explication plus fine des

différentes catégories de blocs (apparence, mouvement, démarrage (drapeau vert), envoi et réception de messages, etc.) est donnée par le chercheur. Puis, pendant 30 minutes, les enseignants mènent des réflexions pédagogiques (gestion du groupe) et didactiques, sur les objectifs d'apprentissage (logique, narration, résolution de problèmes) et l'intégration interdisciplinaire : lien avec le français (récit), les mathématiques (déplacement, comptage, logique) et les arts visuels (création d'un personnage, d'une figure, changement de couleurs, modification d'un décor). La 2nde séance qui a lieu quinze jours plus tard est consacrée à des activités pratiques adaptées au cycle où l'enseignante enseigne. Ainsi, au cycle 1, le travail consiste à créer des personnages ou des objets qui bougent d'un point à un autre point, en passant par des points intermédiaires et en interagissant entre eux. L'idée est aussi de faire traverser une forêt à un animal, de passer d'un décor à un autre, de représenter la situation du *Corbeau et du Renard* de La Fontaine, etc. Au niveau du cycle 2, les élèves sachant lire et écrire, le travail porte aussi sur l'aspect narratif. Des mini-histoires (une fusée qui décolle de la lune avec son spationaute à bord et qui voyage dans l'espace pour rentrer sur Terre, le *Petit Chaperon Rouge* qui rencontre le loup, etc.) sont créées et animées avec plusieurs protagonistes (personnages, objets, etc.). L'idée est d'utiliser plusieurs scènes pour structurer le récit. Notre méthodologie comprend des enquêtes, des études de cas, des analyses documentaires, des expérimentations dans les classes participant à cette recherche-action collaborative. Les élèves sont issus de classes sociales et culturelles différentes. Un échantillon représentatif de la population cible de notre étude est choisi avec la collaboration des enseignantes qui sont aussi formatrices du primaire dans l'enseignement privé sous contrat à l'ISFEC – Île-de-France. Cet échantillon permet d'obtenir un recueil de données (enregistrements audios et/ou vidéos, travaux d'élèves, questionnaires aux élèves et aux enseignantes, etc.). Nous interprétons les résultats à la lumière de nos hypothèses et des questions de recherche. Nous concluons en tirant des implications pour la théorie, la pratique et des perspectives de recherche, en particulier avec la démocratisation récente de l'IA et ses conséquences probables dans l'évolution des pratiques enseignantes.

VI - NOS ATTENTES, NOS HYPOTHÈSES ET DES QUESTIONS DE RECHERCHE

Supposant que la transcription d'une fable ou d'un conte et de sa logique en un (ou des) algorithme(s) simple(s) peut favoriser la mobilisation du langage et du raisonnement, mais aussi la mémorisation du récit et sa reformulation, nous attendons que l'élève élabore au *papier-crayon*, un (ou des) algorithme(s) basé(s) sur la logique des structures algorithmiques, permettant une nouvelle représentation mentale de la fable ou du conte, et qu'il les implémente ensuite dans *Scratch Junior* afin de créer une animation. Nous supposons que la compréhension de la fable ou du conte chez l'élève se schématise par une représentation sémiotico-instrumentale, favorisant l'exploration du récit. Nous partons de l'hypothèse que l'élève dépassera la simple lecture de la fable ou du conte, en proposant une activité de programmation informatique. Cette organisation implicite de conduites et de gestes forme un schème (Vergnaud, 1989) constituant une mémoire de l'action et du travail de compréhension du texte et de la maîtrise du langage. Par ailleurs, dans la continuité des travaux de recherche effectués dans la thèse de Laval (2018), nous faisons l'hypothèse que les curricula situent l'algorithmique au niveau du primaire, comme du secondaire, dans une approche *outil* des algorithmes pour donner sens à un certain nombre de concepts mathématiques. Nous nous posons alors la question (Q1) : quelle serait une dialectique outil/objet au sens de Douady (1986) en vue d'une approche *objet* des algorithmes dès l'enseignement primaire ? De même, en lien avec la didactique de la LJ, nous nous questionnons sur le fait de (Q2) : comment dépasser ce stade pour que l'algorithmique devienne un vrai *objet* d'apprentissage dans le champ de la LJ ?

VII - UNE RECHERCHE ACTION COLLABORATIVE EN COURS

1 Le choix d'un environnement numérique : *Scratch Junior*

Scratch Junior est un environnement numérique permettant de programmer des déplacements d'un personnage ou d'un objet sur un écran. Contrairement à *Scratch*, il n'utilise pas de nombres relatifs (cycle 4) ou d'angles en degré (dernière classe du cycle 3 : 6ème). Son interface ergonomique, adaptée à de très jeunes élèves, est basée sur des aspects ludiques permettant de coder via des blocs de programmation regroupés en palettes de couleurs différentes et d'introduire les premiers concepts fondamentaux de l'algorithmique et de la programmation (figure 5).

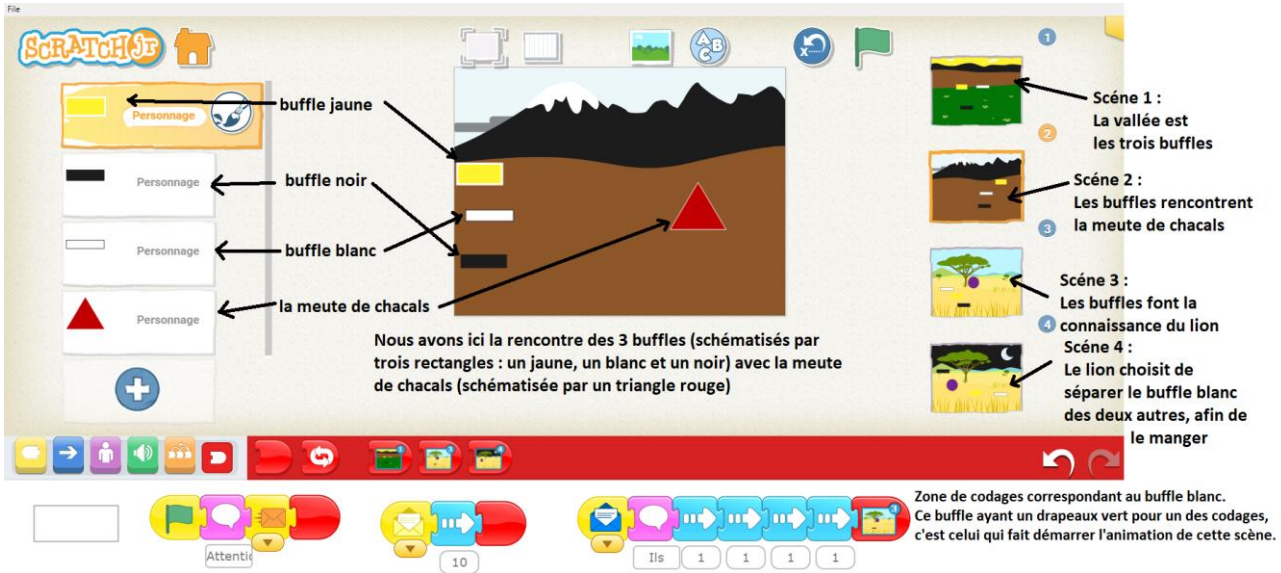


Figure 5. Codages du buffle blanc lors de la rencontre avec la meute de chacals par un binôme de CE2

2 Présentation de la recherche en cours (Septembre 2022 – Juin 2025)

Le travail se situe dans quatre champs disciplinaires de l'école primaire : la LJ avec l'analyse du récit, la logique avec la compréhension des différentes fonctions du récit, l'algorithmique avec la construction d'algorithmes au *papier-crayon* en *langage naturel* et la programmation avec l'utilisation d'un *langage machine* permettant l'implémentation d'algorithmes écrits en langage naturel. Ces algorithmes implémentés dans *Scratch Junior* par les élèves, sont testés afin de voir s'ils fonctionnent. Nous faisons le choix de ne présenter ici que deux situations littéraires. Par ailleurs, un article ultérieur présentera les analyses détaillées des travaux des élèves observés.

3 Cas du conte *Le lion et les trois buffles* – Travail des élèves en binômes

3.1 L'histoire

Il était une fois trois buffles : un blanc comme la lune, un noir comme la nuit, et un jaune comme la terre. Un matin, ils prennent la décision de découvrir le vaste monde et quittent leur vallée où ils sont les rois. Forts de leur union, il se sentent invincibles. Après avoir chassé une meute de chacals, ils arrivent dans la savane et aperçoivent un baobab où somnole un lion. Cherchant de l'ombre, les buffles demandent au lion s'ils peuvent s'installer sous le baobab. Celui-ci ayant mangé récemment est apaisé et leur assure sa protection. Mais sa faim revient. Il convainc alors le Jaune et le Noir de se séparer du Blanc, trop voyant pour leurs ennemis. Une fois ce dernier laissé seul, le lion affamé se jette sur lui et le mange. Les deux buffles restants se consolent en se disant qu'ils ont de la chance de côtoyer un tel puissant et, reprennent le cours paisible de leur vie, jusqu'au jour où le lion a de nouveau faim. Il instille la jalousie dans le cœur du buffle Noir qui abandonne son dernier frère aux crocs du lion. La fois suivante, quand le lion a de nouveau faim, il ne reste plus personne pour protéger le buffle Noir…

3.2 Brève présentation du travail d'un binôme de CE2

Lors de la 1ère séquence de français (1 heure), les élèves analysent le contexte du conte et les images qui illustrent le livre. La 2nde séquence, qui débute une semaine plus tard, porte sur l'algorithmique et la programmation. Elle est découpée en trois séances de 40 minutes qui sont réparties sur trois semaines successives. Les élèves sont en salle informatique. Ils déterminent : (1) les protagonistes (buffles/meute de chacals/lion) ; (2) les lieux (vallée/lieu de rencontre des chacals/savane avec un baobab et deux périodes de la journée : le jour et la nuit) ; (3) la construction des choix des dialogues ; (4) la décomposition du conte en trois chapitres, où le premier chapitre correspond à la vallée du départ suivie de la rencontre avec les chacals, le deuxième est la rencontre du lion et la disparition du buffle blanc et le troisième correspond aux disparitions successives des buffles Jaune et Noir, suivies d'un épilogue à l'histoire ; (5) passage au codage et implémentation dans *Scratch Junior* avec une schématisation/modélisation associée à des objets géométriques représentant les protagonistes (figure 5).

4 Cas de la fable *Le Corbeau et le Renard* – Travail individuel des élèves

L'élève analyse la fable et se construit une image mentale de la situation. Cette analyse (30 minutes) est validée par l'enseignante. Ensuite, l'élève détermine les protagonistes, le lieu, le choix des discours (10 minutes). Puis, il construit les codages de chacun des protagonistes et les implémente dans *Scratch Junior* (40 minutes) (figure 6). Le codage sur *Scratch Junior* a lieu une semaine après l'analyse de la fable.



Figure 6. Implémentation des actions codées du renard par un élève de CE2

VIII - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au regard des figures 5 et 6 et des observations faites en classe qui feront l'objet d'un second article, nous observons que le travail réalisé par des élèves de cycle 2 permet d'envisager qu'une connexion entre LJ, codage et création peut favoriser une entrée dans les PA et PC chez le jeune élève. Par ailleurs, cette approche mettant en connexion LJ et algorithmique/codages nous questionne sur la mobilisation du langage et du raisonnement logique pour l'analyse du récit. De même, nous nous interrogeons dans quelle mesure la transcription en algorithmes simples peut favoriser une meilleure compréhension du récit, en s'appuyant sur son contenu et sa logique. En effet, l'élève modifie son expérience et sa relation au récit, en travaillant sur le schéma narratif dudit récit et en proposant un codage en lien avec l'algorithmique. Il construit une nouvelle forme d'adaptation de la fable ou du conte. Par ailleurs, notre réflexion en cours nous fait supposer que nous devrons prendre en compte le développement de l'IA qui pourrait permettre aux élèves d'interagir avec un *Chatbot* pour générer des dialogues ou des événements inattendus, mais

aussi le fait que l'IA, en tant que robot conversationnel, pourrait aider l'élève à développer les personnages en répondant à des questions sur les motivations de l'élève.

BIBLIOGRAPHIE

Angeli, C., and Giannakos M.N. (2019). Computational thinking education: Issues and challenges. *Computers in Human Behavior*, 106185 https://doi.org/10.1016/j.chb.2019.106185

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? Les dossiers des sciences de l'éducation. *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes*, N° 8, pp. 281-308.

Drot-Delange, B., & Baron, G.-L. (2016). L'informatique comme objet d'enseignement à l'école primaire française ? Mise en perspective historique. *Revue française de pédagogie*, 195, pp.51 - 62.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). *« Filling up » - the problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks*. In M. Bosch (Ed.) Proceedings for the CERME 4, Spain, pp. 1623-1633.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Vol. 1, Vancouver, 13-17 April 2012, 25 p.

Commission Kahane. (2000). *L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée : Propositions pour une refondation.* Paris : ministère de l'Éducation nationale.

Couderette, M., & Laval, D. (2024 à paraître). Introduction de l'algorithmique dans le cadre d'enseignements interdisciplinaires au cycle 2 du primaire en France. *Actes du colloque C2i Didactique de Poitiers*, mai 2023.

Dhouib, M., & Angeli, M. (2014). *Le lion et les trois buffles*. Seuil Jeunesse.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil–objet. Recherches en didactique des Mathématiques, 7.2, 5–31. Editions La Pensée Sauvage.

Farahnak, N. (2010). Analyse structurale de deux contes de Perrault selon les schémas de Propp, Larivaille et Greimas. *Etudes de Langue et Littérature Françaises*, *2*(1), 5-15.

Greimas, A. J. (1966). *Sémantique structurale*. Paris : Larousse.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, v. 11, pp.175-193. Halshs-00858709.

Jouve, V. (2006). Les métamorphoses de la lecture narrative. *Protée*, *34*(2-3), 153–161.

Knuth, D. E. (1980). *Algorithms in modern mathematics and computer science.* Springer.

Knuth, D. E. (1968), The Art of Computer Programming, *Vol 1: Fundamental Algorithms* (2e éd.). Addison-Wesley.

Kuzniak, A., & Richard, R. P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17–26.

Larivaille, P. (1974). L'analyse (morpho)logique du récit, *Poétique*, n° 19, pp. 368-388.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Laval, D. & Peuch-Lestrade, D. (2024). *De la page au code : Comment explorer les récits de la littérature de jeunesse à travers les lentilles algorithmique et littéraire.* Actes du colloque Printemps de la Recherche en ISFEC-UNISFEC, mai 2023, pp. 83-94.

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université Sorbonne Paris Cité.

Minh T. K., & Lagrange J.B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education, 48*, pp.793–807.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas* (1st éd.). Basic Books.

Propp, V. (1928 réédité en 1965). *Morphologie du conte*, Seuil, Paris.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., Millner, A., Rosenbaum, E., Silver, J., Silverman, B., & Kafai, Y. (2009). Scratch: Programming for all. *Communications of the ACM*, *52*(11), 60-67. https://doi.org/10.1145/1592761.1592779

Saint-Exupéry, A. (1943). *Le Petit Prince*. Gallimard.

Vergnaud, G. (1989). La théorie des champs conceptuels. *In Publications de l'institut de recherche mathématiques de Rennes*. Fascicule S6. Vème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. pp. 47-50.

Vigot, N. (2018). Enseigner l'informatique à l'école élémentaire au cycle 2. Une expérimentation de Scratch Junior. *Repères-IREM*. N° 113. p. 31-44.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35.

PROCESSUS D'ACCESSIBILITÉ D'UNE TÂCHE COMPLEXE METTANT EN JEU LA PROPORTIONNALITÉ DANS UNE CLASSE DE 4E D'UN EREA

Stéphanie DEGONDE
PLC, EREA Toulouse Lautrec
stephanie.degonde@ac-versailles.fr

Florence PETEERS
MCF, CY Cergy Paris Université
LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France
florence.peteers@cyu.fr

Cécile RAMECOURT
Formatrice éducation inclusive, CY Cergy Paris Université
cecile.ramecourt@cyu.fr

Résumé
Depuis 3 ans, le groupe IREM Accès Ô Maths analyse des tâches complexes existantes et les teste au collège (cycles 3 et 4) auprès d'élèves à besoins éducatifs particuliers (BEP). L'objectif est d'observer leur mise en œuvre en classe et d'identifier les leviers d'accessibilité. Dans cette communication, nous nous intéressons aux conditions d'accessibilité d'une tâche complexe mettant en jeu la proportionnalité dans une classe de 4e d'un EREA (Etablissement Régional D'enseignement Adapté). Sous le prisme de la double approche (Robert & Rogalski, 2002) ainsi que de la cible de Benoit catégorisée (Yvain-Prébiski & al., 2024), nous avons cherché à analyser les choix réalisés par l'enseignante dans le but de rendre accessible la tâche à l'ensemble de ses élèves et de dégager ses logiques d'action (en particulier en amont de la mise en situation sur la tâche complexe). Notre analyse nous permet d'identifier une « logique d'aplanissement des obstacles liés aux compétences périphériques et spécifiques », fortement pilotée par les besoins des élèves et pensée sur un temps long.

Cet article est le fruit du travail d'un groupe de travail de l'IREMS de Paris, le groupe Accès ô Maths[1] (https://irems.u-paris.fr/groupe-acces-o-maths/). Le groupe a été créé au printemps 2021 avec pour but d'identifier les leviers qui permettent de penser l'accessibilité de tâches complexes relevant de la fin du cycle 3 et du cycle 4 aux élèves en grande difficulté en mathématiques. Une des spécificités du groupe est de réunir des profils très variés : des enseignantes spécialisées (professeures des écoles ou de lycée et collège), une conseillère pédagogique, des formatrices et formateurs (en mathématiques ou école inclusive) et une chercheuse.

Nous présenterons dans cet article une analyse de cas en Etablissement Régional d'Enseignement Adapté (EREA) autour d'une tâche complexe mettant en jeu la proportionnalité. Tout d'abord, nous préciserons quelques éléments de contexte ainsi que les questions qui nous préoccupent. Nous poserons ensuite quelques éléments théoriques sur lesquels nous nous appuierons par la suite ainsi que la méthode

[1] Durant l'année 2023-2024, le groupe était constitué de Stéphanie Degonde, Bastien Faliu, Corinne Hallégot, Gilles Muller, Florence Peteers, Agnieszka Rabe, Cécile Ramecourt, Sophie Revellin, Gabriela Vayaboury et Magali Wydasz.

employée. Puis, nous présenterons l'analyse des pratiques déclarées et leurs effets attendus en termes d'accessibilité. Enfin, nous établirons un bilan et proposerons des perspectives du point de vue de la recherche ainsi que de la formation.

I - CONTEXTE ET QUESTIONS

Dans cette première section, nous exposerons quelques éléments relatifs à l'établissement, aux élèves, ainsi qu'à la tâche complexe qui sont au centre de notre travail.

1 Présentation de l'EREA

Une présentation de l'établissement s'impose, tant il est exceptionnel en France. L'EREA de Vaucresson, appelé « Lycée Toulouse Lautrec », est l'un des quatre-vingt-deux EREA de France et l'un des six scolarisant des élèves avec handicap moteur. C'est également l'unique EREA français qui accueille aussi des élèves valides. Il scolarise des jeunes du CP au BTS (brevet de technicien supérieur). L'établissement est associé au CSR (centre de soin et de rééducation) dépendant du ministère de la santé, dans lequel travaillent de nombreux professionnels médicaux et paramédicaux. Un internat, réservé aux élèves en situation de troubles moteurs, accueille 125 élèves, une partie de l'internat est médicalisé pour les élèves qui nécessitent une surveillance nocturne.

Les élèves en situation de handicap moteur accueillis dans l'établissement sont des élèves souffrant d'une forte dépendance, près de la moitié ont des troubles cognitifs associés à une dyspraxie sévère ou encore nécessitent des soins fréquents (de plusieurs fois par heure, à plusieurs fois par jour ou par semaine). L'inclusion en établissement ordinaire n'est souvent pas envisageable pour ces élèves, tant les soins sont importants ou la pathologie complexe. Parfois les élèves arrivent dans l'établissement lorsque l'inclusion ne répond plus ou répond mal à leurs besoins : par exemple, régression sur le plan moteur à cause d'une incapacité de suivre les séances de kinésithérapies quotidiennes nécessaires, ou bien régression sur le plan de l'autonomie dûe à l'absence de toilettes adaptées et de personnel étant formé pour gérer ce point. Les élèves valides sont souvent des fratries d'élèves scolarisés dans l'établissement, ou bien des élèves recherchant des classes à effectifs réduits, des élèves en difficulté scolaire, atteints de troubles du langage et des apprentissages ou de phobie scolaire. Certains viennent par choix de vie, partager leur scolarité avec des élèves en situation de handicap étant vécu comme une chance importante d'éducation à la diversité.

Une des spécificités de l'établissement est de n'accueillir aucun AESH (accompagnant d'élève en situation de handicap) dans les classes. L'objectif principal étant de développer l'autonomie des élèves, les cours sont adaptés afin de permettre aux élèves de se passer de leur aide durant les cours, les effectifs sont très allégés (de 8 à 14 élèves par classe). Des bénévoles viennent servir de secrétaires pour les évaluations, leur rôle est d'écrire exclusivement ce que les élèves leur dictent.

2 Les élèves

L'expérimentation porte sur les classes de Stéphanie qui est membre du groupe Accès ô Maths et co-autrice. Elle est PLC (professeure de lycée et collège) en mathématiques et également enseignante spécialisée. Nous nous intéresserons particulièrement à ses deux classes de 4ème, soit une vingtaine d'élèves. Ces élèves souffrent de pathologies variées, ont des troubles cognitifs variés aussi et près de la moitié ont des troubles des fonctions motrices qui excluent la possibilité de prendre des notes, d'écrire plus ou moins rapidement.

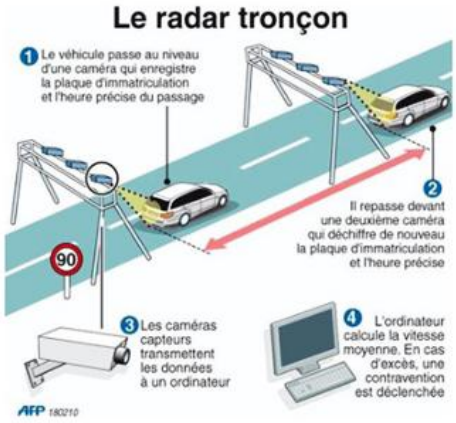
3 La tâche

La tâche complexe relative à la proportionnalité à laquelle nous nous sommes intéressés est une tâche issue de la ressource Eduscol « Mathématiques et quotidien »[2] intitulée « Le radar tronçon » (voir Figure 1). Cette tâche a également donné lieu à un cahier de lesson study rédigé par le groupe « Activités » de l'IREM de Rouen. Elle a été choisie par Stéphanie pour plusieurs raisons. Tout d'abord car elle fait intervenir des notions travaillées durant le cours de sciences (vitesses moyennes) et qu'il s'agit d'un fil rouge dans la construction de sa séquence sur la proportionnalité, comme nous le verrons par la suite. De plus, elle a accompagné des étudiants (MEEF 1 et MEEF 2, INSPE d'Evry) sur cette situation lors de l'animation d'une formation dans le cadre des Lessons Studies et était curieuse de voir la réaction de ses propres élèves face à cette situation.

Sur une zone de contrôle de 9 km, la vitesse est limitée à 90 km/h.

Pour contrôler la vitesse des véhicules, il existe un nouveau type de radar : **les radars tronçons**. Ce type de radar permet de mesurer la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un tronçon de plusieurs kilomètres.

Un automobiliste a parcouru les cinq premiers kilomètres à la vitesse moyenne de 110 km/h. S'apercevant soudain qu'il est dans une zone contrôlée par un « radar tronçon », il décide d'abaisser sa vitesse à 60 km/h sur les quatre derniers kilomètres. On peut se poser au moins deux questions.



1. Sera-t-il verbalisé ?
2. À quelle vitesse moyenne maximale aurait-il pu rouler sur les quatre derniers kilomètres pour ne pas être verbalisé ?

Figure 1. Tâche du radar tronçon

Nous nous posons alors les questions suivantes : **Quels choix fait Stéphanie, en particulier en amont de la séance, pour rendre accessible la tâche des radars tronçons ? Comment catégoriser les effets attendus ?**

II - CONCEPTS, CADRE MÉTHODOLOGIQUE ET MÉTHODE

Dans cette section, nous préciserons ce que nous entendons par accessibilité et nous présenterons les éléments théoriques sur lesquels nous nous appuyons ainsi que notre méthode.

1 L'accessibilité comme fil conducteur

Dans l'article 1 du code de l'éducation[3], « le service public de l'éducation […] reconnaît que tous les enfants partagent la capacité d'apprendre et de progresser. Il veille à la scolarisation inclusive de tous les enfants, sans aucune distinction ». Pour permettre cette scolarisation inclusive :

[2] https://eduscol.education.fr/document/17206/download

[3] https://www.legifrance.gouv.fr/codes/article_lc/LEGIARTI000043982767

> *Il apparaît dès lors que la prise en compte du continuum des besoins constitue un facteur déterminant pour l'émergence de pratiques scolaires de non-discrimination, en appui sur la notion d'accessibilité pédagogique et en relation avec une conception écologique, non médicalisée et scolairement située des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves. Cette approche se présente comme le moyen de penser et de réaliser une école pour tous, sans recours à la catégorisation médicale et à l'enseignement séparé (Benoit, 2017, p. 23). Dans cette perspective nouvelle, le traitement pédagogique ou didactique, destiné à rendre accessible et par conséquent inclusive la situation d'apprentissage, se substitue au traitement institutionnel et curriculaire de la diversité des élèves.* (Benoit, 2020, p.67)

Le texte de Benoit illustre bien le changement de paradigme entre deux discours : celui médical (centré sur l'élève à besoins éducatifs particuliers) et celui inclusif. Pour parler de scolarisation inclusive, il est nécessaire de permettre à toutes et à tous les élèves de « prendre le même départ » donc de rendre accessible les apprentissages. Cette volonté doit être présente à différents niveaux : celle de l'enseignant·e seul·e dans sa classe, celle de la collaboration entre enseignant·es et celle, plus globale de l'organisation du système scolaire, son architecture. D'ailleurs la notion d'accessibilité universelle vient du domaine de l'architecture où cette conception universelle, appelée « Universal design »pense l'accessibilité physique en amont de la construction des bâtiments pour éviter les adaptions ou les compensations à postériori. Pour transposer ce concept de conception universelle à l'éducation, Kame'enui et Simmons (1999) emploient le terme de rampe cognitive. C'est une métaphore pour exprimer l'idée qu'il est possible de rendre compréhensible pour tous (ou presque) l'entrée dans les activités en évitant les obstacles inutiles. Rendre accessible ne veut pas dire simplifier. Pour rendre effective cette rampe d'accès cognitive, les enseignant·es, dans leur classe, avec les équipes pédagogiques des établissements et plus largement au sein de l'éducation nationale disposent de différents leviers. Ces leviers sont didactiques, pédagogiques, environnementaux. Le choix de la tâche, des objectifs, des supports, de la temporalité, de leur posture enseignante, des modalités de travail, des types de rendus, des aides disponibles ou encore de la gestion de l'espace sont des exemples de moyens d'actions pour penser cette accessibilité car ces actions s'adressent à tous et non pas à un élève en particulier (Assude et al, 2014). L'objectif de l'accessibilité d'une tâche collective est donc que tous les élèves se retrouvent engagés cognitivement, qu'ils puissent participer, partager et restituer ce qu'ils auront fait et découvert. Si c'est le cas, alors le processus d'apprentissage et de progrès est enclenché. Dans une démarche inclusive de l'enseignement, les aides individuelles peuvent bien sûr être nécessaires, mais pas en première intention.

2 Cadres théoriques

Pour analyser les pratiques de Stéphanie et les caractériser en termes d'accessibilité, nous nous sommes appuyés sur deux cadres théoriques précisés dans la suite de cette section : la double approche de Robert et Rogalski (2002) et la cible de Benoit catégorisée (Benoît, 2020, Yvain-Prébiski & al., 2024).

2.1 La double approche

Notre objectif étant d'analyser les pratiques enseignantes, nous nous appuierons sur le cadre théorique de la double approche développée par Robert et Rogalski (2002). Afin d'étudier la complexité de ces pratiques, Robert et Rogalski proposent une analyse en cinq composantes comme illustré sur la Figure 2.

Les trois premières composantes permettent de dégager les déterminants de ces pratiques en prenant en compte le métier et ses contraintes. Dans la composante personnelle, on retrouve les représentations que l'enseignant·e peut avoir sur ses élèves, sur l'enseignement des mathématiques, … La composante institutionnelle prend en considération les contraintes auxquelles est soumis l'enseignant·e (cadre législatif, programme, horaire, …). Enfin, la composante sociale relève de l'inscription de l'enseignant·e dans un collectif en tenant compte notamment des exigences et attentes de son établissement. Ensuite on a deux composantes liées à l'activité d'enseignement : la composante cognitive regroupe les analyses

liées au scénario d'apprentissage planifié par l'enseignant·e ainsi qu'à ses choix (tâches, modalités, supports, organisation, …). Elle nous renseigne sur l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant·e. La composante médiative englobe les analyses relatives aux interactions entre les acteurs (discours de l'enseignant·e, aides, modalités de mise au travail, …).

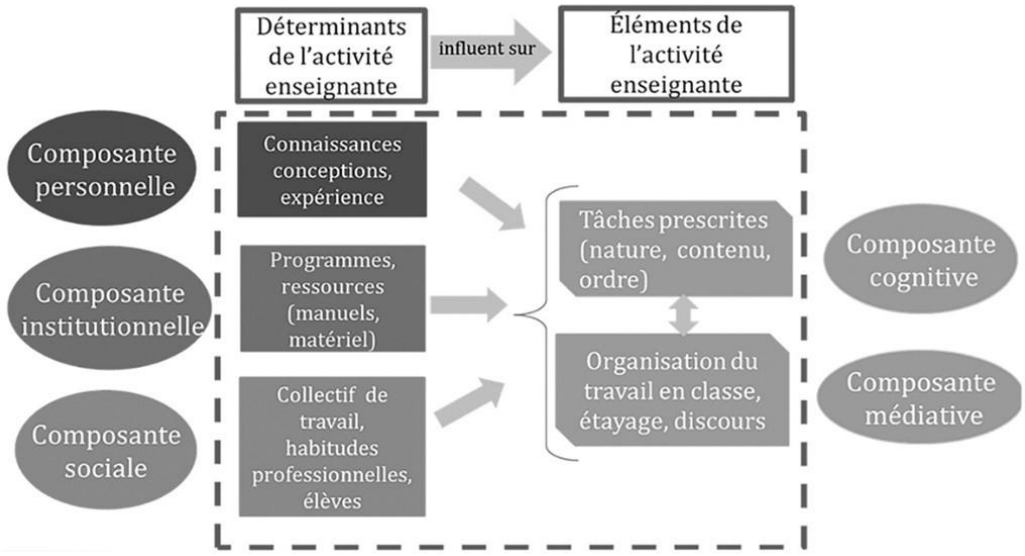


Figure 2. Les 5 composantes de la double approche (Bouard et al., 2022, p. 74)

2.2 La cible catégorisée

La cible de Benoit (Pôle inclusif 78, 2022) permet une hiérarchisation des enjeux de savoirs (voir Figure 3). Pour atteindre le cœur de cible, objectif d'apprentissage fixé par l'enseignant·e, l'élève doit mobiliser à la fois des compétences qui relèvent de la discipline (les compétences spécifiques) mais aussi de nombreuses compétences transversales : les compétences périphériques. Les compétences spécifiques, que les enseignant·es appellent aussi les prérequis, sont bien identifiées au niveau disciplinaire comme étant un déjà-là nécessaire à la réussite de la tâche. En classe, des outils matériels comme des affichages des traces écrites des cours précédents, des propriétés et des théorèmes déjà vus, des procédures et des faits numériques à mémoriser sont des exemples d'étayages qui participent entretenir une mémoire didactique liée à ces compétences spécifiques. En revanche, les compétences périphériques, restent souvent implicites pour les enseignant·es et donc aussi pour les élèves. Par exemple, il est nécessaire de prendre conscience que la longueur d'un énoncé de problème pour un élève petit décodeur est importante. En effet, si cet élève ne termine pas l'activité, ce n'est pas forcément parce qu'il n'a pas les connaissances disciplinaires. Mais que la charge cognitive pour la lecture du texte sera telle qu'après le processus de compréhension de ce texte cet élève ne sera peut-être plus en capacité d'être actif cognitivement pour les processus liés à la résolution de problème, notamment la mise en relation des grandeurs. Autre exemple, l'utilisation des outils géométriques pour des élèves ayant des difficultés de motricité fine ne devrait pas être un obstacle à la compréhension de la construction de figures. Les compétences périphériques prennent souvent le statut d'obstacles impensés à l'atteinte du cœur de cible.

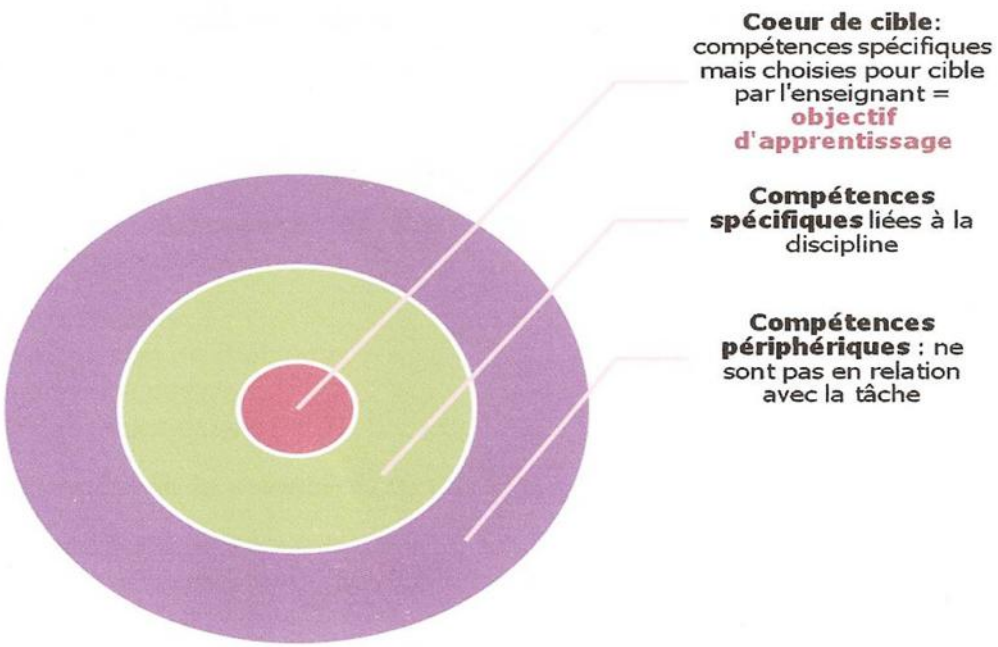


Figure 3. La cible de Benoit

La catégorisation de la cible de Benoit permet d'aller plus loin car elle enclenche :

> *(...) un processus d'analyse de la tâche pour identifier les leviers d'accessibilité. Le terme de processus est essentiel car la cible n'est pas une « photo figée » comme un tableau qu'on remplirait. Elle permet de mettre en évidence les liens et les interactions entre l'entrée par le savoir : « qu'est-ce que l'enseignant·e veut que les élèves apprennent ? », la catégorisation des compétences mobilisées dans la tâche et l'identification des obstacles associés.* (Yvain-Prebiski & al., 2024, pp. 3-4)

Nous avons repris une idée d'Isabelle Dubernard et le référentiel des potentialités et des besoins de Barry (2011) en faisant le choix de prendre en compte au sein de la cible les champs ci-après et de leur donner la signification suivante (voir Figure 4) :

- Le champ cognitif qui correspond à la mobilisation des fonctions cognitives (anticipation, planification, inhibition, mémoire de travail, récupération en mémoire des informations, attention, repérage visuo-spatial, raisonnement, inférences, auto-contrôle, métacognition…) que ce soit dans les compétences spécifiques (liées à la discipline, ici les mathématiques) ou que ce soit dans les compétences périphériques (transversales).
- Le champ des savoirs et des procédures qui lui est lié aux compétences de la discipline travaillée.
- Le champ culturel qui n'est ici pas utilisé dans le sens de Barry (2011), mais qui fait référence aux expériences personnelles et culturelles. Il est souvent associé aux compétences périphériques mais il peut aussi affecter les compétences spécifiques. Prenons comme exemple l'utilisation de patterns peu utilisés en France mais qui est potentiellement intéressant pour développer le sens des nombres et la pensée algébrique.
- Le champ moteur qui est associé aux fonctions sensori-motrices (motricité fine, déplacements, vue, l'ouïe…).
- Le champ relationnel qui revêt la signification de Barry, c'est-à-dire toutes les relations à soi, aux autres, à l'apprentissage, à l'apprentissage avec les autres. Il inclut donc les compétences psycho-sociales.
- Pour finir le champ langagier qui regroupe les différents langages (mathématiques, informatique, linguistique) et le codage, le décodage mais aussi la compréhension d'un écrit.

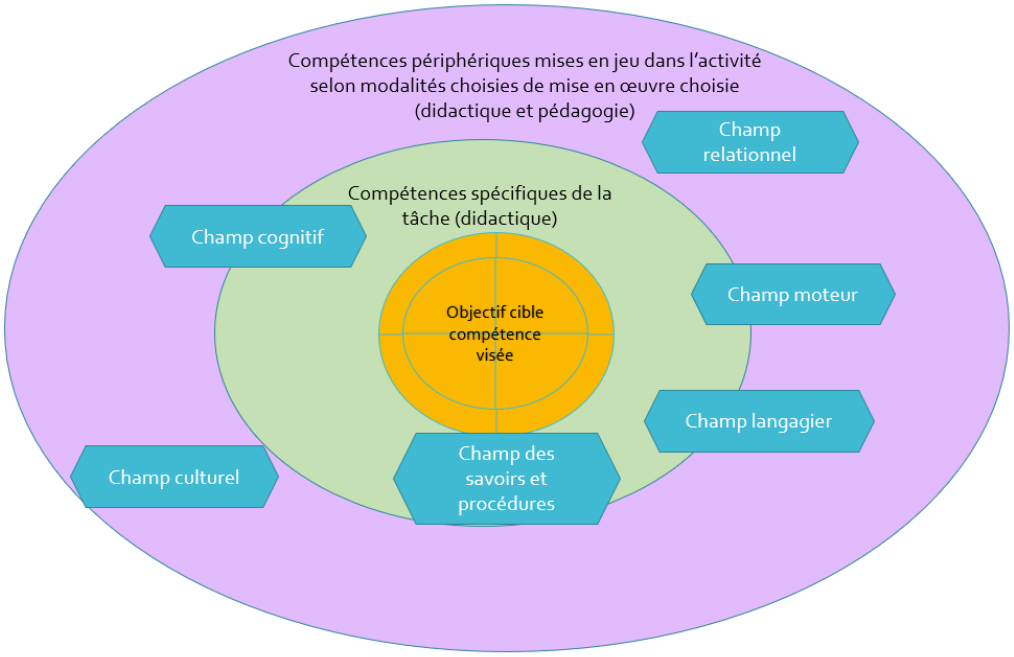


Figure 4. Cible de Benoit catégorisée

La catégorisation permet alors de visualiser l'origine de certains obstacles récurrents dans les champs cognitif, langagier, relationnel ou culturel. Par exemple, en fonction des expériences personnelles des élèves, parfois très éloignées de la culture scolaire, ou de leur représentation mentale, des malentendus peuvent surgir et sont de véritables freins à l'apprentissage. Les champs des savoirs et procédures, cognitifs, langagier et moteur ont été placés à l'intersection des compétences spécifiques et périphériques car en fonction de la tâche les compétences mobilisées dans ces champs peuvent être spécifiques ou périphériques.

Nous avons utilisé la cible catégorisée pour analyser la tâche du radar tronçon. La démarche proposée fait donc référence aux travaux d'Hervé Benoit, de Valérie Barry et a été expérimentée et modélisée par l'équipe de formateurs en éducation inclusive de l'INSPE de Cergy. Elle permet de mener un processus de réflexion en trois temps :

- L'analyse des compétences mobilisées dans la tâche
- L'analyse des obstacles potentiels de la tâche par rapport à l'objectif poursuivi
- L'anticipation de sa mise en œuvre, des aménagements et étayages possibles pour la rendre accessible à tous les élèves

Nous pouvons, sans avoir une volonté d'exhaustivité, proposer dans un premier temps une catégorisation des compétences mobilisées pour réussir la tâche (voir Figure 5).

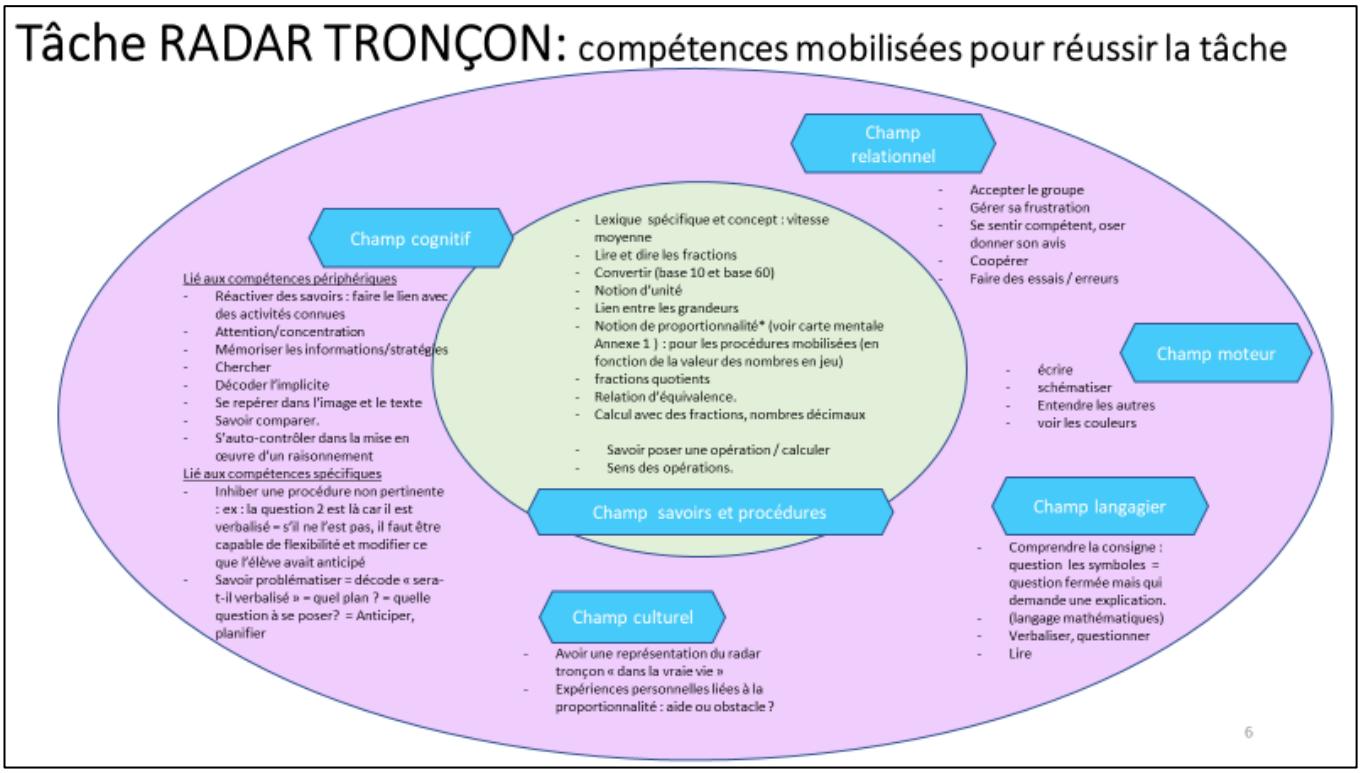


Figure 5. Mise en œuvre de la cible de Benoit catégorisée : compétences en jeu

Sur base des compétences en jeu, nous pouvons ensuite anticiper les obstacles potentiels au regard de l'objectif d'apprentissage (voir Figure 6) ainsi que les étayages possibles pour rendre la tâche accessible (voir Figure 7).

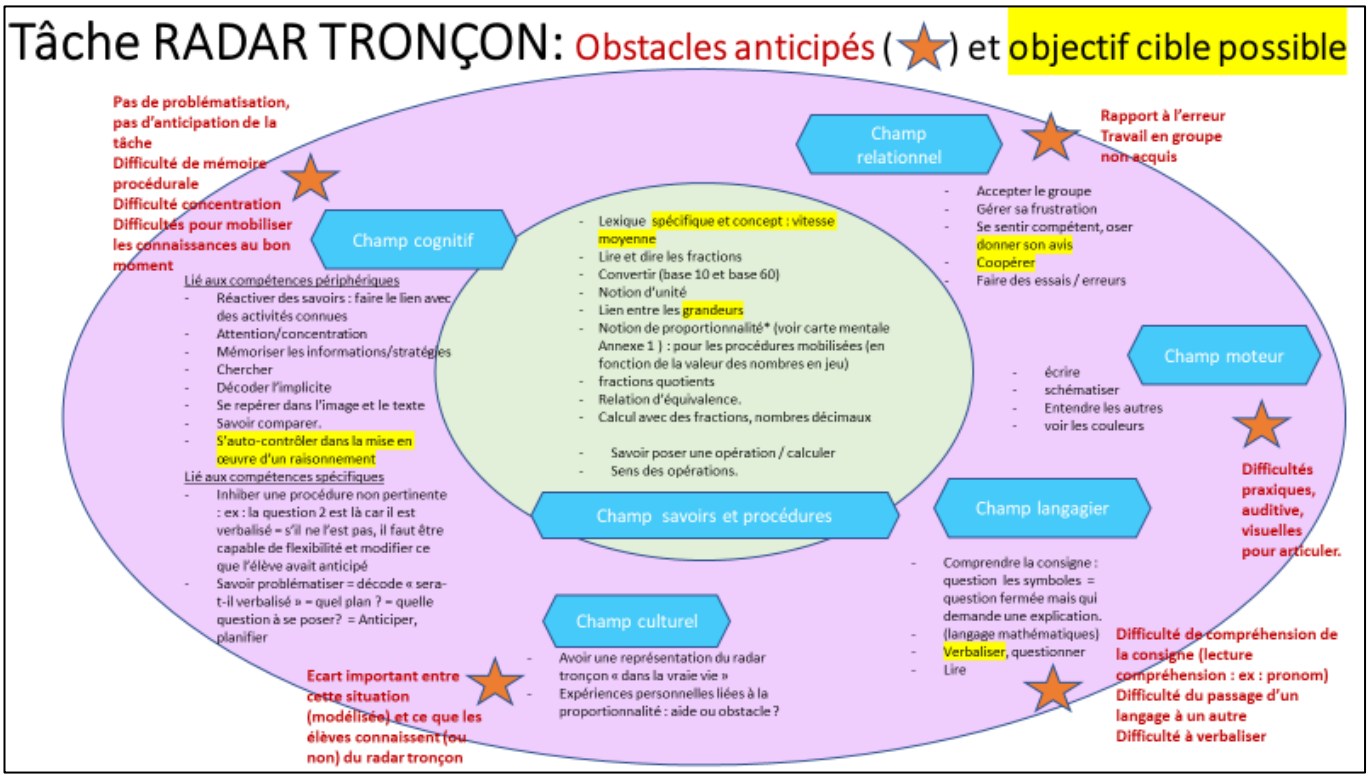


Figure 6. Mise en œuvre de la cible de Benoit catégorisée : obstacles anticipés et objectif cible possible

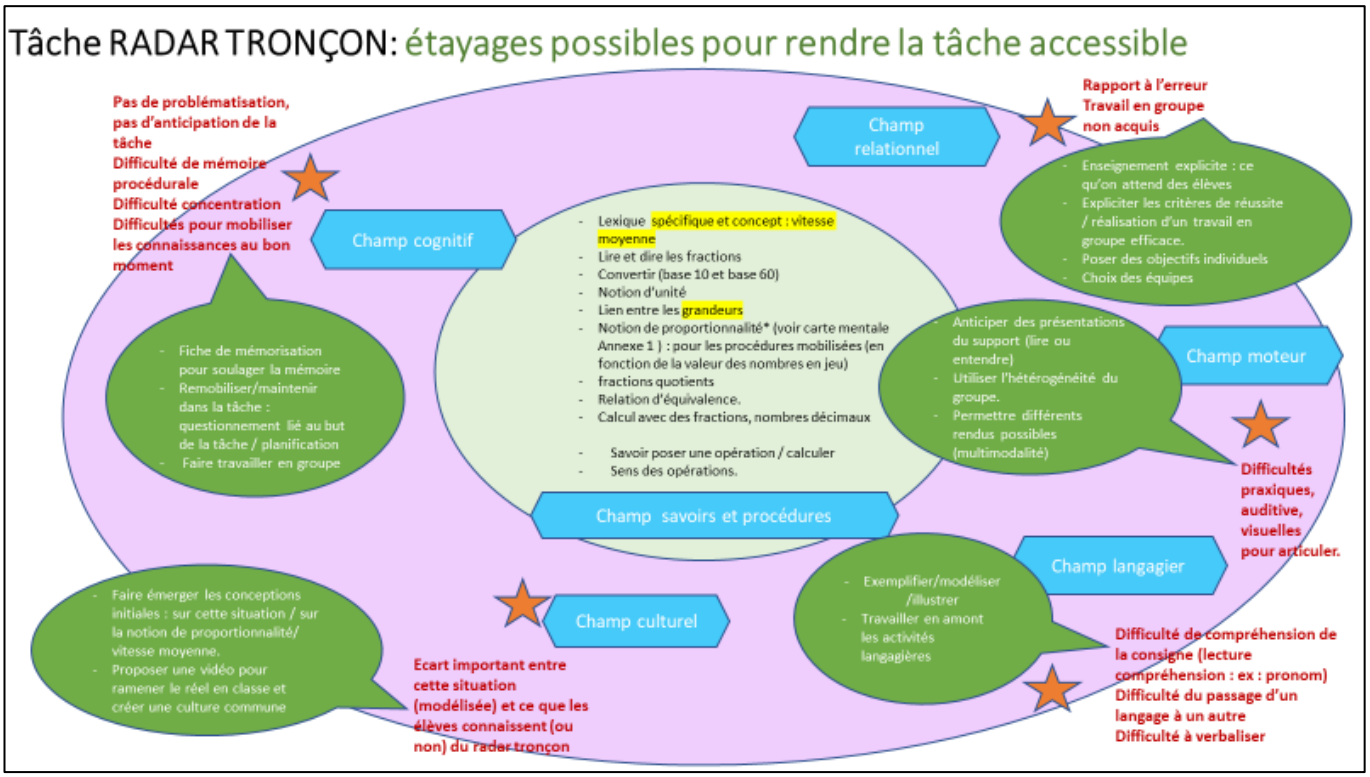


Figure 7. Mise en œuvre de la cible de Benoit catégorisée : étayages possibles pour rendre la tâche accessible

La figure 8 présente une synthèse avec les questions à se poser relativement à l'accessibilité de la tâche du radar tronçon.

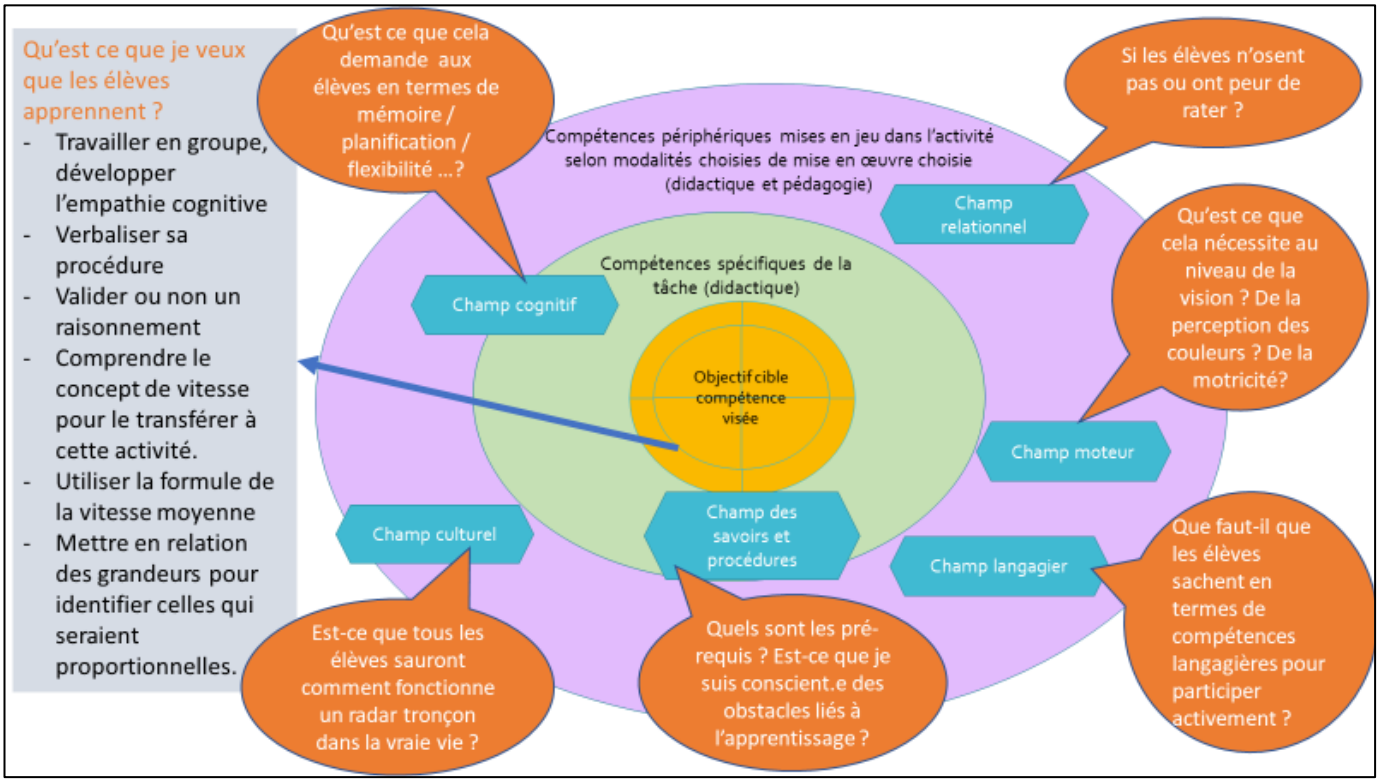


Figure 8. Mise en œuvre de la cible de Benoit catégorisée : synthèse

3 Méthode

Nous disposons déjà d'éléments nous permettant d'identifier les déterminants de l'activité de Stéphanie (ou du moins en partie). En effet, au niveau de la composante personnelle, Stéphanie a un profil assez expert à la fois au niveau mathématique, au niveau didactique et au niveau de de la prise en charge des élèves à besoins éducatifs particuliers puisqu'elle est PLC, titulaire du 2CA-SH (Certificat complémentaire pour les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap) et du CAPPEI (certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive) et qu'elle a suivi un master en didactique. Au niveau institutionnel, nous avons vu que le projet d'établissement était centré sur l'autonomie et qu'il y avait une volonté forte de ne pas s'écarter des programmes du cycle 4 malgré les difficultés des élèves. Et puis au niveau social, il y a cette particularité des classes de l'établissement qui sont très hétérogènes et accueillent environ 80% d'élèves à besoins éducatifs particuliers.

Afin de caractériser les pratiques en amont de la réalisation de la tâche du radar tronçon, nous nous sommes intéressés aux pratiques globales liées au cours de mathématiques, à la séquence sur la proportionnalité menée en octobre 2023 et au scénario prévu pour les séances prévues autour du radar tronçon qui a eu lieu après la séquence, mi-novembre 2023. Pour identifier les éléments de l'activité enseignante à ces trois moments, et plus particulièrement la composante cognitive, nous disposons de documents de cours et d'entretiens avec l'enseignante. Pour chaque moment, nous décrirons ce qui est proposé par Stéphanie et puis nous interpréterons en termes d'effets attendus sur l'accessibilité en croisant avec les obstacles anticipés sur la cible catégorisée.

III - ANALYSE DES PRATIQUES DECLAREES ET EFFETS ATTENDUS EN TERMES D'ACCESSIBILITÉ

Dans cette section, nous présenterons des éléments d'analyse relatifs aux pratiques de Stéphanie et à leurs effets potentiels sur l'accessibilité de la tâche du radar tronçon.

1 Le cours de mathématiques

Certains éléments caractéristiques des pratiques de Stéphanie ne sont pas spécifiques à la notion de proportionnalité qui nous intéresse mais impactent l'ensemble de ses cours de mathématiques. Ce sont ces éléments qui sont décrits et analysés ci-dessous.

1.1 Description des pratiques

La langue mathématique est présentée par Stéphanie aux élèves comme une langue dont l'écrit est extrêmement rigoureux et l'oral plus ambigu. Dès le début de l'année, elle s'appuie sur Géninet (2015) pour qualifier cette langue mathématique de « très ancienne, doublement polysémique, discrète, minimaliste, cachotière et pour toutes ces raisons, sont trompeuses » (Géninet, 2015, p.33). Ancienne car elle puise ses origines dans l'histoire des mathématiques, et le premier sens attribué à un mot courant s'est trouvé enrichi, complexifié (par exemple, le mot « développer » a été introduit au XIIème siècle mais n'est apparu dans la langue mathématique qu'au XXème siècle). Elle est doublement polysémique car, d'une part il peut y avoir conflit entre le sens courant et le sens savant (par exemple le mot « hauteur ») et d'autre part, un même mot ou un même symbole peut désigner plusieurs sens (dans 222, le chiffre 2 prend trois sens différents selon sa position). C'est une langue discrète car en peu de symboles elle décrit des objets bien différents ([AB], (AB) ou $f(x) = 2x + 3$). Géninet (2015) décrit aussi cette langue comme minimaliste. En effet, avec 10 chiffres, on peut écrire une infinité de nombres et ces nombres auront toujours un sens (par opposition aux 26 lettres de l'alphabet qui ne permettent que d'écrire un nombre limité de mots). Lorsqu'elle présente cette langue comme cachotière, elle fait référence aux chiffres cachés (par exemple, on dira « mille » au lieu de « un mille »), ou ceux qui n'apparaissent pas dans le nombre écrit (comme « quatre-vingt ») ou encore comme la fraction qui se lit dans l'ordre inverse des

deux actions qu'elle symbolise, ou encore le centimètre carré (qui n'a rien à voir avec une table carrée...). Les obstacles de compréhension et de mémorisation des concepts sont pensés comme des obstacles épistémologiques linguistiques, en écho à Baruk : « Un mot mathématique est déjà un concept : pour constituer son domaine propre, il est généralement nécessaire de le situer dans ses relations avec la langue ordinaire » (Baruk, 2008, p.2). Avant de construire le cours, il apparait comme essentiel à Stéphanie de rechercher dans quel ensemble (mathématique, scientifique, empirique) la notion en jeu a été acquise, rencontrée et de s'interroger sur les représentations que les élèves en ont. Cela lui permet d'identifier si ces représentations seront utilisables et de réfléchir à la manière dont elle pourra s'en détacher si besoin. Les notions étudiées sont souvent introduites sous l'angle de l'histoire des mathématiques (« je leur explique que le saut dans l'abstraction des concepts et du langage mathématique a mis tant de temps dans l'histoire de l'humanité qu'il est normal qu'elle ne se fasse pas rapidement chez eux »).

Les élèves ont l'habitude de travailler en groupe, ils ont été formés à l'écoute, au respect de l'autre et au respect de l'erreur. L'erreur est proposée comme un sujet d'étude et est analysée sans jugement en classe, elle est valorisée et débattue en groupe. Les petits effectifs permettent aux enseignant·es d'écouter, de comprendre les élèves, de reformuler leurs idées, de les laisser exposer leurs approches, leur logique. Dans la classe de Stéphanie, les objets mathématiques sont proposés comme des « objets de pensée » et les erreurs comme des « objets d'étude ». L'erreur est toujours étudiée dans une triple temporalité : passé, présent, futur. Elle est présentée comme normale, utile et est analysée sans jugement, avec curiosité en groupe classe. L'objectif de cette analyse de l'erreur est de se projeter dans le futur pour ne plus la refaire dans d'autres situations similaires. Un grand travail est effectué pour faire conscientiser à l'élève ses actions, la manière dont il la réalise et les raisons pour lesquelles il la réalise. Stéphanie les a familiarisés aux deux modes de pensées, suggérés à l'origine par les psychologues Keith Stanovich et Richard West et repris par David Kahneman sous le nom de « système 1 » et « système 2 » :

> *Le système 1 fonctionne automatiquement et rapidement, avec peu ou pas d'effort et aucune sensation de contrôle délibéré. Le système 2 accorde de l'attention aux activités mentales contraignantes qui le nécessitent, y compris des calculs complexes. Le système 2 est souvent associé à l'expérience subjective de l'action, du choix, et de la concentration.* (Kahneman, 2012, p. 33)

L'objectif est que les élèves arrivent petit à petit à distinguer si les erreurs sont liées à l'impulsivité (erreurs non liées aux aspects mathématiques en jeu mais a une réponse automatisée, sans prise de réflexion) ou s'il s'agit d'un autre type d'erreur (calcul, raisonnement, mauvais choix d'opération, ...). Ce travail a permis de réintroduire du temps de réflexion en classe et de lutter contre l'idée « le meilleur est celui qui répond en premier ». D'après Stéphanie, cette habitude de s'intéresser aux erreurs a généré une baisse importante du stress chez ses élèves et a augmenté la participation. Elle a permis aussi une baisse du nombre d'erreurs dues à la précipitation.

1.2 Effets attendus sur l'accessibilité

L'objectif premier de Stéphanie n'est pas que les élèves réussissent mais qu'ils apprennent toutes et tous en mathématiques quel que soit leurs besoins particuliers. Et cela nécessite que les élèves s'engagent vraiment, tâtonnent dans l'activité mathématiques. Dans la description de ses pratiques, nous voyons qu'elle agit dans tous les champs dépliés de la cible catégorisée et avec une temporalité flexible.

<u>Dans tous les champs de la cible catégorisée :</u>

Les implicites liés au langage mathématique sont nombreux et génèrent des malentendus maintes fois détaillés dans la littérature de recherche (par exemple Hache, 2015). Stéphanie pose explicitement des particularités de la langue mathématiques qui est une langue « à part » (Géninet, 2015). Cette action, qui peut sembler anodine, est en fait essentielle. Elle agit sur l'environnement en disant à l'élève : « si tu te trompes, c'est normal, le langage mathématique est complexe, je vais te donner les moyens de faire attention et de progresser ». Selon la cible catégorisée, ce travail sur le champ langagier va avoir une

répercussion sur le champ culturel et sur le champ relationnel. En effet, la classe s'est créé une culture commune qui fait sens et que toutes et tous les élèves seront en mesure d'utiliser ou d'aider d'autres élèves à utiliser. L'élève qui ne se voit plus comme quelqu'un de « nul en maths, ou qui ne sait jamais », mais comme quelqu'un qui a les moyens d'apprendre à ne plus se tromper, a une relation à soi et à l'apprentissage qui est positive. De plus le fait de d'apprendre à prendre conscience que nous avons tous un mode de pensée intuitif, rapide mais qui nous joue parfois des tours favorise le développement de la fonction cognitive d'inhibition.

Avec une temporalité flexible :

Chaque élève apprend avec une vitesse qui lui est propre (Postulats de Burns, 1972). Le raccourci de se dire : c'est simple, il suffit de s'adapter à chaque élève et de proposer quelque chose de différent pour chacun, est souvent fait. Mais quand la classe compte 30 élèves, l'enseignant·e s'organise comment ? C'est bien une approche environnementale, donc d'accessibilité et non individuelle qu'il faut viser. Stéphanie, utilise différentes temporalités pour permettre à tous, à un moment, d'avoir accès aux connaissances, aux capacités et attitudes qu'elle attend des élèves. Par exemple, le travail qui consiste à inhiber les réponses impulsives est un travail sur un temps long. Toutes et tous les élèves n'ont pas eu Stéphanie les années précédentes. Elle reverbalise le comportement attendu dès que le contexte y est propice. Il n'y a pas de moment « décroché » où les élèves écoutent « la bonne parole » de ce qui est attendu en mathématiques et qui sera résumé dans une fiche qui s'appellerait « méthode et attitude en mathématiques ». Ces postures enseignantes et élèves sont travaillées en contexte d'apprentissage.

2 La séquence sur la proportionnalité

La mise au travail des élèves sur la tâche du radar tronçon est précédé d'une séquence sur la proportionnalité dont les choix de conception sont détaillés et analysés ci-dessous.

2.1 Description des pratiques

Suite à une discussion avec le professeur de physique alertant sur la mauvaise performance des élèves en proportionnalité, Stéphanie a choisi de travailler cette notion en collaboration avec lui. Un sondage a tout d'abord été proposé à l'ensemble des élèves du collège et du lycée sur ce que représentait pour eux la proportionnalité, il a été aussi présenté à quelques professeurs afin de connaître leurs représentations. Le cours sur la proportionnalité a donc été construit en tenant compte des difficultés repérées par le professeur de physique et par les commentaires des questionnaires. Les exemples ont été choisis, en corrélation avec le cours de sciences. La proportionnalité n'est pas supposée acquise et comprise par toutes et tous en classe de 4ème, mais en cours d'acquisition, avec des temps d'acquisition très différents chez les uns et les autres. Dans le cours, la notion de proportionnalité est réévoquée comme une notion ancienne qui s'enrichit chaque année. Vue assez tôt dans les problèmes multiplicatifs (par exemple, « j'ai deux fois plus de billes que toi »), la définition et les propriétés sont rarement mémorisées et sont donc repris. La notion est également enrichie tout au long de l'année lorsque sont abordées les fonctions linéaires, les triangles semblables, Thalès ou la trigonométrie par exemple.

La progression choisie pour la séquence sur la proportionnalité présentée par Stéphanie est la suivante : définition de deux grandeurs proportionnelles (via linéarité multiplicative, voir Simard, 2012), définition du coefficient proportionnalité (définition via le tableau et exemple sur les conversions heures/minutes), recherche d'une quatrième proportionnelle avec le produit en croix, applications aux pourcentage, aux échelles, introduction de la représentation graphique et applications à la physique (masse volumique et vitesse moyenne).

Dans cette séquence vont être travaillés deux éléments qui vont spécifiquement servir d'appui aux élèves pour la réalisation de la tâche du radar tronçon. Le premier c'est que pour illustrer le coefficient de proportionnalité, l'enseignante utilise comme exemple la conversion des heures en minutes. Et le

deuxième c'est que dans les applications à la physique qu'elle choisit, il y a toute une partie consacrée à la vitesse moyenne avec une série d'exemples de résolution de problèmes basiques (au sens de Houdement, 2017) associés (calcul de durée de trajet, de vitesse et de distance parcourue). Un autre élément qu'il semble important de souligner est qu'il y a une diversité de procédures qui sont présentées (utilisation du coefficient de proportionnalité, de l'égalité des rapports, du produit en croix, de la représentation graphique). Les problèmes sont presque systématiquement modélisés via un tableau mais aucune procédure ne lui est spécifiquement attachée et il n'a pas été présenté comme une fin en soi. Enfin, les contextes d'application sont variés (pourcentages, conversions, échelles, situations empruntées à d'autres disciplines).

2.2 Effets attendus sur l'accessibilité

Ce que propose Stéphanie ne se limite pas à une réactivation du déjà là des savoirs et des procédures, à ce qui est souvent appelé « les pré-requis ». Ces pré-requis, nécessaires pour résoudre la situation proposée, sont souvent présentés sous forme de « fiche outils » ou « fiche méthode » ou encore sous forme de « cahier de stratégies ». Ces moyens d'aides peuvent être pertinents, encore faut-il que les élèves aient conscience qu'ils existent et qu'ils sachent les utiliser au bon moment. Ce n'est pas parce que l'enseignant·e a montré l'outil et précisé qu'il fallait l'utiliser que l'élève le fera. Trop souvent, ce sont des raccourcis, accessibles cognitivement à l'élève que ce dernier mobilise. Par exemple, le classique « je vois un tableau donc c'est de la proportionnalité ». Un travail d'anticipation des obstacles dans le champ cognitif est donc indispensable. C'est ce que Stéphanie fait en proposant explicitement une diversité de procédures et en parallèle en n'enfermant pas le symbolisme du tableau au concept de proportionnalité. C'est l'étayage, sur un temps long, qui est à l'œuvre, pour passer du « je ne sais pas faire » à « comment je vais pouvoir m'aider, avec quel outil » ? Sans oublier, dans ce processus d'apprentissage, le désétayage « comment je vais faire seul », comme précisé par Lescouarch (2014) :

> *Un étayage trop marqué par la présence active de l'encadrant au côté du tutoré lors de la réalisation de sa tâche peut maintenir l'élève dans une situation de dépendance dans son rapport à l'apprendre et aux savoirs et aller à l'encontre du processus d'autonomisation visé si le désétayage n'est pas pensé dans une phase ultérieure.* (Lescouarch, 2014, p. 137)

Ce point non détaillé ici, met en œuvre des temps de questionnement, de verbalisation, de mémorisation qui entrent dans le processus d'institutionnalisation (Brousseau, 1998). En plus de ce travail sur les procédures, un travail d'anticipation a également été réalisé sur des notions spécifiques qui vont intervenir dans la tâche complexe : conversions heures/minutes et familiarisation avec le calcul de vitesse moyenne.

3 La tâche du radar tronçon

La tâche du radar tronçon a été proposée aux élèves à l'issue de la séquence décrite précédemment. Les éléments relatifs à l'anticipation de la mise au travail de cette tâche en classe sont présentés et analysés ci-dessous.

3.1 Description des pratiques

Le travail sur cette tâche est prévu sur deux séances. Pour la première séance, il est prévu un temps collectif avec la lecture de l'énoncé. Stéphanie a fait le choix de ne pas adapter l'énoncé. Les données numériques ont notamment été conservées même si elles ne facilitent pas les calculs. Il s'agit cependant de rester proche du travail réalisé dans les cours de physique où les élèves travaillent fréquemment avec des données numériques issues de résultats de mesures et donc non arrondies. La lecture de l'énoncé est accompagnée du visionnage d'un extrait de journal télévisé expliquant le fonctionnement du radar tronçon. Cela est suivi d'un temps de recherche en groupe avec pour objectif de réaliser une affiche pour présenter à la séance suivante à l'ensemble de la classe, les essais et impasses du groupe ainsi que les éléments qui ont permis au groupe de rejeter une piste erronée. Les groupes sont pensés pour qu'il y ait

au moins un élève scripteur par groupe. Il est prévu de présenter explicitement aux élèves que l'objectif n'est pas d'obtenir la solution au problème le plus rapidement possible mais bien d'entrer dans une démarche de recherche. Lors de la deuxième séance, il est prévu que chaque groupe vienne au tableau présenter le cheminement de leur réflexion autour du problème en appui sur l'affiche réalisée. Il s'agit de faire travailler aux élèves leur capacité à écouter les autres, ne pas les juger et essayer de comprendre leur logique.

3.2 Effets attendus sur l'accessibilité

Le cœur de cible est explicite pour chaque séance. Dans la première séance, il s'agit, à partir d'un exemple de la vie réelle, de comprendre un modèle pour identifier les grandeurs proportionnelles et dans la seconde, de communiquer sa démarche. La multimodalité proposée permet aux élèves de s'appuyer sur 3 types d'informations : texte, image et vidéo. Même si des points de vigilance subsistent (non congruence entre texte et image), nous pouvons faire l'hypothèse que cela permettra de lever des obstacles dans le champ langagier, notamment au niveau de la compréhension de la consigne. Le choix de la constitution des groupes, avec un élève scripteur par groupe, permet également d'anticiper des obstacles au niveau du champ sensori-moteur (difficultés praxiques).

Si l'on regarde les obstacles anticipés par Stéphanie sur les trois niveaux étudiés (généralités liées au cours de mathématiques, séquence sur la proportionnalité, scénario prévu pour la tâche du radar tronçon), on constate que ceux-ci concordent avec les obstacles anticipés au préalable (voir Figure 6).

IV - BILAN & PERSPECTIVES

Sur base de ces premiers éléments, on voit que les choix de Stéphanie sont pilotés par différents éléments notamment les programmes et les recherches en didactique, donc tout ce qui est lié à la composante personnelle et institutionnelle mais aussi et surtout par les besoins des élèves. La prise en compte de ces besoins semble prioritaire dans les choix réalisés. Ce qui apparait ici pourrait être qualifié de « logique d'aplanissement des obstacles liés aux compétences périphériques et spécifiques » pour amener les élèves à aller directement à l'objectif visé.

Dans cette logique, l'accessibilité nécessite de rendre aussi explicite les compétences à mobiliser dans les champs culturel (identification des expériences personnelles), cognitif (aide à l'anticipation). Et elle se pense sur le long terme, au niveau de la séquence en amont mais aussi dès le début d'année et l'installation du contrat didactique.

Nous identifions différentes perspectives à ce premier travail, à la fois au niveau de la recherche mais également de la formation. Au niveau des perspectives de recherche, il nous faudrait étudier les conduites des élèves en situations pour renseigner la composante médiative et voir si l'anticipation sur les obstacles et l'étayage en cours de séance par Stéphanie sont suffisant pour que l'objectif cible soit effectivement atteint par toutes et tous. A ce sujet, nous disposons de verbatims d'élèves lors de la phase de recherche collective et de présentation à la classe que nous projetons d'exploiter. Sur un temps plus long, il s'agirait également d'analyser les pratiques d'autres enseignant·es dans d'autres contextes (section d'enseignement général et professionnel adapté, Unités localisées pour l'inclusion scolaire, ...) pour comparer les pratiques et tenter d'identifier différentes logiques d'action. D'autres traces (entretiens formels, captation vidéo, …) pourraient également être envisagées de façon à étudier en situation les pratiques effectives. En ce qui concerne les perspectives de formation, l'utilisation de la cible catégorisée pour l'analyse de tâche nécessite d'identifier clairement l'objectif cœur de cible et ses obstacles au niveau des compétences périphériques et spécifiques dans les différents champs (langagier, relationnel, moteur, culturel, cognitif, savoirs et procédures). Cette identification peut ensuite permettre de dégager un cheminement pour atteindre l'objectif sans le modifier ainsi que les leviers à développer chez les

enseignant·es et chez les élèves. Cet outil pour penser l'accessibilité est actuellement proposé à différents niveaux de formation : formation de formateurs (voir Yvain-Prébiski & al., 2024), formation CAPPEI (certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive), formation initiale premier et second degré en diplôme inter universitaire (DIU), en formation continue d'enseignant·es du premier et du second degré. Il s'agirait à présent d'analyser comment les formés s'en emparent et avec quel impact sur les apprentissages des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J., & Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : Une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 33-57.

Barry, V. (2011). *Identifier des besoins d'apprentissage : fondements, méthodologie, études de situations*. Paris : L'Harmattan.

Baruk, S. (1997). *Dico de mathématiques.* Seuil Jeunesse.

Benoît, H. (2020). Les besoins éducatifs particuliers sont-ils un frein ou un levier dans la lutte contre les discriminations scolaires ? *Les cahiers de la lutte contre les discriminations, 11*, 61-82.

Bouard, R., Canac, S., & Kermen, I. (2022). Modélisation des transformations chimiques : mise en regard d'un programme et de pratiques enseignantes. *Recherches en didactique des sciences et des technologies, 25*, 69-100.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Burns, R. W. (1972). *Essor des didactiques et des apprentissages scolaires.* J. P. Astolfi. 1995.

Géninet, A. (2015). *Faites-les réussir en maths : De l'école à l'entrée au lycée*. Lyon : Chronique sociale.

Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec "avec". *Petit x*, *97*, 27-43.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59–78.

Kahneman, D. (2012). *Système1/Système2, les deux vitesses de la pensée*. Flammarion.

Kame'enui, E. J., & Simmons, D. C. (1999). *Toward Successful Inclusion of Students with Disabilities: The Architecture of Instruction. Volume 1: An Overview of Materials Adaptations*. ERIC/OSEP Mini-Library. Council for Exceptional Children, 1920 Association Drive, Reston, VA 20191-1589.

Lescouarch, L. (2014). Les dimensions de l'accompagnement dans le travail du maître E : postures et enjeux. *La nouvelle revue de l'adaptation, 66,* 127-142.

Pôle inclusif 78. (2022, 5 décembre). *Conférence CUA – Hervé Benoit* [Vidéo]. Tube Action Education. https://tube-action-educative.apps.education.fr/w/15Tg26Xkd3Eqb3SqP9i9X8

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505–528.

Simard, A. (2012). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x, 89*, 51-62.

Yvain-Prébiski, S., Ramecourt, C. & Muler, G. (2024). Une modalité de formation de formateur.trices.s pour la prise en compte des enjeux de l'école inclusive dans la formation initiale à l'enseignement des mathématiques dans le premier degré. Dans *Actes du 49e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles (COPIRELEM)* (p. 704-720). IRES d'Aix-Marseille.

DIFFÉRENCIER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AVEC DES ÉLÈVES ALLOPHONES

Catherine MENDONÇA DIAS
Maitre de conférences HDR, Université Sorbonne Nouvelle
DILTEC
catherine.mendonca-dias@sorbonne-nouvelle.fr

Karine MILLON-FAURE
Professeure d'Université, Aix Marseille Université
ADEF
karine.millon-faure@univ-amu.fr

Résumé
Les auteures proposent quatre niveaux d'adaptation, pour différencier un support de travail remis à un élève allophone. Au préalable, elles évoquent des groupes-classes accueillant des élèves allophones et décrivent quelques particularités en lien avec leur parcours migratoire qui implique - sur le plan scolaire - des changements de langues, de culture scolaire et d'environnement social. En second lieu, elles rappellent quelques spécificités des discours mathématiques. En tenant compte des profils des élèves et considérant les discours des supports écrits, elles énoncent des propositions pédagogiques pour différencier de façon graduelle les supports proposés aux élèves dans le cours de mathématiques.

I - INTRODUCTION

Toute classe est hétérogène et, *a fortiori*, accueillir un ou plusieurs élèves récemment arrivés en France, dont le parcours scolaire et les compétences linguistiques sont différentes et diversifiées, renforce l'hétérogénéité du groupe classe quant aux niveaux de compétences en mathématiques et en français. Cette situation n'est pas marginale. Les dernières statistiques (Brun, 2024) font état de 89 500 élèves arrivés en 2022-2023, scolarisés dans le primaire et secondaire, soit une augmentation de 16% par rapport à l'année scolaire précédente. À ceux-là, il faut ajouter les jeunes arrivés les années précédentes, qui sont encore dans une dynamique d'appropriation de la langue dans ses usages scolaires. Beaucoup de ces jeunes étudient en français, une langue additionnelle qui, à leur arrivée, est nouvelle tandis que certains peuvent l'avoir déjà précédemment étudiée, en langue vivante ou en langue de scolarisation.

Dans ces conditions, au vu des profils singuliers des élèves, les professeurs ont à composer avec des pratiques pédagogiques de différenciation afin que "*les élèves puissent travailler selon leurs propres itinéraires d'appropriation tout en restant dans une démarche collective d'enseignement* » (Przesmycki, 2004, p.10). Pour atteindre cet objectif, certains mettent en œuvre toute une palette de gestes professionnels avant, pendant et après l'activité (Benzakki et Mendonça Dias, 2022). La différenciation peut prendre alors la forme de dispositifs préventifs (Assude et al., 2015), être soutenue par le co-enseignement (Abou Samra, Hache et Mendonça Dias, 2023), prévoir des modalités de travail par groupe (David et Mendonça Dias, 2020) ou s'appuyer sur des gestes d'étayage et de médiation, qui relèvent notamment de compétences plurilingues (Million-Fauré, Mendonça Dias et Smythe, 2022). L'adaptation peut se jouer également sur les supports avec différents niveaux (Mendonça Dias et Millon Fauré, 2023). C'est ce dernier point que nous souhaitons aborder à l'issue de cette contribution : nous allons présenter une méthodologie de différenciation des supports qui propose des repères pour identifier les effets sur les enjeux d'apprentissage. Cette démarche prend appui sur nos recherches respectives en didactique des mathématiques et en didactique des langues.

Dans cet article, dans un premier temps, nous verrons en quoi la trajectoire migratoire entraine des phénomènes d'hétérogénéité spécifiques, dont certains conduisent l'enseignant à ajuster ses gestes professionnels et de l'autre, nous examinerons plus précisément les discours mathématiques pour repérer les points d'adaptation possible sur la façon de dire les mathématiques. Notre dernière partie comportera nos propositions pédagogiques de différenciation qui tiennent compte des profils hétérogènes des élèves allophones et des supports écrits qui leur sont soumis dans l'activité mathématique.

II - SE DÉCENTRER DU CÔTÉ DES ÉLÈVES POUR MIEUX ADAPTER

1 Des hétérogénéités linguistiques inter-individuelles et intra-individuelles

L'un des traits distinctifs des jeunes migrants est qu'en raison de leur changement d'environnement linguistique, ils présentent des niveaux hétérogènes dans les compétences linguistiques en français, devenu leur unique langue de scolarisation. À leur arrivée, ils n'ont pas le même répertoire linguistique (c'est-à-dire, le même ensemble de langues connues). À ce propos, on peut parler *d'hétérogénéité linguistique inter-individuelle* (entre les élèves). Bien entendu, ils n'ont pas dans leur répertoire linguistique le même bagage de langues : certains parlent ourdou, castillan, créole, soninké, thaï, etc. Quoi qu'il en soit, nos enquêtes tendent à montrer que la majorité sont plurilingues à leur arrivée (Mendonça Dias, 2020). Concernant la francophonie, certains n'ont jamais rencontré le français, d'autres peuvent l'avoir étudié en langue vivante à l'école (c'est par exemple la langue vivante 2 la plus choisie au Portugal) et certains l'ont parfois comme langue de scolarisation dans leur pays précédent (notamment dans les systèmes éducatifs de pays précédemment colonisés). Toutefois, dans ce dernier cas, le rapport au français est un rapport à une langue seconde : un enfant qui habite le Sénégal peut n'avoir été socialisé que dans sa langue familiale, le wolof, et n'avoir commencé le français qu'au démarrage de sa scolarisation, dans un second temps, pour un usage exclusivement scolaire (avec parfois la langue wolof comme appui par l'enseignant). Par ailleurs, en classe, cette hétérogénéité linguistique inter-individuelle va évoluer dans le temps : il faut compter plusieurs mois pour qu'un élève au départ non francophone commence à se débrouiller dans les usages communicatifs de la langue et plusieurs années pour qu'il parvienne à maitriser les discours disciplinaires à l'oral et à l'écrit (Mendonça Dias, 2024, pour une recension). Ces progrès sont davantage corrélés au niveau de compétences que l'élève a dans sa langue première (plutôt que corrélés à son âge ou la proximité linguistique entre sa langue première et le français). Le chercheur Jim Cummins parle d'"interdépendance linguistique" pour montrer cette relation (Cummins, 1979). Ainsi, au fil des mois, l'hétérogénéité linguistique demeure et il est difficile de comparer la progression d'un élève allophone avec celle d'un autre, tant les parcours sont singuliers.

En outre, pour un même élève, les compétences dans une langue ne sont pas forcément symétriques suivant qu'il s'agit de production orale ou écrite, de réception orale et écrite, ou d'interaction orale et écrite (Conseil de l'Europe, 2001). Pour un élève qui arrive en classe en débutant le français, ce n'est pas pareil de *lire* un texte documentaire ou d'*écouter* le professeur donner une explication à l'oral. C'est ainsi qu'un apprenant originaire d'un établissement chinois, ayant suivi un apprentissage en contexte hétéroglotte (où le français est absent dans l'environnement social) aura de meilleures compétences à l'écrit, d'autant plus si son enseignant lui a enseigné le français en utilisant principalement le mandarin pour expliquer les règles de grammaire, etc. Il aura donc été davantage exposé et formé à la langue française par l'écrit. Au contraire, un jeune qui aura été confronté à une scolarisation en français dans un contexte homoglotte (avec la présence du français en dehors de la classe, comme dans certains territoires ivoiriens) aura eu plus d'exposition à l'oralité en français. En comparaison avec ses progrès à l'oral, il aura peut-être développé moins rapidement des compétences pour produire des écrits disciplinaires. C'est ainsi que les compétences orales et écrites ne relèvent pas forcément du même

niveau, conséquemment au parcours sociolinguistique antérieur et de fait, indépendamment des capacités d'apprentissage. En outre, pour une même compétence, il peut aussi y avoir une maitrise inégale d'une même compétence linguistique en fonction de son usage. Nous allons en donner un exemple. Dans les cas d'expérience antérieure du français en tant que langue seconde, le jeune peut parfois donner "l'illusion de l'oral" (Mendonça Dias, 2024), c'est-à-dire qu'une communication sur la vie courante est aisée, mais l'apprenant n'a pas encore les compétences langagières pour suivre une discipline en classe. Ainsi les compétences pour un usage dans la vie quotidienne ne sont pas nécessairement analogues à celles pour réaliser des activités mathématiques : il peut donc y avoir des différences aussi sociolinguistiques dans les usages du français en contexte. C'est ainsi qu'on peut parler - en plus de l'hétérogénéité inter-individuelle - d'une hétérogénéité *intra-individuelle* car pour un même locuteur, les compétences ne sont pas forcément les mêmes suivant l'usage pour lequel il mobilise la langue française.

Ces constats nous amènent à prendre en compte ces hétérogénéités inter-individuelles et intra-individuelles dans les adaptations des activités. Comment faire quand les élèves du groupe n'ont pas le même niveau en français ? Comment faire quand un élève maitrise bien l'oral mais peu l'écrit au regard de ses compétences orales ?

Ainsi, si l'*hétérogénéité linguistique* est inhérente dans les classes, elle est renforcée avec des élèves allophones. C'est une conclusion à laquelle nous avions abouti après avoir suivi une cohorte de 353 élèves allophones durant une année scolaire :

> *Cette hétérogénéité conduit à envisager la différenciation pédagogique en UPE2A - au-delà du débat idéologique - comme une démarche pédagogique inhérente à la répartition linguistique du groupe multi-niveaux et à l'anticiper dans les supports et l'ingénierie de formation. (Mendonça Dias, 2020a).*

Cette hétérogénéité doit aussi nous rappeler que ces jeunes sont plurilingues, donc compétents dans plusieurs langues avec des usages différents. Qui plus est, ils sont en cours d'apprentissage du français en tant que langue seconde. En se décentrant du côté des élèves, on peut alors voir toutes les compétences acquises en peu de temps dans l'espace scolaire français. En se positionnant en tant qu'enseignant, le défi est de proposer des tâches présentant un enjeu d'apprentissage, tout en donnant les moyens de rendre ces tâches et les notions mathématiques accessibles dans leur appréhension langagière. Et ce n'est pas évident…

2 L'hétérogénéité scolaire

La trajectoire migratoire amène donc un changement d'environnement linguistique, mais aussi de système éducatif, avec parfois un hiatus de quelques semaines à quelques mois en fonction des conditions de départ et d'arrivée. Ce changement de système scolaire nous amène à identifier un autre type d'hétérogénéité à l'arrivée, celui des compétences mathématiques, dans sa relation au cursus antérieur.

Les analyses menées lors de l'enquête Evascol[1] (Millon-Fauré, 2020), nous ont amenées à constater que plus de la moitié des 177 élèves allophones enquêtés ne disposaient pas des prérequis mathématiques nécessaires pour suivre dans leur classe d'affectation, et ce indépendamment de leur maîtrise du français puisque, lors de notre expérimentation, les énoncés étaient proposés en langue d'origine. Les raisons permettant d'expliquer ce constat sont diverses. Ainsi, les élèves désignés "non scolarisés

[1] La recherche nationale interdisciplinaire Evascol (Armagnague et al., 2018), financée par la mission Recherches du Défenseur des droits, porte sur l'étude de la scolarisation des élèves allophones, en étudiant quatre académies.

antérieurement" (NSA)[2] ont suivi une scolarité lacunaire, soit parce qu'ils n'ont pas eu la possibilité de fréquenter régulièrement une école dans leur pays d'origine, soit parce que les conditions dans lesquelles les enseignements étaient proposés ne permettaient pas d'accéder à de véritables apprentissages. De plus, certains élèves ont dû, au cours de leur migration, changer plusieurs fois de systèmes éducatifs en passant d'un pays à l'autre, ce qui a compromis la cohérence de leurs apprentissages.

Un autre facteur peut expliquer les décalages dans la maîtrise des prérequis mathématiques : les différences entre les différents systèmes éducatifs et surtout entre les programmes disciplinaires qui peuvent apparaître d'un pays à l'autre. Ainsi, certains élèves allophones, bien scolarisés dans leur pays d'origine ont pu travailler sur des types de tâches ou des techniques différents de ceux enseignés en France et ne pas avoir rencontré en revanche certains savoirs bien connus de leurs camarades autochtones. Même lorsque les objectifs sont les mêmes, les progressions dans les curricula peuvent varier et les objets d'études ne sont pas alors introduits au même moment en France et dans d'autres pays. Par ailleurs, les unités utilisées dans les mesures peuvent différer d'un pays à l'autre, ce qui peut expliquer les difficultés spécifiques que nous avons constatées chez des élèves allophones lors des exercices de conversion. Enfin, l'attention portée en France, dès les petites classes, sur les constructions géométriques n'est pas nécessairement partagée par tous et il arrive que des élèves soient scolarisés dans les collèges français sans avoir appris à manipuler les instruments de géométrie.

Un dernier facteur peut expliquer les difficultés mathématiques repérées chez les élèves nouvellement arrivés en France. Nous avons en effet pu observer que certains élèves éprouvent des difficultés pour réutiliser dans leur pays d'accueil les techniques apprises dans leur pays d'origine, soit parce qu'elles diffèrent de celles enseignées en France, soit parce que très vite ils oublient ce qui avait été enseigné dans leur pays d'origine.

Quelles qu'en soient les raisons, l'hétérogénéité observée, sur le plan mathématique, entre les élèves allophones se révèle généralement conséquente et cette diversité des compétences disciplinaires vient s'articuler à l'hétérogénéité linguistique précédemment abordée, ce qui multiplie la variété des profils possibles. Le tableau ci-dessous illustre comment ce phénomène peut se concrétiser sur le terrain.

Profil d'un élève		niveau en langue d'apprentissage		
		élevé	moyen	débutant
niveau en mathématiques	élevé	Leila	Mario	Izeta
	moyen	Myriam	Wilhem	Mehmoud
	débutant	Fati	Dmitri	Li

Figure 1. Profil des élèves (Mendonça Dias, Millon-Fauré, 2023, p. 164)

On peut par exemple accueillir, dans une même classe, une élève, Izeta, qui dispose d'un bon niveau en mathématiques mais qui présente des difficultés en français importantes, alors que son camarade, Fati, paraît parler couramment le français alors qu'il a par contre des lacunes en mathématiques. Ces deux élèves auront certainement besoin de soutien pour comprendre les enseignements proposés en France, mais la nature de l'aide nécessaire s'avère différente.

3 Les implications du parcours migratoire

L'enseignant peut intervenir sur ces hétérogénéités linguistiques et mathématiques afin d'inclure les élèves dans le projet d'apprentissage collectif. Néanmoins, si nous prenons du recul sur l'activité scolaire

[2] Pour une meilleure connaissance des élèves désignés NSA, se reporter à Mendonça Dias, 2013 ; 2020b.

des élèves, nous pouvons aussi prendre en considération l'hétérogénéité des trajectoires migratoires pour comprendre le rapport, parfois distant, de l'élève à l'activité. Les effets des trajectoires et les conditions de séjour peuvent influencer sa disponibilité cognitive. Une décentration sur l'expérience de l'enfant permet parfois une meilleure compréhension des difficultés rencontrées, quand elles dépassent les strictes questions de langue et de notions mathématiques.

C'est pourquoi, avant d'aller plus avant sur les relations entre discours scolaires, profils d'élèves et adaptations, nous rappelons ici l'arrière-plan que peut impliquer une trajectoire migratoire pour un jeune. Tout d'abord, il faut rappeler ici que les *causes migratoires* sont protéiformes et multiples :

> *aspiration à de meilleures conditions économiques, obtention d'un contrat de travail, projet éducatif ou de formation pour l'enfant ou le parent, motifs familiaux (regroupement familial, restructuration familiale dans le cas d'un enfant confié à un membre autre que le parent, adoption), voire médicaux (soins particuliers dans un hôpital français), mais aussi politiques et sociaux (conflits armés, manque de sécurité dans le pays d'origine, discrimination). […] D'autres sont des mineurs non accompagnés* (Mendonça Dias, Millon-Fauré, 2023, p. 114).

Partir implique une rupture familiale, souvent imprévisible, temporaire, parfois définitive. La prise de décision émane souvent des adultes, qui s'engagent dans des projets migratoires impliquant toute ou une partie de la famille. De ce fait, nous référons à la migration sous la forme passive d'*enfant "migré"*, plutôt que migrant (Mendonça Dias, 2024, p. 59). Ainsi, l'*adhésion au projet migratoire* peut varier fortement d'un jeune à l'autre. Ajoutons que les conditions de séjour à l'arrivée (logement, démarche administrative…) peuvent être préoccupantes, ce qui peut avoir des conséquences sur la scolarité des élèves.

Cela étant, s'il ne faut pas minorer l'impact de la trajectoire migratoire sur la poursuite scolaire, il ne s'agit pas non plus de la médicaliser ou lui supposer des déterminismes psychologiques. Les travaux en psychanalyse transculturelle apportent des éclairages sur les phénomènes intimes qui émeuvent ou bousculent l'enfant migrant (Moro, 2002).

Enfin, rappelons que si le système éducatif est nouveau pour les enfants, il l'est aussi pour les parents, également allophones[3]. Au vu des conditions de scolarisation des élèves allophones, nous avions proposé une approche holistique de l'enfant qui serait basée sur la coopération interprofessionnelle des acteurs qui l'entourent et l'accompagnent : parent, enseignant, personnel d'administration, psychologue, milieu associatif... (Armagnague et *al.*, 2018). Par exemple, quand un élève est silencieux, son silence peut être une étape habituelle dans le processus d'appropriation d'une langue seconde mais quand il perdure, il peut aussi révéler des mal-êtres qui dépassent les réponses pédagogiques de l'enseignant, auquel cas ce ne sont pas nécessairement les exercices de production orale qui résoudront le problème, mais il faut peut-être chercher ailleurs les motifs du silence (Mendonça Dias et al., 2022).

Nous avons vu que la trajectoire migratoire implique plusieurs phénomènes spécifiques qui se manifestent dans l'activité scolaire. Certains - linguistiques et scolaires - peuvent être pris en compte

[3] Un dispositif a été mis en place dans plusieurs établissements scolaires pour faciliter l'implication des parents qui découvrent simultanément le système éducatif français et parfois la langue française, il s'agit de l'Opération Ouvrir l'école aux parents pour la réussite des enfants (OEPRE), Circulaire 2017-060 du Bulletin Officiel n°15 du 13 avril 2017.

directement par l'enseignant au travers de ses gestes professionnels, tandis que d'autres peuvent être envisagés pour permettre une compréhension de l'enfant et du processus d'apprentissage. Nous allons donc examiner plus attentivement les discours mathématiques pour identifier les leviers qui pourraient permettre des étayages à ces élèves allophones.

III - DIFFÉRENCIER LES DISCOURS MATHÉMATIQUES : DES OBSTACLES AUX LEVIERS

1 Représentation de la plurisémioticité des discours mathématiques

Dans l'activité mathématique, la place du discours est partie prenante de la conceptualisation des notions mathématiques. C'est ainsi que l'apprentissage mathématique conduit à « agir, parler, penser » (Bernié, 2002 ; Bulf et al., 2015). Ce "parler" revêt plusieurs formes d'expression qui empruntent à différents registres sémiotiques. Pour montrer les variétés dans les façons de signifier une idée, nous avons produit le schéma ci-dessous, librement adapté à partir de celui de Prediger, Clarkson et Bose (2016). Nous reprenons la notion de « registre » à Duval (1993).

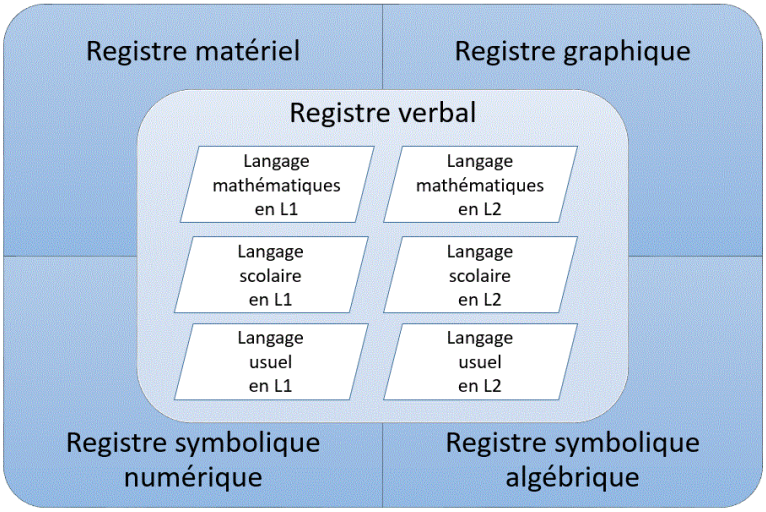


Figure 2. Schéma des registres sémiotiques de l'activité mathématique (d'après Mendonça Dias, Millon-Fauré, 2023, p. 76)

Ce schéma permet de représenter les registres plurisémiotiques, qui sont complémentaires dans les activités de classe. Par exemple, imaginons qu'un enseignant donne un problème mathématique à un élève, celui-ci a plusieurs façons de restituer sa réponse, façons qui sont d'ailleurs complémentaires. Il peut utiliser ces registres : le registre matériel (l'élève manipule), le registre symbolique numérique (l'élève représente sous forme de calculs) ou algébrique (l'élève fait une proposition avec des inconnues), le registre graphique (l'élève schématise, dessine) et bien entendu, le registre verbal (l'élève formule avec des mots sa réponse à l'oral ou à l'écrit).

Cette visualisation de la diversité plurisémiotique permet de se rendre compte que les obstacles qui se présentent à l'élève allophone pour communiquer un énoncé en mathématique ne relèvent pas seulement de la langue et du registre verbal, mais aussi des autres registres qui sont marqués culturellement. On présume parfois que les registres non verbaux sont compréhensibles d'une langue à l'autre et que les mathématiques devraient être une discipline avec davantage d'intercompréhension, mais ce n'est pas si systématique car les différences dans les pratiques mathématiques peuvent apparaitre dans la façon de coder, de représenter, etc.

Pour éclairer nos propositions pédagogiques sur la différenciation inhérente au registre verbal, nous allons maintenant apporter quelques explicitations, en commentant l'axe horizontal qui renvoie davantage au "plurilinguisme externe" (le rapport entre les langues du répertoire linguistique de l'apprenant) et l'axe vertical qui correspond plutôt à ce que nous désignons comme "plurilinguisme interne", c'est à dire les variations sociolinguistiques d'une même langue, en l'occurrence ici le français (Mendonça Dias, 2024).

2 Le registre verbal spécifique aux élèves allophones

2.1 Le plurilinguisme externe : les passerelles entre les langues du répertoire linguistique de l'élève

Comme évoqué *supra,* pour l'élève allophone, nous partons de la théorie de l'interdépendance des langues (Jim Cummins, 1979) :

> *other investigators have hypothesized that the cognitive/ academic aspects of Ll and L2 are interdependent and that the development of proficiency in L2 is partially a function of the level of Ll proficiency at the time when intensive exposure to L2 is begun (Cummins, 1979a; Skutnabb-Kangas & Toukomaa, 1976). In other words, both Ll and L2 CALP are manifestations of the one underlying dimension* (Cummins, 1979)

Cummins indique par là qu'il y a un soubassement commun à tout usage d'une langue de son répertoire, par exemple, on ne réapprend pas à lire quand on change de langue. Et il y a une corrélation entre ce que l'on sait dans une langue première et ce que l'on apprend mieux dans une langue seconde. C'est ainsi que nous interprétons l'axe horizontal (présenté dans Prediger et al., op. cit.), que nous avons représenté dans le registre verbal.

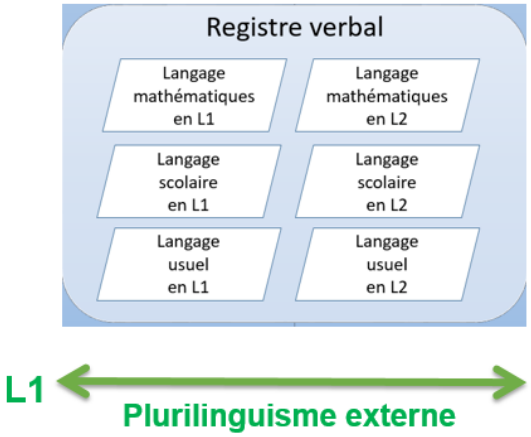


Figure 3. L'axe horizontal : les rapports entre les langues du répertoire linguistique

La mise en évidence de la langue première[4] (L1) et langue(s) seconde(s)[5] et étrangères montre le va-et-vient qui se joue pour l'apprenant entre les langues de son répertoire linguistique. Ce bagage langagier implique donc une circulation entre les compétences que l'élève a développées avec différentes langues. Quand nous évoquons ces compétences linguistiques du registre verbal, précisons que nous tenons compte aussi du paraverbal (l'intonation, le rythme de tour de parole… culturellement marqués, se

[4] Ou des langues premières si l'enfant est dans une famille bilingue.

[5] Il peut y avoir plusieurs langues secondes notamment dans le cas de migration successives : un enfant de langue soninké est scolarisé dans un pays hôte en italien par exemple s'il arrive en Italie, puis en français à son arrivée en France.

reporter par exemple à Kerbrat-Orecchioni, 2000) et le non verbal langagier (la gestualité associée, voire par exemple Tellier, 2008).

Se référer, consciemment ou non, à ses langues premières, est un processus incontournable dans l'appropriation linguistique d'une langue seconde. C'est d'ailleurs ce qui conduit le locuteur à faire des transferts de compétences d'une langue à l'autre (et aussi, à l'inverse, parfois, des erreurs interlinguales telles qu'avec les faux amis : par exemple "billion" en anglais ne veut pas dire "billion" en français mais "milliard").

Pourtant, cette circulation entre les langues n'est pas toujours consciente ni rendue visible ou légitimée en classe. Dans ces conditions, il peut s'agir de « *compétences dormantes* » (Mendonça Dias, 2024, p. 188) dans le sens où elles ne sont pas ou peu mobilisées. L'enseignant peut encourager, ne serait-ce que par une attitude bienveillante, l'élève expert à s'autoriser à s'appuyer cognitivement sur ses langues premières, dans ses stratégies personnelles d'apprentissage, s'il le souhaite. Une expérimentation menée en classe de mathématiques consistait à permettre aux élèves allophones de verbaliser dans leur langue première avant de passer en français : les résultats tendent à montrer que l'alternance des langues peut aider à la compréhension et à la conceptualisation, tout en incluant les procédures mathématiques acquises parfois différemment dans les pays d'origine (Maugez et al., 2022).

Enfin, signalons que le recours à la langue première peut être aussi *émotionnel et identitaire*. Il est possible que l'enfant s'exprime dans sa langue parce que cela fait partie de son identité. Plusieurs chercheures ont mis en évidence que la dimension affective et identitaire ne doit pas être négligée dans l'implication de l'apprenant allophone pour entrer dans les apprentissages (par exemple, Auger et Le Pichon-Vorstman, 2021 ; Guedat-Bittighoffer, 2024 ; Miguel-Addisu, 2020 ; Stratilaki, Nicolas, 2020).

Différencier en tenant compte de ces conditions d'apprentissage, c'est permettre ici la médiation par les langues dans les stratégies d'apprentissage des élèves. C'est aussi tenir compte du temps nécessaire pour la compréhension et la production de l'expression : passer d'une langue à l'autre est plus coûteux en temps. Nous pouvons donner l'exemple du calcul : souvent, un individu bilingue fait les multiplications dans la langue première dans laquelle il a appris les tables et puis il traduit le résultat.

2.2 Le plurilinguisme interne et les niveaux de formulation

Venons-en à commenter l'axe vertical du schéma concernant le registre verbal.

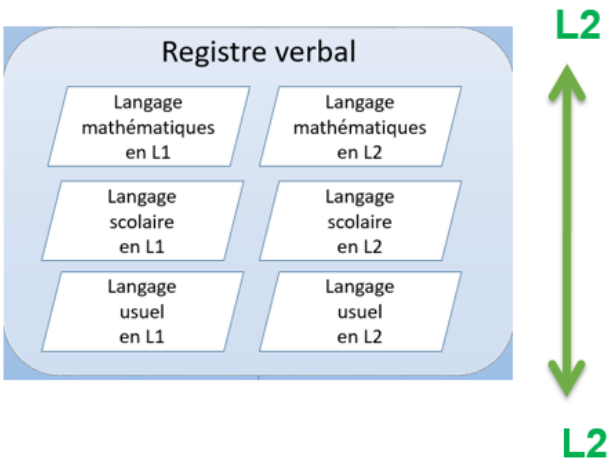


Figure 4. L'axe vertical : les niveaux de formulation de du registre verbal

Christophe Hache, en didactique des mathématiques, parle de *pratiques langagières des mathématiciens* (Hache, 2019). En maitriser les codes sous-tend un large empan de compétences langagières. Effectivement, on ne décrit pas un cercle en parlant de rond et de son milieu… En faisant évoluer les *niveaux de formulation*, on entraine également des niveaux de conceptualisation.

Dans notre ouvrage, nous donnons l'exemple de la définition de la division. On ne l'explique pas de la même façon à un enfant de CE2 et un lycéen. Pour un enfant de CE2, la leçon indiquera qu'en mathématiques, la division sert à partager en parts égales. En revanche, pour un jeune de fin lycée, le manuel pourra proposer la définition comme il suit : "En arithmétique, la division euclidienne est une procédure de calcul qui, à deux entiers naturels appelés dividende et diviseur, associe deux autres entiers appelés quotient euclidien et reste."

Ces formulations renvoient à des formes d'expressions langagières différentes. Pour mettre en évidence les types de discours usuels et ceux plus académiques (voire techniques), revenons à Jim Cummins (1979). Celui-ci distinguait deux grandes catégories, les *Basic interpersonal communicative skills* (BICS), c'est-à-dire des compétences communicatives basiques mobilisées lors des conversations ordinaires, et les *Cognitive academic language proficiency (CALP)*, des compétences cognitives académiques correspondant à l'usage de la « langue de scolarisation ». Pour le présent schéma, nous avons repris une nuance proposée par Prediger, Clarkson et Bose (2016) en distinguant langage usuel, scolaire et mathématique, sachant que les formes linguistiques sont généralement mélangées dans l'expression individuelle.

Les élèves allophones découvrent ces formes langagières progressivement dans leur apprentissage du français concomitamment des mathématiques. Par exemple, pour des élèves qui débutent l'apprentissage de la langue française, les structures de phrase sont simples ; le lexique relève du domaine du quotidien, très concret et très simple. En revanche, les observations de classe ont fait apparaitre que l'apprentissage de technolectes, c'est-à-dire ici le vocabulaire spécialisé du domaine mathématique, est très lent (Mendonça Dias, 2021). C'est ainsi que les variations sociolinguistiques, que nous avons représentées par trois niveaux d'usage de la langue, ne vont pas de soi et nécessite du temps et un accompagnement pour dégager les mots importants ou des structures syntaxiques, et les expliciter. C'est pourquoi une adaptation des énoncés est souvent nécessaire, comme nous allons le proposer ci-après à partir de l'exemple des exercices écrits.

IV - DIFFÉRENCIER PAR L'ADAPTATION DES SUPPORTS

1 Les moments de la différenciation

L'évocation des différents types d'hétérogénéité concernant les élèves allophones et l'analyse des difficultés soulevées pour l'utilisation des différents registres et surtout des différents langages, dans la langue première et seconde permet de mieux comprendre la variété des difficultés qui attendent les élèves allophones dans le cours de mathématiques, une fois arrivés en France. Il va donc s'avérer particulièrement complexe pour le professeur de réussir à adapter son enseignement aux besoins de l'élève allophone qu'il accueille (voire des élèves allophones qu'il accueille et qui peuvent chacun avoir des besoins différents…).

En effet, l'objectif sera de concevoir des situations adaptées aux élèves allophones accueillis en classe ordinaire et par « adaptée aux besoins de l'élève », on entend à la fois accessibles (compréhensibles et

réalisables par l'élève, au moins en partie) et susceptibles d'engendrer des apprentissages. Or l'observation et l'analyse de séances de classes ordinaires ont montré que les adaptations mises en place par les enseignants remplissaient rarement ces deux conditions. Parfois malgré les aménagements proposés, l'élève ne parvient pas à comprendre l'énoncé proposé ou à entrer dans la tâche. Il demeure alors passif en attendant la mise en commun et la solution apportée par ses camarades. Parfois, au contraire, la tâche a été tellement simplifiée qu'elle ne pose plus aucune difficulté à l'élève. Il parvient alors à la réaliser sans effort et si cela lui apporte très certainement une satisfaction non négligeable, le travail effectué ne conduit à aucun apprentissage réel. Au vu des divers types d'hétérogénéité rencontrés chez ce public, la problématique de la mise en place de pratiques de différenciation prend par conséquent pour les élèves allophones une ampleur toute particulière…

Si l'on regarde de plus près les possibilités qui s'ouvrent en matière de différenciation, on constate que plusieurs dimensions peuvent s'articuler. Il est ainsi possible d'envisager la mise en place d'aménagement *avant la séance de classe* afin de préparer l'élève allophone au cours qui l'attend. Ainsi le dispositif préventif amène à regrouper ces élèves en dehors du temps de classe, afin, par exemple, de leur faire lire l'énoncé qui sera proposé le lendemain en classe pour s'assurer qu'ils l'ont bien compris, permettre des temps de traduction ou de reformulation, comme nous l'avons vu plus haut. Ou bien, ce moment peut aussi être consacré à les amener à remobiliser les prérequis qui seront nécessaires (sans entrer véritablement dans la résolution du problème qui doit être réservée au temps en classe entière). Ce temps supplémentaire donné en amont de la séance de classe peut faciliter l'entrée de ces élèves dans la tâche, leur offrant ainsi la possibilité d'être, pour une fois, synchronisés avec leurs camarades. Le dispositif préventif comprend également un temps de remédiation *après la séance de classe*, afin de revenir sur la construction des savoirs au cours de la séance et d'aider ces élèves plus fragiles à s'approprier, puis ensuite à transférer les savoirs visés.

Mais l'essentiel des adaptations se déroulent généralement *durant la séance de classe*. Il est alors possible de réfléchir aux modalités du travail de groupes, en fonction notamment de leur constitution (si les groupes hétérogènes facilitent la diffusion des techniques entre élèves, les groupes homogènes peuvent permettre à l'enseignant d'apporter à certains groupes une aide plus appuyée en fonction de leurs besoins).

Parmi toutes les modalités d'adaptations, l'option que nous avons choisie de développer ici porte sur l'adaptation des supports proposés.

2 Présentation de la démarche de différenciation

Nous nous situons ici dans une perspective de différenciation simultanée, telle que définie dans le document ressource proposé par Eduscol (2016) : « Au sein de la classe, les élèves, individuellement ou au sein de groupes, travaillent en même temps sur des tâches différentes adaptées à leurs besoins du moment »[6]. Il s'agit par conséquent de concevoir plusieurs variantes d'une même situation en fonction des besoins des élèves de la classe et de donner à chacun l'énoncé qui correspond le mieux à ses besoins, en tenant compte du registre verbal évoqué *supra*. La difficulté est donc double :

- d'une part réussir à évaluer de la manière la plus précise possible les points d'appui et difficultés des élèves concernés, et notamment des élèves allophones de la classe. Nous l'avons vu, ces difficultés peuvent être de nature diverse et concerner aussi bien le plan mathématique que langagier.
- d'autre part concevoir des tâches réellement adaptées aux besoins de l'élève, c'est-à-dire à la fois accessibles et préservant au mieux les enjeux d'apprentissage.

[6] https://eduscol.education.fr/document/17197/download

Pour cela, nous utilisons la grille proposée par Millon-Fauré et Gombert (2021) qui permet de hiérarchiser les adaptations possibles afin de repérer celle qui s'avère la plus pertinente pour l'élève ciblé[7]. Cette classification se compose de quatre niveaux d'adaptations qui simplifient peu à peu le travail mathématique attendu chez l'élève, l'objectif étant d'essayer autant que possible de rester dans des niveaux bas : si une adaptation de niveau 1 suffit à un élève donné pour entrer dans la situation, alors il est inutile de recourir à une adaptation de niveau 2. Nous allons illustrer notre propos à partir d'un exemple.

Supposons qu'un enseignant de CM2 veuille proposer à sa classe, dans laquelle se trouve un élève allophone, l'exercice suivant :

> *M Teillon veut clôturer son jardin rectangulaire dont les dimensions sont 59 m et 28 m. Il commande une barrière de bois, vendue par éléments de 140 cm de longueur. Pour les portes, il doit laisser deux ouvertures, l'une de 3,40 m et l'autre de 1,20 m. Combien d'éléments doit-il commander ?*

Quels types d'adaptations peut-il alors concevoir ? C'est ce à quoi nous allons réfléchir en distinguant les choix d'adaptation et leurs enjeux[8].

3 Différenciations selon quatre niveaux

3.1 Différenciation de niveau 1 : adaptation formelle et linguistique

Pour le premier niveau, il s'agit de jouer sur la forme mais ne pas toucher aux tâches mathématiques. Pour faciliter la lisibilité du texte, quelques préalables peuvent faciliter la compréhension telle que les lectures répétées du texte, la reformulation par les élèves, la contextualisation, de sorte à préparer les élèves à entrer dans la situation proposée.

Pour ce niveau 1, l'adaptation concerne la forme du texte, ce que nous désignons le « toilettage » du support. Concrètement, il s'agit de modifier les dimensions formelles, lexicales, syntaxiques et opératoire. En ce qui concerne la *dimension formelle*, il s'agit d'éviter les coupures des lignes susceptibles de produire des ambigüités, les polices peu adaptées à des élèves (comme c'est le cas pour les dyslexiques) et d'augmenter les espacements entre les lignes. Pour la *dimension lexicale*, on tiendra compte des compétences linguistiques des élèves pour adapter le lexique en le modifiant, l'explicitant ou en l'illustrant, comme on le voit ci-dessous. Par exemple, la lettre /m/ isolée signifie à la fois l'abréviation de « monsieur » et « mètre ». Le terme « élément » est imprécis sans comprendre le contexte et une traduction littérale ne serait pas d'une grande aide : à la place, nous proposons une illustration.

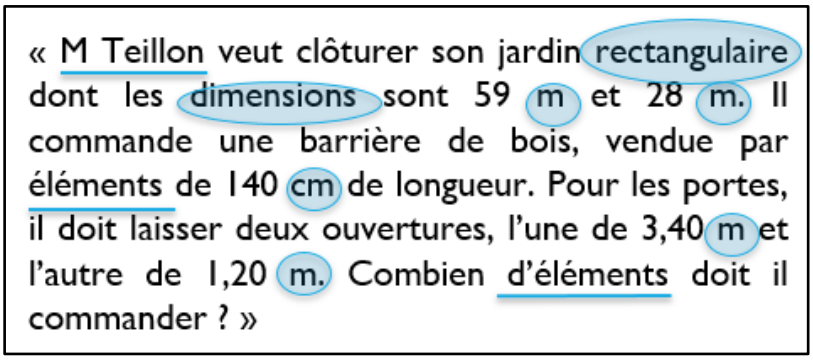

« M Teillon veut clôturer son jardin rectangulaire dont les dimensions sont 59 m et 28 m. Il commande une barrière de bois, vendue par éléments de 140 cm de longueur. Pour les portes, il doit laisser deux ouvertures, l'une de 3,40 m et l'autre de 1,20 m. Combien d'éléments doit il commander ? »

Figure 5. Identification des obstacles lexicaux dans le texte

[7] Une conférence filmée dans laquelle les niveaux de différenciation sont présentés est accessible ici : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/iTLFb5JHk2rnnJq8CUfd1C

[8] Cette démarche peut tout à fait être mise en relation avec les principes de flexibilité d'une démarche de conception pédagogique universelle de l'apprentissage : https://udlguidelines.cast.org/

La dimension syntaxique doit aussi retenir notre attention. Par exemple, un élève qui débute en français, de niveau A1 d'après le cadre européen commun de références pour les langues (CECRL), n'étudie que la phrase simple avec éventuellement la coordination « et » et « mais » … Peu probable qu'il puisse interpréter les pronoms relatifs. Il s'agit donc de raccourcir les phrases et éviter les reprises pronominales.

« Mon voisin veut clôturer son jardin qui a la forme d'un rectangle de 59 mètres de longueur et 28 mètres de largeur. Il commande une barrière de bois, vendue par éléments de 140 centimètres de longueur. Pour les portes, il doit laisser deux ouvertures, l'une de 3,40 mètres et l'autre de 1,20 mètres. Combien d'éléments doit il commander ? »



Un élément de clôture

Figure 6. Identification des obstacles syntaxiques dans le texte

Enfin, pour simplifier l'accès au texte, il est possible d'opter sur une mise en page qui améliore la dimension opératoire. Pour ce faire, on peut respecter la règle : une ligne – une phrase – une tâche ; en étant attentif à la chronologie des tâches.

« Mon voisin a un jardin.

Son jardin a la forme d'un rectangle de 59 mètres de longueur et 28 mètres de largeur.

Mon voisin veut clôturer son jardin.

Pour cela, il commande des éléments de bois.

Chaque élément mesure 140 centimètres.

Il doit laisser une ouverture de 3,40 mètres et une ouverture de 1,20 mètres.

Combien d'éléments doit il commander ? »



Un élément de clôture

Figure 7. Mise en forme du problème avec davantage de lisibilité

Si des adaptations formelles de niveau 1 touchent la réception (écrite), elles peuvent également viser la production de la réponse. À cette fin, plusieurs modalités peuvent être offertes pour que l'élève puisse partager son résultat : il peut s'exprimer à l'oral si la production écrite l'inhibe, passer par une dictée à l'adulte ou répondre à la question avec des réponses proposées en choix multiples ou dans un texte lacunaire à compléter.

3.2 Différenciation de niveau 2 : simplification de la tâche

Si les adaptations proposées au niveau 1 s'avèrent insuffisantes, il convient d'envisager des aménagements un peu plus importants. Pour les adaptations de niveau 2, nous cherchons à simplifier quelque peu le travail attendu mais en gardant les mêmes enjeux principaux d'enseignement que dans la situation initiale. Si l'énoncé initial comprend plusieurs tâches du même type, il est par exemple possible de ne conserver qu'une seule de ces tâches ou de supprimer certains objectifs jugés secondaires. Ainsi, dans la situation choisie, on peut supposer que l'enjeu essentiel porte sur la résolution de problèmes. Dans cette optique, les conversions pourraient être supprimées pour des adaptations de niveau 2, en donnant dans l'énoncé toutes les longueurs dans la même unité. Il est

également possible de ne recourir qu'à des nombres entiers afin d'éviter les obstacles découlant de l'usage de décimaux non entiers.

Une autre possibilité d'adaptations concerne la modification de certaines données numériques de manière à ce que les calculs à effectuer soient plus simples ou à ce que les résultats soient plus faciles à interpréter. Ainsi, pour l'énoncé ciblé dans cette communication, on peut choisir un nombre entier de mètres pour la longueur de la barrière car les calculs mettant en jeu des nombres décimaux sont souvent moins bien appréhendés : même s'il dispose d'une calculatrice, les divisions demeurent généralement complexes pour les élèves de cycle 3. Il est par conséquent possible de choisir une longueur de barrière très simple : pour une barrière de 2 mètres, par exemple, il suffit de diviser la longueur du terrain par 2, donc de chercher sa moitié. Il serait même intéressant de choisir une longueur et une largeur de terrain correspondant à un nombre entier de barrières. Ainsi l'élève n'aura pas à manipuler de nombres décimaux dans les résultats de ses divisions ni même à se demander s'il est possible de couper un élément de barrière pour le réutiliser ailleurs…

3.3 Différenciation de niveau 3 : allégement de certains enjeux d'apprentissage

Si les propositions précédentes ne suffisent pas pour rendre la tâche accessible à l'élève, on peut rechercher des adaptations de niveau 3. Dans ce cas, on laissera de côté certains des enjeux d'apprentissage de la situation de départ, de manière à ce que l'élève puisse se focaliser sur les autres.

Dans l'exemple que nous regardons, pour résoudre le problème proposé, plusieurs étapes s'avèrent nécessaires. Comme pour toute situation-problème, il va falloir tout d'abord modéliser la situation pour passer des informations textuelles proposées aux objets mathématiques, puis trouver et effectuer les différents calculs nécessaires (détermination du périmètre ; retrait de la longueur des ouvertures ; division du nombre trouvé par la longueur de la barrière) et enfin interpréter le résultat trouvé par rapport à la situation initiale. Pour des adaptations de niveau 3, on peut penser à soulager l'élève de certaines de ces étapes. Reconnaissons que l'intérêt essentiel de ce problème réside dans la détermination des différents calculs à effectuer, qui s'avèrent relativement nombreux pour des élèves de cet âge. Il s'agit là d'un enjeu intéressant pour travailler la résolution de problèmes, mais que l'on va être amené à limiter pour ces adaptations de niveau 3.

Regardons à présent les possibilités qui s'offrent à nous. Une première piste consiste à tenter de faciliter le processus de modélisation. Face à un tel problème, il est probable que, pour se représenter la situation, les élèves cherchent à faire un schéma. Or, ce dernier s'avère ici un peu délicat à effectuer, notamment parce que le positionnement des portes n'est pas précisé. Il serait alors possible de donner directement à l'élève un schéma à l'échelle, éventuellement conçu de manière à ce que chaque portion à clôturer corresponde à un nombre entier de barrières.

Une autre idée serait de de donner à l'élève des questions intermédiaires qui guideront la résolution du problème :

1) Calcule le périmètre du terrain ;

2) Quelle est la longueur qu'il faudra clôturer (lorsqu'il y a une porte il n'y a pas besoin de clôture ;

3) Détermine le nombre de barrières correspondant à cette longueur.

Il est même possible de donner les informations aux élèves au fur et à mesure des besoins (par exemple en ne précisant la longueur de la barrière qu'à partir de la question 3). Notons tout de même que, dans ce cas, l'on contraint le lecteur à utiliser une stratégie particulière alors qu'un élève pourrait préférer calculer le nombre de barrières nécessaires pour chaque côté du rectangle.

On peut également ne donner qu'une partie du problème à résoudre, par exemple en ne demandant que la longueur à clôturer ou alors au contraire en donnant dans l'énoncé la longueur totale à clôturer

et la longueur d'une barrière pour déterminer le nombre d'éléments nécessaires. Une dernière piste serait de demander uniquement le prix de 121 barrières à partir du prix à l'unité.

3.4 Différenciation de niveau 4 : modifications des enjeux d'apprentissage attendus

Pour les élèves en très grande difficulté en mathématiques (qui n'auraient pas ou peu été scolarisés antérieurement), on peut également envisager des adaptations de niveau 4. À ce moment-là, l'objectif est de simplifier grandement la tâche pour la rendre accessible à l'élève, tout en conservant, rappelons-le des enjeux d'apprentissage pour l'élève (même si ce ne sont plus nécessairement les mêmes que ceux de départ). Il est toutefois conseillé de garder le même contexte afin que l'élève concerné conserve un lien avec le reste de la classe. Son travail pourra même peut-être être évoqué lors de mise en commun et servir d'illustration ou de vérification aux propositions de ses camarades. Dans l'exemple choisi ici, plusieurs déclinaisons de la tâche initiale peuvent être mises en place.

L'élève peut ainsi être chargé de dessiner pour la classe la représentation du champ sur laquelle on pourra s'appuyer lors de la mise en commun. Même si l'objectif de la séance réside, pour le reste de la classe, dans la résolution de problèmes, l'élève ciblé travaille lui sur la construction de figures et plus précisément sur le tracé d'un rectangle à partir des instruments de géométrie, ce qui nécessite la connaissance de certaines propriétés de ce quadrilatère.

On peut également proposer à l'élève de déterminer le périmètre complet d'une représentation à l'échelle du champ (en prenant une échelle simple. Si possible en décidant qu'un mètre en réalité correspond à un centimètre sur le dessin), à l'aide d'une corde. Le matériel fourni (la corde) permet à l'élève d'utiliser une technique différente de celle initialement attendue (ajout des longueurs des côtés du quadrilatère). Mais en positionnant la corde sur le bord du rectangle et en mesurant ensuite la longueur obtenue, l'élève va être amené à revenir sur la définition du mot "périmètre". Lors de la mise en commun, il sera alors intéressant de comparer le résultat trouvé avec celui obtenu par ses camarades par le calcul (même si l'unité ne sera pas la même).

Pour aller plus loin, on pourrait aussi à partir d'une représentation à l'échelle du champ (toujours en utilisant l'échelle 1 mètre en réalité correspond à 1 centimètre sur le dessin), puis demander de déterminer le nombre d'éléments nécessaire à partir d'un rectangle représentant (à l'échelle), un élément de barrière. Ici, il s'agit juste de déterminer le nombre de fois où l'élève peut reporter le rectangle proposé sur chaque côté, puis sur l'ensemble des 4 côtés, ce qui peut paraître peu intéressant pour l'élève. Toutefois, cela peut conduire à une réflexion sur l'opération qui aurait pu permettre de trouver directement la solution et une vérification de manière empirique du résultat annoncé par la division, ce qui peut contribuer à donner du sens à ce procédé.

Il est enfin possible de nommer l'élève allophone « responsable de la calculatrice ». Durant le temps de recherche, il sera alors le seul élève du groupe à disposer de cet instrument et les autres élèves devront lui demander d'effectuer les calculs dont ils ont besoin. Il peut aussi, lors de la mise en commun, être chargé de vérifier les résultats des calculs proposés par ses camarades. Notons que cette modalité n'est envisageable que si la manipulation de la calculatrice constitue un enjeu d'apprentissage pour l'élève, par exemple s'il n'a pas eu l'habitude, dans son pays d'origine, d'utiliser cet instrument.

V - CONCLUSION

Comme l'expliquaient Dominique Abry et Catherine David, en caractérisant le travail de l'enseignant qui exerce dans des groupes linguistiques multiniveaux, « différencier sa pédagogie, c'est avant tout avoir le souci de l'apprenant. L'enseignant doit maintenir l'esprit de classe tout en s'intéressant à chaque individu en particulier » (David et Abry, 2018, p. 27). Pour accorder l'attention nécessaire aux élèves allophones, nous avons d'abord observé leur profil singulier qui les distingue des élèves natifs, ce qui a mis en relief les implications de la trajectoire migratoire sur le plan linguistique et scolaire. De plus, nous

avons pris quelques pas de recul pour envisager aussi les conditions d'arrivée et de séjour qui peuvent avoir une répercussion sur le rapport au travail scolaire. L'enseignant peut prendre en compte les paramètres linguistiques et scolaires dans son enseignement, mais c'est avec l'équipe pédagogique et les partenaires qu'il pourra discuter pour trouver les solutions à des problèmes qui dépassent son champ d'action.

Dans un second temps, nous avons voulu examiner les discours scolaires mathématiques pour identifier leur complexité et repérer des leviers de différenciation. Enfin, nous avons développé un exemple de différenciation pédagogique, à partir de supports écrits, qui tiennent compte des profils des élèves décrits en première partie. Certes, une telle mise en œuvre (analyse des profils des élèves, des registres mobilisés dans chaque activité mathématique, des adaptions pédagogiques…) est chronophage et ne peut être systématisée dans le quotidien de l'enseignant, mais l'intérêt réside dans la posture professionnelle et dans la réflexion – ou la réflexivité – à apporter d'une part sur l'inclusion des élèves allophones, les points de difficultés et les choix de différenciations envisageables, pour développer des gestes professionnels d'étayage et de soutien qui profitent d'ailleurs à tous les élèves du groupe classe.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Abou Samra, M., Hache, Ch., Mendonça Dias, C. (2023). Collaborations professionnelles mathématiques-français, *Petit X,* n° 118.

Armagnague M., Cossée C., Mendonça Dias C., Rigoni I. Tersigni S. (2018). *Rapport de recherches EVASCOL Étude sur la scolarisation des élèves allophones nouvellement arrivés (EANA) et des enfants issus de familles itinérantes et de voyageurs (EFIV),* Défenseur des droits & INSHEA.

Assude, T., Koudogbo, J., Millon-Fauré, K., Tambone, J., Theis, L. et Morin, M.-P. (2015). Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux difficultés d'un système didactique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* n°16(1), p.1-35.

Auger N., Le Pichon-Vorstman E. (2021). *Défis et richesses des classes multilingues, Construire des ponts entre les cultures*. ESF Sciences humaines.

Benzakki, I. et Mendonça Dias, C. (2022). Différenciation pédagogique pour les élèves allophones arrivant en classe ordinaire : comparaison des pratiques enseignantes entre la France, le Luxembourg et le Québec. *FDLM Recherches et applications*, n°72, Paris, CLE international.

Brun L. (2024). 89 500 élèves allophones nouvellement arrivés scolarisés en 2022-2023 : neuf sur dix bénéficient d'un soutien en français langue seconde, Note d'Information n°24-40, DEPP. https://doi.org/10.48464/ni-24-40

Conseil de l'Europe (2001). *Un cadre européen commun de référence pour les langues : apprendre, enseigner, évaluer,* Didier.

Cummins, J. (1979). Cognitive/academic language proficiency, linguistic interdependence, the optimum age question and some other matters, *Working Papers on Bilingualism* 19, p. 121–129.

David C., Abry D. (2018). *Classes multi-niveaux et pédagogie différenciée*, Hachette FLE, coll. F.

David, C. et Mendonça Dias, C. (2020). L'art de la différenciation, *Cahiers pédagogiques*, n° 558, janvier 2020.

Guedat-Bittighoffer, D. (2024). *Les émotions au cœur du processus d'enseignement-apprentissage des langues*, L'Harmattan, coll. Didactique des langues et des littératures.

Hache C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Paris. Disponible en ligne.

Kerbrat-Orecchioni C. (2000). « Les cultures de la conversation », Le langage, Hors-série n° 27, déc. 1999 - janv. 2000.

Mendonça Dias, C. (2013). Les progressions linguistiques et scolaires par les collégiens nouvellement arrivés, non ou peu scolarisés antérieurement, Revue Recherches en didactique des langues et des cultures (RDLC), Les cahiers de l'Acedle, 10.

Mendonça Dias, C. (2020, a). « Implications didactiques de l'appropriation du français sur une année scolaire, par les élèves allophones », dans Mendonça Dias, C., Azaoui, B. et Chnane-Davin, F. (coord.), *Allophonie. Inclusion et langues des enfants migrants à l'école*, Lambert Lucas, p. 187-201.

Mendonça Dias, C. (2020, b). « Les élèves allophones peu scolarisés antérieurement dans l'ombre du monstre scolaire » dans Garnier B., Blanchet Ph. (coord.), *Diversité linguistique et formation citoyenne,* Études de Linguistique Appliquée (ELA).

Mendonça Dias, C. (2021). Les mathématiques sont une chanson douce, dans Proscolli A., Nikou C., Tsakagiannis S., *Regards croisés sur la place du français dans des sociétés en mutation*, Dialogues et cultures, n° 66, p. 163-180.

Mendonça Dias, C. (2024). *Appropriations linguistiques et enseignements en langue seconde. Le cas des élèves nouvellement arrivés*. [Habilitation à diriger les recherches. Aix Marseille Université]. Disponible en ligne.

Mendonça Dias, C. et Millon-Fauré, K. (2023). *Mathématiques en français langue seconde et en langues étrangères.* Hachette FLE, coll. F.

Mendonça Dias, C., Simon, A. (2022). Le récit autobiographique des enfants migrants dits "mutiques", à l'école et à l'hôpital, dans Blanchard Ch. (coord.) Agir sur les territoires et accompagner les acteurs, Le Sujet dans la Cité n° 14, nov. 2022, Revue internationale de recherche biographique.

Miguel-Addisu V. (2020). *Situations plurilingues : parcours sociolinguistique et didactique : vers une didactique inclusive du français*. Habilitation à diriger des recherches. Linguistique. Université de Rouen – Normandie.

Millon-Fauré, K., Mendonça Dias, C. et Smythe, F. (2022). « Je comprends mais je sais pas le dire ». Le cas des élèves allophones, *Au fil des maths*, n°545. Disponible en ligne.

Millon-Fauré, K. et Gombert, A. (2021). Analyse d'une situation en mathématiques pour une élève dyscalculique. Méthodologie pour la conception d'adaptations pédagogiques et didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* n°41(2), p.143-176.

Przesmycki H. (2004). *Pédagogie différenciée,* Paris, Hachette Éducation.

Stratilaki-Klein S., Nicolas C. (2020). *Plurilinguisme et inclusion scolaire*, Casnav de Paris. Disponible en ligne.

Tellier, M. (2008). « Dire avec des gestes ». Le Français dans le monde. *Recherches et applications*, 2008, 44, pp.40-50.

VISÉES ET PREMIERS RÉSULTATS D'UNE RECHERCHE PARTICIPATIVE SUR LES PRATIQUES DES RÉFÉRENTS MATHÉMATIQUES EN CONSTELLATION

Anne-Marie RINALDI
MCF, Université Paul Valéry
LIRDEF (EA 3749)
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

Chantal TUFFERY-ROCHDI
MCF, Université de Montpellier
LIRFEF (EA 3749)
Chantal.tuffery-rochdi@umontpellier.fr

Magali DELZOR
RMC, Académie de Montpellier
Magali.Delzor1@ac-montpellier.fr

Résumé
Ce texte rend compte d'une recherche-formation en cours, soutenue depuis deux ans par l'INSPE de l'académie de Montpellier, qui étudie les pratiques professionnelles de référents mathématiques de circonscription dans le cadre du plan mathématiques (Villani-Torossian, 2018). La recherche s'inscrit dans le courant des recherches participatives (Marcel, 2019). Elle vise à prendre en compte les préoccupations des acteurs de terrain et repose essentiellement sur des allers-retours réguliers entre les praticiens et les chercheurs. La visée transformatrice est d'amener les référents engagés dans le projet à exposer leurs stratégies de formation actuelle, à prendre des décisions et à définir des compromis collectifs pour co-construire une stratégie – en ce sens nouvelle – de formation. Notre ambition est d'étudier comment certaines questions de la profession (Chevallard et Cirade, 2009) émergent en constellation et quels types de stratégies sont principalement utilisées par les référents pour les faire émerger.

La formation continue des professeurs des écoles en mathématiques en France a été entièrement repensée à la suite de la mise en œuvre du *plan mathématiques*[1], dans le prolongement du rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*[2] (Villani et Torossian, 2018). Depuis, une majeure partie de cette formation est assurée par des enseignants du premier degré, formés sur le plan national et académique et dits « référents mathématiques de circonscription » (RMC). Les formations menées dans ce cadre sont appelées formations en « constellation ». Les missions confiées aux RMC sont explicitées dans un *vademecum*[3] édité en 2018.

Dans le cadre d'une recherche-formation intitulée « Vers de nouvelles stratégies de formation dans le cadre du plan mathématiques (Vers - Plan Maths) » – portée par Anne-Marie Rinaldi (chercheuse en didactique des mathématiques) et Sophie Gastal (RMC de l'Académie de Montpellier), regroupant deux chercheures[4] et neuf référents mathématiques de circonscription[5] – nous avons accompagné les RMC

[1] https://eduscol.education.fr/1476/plan-de-formation-en-mathematiques-premier-degre

[2] http://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html

[3] https://eduscol.education.fr/document/1481/download?attachment

[4] Anne-Marie Rinaldi, LIRDEF, Université Paul Valéry ; Chantal Tufféry-Rochdi, LIRDEF, Université de Montpellier.

[5] Sonia Bayle, RMC, Montpellier Nord ; Stéphane Boudes, RMC et CPC, Céret – Pyrénées Orientales ; Magali Delzor, RMC, Perpignan ; Sophie Gastal, RMC, Montpellier Nord et Ouest ; Hervé Gensac, RMC hauts cantons de Bédarieux ; Fabienne

dans leur mission de formation des professeurs des écoles dans le cadre du plan mathématiques. Cette recherche-formation a obtenu le soutien de l'INSPE de l'académie de Montpellier pendant deux années scolaires consécutives (2022-2023 et 2023-2024). À partir de septembre 2023, elle a également été intégrée dans le dispositif de formation des RMC de l'académie de Montpellier. Les référents engagés dans la recherche ont ainsi pu bénéficier de journées libérées au profit de cette recherche-formation.

Après une présentation du contexte de la recherche-formation, nous exposerons les actions menées par les chercheuses et les référents pendant les deux années de la recherche. Cela nous conduira à présenter et analyser deux dispositifs de formation conduits par deux référentes et observées in situ par les deux chercheuses avant d'avancer nos premières conclusions et de dégager des perspectives.

I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE-FORMATION

La recherche s'inscrit dans la continuité d'un travail collaboratif mené par une des deux chercheuses avec deux RMC de l'Hérault (Rinaldi, Bayle et Gastal, 2023)[6]. De cette expérience riche sur le plan humain et scientifique, est né le souhait d'accompagner dans leurs pratiques un petit groupe de référents volontaires. La recherche « Vers - Plan Maths » s'inscrit dans le cadre des recherches participatives au sens de Marcel (2019), c'est pourquoi elle est triplement finalisée par :

- Une visée heuristique : connaître les pratiques des référents dans leur plus large acceptation.
- Une visée praxéologique : transformer, en vue de contribuer à résoudre ou à améliorer, de conduire ou d'accompagner le changement.
- Une visée critique.

Le travail mené conjointement par les chercheuses et les praticiens s'est donné comme objectif de concevoir des outils pour aider les référents à :

- Mieux identifier les besoins de connaissances en mathématiques et en didactique des professeurs des écoles amenés à travailler ensemble en constellation.
- Faire émerger une question de la profession (Chevallard et Cirade,2009) qui fédère le groupe à partir des besoins exprimés en constellation.
- Diversifier les modalités de formation proposées en constellation.
- Évaluer l'impact de la formation sur les pratiques des professeurs des écoles formés.

Dans cette communication, nous abordons principalement les deux premiers objectifs.

Dans l'académie de Montpellier, les RMC sont, soit des enseignants déchargés de classe une partie de la semaine, soit des conseillers pédagogiques de circonscription (CPC) totalement déchargés de classe. Les formations en constellation regroupent entre six et huit professeurs des écoles d'une même circonscription, voire d'une même école, et le plus souvent d'un même cycle. Cinq référents des Pyrénées Orientales et quatre référents de l'Hérault ont répondu à l'appel. Les neuf volontaires sont composés de trois hommes et six femmes, de quatre référents également CPC et donc déchargés de classe et de cinq référents ayant une classe à temps partiel.

Pour conduire la recherche en poursuivant parallèlement les trois visées (heuristique, praxéologique et critique), nous avons fait le choix de suivre un calendrier classique en trois étapes : état des lieux, dispositif et évaluation. Au tout début de la recherche, nous nous sommes basées sur les pratiques déclarées des référents sans pour autant nous interdire d'apporter des éléments théoriques susceptibles d'enrichir les

Giamarchi, RMC, Perpignan ; Laetitia Granier, RMC, Montpellier Sud et Saint Jean de Védas ; Stéphane Labalme, conseiller pédagogique EPS circonscription Littoral, RMC Perpignan ; Joëlle Lozano-Duriez, Conseillère pédagogique chargée des missions Sciences et Mathématiques, Académie de Montpellier.

[6] Dans cette recherche, l'ambition était d'étudier un dispositif de formation en constellation qui portait sur le thème du calcul à l'école élémentaire, de voir notamment comment des ressources issues de la recherche étaient présentées aux formés.

échanges. Ensuite, nous avons organisé des visites *in situ* pour appréhender les dispositifs de formation en constellation autrement qu'à partir de pratiques déclarées. À chaque étape de la recherche, nous avons été soucieuses de réserver des temps de travail distincts au collectif des référents, au collectif des deux chercheuses, et au collectif des référents et des chercheuses réunis. Nous avons également fait le choix d'enregistrer intégralement et exclusivement les temps d'échanges entre chercheuses et référents ainsi que les échanges entre référents et formés dans les cinq constellations observées[7]. Cette communication s'appuie sur une partie du corpus recueilli.

II - PREMIÈRE ANNÉE DE LA RECHERCHE

Le travail s'est mis en place à partir de janvier 2023 avec sept référents et les deux chercheuses après acceptation du projet. Cette première année de recherche s'organise autour de la passation d'un questionnaire conçu par les chercheuses à destination des référents. Les données recueillies ont fait l'objet d'analyses croisées.

1 Le déroulé de la première année

En cohérence avec la méthodologie définie précédemment, la recherche alterne des temps de travail regroupant les différents collectifs : uniquement les référents, uniquement les chercheuses ou encore le groupe entier référents et chercheuses. Bien que chaque collectif possède ses propres spécificités, aucune hiérarchie n'est mise en avant.

La recherche a débuté par la conception d'un questionnaire d'explicitation des pratiques par les chercheuses à destination des référents. Les différentes questions portaient sur le parcours professionnel des référents engagés dans la recherche (en tant qu'enseignant et en tant que formateur), les formations en constellation menées (organisation, composition, choix du thème…), les stratégies de formations mises en œuvre et les ressources mobilisées, l'évaluation de la formation. Les référents étaient également questionnés sur leurs réussites, leurs difficultés et leurs attentes. Le recueil des réponses au questionnaire s'est fait lors d'entretiens individuels (une chercheuse et un référent) d'environ 45 min. Le questionnaire avait été présenté en amont à l'ensemble des RMC. Les entretiens ont été transcrits par les chercheuses qui les ont rendus anonymes et en ont sélectionné des extraits. Ces extraits ont d'abord été analysés en binôme puis en groupe par les référents et en parallèle par les chercheuses. Enfin les deux collectifs se sont réunis pour faire une synthèse des analyses menées. Pour finir, des apports de la recherche ont été proposés par les deux chercheuses aux référents.

Le tout s'est déroulé entre janvier 2023 et juillet 2023 (figure 1).

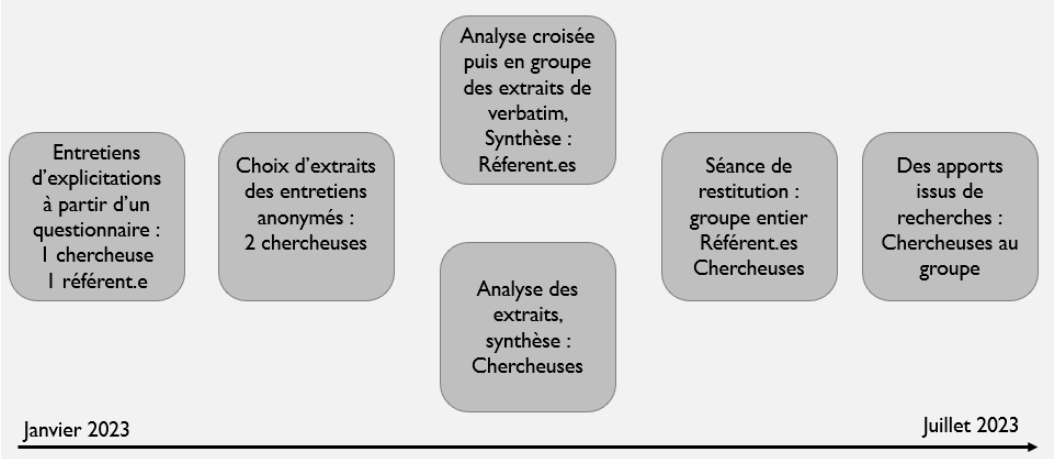


Figure 1 : Déroulé de la première année (2022-2023) de recherche

[7] Nous n'avons pas trouvé de dates pour aller observer in situ les constellations des quatre autres référents.

Dans le paragraphe suivant, afin d'établir un état des lieux sur les pratiques des référents, nous analysons les réponses des référents à deux des questions posées en entretien :

- Question 1 : Qui décide et comment est choisi le thème de la formation ?
- Question 2 : Quels moyens vous donnez-vous pour faire émerger les besoins des équipes ?

2 Les entrées et les stratégies pour faire émerger les besoins des formés

Deux configurations existent quant au choix du thème de la formation suivant les circonscriptions. Dans deux circonscriptions sur les neufs recensées, le domaine des mathématiques est imposé par l'Inspecteur de L'Éducation Nationale. Chaque constellation doit alors impérativement aborder le thème du nombre en maternelle et de l'apprentissage de la numération en primaire puis éventuellement élargir ce thème au calcul et la résolution de problèmes. Dans les sept autres circonscriptions, le thème est décidé lors de la première réunion de la constellation. Dans un seul cas sur neuf, il est choisi en lien avec les gestes professionnels de Bucheton et Soulé (2009). Dans les autres cas, il est mathématique et décidé par les formés eux-mêmes. Souvent, la résolution de problèmes est au cœur des préoccupations.

Concernant l'émergence des besoins des formés dans le but de définir le contenu de la formation, les référents montrent des pratiques différentes. Ce temps de formation peut être mené via des tâches confiées aux professeurs des écoles formés qui peuvent être individuelles ou collectives, voire alternent les deux modalités, en s'appuyant (ou pas) sur du matériel comme du papier ou des post-it, en fournissant (ou pas) des ressources institutionnelles ? comme les programmes et des documents d'accompagnement des programmes. Les entrées proposées comme source de la réflexion sont également différentes. Il est souvent demandé aux professeurs des écoles de réfléchir à partir des difficultés des élèves, des difficultés d'enseignement, des obstacles. Elles peuvent également reposer sur des situations de classes robustes amenées par les enseignants, des dispositifs dont ils auraient entendu parler, des idées d'expérimentation, des envies. Une des référentes commence par des apports sur le multi-agenda et les gestes professionnels (Bucheton et Soulé, 2009) puis demande aux professeurs des écoles de proposer une problématique associée à l'un de ces gestes. La synthèse de ces besoins, de ces idées peut être faite collectivement par les professeurs des écoles formés avec l'aide ou pas du référent, elle peut également être totalement prise en charge par le référent. Cette synthèse se termine souvent par la formulation d'une question. Cette question est nommée « problématique » par les référents.

3 De la problématique à la question de la profession

Comme nous l'avons écrit ci-dessus, alors que le mot « problématique » ne figurait pas dans le questionnaire conçu par les chercheuses et soumis aux référents, ceux-ci l'ont utilisé à chaque fois qu'ils avaient à décrire le premier temps de formation. Surprises par l'usage systématique de ce mot, nous sommes revenues sur le *vademecum* (2018) qui détaille les missions des référents pour constater que ce mot ne semble pas issu de ce document qui s'appuie davantage sur le mot « besoin ».

> *« En particulier, grâce à une transparence et une bienveillance dans les échanges, il s'agira de permettre à chacun des professeurs des écoles d'un groupe de pouvoir formuler des besoins ou des souhaits de formation mais aussi des difficultés personnelles relatives à certaines notions mathématiques. » (vademecum, 2018, p. 6)*

Nous nous sommes alors questionnées sur le sens donné à ce mot par les référents. À la suite de nombreux échanges avec les RMC, nous nous sommes rapprochées des travaux de Chevallard et Cirade (2009) que nous avons présentés au collectif des référents. S'intéressant à la formation des élèves professeurs de mathématiques, les auteurs justifient le fait d'avoir délaissé les procédures *top-down (ibid., 2009),* qui imposent des contenus choisis par les formateurs au profit d'une procédure *bottom-up* pour laquelle les élèves professeurs sont invités chaque semaine à écrire, de façon concise, une difficulté rencontrée dans la semaine écoulée. Les questions ainsi formulées, sont nommées *ombilicales* pour signifier qu'elles se branchent sur le quotidien (Ibid., 2009). *Elles* sont considérées, sauf exception, comme

des questions qui se posent à la profession à travers l'un de ses futurs membres, et non comme des questions personnelles propres à une personne. (Cirade, 2012). Même si le contexte de la formation en constellation semble fort éloigné de celui de la formation initiale, l'idée de partir des besoins des professeurs expérimentés peut s'apparenter à l'idée de partir des difficultés des élèves professeurs. Dans les deux cas, il nous semble que chaque question personnelle produite par un professionnel stagiaire ou en exercice, sauf exception, est une question qui intéresse toute la profession. Réciproquement, toute question de la profession peut intéresser par conséquent un professionnel car il se l'est peut-être déjà posée, il se la pose, il se la posera probablement un jour.

III - DEUXIÈME ANNÉE DE LA RECHERCHE

La recherche s'est poursuivie, à partir de septembre 2023 avec neuf référents et les deux chercheuses, associée comme à un dispositif de formation des RMC de l'académie de Montpellier.

1 Le déroulé de la deuxième année de la recherche

La deuxième année de la recherche (Figure 2) a débuté par deux journées d'échanges sur les pratiques des référents associés à des apports de la recherche de la part des chercheuses sur les stratégies de formation (Houdement, 2013, Butlen, 2017) et des modalités possibles d'évaluation d'une formation (Guille-Biel Winder et al., 2015) que nous ne développons pas ici. Elle s'est poursuivie par des observations par les chercheuses de temps de formations menés par cinq des référents. Ces temps de formation ont été enregistrés avec l'accord des professeurs des écoles formés et du référent concerné. Les traces écrites (feuilles, post-it, photos du tableaux, diaporama…) ont été recueillies. En décembre trois observations ont pu être menées dans le département de l'Hérault. En février, deux observations ont été menées dans le département des Pyrénées-Orientales.

Nous nous focalisons ici sur les temps d'observations menés dans la constellation de Magali en février à Perpignan et celle de Sophie en décembre à Montpellier.

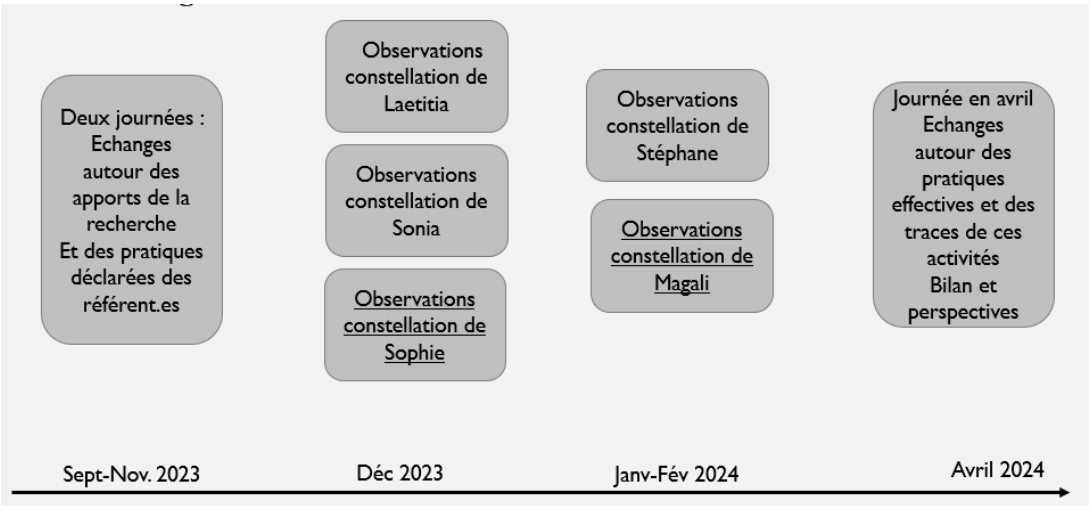


Figure 2 : déroulé de la deuxième année (2023-2024) de recherche

2 Un temps d'observation dans la constellation de Magali

Magali est enseignante dans le premier degré depuis vingt ans, formatrice depuis dix ans et RMC depuis quatre ans. La constellation présentée ici débute en février 2023 dans une école maternelle de centre-ville. Elle est composée de quatre enseignantes de maternelle et d'une enseignante de cours préparatoire (CP) dont les prénoms ont été changés. Les enseignantes avaient, en amont de la formation, choisi le thème qu'elles souhaitaient travailler dans le plan mathématiques, à savoir la résolution de problèmes. Précisons que les enseignantes de cette constellation ont des habitudes de travail en équipe qui sont installées.

2.1 Un déroulé en trois étapes pour recueillir les besoins des formées

Pour s'accorder sur le contenu de la formation, la formatrice propose un déroulé en trois étapes. Un temps d'écrit individuel, un tour de table où chacun s'exprime et enfin une synthèse faite par la formatrice.

La première étape est un temps d'écrit individuel (5 minutes) durant lequel les enseignantes écrivent leurs aspirations de formation. La transcription de la consigne donnée par Magali est la suivante :

> *« L'idée c'est de partir du terrain, et de voir quelles sont vos aspirations, vos envies sur votre formation, il faut bien que vous ayez conscience que ce plan mathématiques c'est vraiment votre formation, on vous donne du temps, c'est vraiment précieux parce que ça a un coût en remplacement etc., on vous donne du temps pour vous, réfléchir en didactique, en pédagogie et faire un focus sur un thème. […] Pour commencer, j'aimerais bien, avant qu'on discute ensemble, que vous ayez un temps d'écrit personnel sur ce qui vous questionne, sur ce que vous avez envie de travailler dans ce temps de questionnement professionnel qu'on va avoir ensemble. » (Extrait 1 du dispositif de Magali)*

On peut remarquer que les mots « problématique », « difficultés » ou « besoins » n'apparaissent pas dans les propos de Magali et que le questionnement est centré sur l'enseignant plutôt que sur les élèves.

Le temps d'échanges (deuxième étape) s'organise comme un tour de table qui favorise plutôt les échanges entre chaque enseignante et Magali même si on observe quelques commentaires et une prise en compte des échanges précédents dans les prises de parole successives. Durant cette étape, le tour de parole s'est organisé comme en suivant l'ordre indiqué sur la figure 3, la première intervenante étant Carla.

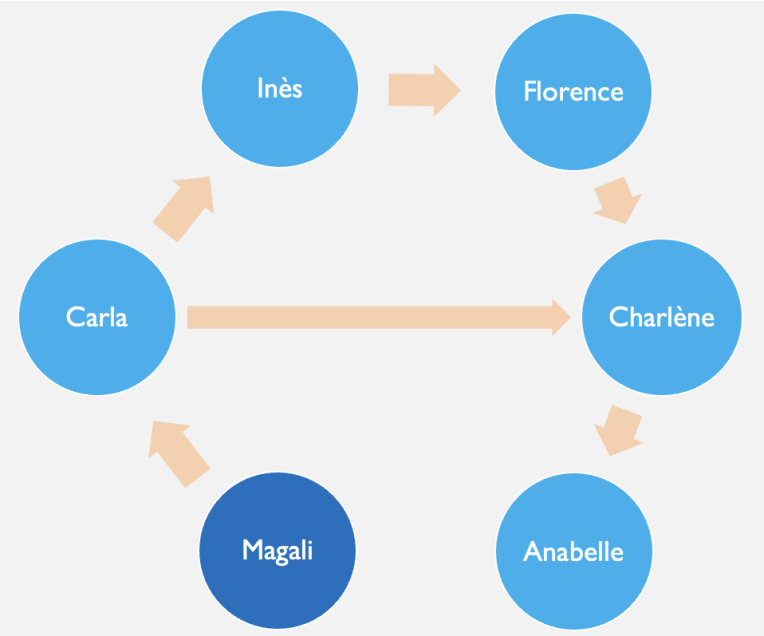


Figure 3 : Prise de parole des enseignantes de la constellation de Magalil

Nous allons maintenant analyser les propos des enseignantes à l'oral et à l'écrit.

- Carla : enseignante en TPS-PS (élèves de 2 à 4 ans), directrice de l'école, expérimentée

Carla écrit le titre de la thématique (résolution de problèmes) et pose le questionnement suivant : « Comment introduire une recherche ? Quels outils ? Comment faire avec des enfants qui n'ont pas le langage ? Quelle trace collective ? Pour les TPS-PS qui n'ont pas encore la construction du nombre ? ». Elle reprend oralement ce qu'elle a écrit, sans forcément respecter l'ordre et en faisant un ajout en évoquant la manipulation. Lors des échanges avec ses collègues, elle met également en avant la nécessité de différencier et les difficultés qu'elle rencontre pour le faire avec ses très jeunes élèves.

- Inès : enseignante en MS-GS (élèves de 4 à 6 ans), expérimentée

Inès écrit : « Pourquoi et comment faire compter des élèves qui « bloquent » aux grands nombres, et tous les ans, au 14 et 15 ? Comment appréhender la résolution de problèmes (mains, traces

écrites) ? Compléments à 5 et à 10, avec les MS surtout, quels outils ? Ordinalité. ». À l'oral, Inès insiste davantage sur les difficultés des élèves et avance qu'il y a comme base à la résolution de problèmes la maîtrise des premiers nombres et de leur décomposition. Dans la thématique de la résolution de problèmes, elle évoque, comme Carla avant elle, la question de la trace écrite et du support de cette trace (feuille, tableau, mains) ? Enfin elle revient sur une formation suivie sur l'aspect ordinal du nombre et sa difficulté à la mettre en œuvre en classe malgré l'intérêt qu'elle y perçoit.

- Florence : enseignante en MS-GS, expérimentée

Florence reste sur la thématique de la résolution de problèmes à l'écrit comme à l'oral en restant très proche de ses notes. Elle met en avant son souci de proposer des séances plus ludiques et qui permettent aux élèves de mener une réelle réflexion dans le but d'apprendre à chercher et à réfléchir et pas seulement de fournir la réponse attendue.

- Charlène : enseignante en CP (élèves de 6 à 7 ans), débutante[8]

On voit dans l'écrit de cette enseignante débutante, sous formes de prise de notes avec des mots et des flèches, que ses préoccupations sont multiples dans plusieurs champs des mathématiques (géométrie, calcul mental, résolution de problèmes). à l'oral, elle reprend en premier la thématique de la résolution de problèmes : « En CP, en résolution de problèmes, ma difficulté c'est la trace écrite, ce qu'on doit garder ... Est-ce que cela a un intérêt ? Comment on s'y réfère ? ». Carla, la directrice intervient lorsque Charlène évoque la résolution de problèmes. Elle sait que l'école élémentaire, qui jouxte la maternelle, utilise la schématisation en barres et sa préoccupation est de préparer les élèves du cycle 1 à l'entrée au cours préparatoire. Charlène se questionne également sur le calcul mental, sur la manière de faire évoluer le rituel, comme sur les stratégies à aborder.

- Anabelle : enseignante en TPS-PS (élèves de 2 à 4 ans), en début de carrière

Anabelle, comme Florence se focalise sur la thématique de la résolution de problèmes. Elle introduit l'idée d'un travail sur la construction d'une progression de cycle et la création d'activités de références.

La troisième étape de cette matinée est la synthèse faite par la référente Magali entre les écrits des enseignantes et leurs propos tenus à l'oral. Ce temps de synthèse est pris totalement en charge par Magali qui, après avoir valorisé l'ensemble des interventions qu'elle dit être intéressantes, propose de resserrer les choses. La retranscription de la synthèse est la suivante :

> *« On va resserrer, se fixer quelque chose de cohérent. La thématique, vous l'aviez déjà choisie c'est la résolution de problèmes en maternelle. Quand on est sur la résolution de problèmes on est aussi sur la construction du nombre. Ce qui est revenu : réaliser, construire ensemble une progression pour le cycle sans oublier la vision de l'école élémentaire (schéma en barres) ; la trace (écrite) ; comment apprendre à chercher…Est-ce qu'on part là-dessus ?» (Extrait 2 du dispositif de Magali)*

Magali affirme ainsi le lien entre la résolution de problèmes en maternelle et la construction du nombre, puis retient trois idées :

- La construction d'une progression de cycle favorisant le lien avec l'école élémentaire et la schématisation pratiquée.
- La place et le rôle de la trace écrite.
- La modalité « apprendre à chercher ».

Magali précise que la question sera affinée lors des séances suivantes. Elle proposera également à Charlène un accompagnement individuel pour le calcul mental hors du temps de la constellation.

[8] Charlène, en poste dans une autre école de la circonscription, fait partie de cette constellation à la suite à un changement de poste en septembre. Elle connait donc bien ses collègues.

2.2 Une analyse et un retour du collectif de recherche référents et chercheuses à partir de l'enregistrement et des traces écrites

Le collectif composé des chercheuses et des référents a consacré un temps d'analyse à ce moment de formation mené par Magali à partir de la transcription des enregistrements et des traces écrites récupérées. Lors de ce temps d'échanges sur ses pratiques, Magali dit avoir rappelé la synthèse et l'avoir affinée par des échanges avec les professeures des écoles formées lors de la deuxième séance de la constellation sous la forme suivante : « Penser la continuité GS-CP avec la mise en œuvre d'un enseignement progressif et structuré en résolution de problèmes ». Cette information a conduit à de nombreux échanges, les différents collectifs considérant qu'avec cette dernière formulation et sa focalisation sur la continuité GS-CP, Magali avait perdu les éléments par rapport à la synthèse : l'implication des autres niveaux TPS-PS-MS et la place de la trace écrite.

Une réflexion s'est alors engagée entre RMC sur une proposition de reformulation. Le groupe a abouti à la formulation suivante : « Penser la programmation en résolution de problèmes d'une année sur l'autre, quelles situations de références et quelles traces écrites ? ».

3 Un temps d'observation dans la constellation de Sophie

Sophie enseigne depuis 25 ans. Elle est formatrice depuis 12 ans et référente depuis quatre ans. La constellation qu'elle anime et que nous décrivons s'est réunie en décembre 2023. Elle s'adresse à six enseignantes de cycle 2 (élèves de 6 à 9 ans) qui ont déjà travaillé pendant deux jours sur le thème « nombres et numération » et qui ont décidé d'aborder un nouveau thème : « la résolution de problèmes ». Le temps observé par les chercheuses se situe en fin de deuxième journée.

3.1 De l'élaboration d'une carte mentale à la formulation d'une question de la profession

Sophie explicite les attendus aux six enseignantes présentes :

> *« L'idée de ce temps est de faire émerger la question professionnelle sur laquelle on va travailler les deux prochains jours. On va reprendre le même dispositif qu'on a utilisé la première fois. Je vais vous redonner les consignes. On va faire la même chose sachant qu'on a déjà décidé de travailler sur la résolution de problèmes. Toute seule pendant quelques minutes, sur une feuille que je ne relèverai pas, vous aller noter cinq, six mots qui vous viennent à l'esprit quand on parle de résolution de problèmes. Après nous ferons la carte mentale. » (Extrait 1 du dispositif de Sophie)*

Le temps imparti écoulé, Sophie propose alors aux enseignantes de se mettre autour d'une table et demande à une enseignante volontaire d'être secrétaire pour dresser « les branches de la carte mentale construite autour de la résolution de problèmes » (figure 4). Nous avons retranscrit ci-dessous les échanges qui s'ensuivent :

> *« Le premier mot qui m'est venu est schématisation, moi j'ai mis schéma, on tire une flèche : schématiser, schéma, j'ai mis dessin, modèle en barres. Moi cette année je me posais la question de quel schéma choisir. On nous parlait de Vergnaud, maintenant c'est les schémas en barres. Vient ensuite le mot compréhension avec une enseignante qui dit moi j'ai mis vocabulaire, c'est pareil. Moi j'ai mis réflexion, Sophie précise qu'il ne faut pas hésiter à mettre une autre branche. Moi j'ai mis de l'implicite à l'explicite. Je ne sais pas si on est dans la compréhension. Moi j'avais parlé d'abstraction ; pour moi c'est quand tu passes du dessin aux barres au calcul. Sophie intervient : si on ne sait pas s'il faut rassembler les mots, on peut les mettre à part. Dans réflexion, j'ai mis stratégie, moi procédure, modèles de problèmes, types de problèmes, situation de référence. Manipulation ça vous va ? Calcul à part non et phrase réponse. J'avais le mot question mais pour moi il est dans la compréhension. Mobiliser ses connaissances les prérequis. Trace écrite et fréquence. » (Extrait 2 du dispositif de Sophie)*

Une fois les branches de la carte mentale établie, Sophie rappelle que la dernière fois, elles avaient commencé par indiquer les ressources dont elles disposaient pour traiter numération et calcul mais que là, elles vont commencer par évoquer par écrit sur des post-it, trois post-it chacune, les difficultés

supposées des élèves pour résoudre des problèmes ou les difficultés éprouvées pour enseigner la résolution de problèmes. L'idée étant qu'une fois ces difficultés explicitées, il sera possible de décider de la question qui sera travaillée en constellation. Nous retranscrivons ci-dessous le temps d'échanges qui s'ensuit pendant que les enseignantes déposent leurs post-it sur la carte mentale présentée en figure 4 :

> *« J'ai mis difficulté à passer de la manipulation au calcul, difficulté à ne pas se lancer trop vite dans les calculs, difficulté à trouver le bon calcul, vocabulaire peu adapté, j'ai mis certains mots, manque de logique, réfléchir seul, difficulté à les mettre en action. Au bout du 50e problème ils n'arrivent pas à s'impliquer. Comment prendre un groupe d'élèves en difficulté alors que d'autres ne vont pas y arriver tout seul ? Le choix du schéma, on leur impose ou ils font ce qu'ils veulent ? Pas un petit bonhomme, s'ils font des détails, ils ne s'engagent pas. Qu'est-ce qu'on choisit dans la trace écrite ? Un problème fait par un élève ? Est-ce qu'on reste sur la même catégorie de problèmes ou est-ce qu'on change ? Quelle progression ? » (Extrait 3 du dispositif de Sophie)*

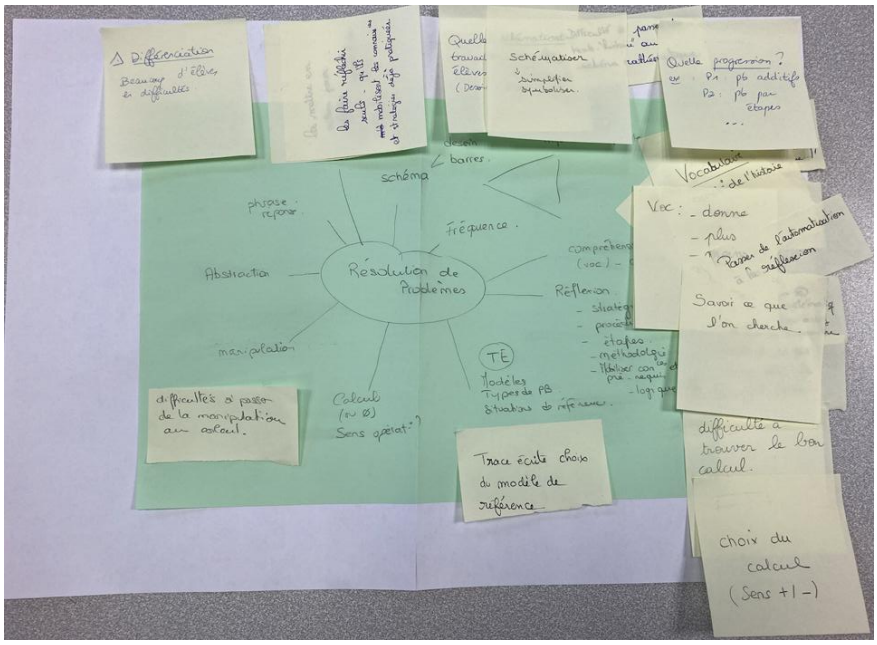


Figure 4 : carte mentale en lien avec la résolution de problèmes dans la constellation de Sophie

3.2 De la carte mentale à l'élaboration d'une question professionnelle

Cette carte mentale réalisée (figure 2), Sophie demande alors d'essayer à partir de tout cela de trouver une question à laquelle on va chercher à répondre ensemble. Ci-dessous nous présentons la transcription de ce temps d'échanges :

> *« Comment on fait pour qu'un enfant soit motivé ? On a des billes pour favoriser la compréhension mais pas l'engagement. Mais ce problème de l'engagement est-t-il propre à la résolution de problèmes ? Est-ce que partir sur un schéma en barres est obligatoire ou est-ce que ce n'est pas utile pour certains ? Être obligé de dire là il y a le tout, la partie. Beaucoup ont déjà compris quand ils ont la notion de la quantité qu'il faut faire une addition. Quelle schématisation travailler avec les élèves ? Comment travailler la schématisation ou la modélisation du problème ? C'est pas mal, quelle représentation du problème ? Est-ce un dessin, une représentation en barres, un calcul ? Chaque élève pense différemment. Il y a l'idée de la différentiation. Est-ce qu'on fait toutes les manières de représenter ? Bravo Merci, on partira de cela. Moi j'essayerai qu'on aborde toutes les questions posées. Si vous avez du matériel, des traces d'élèves, venez avec. On partagera, vous avez des réponses, des façons de faire qui répondent déjà à des questions. Merci beaucoup. Il est 16h15. Je plis et je garde votre carte mentale. » (Extrait 4 du dispositif de Sophie)*

Pour finir, la question de la profession est écrite au dos de la carte mentale par une enseignante : « Comment travailler la modélisation du problème ? Quelles représentations ? »

3.3 Une analyse du dispositif

Le dispositif en constellation pensé par Sophie[9] avec ses consignes précises, son temps imparti et limité à une durée de trente minutes permet selon les deux chercheuses et les référents réunis en collectif de laisser la parole aux formés grâce à une alternance de temps de réflexion individuelle et d'échanges oraux. L'ambition du référent est d'arriver à élaborer pas à pas une synthèse des représentations spontanées des formés sur la résolution de problèmes, sur les difficultés des élèves, sur leurs propres difficultés à enseigner ce domaine transversal des mathématiques. Le fait d'écrire des mots, de dresser des branches, de placer des post-it renforce l'idée d'agir ensemble pour trouver une question qui fait consensus. Cette question commune choisie par les formés traduit bien la volonté de tous de travailler entre autres sur la modélisation.

IV - PREMIÈRES CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La recherche en cours et les analyses se poursuivent au moins jusqu'à fin 2024. Les conclusions apportées ci-dessous ne peuvent donc être que partielles et seront développées ultérieurement. Une perspective de prolongement de la formation associée à la recherche est envisagée.

1 Premières conclusions en lien avec la question de la profession

L'intégralité des transcriptions dont nous disposons montre que l'expression *problématique* a été abandonnée par tous les référents une fois que les chercheuses ont présenté le concept de *question de la profession* introduit par Chevallard et Cirade (2009). Elle a pu être remplacée par *question professionnelle* lors des échanges en constellation.

Les dispositifs déclarés et observés pour faire émerger cette question en constellation montrent alors deux options : soit le référent, à l'instar de Magali, engage-les formés à formuler des questions individuelles puis prend en charge la synthèse pour arriver à l'élaboration d'une question commune ; soit le référent, à l'instar de Sophie, cherche à amener les formés à co-construire directement cette question *via* l'élaboration d'une carte mentale. Dans les deux cas, l'objectif visé est d'arriver à formuler une question de la profession qui fait consensus car, de cette question commune, peuvent venir de chacun des formés et du référent des éléments de réponses. En ce sens, l'esprit du plan mathématiques n'est pas galvaudé : il s'agit de proposer des formations pour mutualiser les pratiques et les enrichir.

2 Premières conclusions sur l'évolution des pratiques des référents

Malgré une culture commune basée en particulier sur des temps de formation nationaux et académiques, cette recherche a mis en avant des pratiques différentes des référents engagés et en particulier des modalités différentes pour faire émerger les besoins des enseignants comme demandé dans le *vademecum* et pour aboutir au contenu de la formation. Ces modalités laissent un choix plus ou moins ouvert aux professeurs formés. Elles reposent en partie sur le ressenti plus ou moins développé d'expertise des référents et sur leur capacité ressentie à mener une formation en constellation.

Sur les deux années de recherche-formation, les échanges au sein des différents collectifs (référents, référents et chercheuses) ont contribué à une évolution des pratiques des référents. Si on prend le cas de Magali, lors de son tout premier entretien, elle disait orienter le choix du thème de la formation vers la résolution de problèmes pour déployer la formation nationale dispensée sur le sujet en lien avec la représentation en barres. Pour faire émerger les besoins des équipes, elle ne disposait pas de méthode particulière et disait s'appuyer sur une discussion, avec des échanges sur les besoins et les difficultés des

[9] Plus exactement Sophie et Sonia car ces deux référentes ont pour habitude de travailler ensemble pour concevoir leurs formations en constellation.

enseignants. Elle disait déjà « basculer sur la question par rapport à ce constat de terrain, sur une des difficultés… ».

Contrairement à Magali, on constate que Sophie avait déjà une stratégie tournée vers l'élaboration d'une carte mentale pour enrôler le groupe à s'intéresser à un sujet d'étude. Et pour « couvrir » ce sujet d'étude, elle commençait par recenser l'ensemble des ressources dont disposait chaque formé. A la suite de la recherche, la référente semble moins dans une démarche descendante. Elle cherche davantage à mutualiser les pratiques pour répondre à la question posée.

3 Perspectives

Le travail engagé dans cette recherche participative nous a permis d'exploiter le concept de la question de la profession introduit par Chevallard et Cirade (2009) dans le cadre des formations du plan mathématiques. Il devrait se prolonger *via* une nouvelle formation à destination d'autres référents mathématiques de circonscription en 2024-2025. Nous cherchons alors dans le domaine de la résolution de problèmes à savoir quelles « solutions » apportent les formés et le référent et comment s'élabore, à plusieurs, une réponse la plus adaptée possible à un champ varié de questions de la profession.

V - BIBLIOGRAPHIE

Butlen, D. (2017). Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des professeurs des écoles en mathématiques. *Recherches en didactiques 2017/2*, pp. 25-40. https://www.cairn.info/revue-recherches-en-didactiques-2017-2-page-25.htm

Bucheton, D. et Soulé, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées, *Education et Didactique*, pp. 29-48. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.543

Chevallard, Y. et Cirade G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et Formation 60 | 2009*, pp. 51-62. https://doi.org/10.4000/rechercheformation.584

Cirade G. (2012). La formation des professeurs : entre analyse de praxéologies professionnelles et étude de problèmes de la profession. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 GT2*, pp. 314-323. https://emf.unige.ch/files/6314/5320/1487/EMF2012GT2CIRADE.pdf

Guille-Biel Winder C., Petitfour E. Masselot P. et Girmens Y. (2015). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT2*, pp. 159-172. https://emf.unige.ch/files/5714/6400/8258/EMF2015GT2GUILLEBIELLEWINDER.pdf

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Université Paris-Diderot - Paris VII. https://theses.hal.science/tel-00957166/document

Marcel, J.-F. (2019). Intervention, participation et évaluation dans la recherche en éducation. *La Revue LEeE, 1.* https://doi.org/10.48325/rleee.001.01

Rinaldi, A.-M., Bayle, S., Gastal, S. (2023). Représenter et modéliser autour du calcul sous vingt : quels enjeux pour l'enseignement et pour la formation ? *Actes du 48e Colloque de la COPIRELEM* (149-166) Toulouse, 14-16 juin 2022. Paris : ARPEME. https://www.copirelem.fr/wordpress/wp-content/uploads/2023/06/ACTES-TOULOUSE-Num-de2s51.pdf

Villani, C. et Torrossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. http://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html

OÙ EST LE UN ? UNE ACTIVITÉ D'HOMOLOGIE POUR REVISITER LES NOMBRES RATIONNELS ET LA DROITE GRADUÉE

Pierre ESCLAFIT
Doctorant en didactique des mathématiques, LIG, CNRS, Université Grenoble Alpes
IREM de Grenoble
pierre.esclafit@univ-grenoble-alpes.fr

Alexandra BOURGEOIS
Professeure de mathématiques, Collège le Clos Jouvin, Jarrie
IREM de Grenoble
alexandra.bourgeois1@univ-grenoble-alpes.fr

Fanny ESTÉOULE
Enseignante de mathématiques et didactique des mathématiques, INSPE Grenoble
IREM de Grenoble
fanny.esteoule@univ-grenoble-alpes.fr

Sophie TÉROUANNE
Enseignante de mathématiques et didactique des mathématiques, INSPE Grenoble
IREM de Grenoble
sophie.terouanne@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé
Le groupe « Le nombre au cycle 3 » de l'IREMI[1] de Grenoble élabore une macro-ingénierie didactique au sens de Artigue (1988) pour l'apprentissage des fractions. Les ressources produites s'articulent autour de plusieurs axes dont un concerne la droite graduée comme registre privilégié de représentations des nombres rationnels (Adjiage et Pluvinage, 2000). Dans le souci de travailler la droite graduée en tant qu'objet pertinent pour le développement de connaissances sur les nombres rationnels, des activités de graduation et de placement de nombres sont étudiées et testées comme celle de placer l'origine (Cerclé *et al.*, 2020). Le groupe étant formé de plusieurs enseignants en Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation (INSPE), un dispositif a été testé dans le cadre de la formation initiale en master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (MEEF), avec des objectifs différents, afin de tenir compte de la diversité du public étudiant en formation de Professeurs des Écoles (PE). Il s'agit d'une activité en plein air dont la consigne est « Placer 0 et 1 exactement au bon endroit ». Dans ce texte, nous proposons d'analyser comment le vécu d'une telle activité peut donner aux étudiants de master MEEF de nouvelles clés de compréhension des objets « fractions » et « droite graduée ».

L'activité « Mais où est le un ? » est issue d'un travail du groupe « Le nombre au cycle 3 » de l'IREMI de Grenoble. Ce groupe existe depuis quatre ans, et ses actuels membres ont différents profils[2] : enseignants à l'INSPE, professeur de mathématiques du second degré, professeur des écoles et enseignants chercheurs.

Sa création a fait suite à une commande du pôle Pégase (pôle de formation des enseignants et recherche en éducation) porté par l'Université Grenoble Alpes et de nombreux partenaires institutionnels. Le

[1] Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques et de l'Informatique.

[2] En plus des quatre auteurs, ont participé à ce groupe : Danielly Kaspary, Grégoire Charlot et Sophie Lopez.

pôle Pégase, lauréat du PIA3[3] en 2020 a pour ambition de transformer les pratiques enseignantes de la maternelle au lycée pour renforcer l'apprentissage des savoirs fondamentaux et contribuer ainsi à réduire les inégalités sociales, territoriales et cognitives.

Dans ce cadre, sa mission est d'élaborer une macro ingénierie didactique au sens de Artigue (1988) pour l'apprentissage des nombres rationnels. L'ambition est donc de construire une programmation complète sur le cycle 3[4], en concevant les activités et séquences qui s'y trouvent. Cette conception s'accompagne de la formation d'enseignants et de conseillers pédagogiques sur ces ressources. Par ailleurs, les différentes rencontres lors des formations aux ressources favorisent une démarche collaborative entre les enseignants qui mettent en œuvre les séquences et avec les concepteurs du groupe IREMI.

L'étude a débuté en 2023 – 2024 avec la formation d'environ 25 enseignants. L'année 2024 – 2025 est consacrée au test du dispositif complet. Enfin, dès la rentrée 2025, l'ingénierie didactique sera mise en place dans 50 classes de CM1. Les classes concernées poursuivront l'année suivante avec des ressources adaptées au CM2.

Le choix de l'apprentissage des « nouveaux nombres » (fractions et décimaux) au cycle 3 est lié à un véritable enjeu. Comme le montrent les résultats aux évaluations nationales d'entrée en sixième des années 2020, 2021 et 2022 ou encore la note d'alerte du CSEN[5] de septembre 2023 (CSEN, 2023), cet apprentissage est difficile et ces notions restent mal comprises et non maîtrisées en fin de cycle 3 pour de nombreux élèves. De façon plus locale, des évaluations d'étudiants en M1 MEEF PE montrent que ces fragilités sur la connaissance et la compréhension des nombres rationnels sont encore présentes pour une partie non négligeable de ce public hétérogène.

Cet apprentissage rejoint bien les fondamentaux visés par le projet Pégase, et les choix faits pour son enseignement sont un levier intéressant à explorer.

I - PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ

En amont de la construction des ressources, le groupe IREMI a réalisé un travail didactique qui a permis de dégager trois axes structurants pour la production des séquences :

- La résolution de problèmes ;
- La pluralité des représentations ;
- La droite graduée.

Dans ce texte, nous développons particulièrement ce troisième axe. Concernant la droite graduée, le travail du groupe s'est basé sur les deux hypothèses suivantes :

- La droite graduée peut être utilisée comme un registre privilégié pour la représentation des nombres rationnels ;
- La droite graduée peut être vue comme un objet pertinent pour le développement des connaissances sur les nombres rationnels.

Ainsi depuis le début du projet, plusieurs activités de placement de nombres sont étudiées et testées. L'activité « Mais où est le un ? » est une de ces activités, elle représente donc une toute petite partie de l'ingénierie didactique envisagée. Elle reste pour autant, une activité fondatrice et importante du travail engagé par le groupe « Le nombre au cycle 3 », et a été déclinée dans différentes modalités de mise en œuvre et pour des publics divers.

[3] Troisième Programme d'investissements d'avenir du gouvernement.

[4] Classes de CM1 et CM2 à la fin de l'enseignement primaire et classe de 6e au début de l'enseignement secondaire. Enfants de 9 ans à 12 ans,

[5] Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale

La consigne est cependant toujours restée la même : à partir d'une droite repérée par deux points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$: « Placer 0 et 1 exactement au bon endroit [sur cette droite] ».

À partir de cette consigne, nous avons d'abord développé une activité papier qui a été testée en classe de CM2 et en 6e.



Figure 1 : Version papier de l'activité

Par la suite, en conservant la même consigne, nous avons proposé cette activité dans un format « plein air ». Nous avons expérimenté sur des publics variés : des élèves de 6e, des étudiants de master MEEF et des enseignants en formation continue.

Dans cette communication, nous décrivons la mise en œuvre de cette activité avec des étudiants en première année de Master MEEF PE, lors d'une journée d'intégration puis en travaux dirigés de renforcement en mathématiques, sous la modalité « plein air ». C'est ce dispositif que nous allons décrire et analyser, afin de dégager en quoi le vécu d'une telle activité peut donner aux étudiants de Master MEEF PE de nouvelles clés de compréhension des objets « fractions » et « droite graduée ».

Lors de la journée d'intégration des étudiants elle a été proposée à deux groupes. Un des objectifs principaux de cette activité était de leur faire vivre les mathématiques autrement. Puis elle a été proposée sous la même forme à deux autres groupes de TD avec un public restreint et ciblé : des étudiants suivant un module de renforcement en mathématiques. La présentation du vécu de cette activité correspond donc au déroulement de quatre groupes de 10 à 15 étudiants de M1 MEEF PE.

L'activité s'est déroulée en plein air sur un espace plat et dégagé d'environ 3 mètres sur 5. Il est important de choisir un espace dégagé, idéalement non carrelé et où il est possible de faire des marquages au sol à la craie. Une cour d'école est un espace idéal. Après avoir désigné deux étudiants, l'enseignant les place à environ 3 mètres l'un de l'autre et indique à l'ensemble du groupe que dorénavant, et pour la durée de l'activité, ces deux étudiants représentent les points d'abscisse respectivement $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$. La consigne suivante est donnée à l'ensemble du groupe : « Placer 0 et 1 exactement au bon endroit ». Ils doivent alors, sur une droite « imaginaire » créée par la position des deux étudiants, placer deux nouveaux points d'abscisses respectives 0 et 1. Afin de matérialiser ces points les étudiants désignés ont reçu une plaquette correspondant à l'abscisse du point qu'il représente et nous donnons à l'ensemble du groupe les plaquettes correspondant aux points d'abscisse 0 et 1.

En fonction de ses intentions didactiques, l'enseignant peut introduire dans le milieu le matériel suivant :

- Des plots pour identifier des repères au sol : notamment pour permettre aux deux étudiants identifiés comme $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$ de se déplacer.
- Des craies, également pour placer des repères mais aussi pour tracer des lignes.
- Une corde qui peut permettre un report et un partage de longueur.
- Un décamètre qui permet l'introduction de stratégies de mesurage.



Figure 2 : Matériel nécessaire pour l'activité en format « plein air »

Enfin lorsque les étudiants ont terminé et souhaitent proposer une solution, l'enseignant introduit un matériel de vérification : l'élastique vérificateur. Il s'agit d'un grand élastique qui a été étalonné lorsqu'il n'est pas étiré. L'élastique non étiré correspond à la longueur minimale que nous pouvons utiliser entre les étudiants lors de la mise en place de l'activité (sinon, la vérification ne sera pas possible). Pour valider une solution du problème, l'étudiant qui représente 0 attrape le 0 sur l'élastique, l'étudiant qui représente $\frac{7}{4}$ attrape le $\frac{7}{4}$ sur l'élastique. Après avoir rejoint leurs positions en étirant l'élastique, on peut vérifier si la marque du $\frac{1}{4}$ est bien en face de l'étudiant qui représente $\frac{1}{4}$ et de même pour la marque du 1.

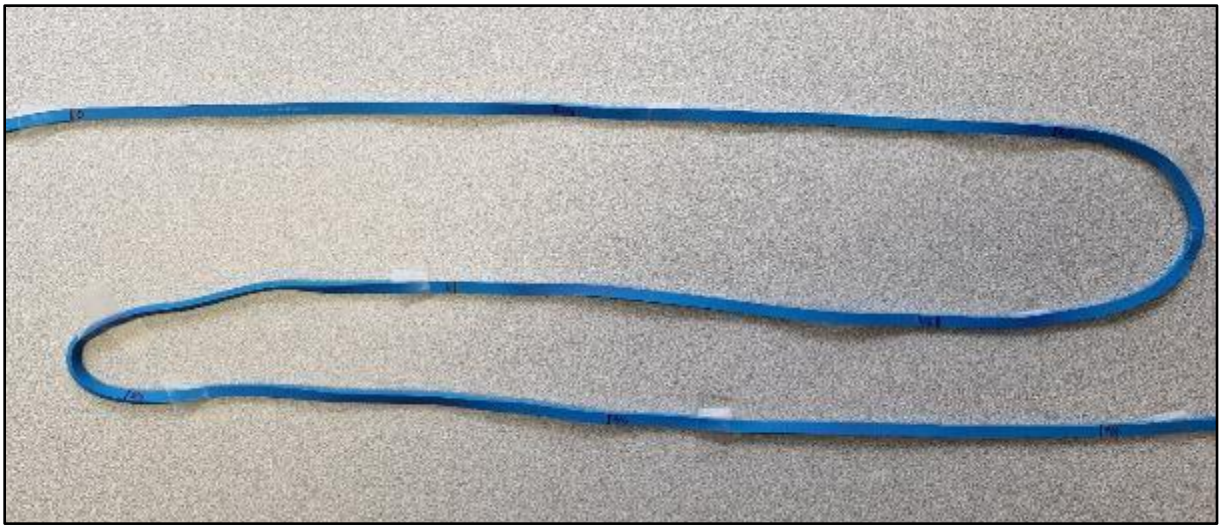


Figure 3 : Élastique Vérificateur.



Figure 4 : Élastique Vérificateur – Vue zoomée.

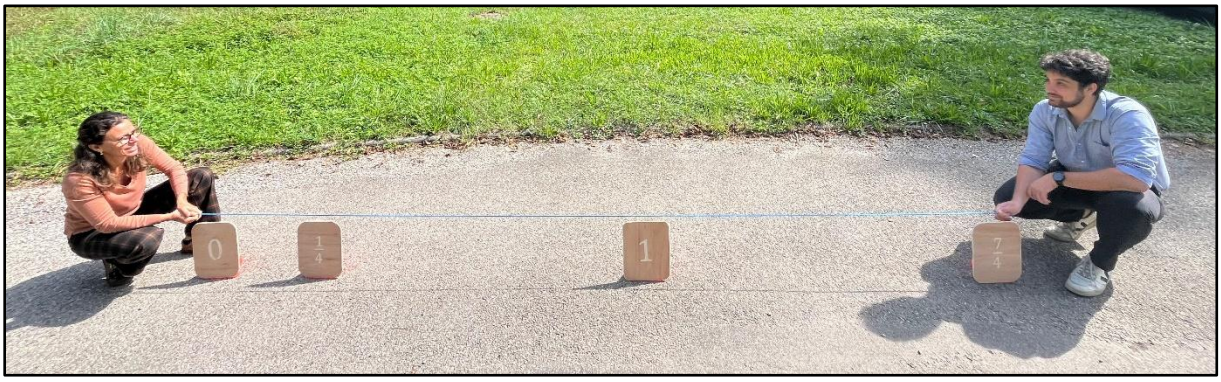


Figure 5 : Exemple de vérification après mise en œuvre de l'activité

II - ANALYSE DIDACTIQUE PRÉALABLE DE L'ACTIVITÉ

Le paragraphe suivant présente une analyse didactique de l'activité, du point de vue des connaissances mathématiques en jeu.

1 Connaissances en jeu concernant la droite graduée

1.1 Droite repérée et droite graduée

La principale connaissance sur laquelle repose l'activité est la propriété suivante :

> Étant donnés deux points A et B distincts d'une droite D et deux nombres réels a et b distincts, il existe un unique repère affine de la droite D tel que A et B y aient respectivement comme abscisses a et b.

Autrement dit : la donnée des couples $(A, a), (B, b)$ fixe de manière unique l'origine O d'abscisse 0 et le point I d'abscisse 1. Notons en particulier l'unicité de l'unité de longueur u telle que la longueur AB soit de mesure $|b - a|\ u$. Un représentant de cette longueur unité est le segment $[OI]$.

Nous renversons ainsi le point de vue en partant de la donnée de deux couples (nombre, point) $\{(a, A), (b, B)\}$, avec $a \neq b$ et $A \neq B$. Cette donnée fixant le repère, elle définit par l'application $point \mapsto abscisse$ une bijection entre la droite (AB) et l'ensemble des réels. Elle rend possible le repérage de tout point sur la droite.

Sur une droite munie d'un repère on appellera *graduation de pas* k l'ensemble des points dont l'abscisse est un multiple (entier) de k.

Dans le cadre de l'activité en plein air, les points A et B sont matérialisés par les positionnements de deux personnes, et la droite qui passe par ces deux points est imaginée ou matérialisée (par une ficelle ou un traçage au sol). Les nombres a et b sont des nombres rationnels fixés par l'animateur de l'activité (dans notre cas : $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$) et l'objectif est de retrouver le repère (O, I).

1.2 Points et graduations

Étant donnée une droite repérée, il est possible de définir une infinité de graduations. Le choix d'une graduation revient au choix d'un point d'abscisse $k > 0$. On dira qu'une graduation *attrape* un nombre x si x est un multiple (entier) de k.

La graduation de pas k attrapant un ensemble de points est dite optimale s'il n'existe pas de graduation de pas multiple de k attrapant ce même ensemble de points.

Ici, le repère étant fixé par la donnée des points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$, la graduation optimale attrapant ces deux points ainsi que le point d'abscisse 1 est la graduation de pas égal à $\frac{1}{4}$. Notons que l'origine O est, par définition, attrapée par toute graduation.

Les graduations en $\frac{1}{8}$, en $\frac{1}{100}$, ou toute subdivision de la graduation $\frac{1}{4}$, attrapent également cet ensemble de points sans être optimales.

1.3 Ordre, écarts numériques et longueurs de segments

Étant donné trois points M, N et P d'abscisses respectives m, n et p, si $m < n < p$ alors N appartient à $[MP]$.

Étant donné le segment $[AB]$ avec A d'abscisse $\frac{1}{4}$ et B d'abscisse $\frac{7}{4}$, puisque 1 est la moyenne arithmétique des nombres $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$, le point d'abscisse 1 est le milieu du segment $[AB]$. En effet, les égalités d'écarts entre les nombres sont représentées par des égalités de distances entre les points associés.

2 Connaissances en jeu concernant les nombres

Les nombres choisis pour cette activité sont des nombres décimaux présentés sous forme de fraction.

Remarquer que cette représentation des nombres oriente plus vers des savoirs concernant les fractions que si l'on avait présenté les nombres sous leur forme décimale : $0{,}25$ et $1{,}75$.

Aussi, et selon les stratégies développées, les connaissances suivantes peuvent être mobilisées :

- Le nombre $\frac{1}{4}$ est le nombre a qui vérifie l'identité : $4 \times a = 1$;
- Le nombre $\frac{7}{4}$ est égal à 7 fois un quart, ou le résultat de l'itération de la somme à 7 termes $\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}$;
- L'écart entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$ est de $\frac{6}{4}$;
- Le sixième de $\frac{6}{4}$ est égal à $\frac{1}{4}$;
- L'écart entre $\frac{1}{4}$ et 1 est égal à l'écart entre 1 et $\frac{7}{4}$;
- L'écart entre $\frac{1}{4}$ et 1 est égal à $\frac{3}{4}$ et le tiers de $\frac{3}{4}$ est égal à $\frac{1}{4}$;
- L'écart entre 0 et $\frac{1}{4}$ est égal à $\frac{1}{4}$.

3 Variables didactiques de l'activité

Nous identifions trois variables didactiques principales (Brousseau, 1998) en ce qui concerne les données de cette activité de construction du repère d'une droite affine à partir de deux points d'abscisses fixées :

- L'accessibilité directe ou non à la longueur unité ;
- La donnée ou non de la longueur correspondant au pas de graduation optimale ;
- Le format des nombres donnés (sous la forme $x \times PAS$ ou non).

3.1 Accessibilité directe à la longueur unité

Lorsque la longueur unité est accessible, on peut, à partir de celle-là, atteindre les longueurs de type $\frac{1}{n}$ en partageant cette longueur unité en n parties égales.

Par exemple : en donnant les points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{4}$; la longueur unité est alors présente de sorte que le pas de longueur $\frac{1}{4}$ peut s'obtenir en partageant cette longueur en 4 parties égales.

3.2 Donnée de la longueur correspondant au pas de graduation optimale

La donnée de la longueur correspondant au pas de graduation optimale permet d'effectuer la tâche sans effectuer aucun partage de longueur, mais par simples reports.

Par exemple : en donnant les points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; la longueur correspondant au pas de la graduation en $\frac{1}{4}$ s'obtient facilement et on peut donc placer les nombres $0 = \frac{0}{4}$, $1 = \frac{4}{4}$ en graduant en quarts par report de cette longueur.

3.3 Format des nombres donnés

Lorsque les nombres sont donnés dans un format homogène et faisant apparaître le pas de la graduation optimale, le recours à la procédure de graduation est favorisé, et il n'y a pas de traitement additionnel correspondant à des conversions fractionnaires.

Par exemple : en donnant les points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{4}$; il y a une étape de conversion ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) afin de calculer l'écart entre les nombres.

3.4 Choix des valeurs de variables

Dans le cas de l'activité présentée, les valeurs choisies sont les suivantes :

La longueur unité est directement accessible	La longueur correspondant au pas est donnée	Les nombres donnés sont au format $x \times pas$
Non	**Non**	**Oui**

Tableau 1. Choix des valeurs de variables didactiques

Ni la longueur unité ni la longueur correspondant au pas optimal ne sont données, puisque l'écart entre les nombres donnés est de $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$. Cela entraîne la nécessité d'opérations non triviales (c'est-à-dire ne se ramenant pas à la définition des n −ièmes) en ce qui concerne les nombres rationnels. En effet, il est nécessaire de partager la longueur du segment fourni (avec du matériel, par mesurage et calcul, …) pour pouvoir déterminer la position de l'origine.

Notons que le fait de devoir partager en 6 pour obtenir un quart est un obstacle à surmonter pour des élèves pour lesquels les n-ièmes ont été présentés comme le résultat d'un partage (d'une unité) en n parties égales.

Par ailleurs, notre choix est de ne pas ajouter la contrainte d'un traitement mettant en jeu des équivalences fractionnaires en présentant les deux nombres sous un même format $\frac{a}{4}$.

III - RETOUR SUR LA MISE EN PLACE DE L'ACTIVITÉ EN MASTER MEEF

Cette activité de recherche est proposée de façon collective et engage l'ensemble du groupe d'étudiants à construire une stratégie pour placer 0 et 1 en fonction de la position des deux premières personnes. L'engagement et la compréhension du problème par les étudiants s'observent à travers leurs actions et le vocabulaire mathématique qu'ils mobilisent.

Les deux procédures qui découlent de l'analyse didactique précédente se retrouvent dans les interactions des étudiants, à savoir :

- On peut chercher à construire une graduation ;
- On peut étudier les longueurs des segments en jeu.

Il est cependant à noter que les débats et les réajustements au fil de leur réflexion les amènent parfois à utiliser des éléments se rapportant aux deux procédures.

Après quelques minutes d'une réflexion individuelle, on remarque que les étudiants ont tous cherché à faire un premier placement approximatif. Deux étudiants ont généralement pris les plaquettes 0 et 1 et se sont placés sur la droite créée par les deux plaquettes $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$. Puis différentes procédures sont proposées

au sein des groupes pour gagner en précision. C'est à ce moment que commence la phase de débat et de négociations, notamment en partageant des connaissances sur lesquelles reposent leurs différentes propositions.

1 Chercher à construire une graduation

Une illustration de cette procédure est l'exemple d'un groupe d'étudiants qui choisit de continuer à être des représentants de nombres sur cette droite. Les deux premiers étudiants sont restés à leur place avec leurs pancartes $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$, d'autres étudiants viennent physiquement représenter les $\frac{n}{4}$ manquants entre $\frac{0}{4}$ et $\frac{7}{4}$. Ils disent « ...nous on est les petits pics... » et s'associent aux nombres : « ...nous on est les quarts... », ils réclament « ...fais nous les petits traits... ». Cela peut s'interpréter d'une part comme la référence à l'ostensif graphique du trait de graduation sur la droite, et d'autre part comme l'incarnation des nombres correspondant à la position qu'ils occupent.

Les nombres 1 et 0 sont associés à leurs écritures respectives $\frac{4}{4}$ et $\frac{0}{4}$. Ils sont ainsi placés de manière approximative seulement. Un étudiant s'exprime au sujet de la position choisie des nombres « ...dans la distance c'est plutôt pas mal : 0,25 là [entre 0 et $\frac{1}{4}$]... » et ne réalise qu'ensuite que cet écart se retrouve en fait entre chaque graduation.

Le groupe cherche ensuite à obtenir les positions précises de chaque nombre incarné. Suite à l'identification de l'égalité $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}$, l'introduction du décamètre les amène à mesurer la distance entre les étudiants représentant $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$, afin de la diviser par 6 et d'obtenir la longueur du pas choisi ($\frac{1}{4}$). Ils auraient pu utiliser la corde comme autre technique de partage permettant de finaliser leur construction de graduation.

2 Étudier les longueurs des segments en jeu

Il est aussi possible de raisonner sur les longueurs des segments en jeu, sans avoir recours à la graduation, c'est-à-dire sans chercher à construire la graduation « complète ». C'est ce qu'a réalisé un autre groupe qui s'est directement emparé du décamètre afin de mesurer la distance entre l'étudiant incarnant $\frac{1}{4}$ et l'étudiant incarnant $\frac{7}{4}$. Suite à l'identification de l'égalité $1-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-1$, leur raisonnement se base sur l'égalité des longueurs correspondantes qui leur permet de placer le 1 « ...exactement au milieu [entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$] ...».

Cependant, ce placement, une fois réalisé, déclenche étonnement et désaccord : « ...le 1 il n'est pas là... pile poil entre les deux... 1 c'est la moitié de 2... le 1 on ne sait pas exactement si il est là... ». La difficulté à justifier leurs choix se traduit notamment par l'emploi d'un vocabulaire imprécis, voire incorrect quand ils parlent du « centre » pour le milieu du segment ou pour désigner la moitié d'un nombre. D'ailleurs l'essentiel de leurs échanges s'appuiera sur du vocabulaire issu du registre géométrique et très peu sur du vocabulaire associé aux nombres. Ils réussiront tout de même à valider le choix de la position du 1.

Ensuite ils se mettent d'accord pour diviser en trois la longueur entre les points d'abscisses $\frac{1}{4}$ et 1, afin de la reporter à partir de la position du $\frac{1}{4}$ pour placer 0.

3 Validation de la solution

Quel que soit le groupe et la stratégie mise en œuvre, il arrive le moment de valider leur solution. Pour cela nous introduisons l'élastique vérificateur, que les étudiants utilisent selon la procédure décrite dans la partie sur la présentation de l'activité. Ils vérifient ainsi les positions des nombres et donc valident la réussite de l'exercice. Nous constatons que la rétroaction par le matériel génère une vraie approbation

du résultat par l'ensemble des étudiants, certains étant même surpris : « ...ah ça marche... ». Cela nous laisse penser que cette étape enrichit le sens qu'ils donnent aux objets mathématiques de l'environnement technologico-théorique de la droite graduée (Térouanne, Kaspary et Esclafit, à paraitre) et leur donne aussi l'occasion d'expérimenter la puissance de la rétroaction par le matériel lors de la validation.

Cette situation vécue par les étudiants, futurs professeurs des écoles, leur permet ainsi de retravailler les notions de « fraction » et de « droite graduée », dans un contexte original. Elle favorise une remise en question de leurs conceptions – parfois erronées ou juste imprécises – et est propice à une analyse active. Les différents intérêts de cette activité seront approfondis dans la partie suivante.

IV - INTÉRÊTS DE L'ACTIVITÉ

Cette dernière section présente les éléments qui nous semblent être constitutifs de la robustesse de cette activité. En effet, le fait que cette activité puisse être intéressante avec des publics très différents (élèves de CM2, de 6e, étudiants de master, enseignants en formation continue) peut être questionnant. Nous interrogerons notamment le type de tâches (Bosch et Chevallard, 1999) dont il est question.

1 Les nombres et leurs représentations

Cette tâche, liée aux fractions, présente une certaine originalité par rapports aux tâches répandues dans l'institution scolaire. Voici un exemple de tâche issue des évaluations nationales d'entrée en sixième :

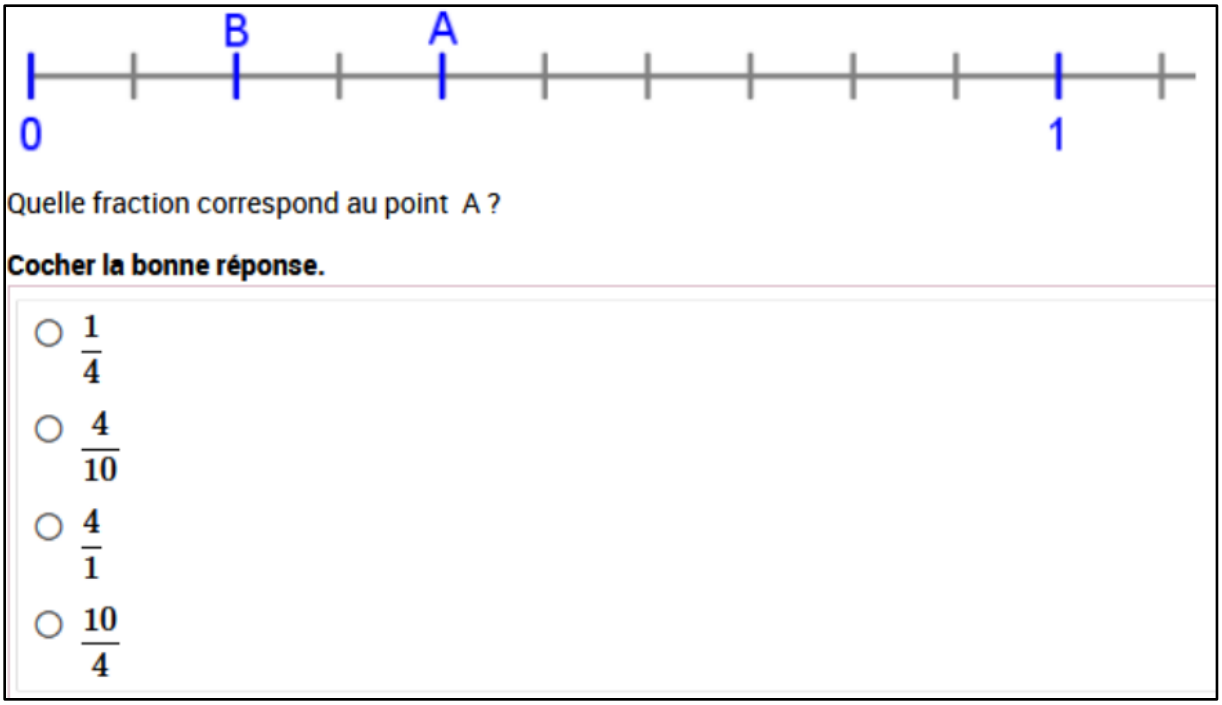


Figure 6 : Extrait des évaluations nationales d'entrée en sixième (2024)

Dans ce type de tâches, la longueur unité est donnée : il faut trouver comment partager cette longueur unité. Le partage naturel correspond au dénominateur de la fraction donnée en réponse à l'exercice.

Dans notre activité, la longueur unité n'est pas donnée, et ne peut donc pas être partagée. En effet, les nombres en jeu sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$. L'écart entre ces deux nombres est $\frac{6}{4}$, de sorte qu'il faut partager la longueur séparant les deux points en 6 pour obtenir une graduation en quarts. Il y a une distinction entre le partage à effectuer : 6 et le dénominateur des fractions en jeu : 4.

Par ailleurs, une autre difficulté liée aux fractions peut survenir : les deux nombres donnés en début d'activité sont des nombres rationnels non entiers, écrits en écriture fractionnaire ($\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$). En opposition avec les deux nombres qu'on demande aux élèves de placer (0 et 1) : deux nombres entiers écrits en écriture décimale. Il s'agit donc de traiter un problème mobilisant des nombres représentés dans des registres différents et potentiellement indépendants pour des élèves de début de cycle 3 : entiers en écriture décimale et rationnels en écriture fractionnaire. Ils doivent donc mobiliser des connaissances liées à l'articulation de ces deux registres d'écriture : $\frac{0}{4} = 0$ et $\frac{4}{4} = 1$.

2 Liée aux fractions ?

2.1 Précision du type de tâches

Nous faisons l'hypothèse que cela est lié au type de tâches associé à l'activité : on demande aux élèves de « graduer une droite ». Ceci pose une difficulté pour deux raisons :

- Comme nous l'avons vu précédemment, ce type de tâches est original au sens de l'institution : il n'est que très peu travaillé.
- D'autre part, ce type de tâches est intrinsèquement plus difficile que celui de la figure 6 : même pour un « élève expert » (au sens où il saurait immédiatement quelle procédure mettre en œuvre), les étapes de résolution sont plus nombreuses.

Nous attirons l'attention sur la différence entre la tâche proposée et celle ci-après dont l'énoncé semble proche :

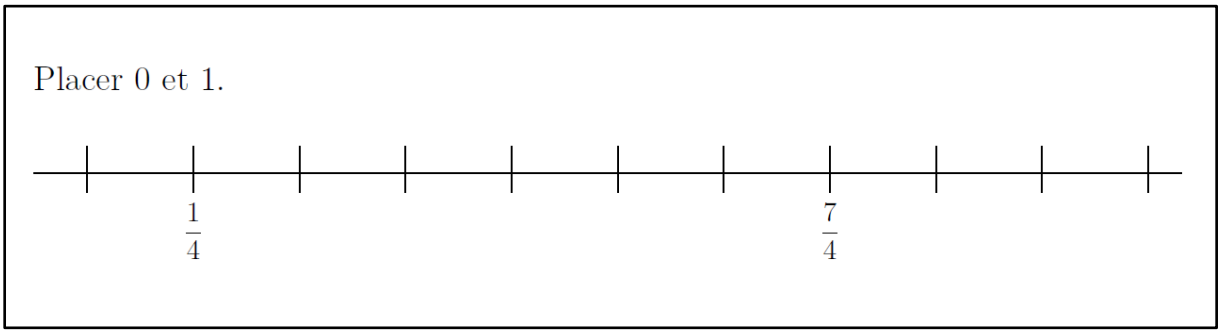


Figure 7 : Modification du type de tâches

En effet, dans la tâche de la figure 7, il s'agit bien de placer les nombres, mais la stratégie consiste à trouver le « pas » de la graduation déjà présente, voire même de simplement vérifier que la graduation est bien faite en quarts. Les équivalences : $\frac{0}{4} = 0$ et $\frac{4}{4} = 1$ peuvent alors être mobilisées a posteriori pour associer les différents registres d'écriture.

2.2 Un travail préalable avec les nombres entiers

L'analyse précédente montre que si elle est proposée au cycle 3, cette activité présente deux difficultés de natures différentes : le fait qu'elle mobilise des nombres rationnels non entiers, et la complexité du type de tâches. Ainsi, la complexité de ce type de tâches ne dépend pas nécessairement des nombres en jeu.

En effet, l'activité ci-dessous présente des stratégies similaires du point de vue de la manipulation de la droite graduée.



Figure 8 : Une tâche similaire avec des nombres entiers

En ce sens, cette activité a nourri notre réflexion et, en amont du travail sur les nouveaux nombres, il nous semble pertinent de travailler autour de cet objet « droite graduée », c'est ainsi que le groupe IREMI a produit une séquence préalable à l'introduction des nouveaux nombres « Placer 9 »[6].

3 Nouvel outil : l'élastique vérificateur

En plus de la réflexion liée à la tâche, le développement de cette activité a conduit à la production d'un nouvel objet : l'élastique vérificateur. L'originalité de cet outil peut s'analyser selon différents axes.

3.1 Répondre à des besoins didactiques et pédagogiques

Le développement de cet outil visait initialement à répondre à un double objectif d'enseignement :

- L'outil permet une auto-validation du problème pour maintenir l'engagement des élèves dans le problème : en effet, le potentiel de dévolution de l'activité étant important, il est important de ne pas désengager les élèves au moment de la correction.
- Il nous semble également important qu'une validation puisse être apportée sans générer une contrainte forte sur la mise en place de l'activité : un outil rigide aurait impliqué que la distance entre les deux étudiants représentant le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{7}{4}$ soit déterminée à l'avance.

3.2 Illustrer une notion mathématique : le repère

Au-delà de la clarté de la consigne et de la facilité de mise en œuvre de l'activité, le fait de ne pas imposer de distance a priori entre les points d'abscisse $\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$ permet d'incarner la notion essentielle de repère, sous-jacente à cette activité. Quel que soit le choix initial de deux couples (point, abscisse), la position associée à chaque nombre est unique. En particulier, il n'y a pas de représentation a priori d'une unité (par un mètre ou un carreau au sol par exemple), mais la longueur unité est ici déduite de la longueur déjà représentée par le repère donné. L'élastique vérificateur, de par son caractère ostensif, met en exergue ce choix, puisqu'on y voit l'unité « s'étirer » de manière à correspondre à la représentation choisie. Ainsi, à travers cet outil, on illustre le fait que l'important n'est pas l'écart entre les nombres en jeu mais la proportion entre ces écarts.

4 Mise en œuvre en formation

Enfin, il nous semble que cette activité est intéressante pour la formation des enseignants.

En effet, elle offre l'occasion d'adopter une stratégie de formation de type homologie et transposition au sens de Kuzniak (2003), ce qui permet le développement des compétences professionnelles des futurs enseignants. Comme nous l'avons vu précédemment, la tâche proposée fait retravailler des notions

[6] https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/le-nombre-au-cycle-3/activite-placer-9--1426418.kjsp?RH=413148517470877

mathématiques qui peuvent être fragiles en début de master chez certains étudiants. La situation est donc jouée avec les étudiants d'une façon très analogue à ce qui peut être fait avec des élèves.

Par la suite, la prise de recul et l'analyse a posteriori de leur vécu permet d'illustrer en formation la notion de variables didactiques principales. Notamment, les étudiants peuvent se questionner sur le matériel à disposition en faisant du lien avec leur propre vécu durant l'activité : est-ce une variable didactique ? Comment les choix sur le matériel impactent la hiérarchie des stratégies mobilisables ?

Finalement, après avoir vécu et analysé l'activité, on peut projeter les étudiants dans le rôle d'enseignants responsables de cette activité : quelle analyse *a priori* en font-ils ? Quels sont les comportements d'élèves attendus ? Quelles erreurs ? La version papier de l'activité peut se prêter à de l'analyse de productions d'élèves.

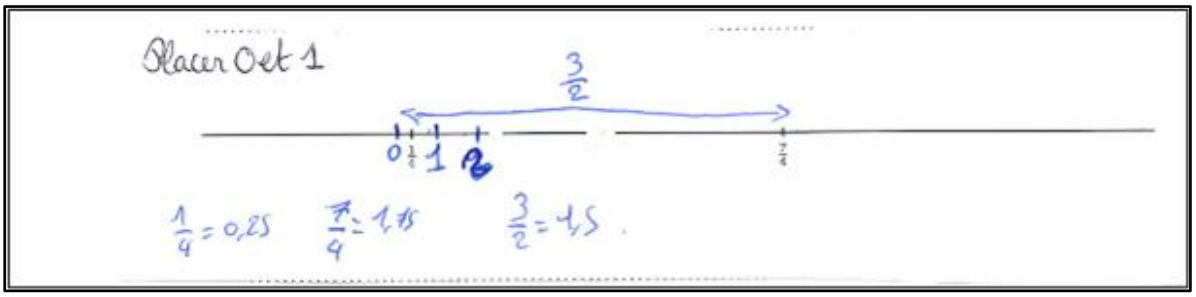


Figure 9 : Copie d'un élève de fin de cycle 3

Dans la copie de la figure 9, l'élève ayant placé de façon erronée 0 et 1, l'enseignante lui a demandé s'il pouvait également placer 2. Ce point a été ajouté a posteriori. On peut questionner les étudiants sur les connaissances présentes chez cet élève et la suite de la remédiation à apporter pour l'amener à remettre en question sa production.

V - CONCLUSION

L'activité « Mais où est le un ? » est issue d'une construction didactique articulant une analyse des types de tâches liés à la droite graduée avec une analyse du choix des nombres donnés et de leur écart. Cette construction en fait une activité robuste, utilisable dans de nombreux contextes : des élèves de cycle 3 aux enseignants en formation continue.

Le choix de la modalité « plein air » propose une façon originale de faire des mathématiques tout en favorisant l'engagement des participants dans le problème. Cette modalité favorise également les échanges entre les participants, les négociations de stratégies et l'expression des questionnements.

Cette activité est également pertinente pour la formation des enseignants. En effet, en plus de permettre de travailler le sujet des nombres rationnels (qui n'est pas toujours évident à l'entrée en master), elle permet de faire se questionner les futurs enseignants sur les choix d'activités, les choix de matériels ainsi que les impacts de ces choix sur les stratégies des élèves.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R. et Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques, 20(1)*, 41–88. https://revue-rdm.com/2000/un-registre-geometrique/

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9(3)*, 281-308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1)*, 77-124.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cerclé, V., Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Gosselin, E., Leberre, J. et Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : Des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel. *Petit x*, *113*, 59-88.

CSEN (éds.) (2023). *Une inquiétante mécompréhension des nombres et surtout des fractions à l'entrée en sixième*. https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_alerte_CSEN_02_V2.pdf

Kuzniak, A. (2003). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM, t. 3* (7-22). ARPEME.

Térouanne, S., Kaspary, D. et Esclafit, P. (à paraitre). Placer 9, pour apprendre la droite graduée. *Grand N*, 115.

LA GRANDEUR « LONGUEUR » AU SERVICE DE L'APPRENTISSAGE DE LA LIGNE NUMÉRIQUE EN GS

Alexandra HOMSI
Conseillère Pédagogique Départementale de Mathématiques (78)
Alexandra.homsi@ac-versailles.fr

Résumé
Cette séquence a été mise en œuvre pour étudier l'impact de l'usage de la grandeur « longueur » sur la compréhension de la ligne numérique chez les élèves de Grande Section. La communication rend compte de situations mises en place dans des classes qui utilisent la grandeur « longueur » afin d'aborder la ligne numérique en s'inspirant des travaux de Margolinas et Wozniak (2012).
En partant d'une situation de comparaison directe travaillée dans une des classes avec le rituel de la « Tour des présents », des situations de résolution de problèmes ont été mises en œuvre auprès des enseignantes de 5 classes de GS en REP + et de leurs élèves : situations de formulation avec éloignement dans l'espace et comparaison indirecte de bandes, puis situations de construction et utilisation d'un objet intermédiaire marqué en utilisant un cube comme l'objet de référence, la règle. Au fur et à mesure de cette progression, le milieu d'apprentissage évolue, influençant ainsi les stratégies que les élèves peuvent adopter.
Les situations sont analysées et évaluées en comparant d'une part l'analyse a priori et l'analyse a posteriori puis en comparant les résultats des élèves avec les résultats des évaluations nationales et académiques d'autre part.
Les résultats des tests effectués tendent à montrer que ces situations contribuent à la compréhension de la ligne numérique par les élèves.

I - INTRODUCTION

Dans le cadre de mes missions de conseillère pédagogique départementale Mission Mathématique, l'éducation nationale m'a demandé d'accompagner cinq enseignantes de GS maternelle de quatre écoles REP+ afin d'améliorer les compétences et la compréhension des élèves de la ligne numérique. C'est pourquoi la séquence suivante a été mise en œuvre en classes dédoublées en Grande Section (GS) sur la circonscription de Mantes 1 (Yvelines)[1].

Cette séquence a été réfléchie en lien avec les résultats des évaluations nationales à l'entrée au CP, indiquant une compréhension incomplète du nombre dans ses aspects ordinal ou cardinal, et en lien avec la notion de mesure. Le contexte s'appuie sur les constats que les élèves reconnaissent les nombres sans lien avec les quantités. Ils ont une connaissance de la ligne numérique de surface sans pouvoir la transposer dans une autre situation. En effet, l'exercice 15 (MEN, 2022a et 2022b) (annexe 1) est proposé aux élèves sans accompagnement didactique particulier proposé aux enseignants. Cette expérimentation vise à amener les enseignants à proposer des situations de recherches à leurs élèves, de manière à contribuer à la compréhension des enjeux de la ligne numérique et installer les bonnes pratiques.

[1] Les séances ont été mises en œuvre dans les classes de Céline Mongin, Sandrine Poignard, Céline Ratiarson, Christine Raybaud, et Cécile Thiam. Merci encore à elles pour la collaboration fructueuse.

II - CONTEXTE

L'enseignement de la ligne numérique en grande section de maternelle (GS) revêt une importance cruciale pour le développement des compétences mathématiques des élèves. Les recherches et les instructions officielles en témoignent. Fayol note que :

> *« L'accès aux représentations linéaires jouerait un rôle dans le développement de la connaissance numérique. Améliorer le passage à la représentation linéaire devrait donc faire progresser en mathématiques » (Fayol, 2012).*

Le document Évaluer pour mieux aider – ÉvalAide (Dehaene et Ziegler, 2018), dispositif scientifique de prévention des difficultés en lecture et en mathématiques, avance l'idée que les nombres forment une ligne orientée de la gauche vers la droite est l'un des concepts les plus fondamentaux et les plus utiles des mathématiques. Le concept de « ligne graduée » facilite la compréhension de l'arithmétique : additionner, c'est se déplacer d'un certain nombre d'unités vers la droite, etc. La correspondance nombre-espace est également fondamentale en géométrie : les nombres servent à mesurer l'espace. Cette idée clé sous-tend l'apprentissage ultérieur de toute une série de concepts mathématiques plus avancés : coordonnées spatiales, nombre négatif, fraction, nombre réel, nombre complexe.

Enfin, le Conseil scientifique de l'éducation nationale (CSEN) dans sa note du Février 2022, n° 5 insiste également sur l'importance de l'apprentissage de la ligne numérique : « La ligne numérique est un outil essentiel pour faciliter et révéler la compréhension de l'arithmétique. La relation entre le nombre et l'espace est un pilier des mathématiques » (CSEN, 2022).

III - RETOUR SUR LES ÉVALUATIONS NATIONALES

1 Présentation de l'exercice 15

Les évaluations nationales de CP en 2022, exercice 15 (MEN, 2022a et 2022b) (annexe 1), intègrent des items évaluant la compétence « Associer un nombre entier à une position ».

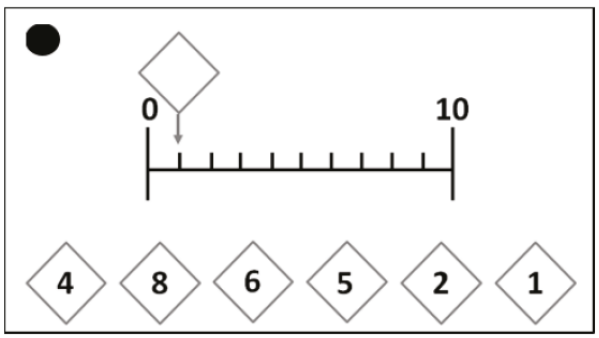


Figure 1 – Un exemple de l'exercice 15 des évaluations nationales

2 Les notions en jeu

Les notions en jeu en lien avec le repérage sur la demi-droite graduée sont les suivantes :

- Chaque nombre correspond à une position précise sur la ligne numérique : tous les nombres entiers 1,2,3… sont ordonnés et également espacés (acquisition d'une représentation linéaire des quantités).
- La distance entre 0 et 1 représente le nombre « 1 ».
- Le zéro est l'origine.
- Il y a un sens de lecture de la droite numérique : plus un nombre est grand, plus il se situe vers la droite.

- Le comptage, surcomptage, la connaissance de la suite des nombres à l'oral et en chiffres sont des prérequis.

IV - NATURE DU DISPOSITIF D'ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTS

Cette expérimentation a été conduite dans le cadre d'un accompagnement d'une constellation composée de 5 enseignantes.
Les constellations s'inspirent des Lesson Study (LS). La Lesson Study (Clivaz, 2015a) ou « études collectives de leçon » sont un dispositif de recherche-formation qui fait travailler un groupe d'enseignants autour de la construction d'une leçon. Ces enseignants identifient un objet d'apprentissage qui leur pose problème et au sujet duquel ils souhaitent construire une leçon. Le schéma illustre ce dispositif (Clivaz, 2015a).

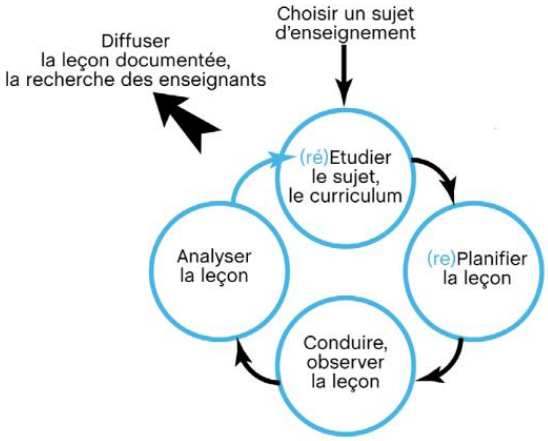


Figure 2 – Le Processus de LS (d'après Lewis & Hurd, 2011, p. 2)

Les leçons représentent un aboutissement du processus de LS, elles ne sont, comme la réponse à un problème de mathématiques, que la réalisation visible d'un « exercice de développement professionnel » (Clivaz, 2015b). La leçon n'est ainsi qu'un but apparent, un moyen de développer les connaissances professionnelles des enseignants. Ainsi :

- l'apprentissage des élèves est l'objectif de la leçon, il est au centre des observations des enseignants ;
- cette focalisation sur l'apprentissage des élèves et sur les effets de l'enseignement sur cet apprentissage est le moteur d'une amélioration de l'enseignement, en vue d'améliorer les apprentissages ;
- cette amélioration de l'enseignement, et le travail de réflexion pour y parvenir sont générateurs de développement des connaissances professionnelles, didactiques et pédagogiques des enseignants.

V - MÉTHODOLOGIE

1 La démarche pédagogique générale

L'étude des longueurs et de leur mesure à l'école peut être conduite selon une démarche pédagogique générale qui s'inspire des propositions de Hansel (2015). On trouve aussi cette démarche dans les programmes depuis 2002, dans les documents d'accompagnement ou documents ressources.

Dans un premier temps, la comparaison directe de longueurs en utilisant la juxtaposition ou la superposition indépendamment de la mesure.

Dans un second temps, la comparaison indirecte qui amène à utiliser un ou plusieurs objets intermédiaires, objets de référence et les premières mesures se ramènent à des dénombrements qui exploitent l'aspect cardinal du nombre.

Dans un troisième temps, l'utilisation d'un instrument de mesure, la règle, pour mesurer la longueur d'un segment, avec utilisation du repérage et le versant ordinal du nombre.

2 Les étapes de l'expérimentation

Nous nous situons ici dans le cadre de la théorie des situations de Brousseau qui guide cette démarche (Margolinas et Wozniak, 2012).

- Situation d'action : Comparaison directe avec le rituel de la 'Tour des présents', situation qui est déjà pratiquée dans une des classes et qui s'appuie donc sur l'existant.
- Situation de formulation avec éloignement dans l'espace : Comparaison indirecte de bandes.
- Situation de formulation à autrui : Comparaison indirecte de bandes.
- Situation de formulation à autrui : Construction et utilisation d'un objet intermédiaire marqué en utilisant un cube comme l'objet de référence : la règle.

Le matériel, les variables didactiques ainsi que les démarches d'auto-validation joueront un rôle majeur dans le processus.

3 La méthodologie d'ingénierie didactique

La méthodologie consiste en une ingénierie didactique des analyses a priori des situations (Charnay, 2008) (annexe 2), qui sont confrontées ensuite à la mise en œuvre en classe avec une analyse a posteriori (validation interne) avec à la fin une tentative de validation des effets des situations en étudiant les résultats d'une évaluation (validation externe).

VI - EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation s'est déroulée en plusieurs étapes, chaque étape visant à renforcer la compréhension des élèves par la manipulation et la comparaison des longueurs.

1 Étape 1 : la tour d'appel

La première étape, appelée "La tour d'appel", consiste en la comparaison directe des hauteurs des tours construites avec des briques représentant le nombre d'élèves présents. Cette activité permet aux élèves de comparer les deux tours avec un travail sur la comparaison des hauteurs. Les jours où il n'y a pas d'absent, on ajoute une brique à l'appel de chaque élève, constituant ainsi une "tour des grands" ou "tour des inscrits" (figure 3). Le socle de la tour symbolise l'origine du repère et le nombre de briques est écrit en chiffres en haut de la tour des grands. Les jours suivants, les élèves construisent la tour du jour à côté de la tour des grands et les comparent directement en utilisant des expressions telles que "la tour des inscrits est plus haute que la tour du jour" (figures 4 et 5).

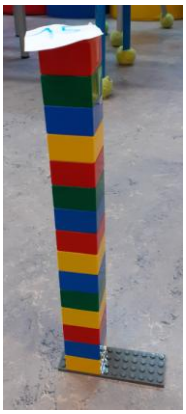


Figure 3. La tour des grands



Figure 4. Briques (une par élève)



Figure 5. Tour des grands et tour du jour

2 Étape 2 : la barre d'appel

Dans la deuxième étape, appelée "La barre d'appel", la tour est basculée horizontalement et devient une barre afin de comparer directement des longueurs horizontales en 3D (figure 6).
Et lors des comparaisons des deux barres (barre témoin et barre du jour), l'enseignant fait remarquer aux élèves que les deux barres partent du socle qui représente l'origine du repère, première signification du zéro. Un va-et-vient entre les étapes 1 et 2 est possible, de la tour vers la barre et vice-versa. Cette proposition en format spiralaire contribue à une meilleure compréhension des situations par les élèves.



Figure 6. Tour des grands et tour du jour basculées.

3 Etape 3 : Construction de la bande d'appel

La troisième étape, "La bande d'appel", permet aux élèves de passer d'une représentation en 3D à une représentation en 2D. À cet effet, l'enseignante fait la remarque que la barre d'appel tombe souvent. Ainsi, pour des raisons pratiques, les enfants sont invités à faire des propositions (figure 7).



Figure 7. Représentation de la barre d'appel par un élève

La trace d'une proposition d'élève est ensuite complétée par l'intervention de l'enseignante (figure 8).

.

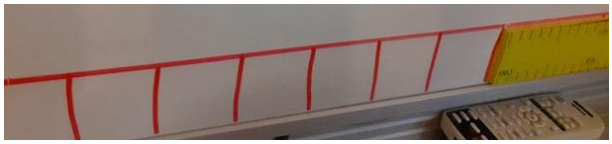


Figure 8. Construction de la bande d'appel.

On compare alors la bande des grands et la bande d'appel, à nouveau de manière horizontale, le nombre d'élèves correspondant à la bande des grands étant écrit en chiffres au bout de la bande (figure 9).

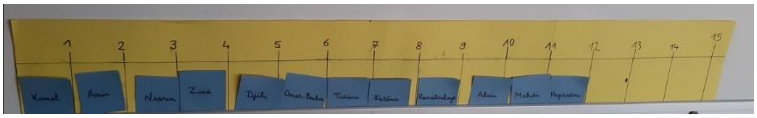


Figure 9. Comparaison directe de la bande des grands et de la bande d'appel

4 Etape 4 : Comparaison indirecte qui amène à utiliser un objet intermédiaire

La quatrième étape consiste à comparer les longueurs de bandes collées recto/verso sur un carton à l'aide d'un étalon. Lors de cette situation, inspirée d'une séance proposée par Hansel (2015, p. 52-54), un carton sur lequel est collée à chaque face une bande, avec les deux bandes de longueurs différentes sera mis à disposition d'un binôme d'élèves (figure 10).
La tâche des élèves sera de déterminer si les bandes ont la même longueur en s'aidant de bandes plus petites que les bandes collées (figure 11).
Le but est d'amener les élèves à comparer des objets éloignés dans l'espace selon leur longueur en utilisant des moyens indirects avec formulation à soi-même. Le travail consistera à reporter la longueur d'un objet plus court que tous les objets à examiner, de dénombrer les reports effectués pour chaque bande puis de comparer les résultats des reports.

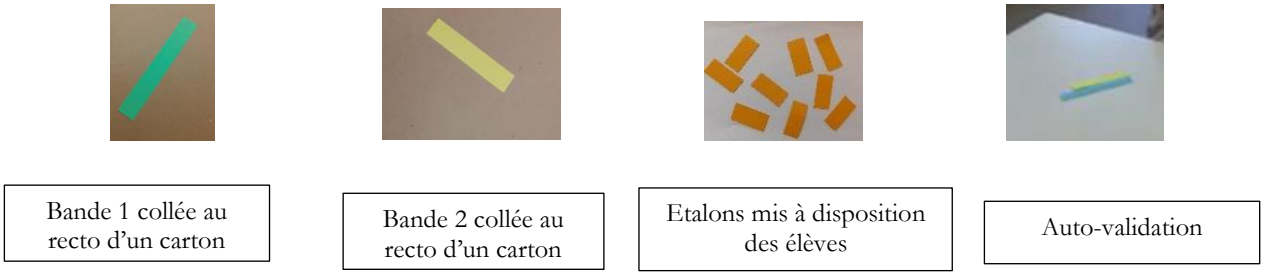


Figure 10. Comparer la longueur de bandes collées recto/verso sur un carton à l'aide d'un étalon

Parmi les procédures observées, la procédure attendue de mettre bout à bout les petites bandes a bien été utilisé. Dans la majorité des cas elle a été utilisée après des essais/ajustements.



Figure 11. Procédure attendue

5 Étape 5 : Vers la ligne numérique

5.1 Etape a - Communication à autrui avec plusieurs cubes à disposition

Dans cette situation, inspirée d'une proposition de Margolinas C. et Wozniak F. (2012, p. 43-57) illustrée par la figure 12, un binôme d'élèves (A) dispose d'une bande et un autre binôme (B) dispose d'une série de bandes dont l'une est de même longueur que la bande du binôme (A). Chaque binôme dispose de cubes identiques. Le binôme (A) devra communiquer la longueur de sa bande oralement au binôme (B)

en utilisant les cubes mis à sa disposition. Celui-ci devra trouver la bande qui a la même longueur grâce au message à l'oral passé par le binôme (A) parmi les bandes à sa disposition. Le but est d'amener les élèves à comparer des objets selon leur longueur en utilisant des moyens indirects avec formulation à autrui. Il s'agit du report de la longueur d'un objet plus court que tous les objets à examiner et du dénombrement des reports effectués.

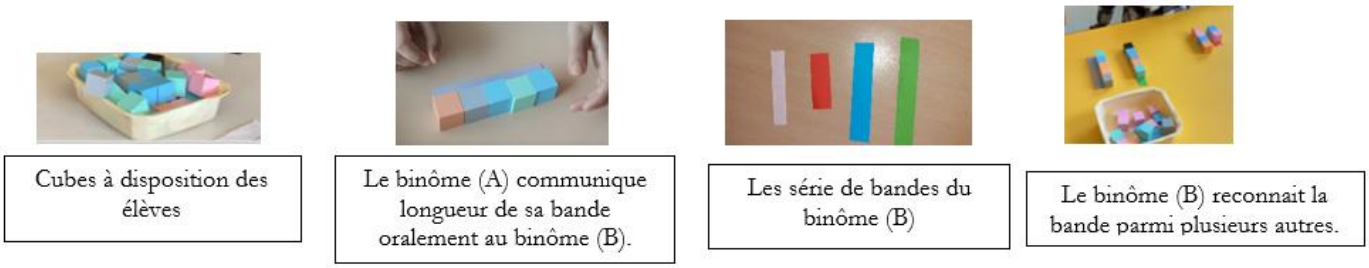


Figure 12. Le binôme (A) communique la longueur de sa bande oralement au binôme (B)

5.2 Etape b - Communication à autrui avec un seul cube à disposition

Dans cette situation, un élève X dispose d'une bande alors que l'élève Y dispose d'une série de bandes dont l'une est de même longueur que la bande de l'élève Y. L'élève X devra communiquer la longueur de sa bande oralement à l'élève Y. Chaque élève dispose pour cette situation d'un seul cube. Les élèves peuvent demander le matériel qu'ils souhaitent, l'enseignant peut également proposer l'utilisation d'un crayon à papier.
La figure 13 illustre quelques exemples de messages émis par les élèves.

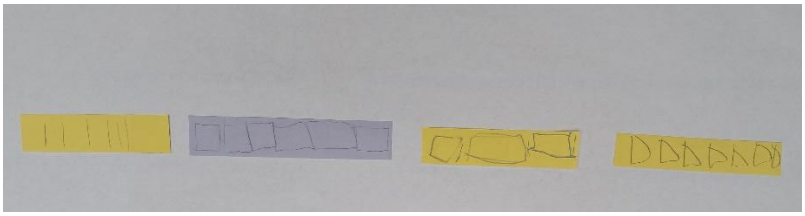


Figure 13. Quelques exemples de messages émis par les élèves

La procédure pour l'élève X sera de déplacer le cube le nombre de fois nécessaires pour communiquer le nombre de reports de cubes oralement à l'élève Y. L'élève Y devra effectuer à son tour des reports sur les bandes à examiner, puis trouver la bande qui correspond au nombre de reports du message annoncé par le l'élève X. Le but de cette situation est de préparer l'introduction de la règle comme outil commode à construire en reportant le cube le nombre de fois nécessaires.

6 Etape 6 - Vers l'utilisation de la droite graduée

6.1 La construction de la règle par l'enseignant

Ensuite, l'enseignante montre et explique aux élèves comment construire, avec un seul cube, une droite graduée qu'elle appellera « règle » avec eux (figure 14).

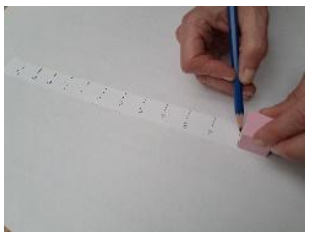


Figure 14. Construction d'une « règle »

6.2 Le mesurage de bande avec la règle

Puis dans cette situation, toujours inspirée d'une séance proposée par Margolinas C. et Wozniak F. (2012, p. 43-52), les élèves devront mesurer individuellement leur bande à partir d'une règle, construite à partir de la longueur des unités cubes, et de communiquer oralement la mesure de la longueur de leur bande en unités cubes. Le but est d'utiliser la règle comme objet intermédiaire pour mesurer la grandeur longueur.
L'élève communique la longueur de sa bande en utilisant la règle construite avec des unités cubes. Puis il auto-valide sa réponse avec les cubes (figure 15).

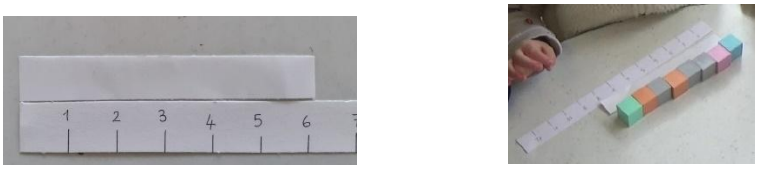


Figure 15. Mesurage de la bande à partir d'une règle et auto-validation avec les cubes

VII - ANALYSE DU POINT DE VUE DES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES

1 Intérêt, apports du point de vue des apprentissages des élèves

1.1 Modalités de travail

Les élèves ont eu l'occasion de réaliser des essais et des ajustements, ce qui a permis une exploration active et une adaptation progressive de leurs stratégies. Le milieu d'apprentissage et les mécanismes d'auto-validation ont joué un rôle primordial dans ce processus, offrant un cadre structuré et des repères clairs pour les élèves. De plus, la collaboration entre pairs a facilité une meilleure compréhension des procédures, permettant aux élèves de s'entraider et de consolider leurs acquis à travers des échanges constructifs et des observations mutuelles.

1.2 Ce que les élèves ont abordé pour réussir les activités de l'évaluation CP

Les élèves ont construit la règle en utilisant l'itération de l'unité, toute quantité s'obtient en ajoutant 1 à la quantité précédente. Ils ont appris à utiliser la règle comme un objet marqué, constitué de segments de même longueur. La règle apparaît ici comme un instrument essentiel pour mesurer la longueur.

2 Les limites du point de vue des apprentissages des élèves

2.1 Des difficultés rencontrées

Le report à l'aide d'un seul cube a posé des difficultés en termes de manipulation du matériel et de motricité fine. Les élèves ont également éprouvé des difficultés dans la verbalisation de leurs procédures, ce qui est crucial pour leur compréhension et leur capacité à expliquer leurs raisonnements

2.2 Ce qui reste à reste à apprendre aux élèves pour réussir les activités de l'évaluation CP

Il sera bénéfique d'introduire le concept du zéro comme l'origine de la barre et de la bande, à la fois à l'oral et écrit en chiffre. Cette notion est l'une des premières significations du zéro et est essentielle pour une compréhension complète de la ligne numérique.

Le positionnement des nombres sur la ligne numérique n'a pas encore été abordé dans cette expérimentation. Il faudra apprendre aux élèves à identifier et placer correctement les nombres sur une ligne numérique graduée.

La procédure de placer les nombres en partant du 0 ou du 10, selon la valeur du nombre à positionner, reste à enseigner. Cela inclut le déplacement par ajout ou retrait, permettant aux élèves de comprendre comment les nombres se succèdent et comment les manipuler sur une droite numérique

VIII - EVALUATION EXTERNE DE L'INGÉNIERIE

1 Mise en œuvre dans les classes

Les interventions dans les classes ont été en fonction des contraintes de temps et des disponibilités de chaque collègue. Le tableau ci-dessous récapitule les interventions effectuées dans les classes. Pour information, les classes comptent entre 10 à 14 élèves. En effet, elles sont dans des écoles de zone d'éducation prioritaire REP+.

	Nombre d'élèves dans la classe	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
		Nombre d'élèves concernés par étape					
Classe 1	11	10	-	-	4	-	-
Classe 2	12	10	-	-	-	5	5
Classe 3	12	12	-	-	12	-	-
Classe 4	14	10	10	10	-	4	4
Classe 5	10	10	10	10	-	10	10

Tableau 1 - Nombre d'élèves qui ont participé à l'expérimentation par classe et par situation

2 Résultats des évaluations

Les collègues des 5 classes Rep+ ont accepté de faire passer le test à leurs élèves de GS en avril 2023. Les résultats de l'exercice 15 passé par tous les élèves des classes ont été comparés avec les résultats nationaux et académiques de septembre 2022 (annexe 3). Au niveau national, l'exercice 15 est réussi

respectivement à 74 % au niveau national et à 72, 5 % au niveau académique. Au niveau national, 63 % des élèves de REP⁺ réussissent l'exercice. Les résultats académiques en REP⁺ ne sont pas disponibles.

Sur les 5 classes concernées, 4 classes ont des résultats supérieurs ou équivalents aux résultats nationaux hors REP et académiques tous secteurs confondus avec respectivement 100 % (les classes 4 et 5), 75 % (la classe 3) et 73 % (la classe 1) des élèves au-dessus du seuil 2 (tableau 2). Les élèves ayant atteint les stades avancés de la bande d'appel en 2D ont particulièrement bien réussi l'exercice 15 des évaluations nationales. Quant aux élèves des 3 classes qui sont encore au niveau 3D de la situation de « La tour d'appel », les résultats sont moins réussis, mais 2 classes sur 3 obtiennent des résultats supérieurs ou équivalents aux résultats académiques hors REP pour les groupes supérieurs au seuil 2. On peut dire donc que les situations ont permis d'améliorer les résultats et que le passage à la 2D de la tour d'appel augmente encore d'avantage les réussites.

Classe	Niveau d'avancement dans la séquence tour appel en avril 2023	Nombre d'élèves qui ont passé le test	Nombre d'élèves avec 6 items corrects	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragiles)	% Elèves au-dessous du seuil 1 (à besoin)	Nombre d'items non réussis
1	Tours verticales 3D	11	8	73 %	9 %	18 %	1 élève – 4 items 1 élève – 1 item 1 élève – 0 item
2	Tours verticales 3D	12	6	66 %	8 %	25 %	2 élèves – 5 items 1 élève – 3 items 2 élèves – 2 items 1 élève – 0 item
3	Tours verticales 3D	12	7	75 %	16 %	25 %	2 élèves – 4 items 3 élèves – 1 item
4	Bandes horizontales 2D	14	14	100 %	0 %	0 %	0
5	Bandes horizontales 2D	10	10	100 %	0 %	0 %	0

Tableau 2 – Résultats de la passation de l'exercice 15 des évaluations nationales en avril 2023

IX - INTÉRÊT DE L'EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation menée dans le cadre de l'enseignement de la ligne numérique en grande section (GS) de maternelle présente un intérêt significatif pour l'enseignement ordinaire. Les résultats obtenus grâce à cette expérimentation seront largement diffusés pour répondre aux besoins de l'enseignement ordinaire. Cela permettra aux enseignants d'accéder à des données concrètes et applicables dans leurs propres classes, enrichissant ainsi leur pratique pédagogique.

Les retours de cette expérience ont été formalisés sous un format concis et accessible, à savoir une feuille A4 recto/verso (annexe 4). Ce document synthétise les étapes clés de l'expérimentation, offrant ainsi un outil pratique pour les enseignants et les formateurs et publié dans une revue destinée aux enseignants (Homsi, A., 2024).

Pour faciliter l'appropriation des méthodes et des résultats de l'expérimentation, des vidéos courtes ont été produites (annexe 4). Ces vidéos, destinées aux formateurs et aux enseignants, illustrent de manière visuelle et pratique les différentes étapes de l'expérimentation ainsi que les stratégies pédagogiques efficaces. Des consignes destinées aux élèves de la mise en mots de l'institutionnalisation sont également proposées dans les vidéos.

L'expérimentation offre également la possibilité de travailler dans le cadre d'une constellation, un dispositif collaboratif inspiré des Lesson Studies. Ce cadre permet aux enseignants de se regrouper pour analyser et améliorer leurs pratiques pédagogiques autour d'un objet d'apprentissage commun, favorisant ainsi une dynamique d'échange et de co-construction des savoirs professionnels.

X - CONCLUSION

Cette expérimentation vise à améliorer les pratiques d'enseignement de la ligne numérique en GS, en offrant des outils concrets pour les enseignants. Les résultats et les supports produits contribueront à enrichir l'enseignement des mathématiques en maternelle et à favoriser une meilleure compréhension des concepts numériques chez les élèves. On peut dire donc que les situations ont permis d'améliorer les résultats des élèves.

Il convient cependant de rester vigilant quant aux analyses des résultats de ces évaluations externes pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le faible nombre d'élèves concernés par cette expérimentation est peu représentatif de tous les élèves de REP+. Ensuite, les élèves n'ont pas effectué toutes les situations à cause des contraintes de temps des collègues et les situations 3 à 6 n'ont été travaillées qu'une seule fois avec les élèves concernés. Enfin, la complexité du travail enseignant nous invite à la prudence car des facteurs non pris en compte dans l'expérimentation sont peut-être entrés en jeu. D'autres expérimentations devront être mises en œuvre sur plusieurs séances pour chacune des situations, couvrant l'ensemble des situations pour confirmer ces conclusions.

Cette expérimentation soulève aussi des questions liées à l'accompagnement des enseignants : la même expérimentation a été effectuée dans plusieurs classes avec des effets variables. L'effet enseignant semble donc déterminant. Il serait intéressant de travailler avec les enseignants sur leurs pratiques. Des pistes qui pourront être explorées sont par exemple, la prise en charge des élèves en difficulté, le travail en petits groupes, entre pairs, l'apprentissage des élèves de la verbalisation de leurs procédures, la hiérarchisation des procédures des élèves par l'enseignant et l'institutionnalisation des savoirs.

BIBLIOGRAPHIE

Clivaz, S. (2015). Les lesson study : des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 19,* 99-105. Consulté le 11/07/2024 http://revuedeshep.ch/pdf/19/2015-Clivaz-FPEQ-19.pdf

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) - Ex. Math-Ecole, 224*, 23-26. Consulté le 11/07/2024 http://hdl.handle.net/20.500.12162/670

Charnay, R. (2008). L'analyse à priori, un outil pour l'enseignant. *Math-école, 209*, 14 – 25.

CSEN (Février 2022). *Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique*, 2.

Dehaene, S., et Ziegler, J. (2018). *EvalAide, Évaluer pour mieux aider Texte collectif rédigé par le groupe de travail Évaluations & interventions du Conseil scientifique de l'éducation nationale.* Consulté le 11/07/2024 https://eduscol.education.fr/document/7736/download

Fayol, M. (éd) (2012). *L'acquisition du nombre*. Que sais-je ?

Hansel, N. (éd) (2005). *50 activités pour mesurer des longueurs.* scérén, CRPD LORRAINE

Homsi, A. (2024). Vers la ligne graduée en Grande Section. *APMEP, 553,* 34-37.

Margolinas, C., et Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. De Boeck.

MEN (2022) Evaluation CP – Cahier de l'élève.

MEN (2022) Evaluation CP – Guide de l'enseignant.

ANNEXE 1 - EVALUATIONS NATIONALES D'ENTRÉE AU CP - EXERCICE 15

Exercice 15 des évaluations nationales CP septembre de 2022 – Guide de l'enseignant p. 35.

Exercice 15

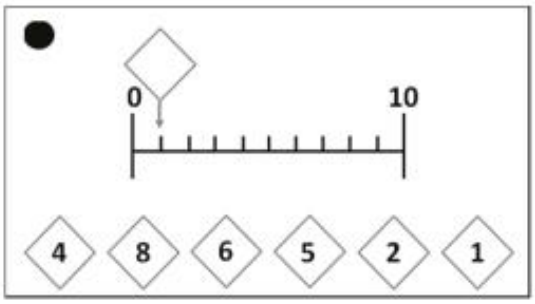
Compétence :	Associer un nombre entier à une position.
Activité :	Repérer une position sur une ligne graduée pour entourer le nombre à placer sur cette position parmi 6 propositions.

Consignes de passation :	**pages 52 - 55** **5 minutes**

« On va maintenant faire l'exercice de la ligne graduée.

Observez les lignes.
Il y a plusieurs traits placés sur chaque ligne.
Sur chaque ligne, une flèche indique l'endroit où se trouve un nombre.
Trouvez quel nombre se trouve à l'endroit indiqué par la flèche.
Pour répondre, entourez le bon nombre sur la ligne en dessous.

[Écrire ou projeter l'exemple au tableau.]



Regardez cette ligne, elle va de 0 à 10.

Entourez le nombre qui doit aller à l'endroit indiqué par le trait avec l'étiquette.

[Laisser les élèves chercher la réponse.]

Regardez les propositions de réponse juste en-dessous. Quel nombre peut-on mettre à la place du trait avec l'étiquette vide ? Oui, c'est le 1. On va entourer notre réponse 1.

[Vérifier sur chaque cahier que la réponse est entourée.]

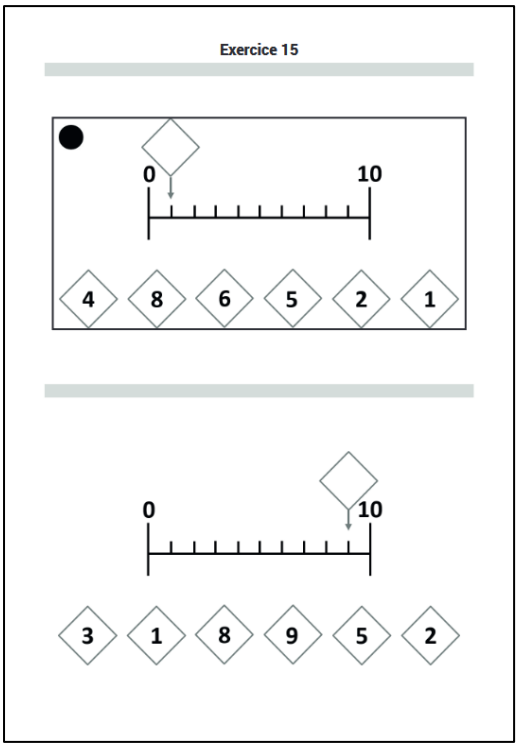
Maintenant que tout le monde a compris, vous allez travailler seuls pour la suite de cet exercice. N'oubliez pas de tourner les pages car il y en a quatre. Commencez. »

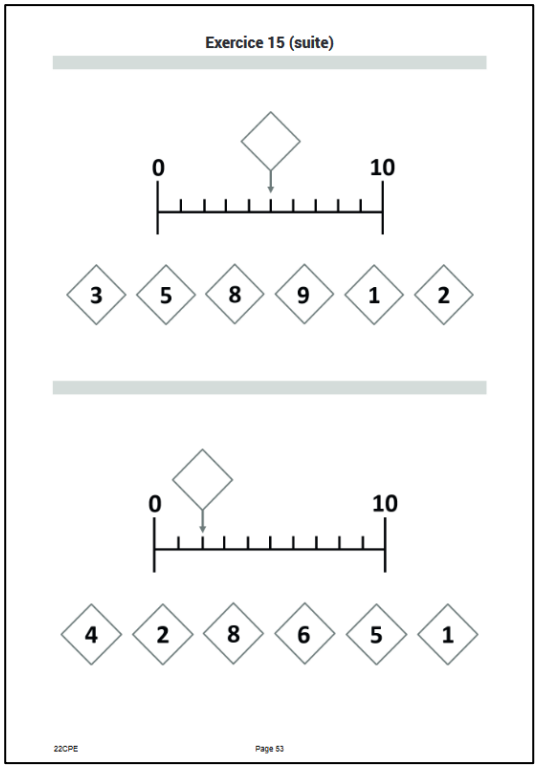
[Vérifier que tous les élèves progressent dans les 4 pages de cet exercice (pages 52 à 55). Arrêtez l'exercice au bout de 5 minutes.]

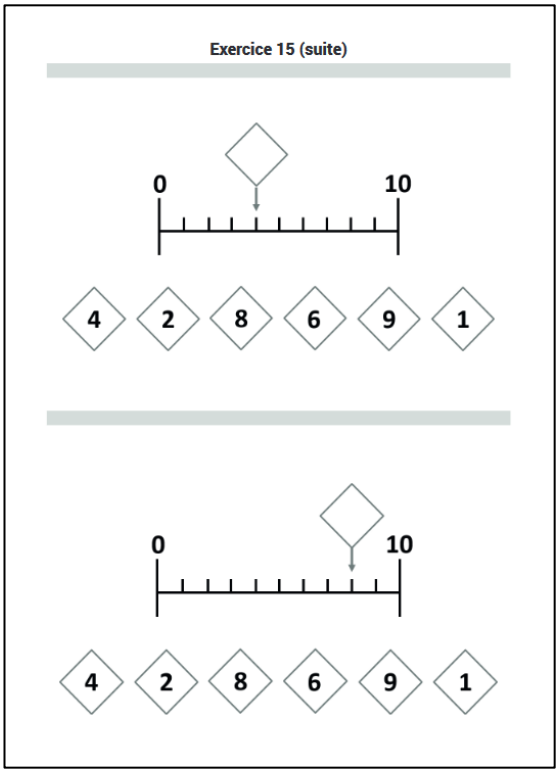
« Bravo, vous avez terminé. »

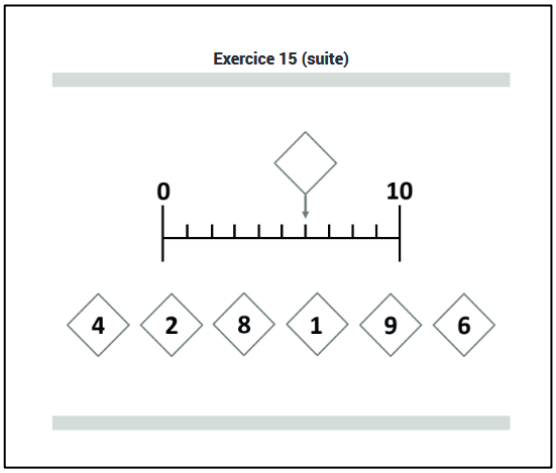
[Ramasser les cahiers.]

Exercice 15 des évaluations nationales CP de septembre 2022– Cahier de l'élève, p. 50-56.









ANNEXE 2 : L'ANALYSE À PRIORI

L'analyse a priori (Charnay, 2008)

Un outil pour l'enseignant D'après R. Charnay (Maths-école, 2008)

L'ANALYSE A PRIORI DE TÂCHES

Simplifiée et orientée par les outils de la Théorie des Situations Didactiques. D'après R. Charnay (Maths-école, 2008)

• Constitue un des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant.

• L'analyse a priori est un travail d'hypothèses faites par l'enseignant, orientées par 3 types de questions

1. Sur les démarches des élèves

• Quelles sont les démarches, stratégies, procédures, solutions que l'élève peut mettre en œuvre dans la situation qui lui est proposée compte tenu de ses connaissances supposées ?

• L'élève peut-il s'engager dans le problème ? At-il des critères pour savoir s'il a réussi ou non ?

2. Sur les difficultés et erreurs possibles

• Quelles sont les difficultés qu'il peut rencontrer et les erreurs qu'il peut commettre ?

• Quelles sont celles qui font partie de l'apprentissage en cours ? Et celles qui sont liées à d'autres apprentissages (prérequis non maîtrisés, difficultés langagières,…) ?

3. Les variables didactiques

• Quelles sont les variables didactiques de la situation et les effets sur le travail des élèves des modifications que l'enseignant peut apporter à la situation.

• En particulier : la notion ou la procédure visée est-elle l'outil le plus approprié pour résoudre le problème posé ?

Définition : une variable didactique est un élément de la situation que le maître peut modifier et dont les modifications entraînent des changements de procédures chez les élèves.

ANNEXE 3 : LES RÉSULTATS AU NIVEAU NATIONAL ET ACADÉMIQUE DES CP EN 2022 A L'EXERCICE 15

Les publications concernant les résultats obtenus par les élèves de CP aux évaluations de septembre 2022, d'une part de la Depp en novembre 2022 au niveau national, en violet ci-dessous, et d'autre part de la Dapep en décembre 2022 pour l'académie de Versailles, en bleu ci-dessous, permettent de comparer les résultats obtenus dans les classes avec les résultats au niveau national et académique.

<u>Détermination des seuils selon le nombre de réponses correctes</u>

- Au-dessous du seuil 1 : Les élèves pour lesquels on peut considérer, dès le début de l'année, qu'ils sont en difficulté : un besoin est identifié. Ces élèves nécessitent un accompagnement ;
- Entre le seuil 1 et le seuil 2 : Les élèves dont les acquis sont fragiles pour lesquels l'enseignant devra maintenir un niveau de vigilance particulier ;
- Au-dessus du seuil 2 : Les élèves pour lesquels il n'y a pas de difficultés identifiées, les prérequis permettent d'entrer sereinement dans les apprentissages à venir.

Mathématiques CP						
Compétences	Nombre d'items	2021	2022	Évolution	Seuil 1	Seuil 2
Placer un nombre sur une ligne graduée	6			ajout	2	4

Source : MENJ-DEPP, Repères CP-CE1
© DEPP
Note : Case grisée : exercice identique (comparabilité diachronique directe)
Lecture : La compétence « reconnaitre des nombres dictés » a été évaluée en début de CP en 2021 et en début de CP en 2022. Le seuil 1 correspond à 6 exercices réussis au maximum et il caractérise les élèves « à besoin ».

Tableau 3 - Seuils retenus pour l'exercice 15 de septembre 2022

FIGURE 17 • Répartition des élèves dans les groupes selon le domaine évalué en mathématiques en début de CP à la rentrée 2022, selon le secteur

	Public Hors EP			REP			REP+			Privé		
Domaine	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2	Groupe sous le seuil 1 (à besoin)	Groupe entre les seuils 1 et 2 (fragile)	Groupe au-dessus du seuil 2
Placer un nombre sur une ligne graduée	15.5	8.4	76.1	22.7	10.3	67.0	25.9	10.8	63.3	12.4	7.9	79.6

Tableau 4 - Résultats nationaux pour l'exercice 15 de septembre 2022

Répartition des élèves de CP dans les groupes par compétence en mathématiques dans l'académie et au national (en %)

Académie de Versailles France

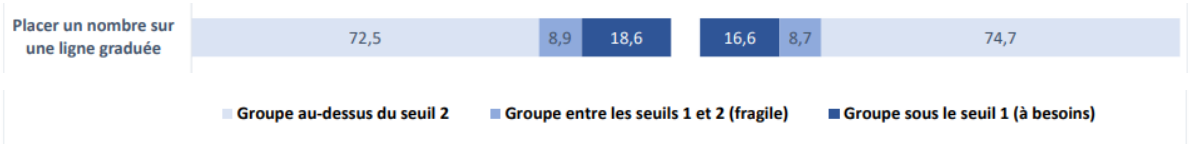


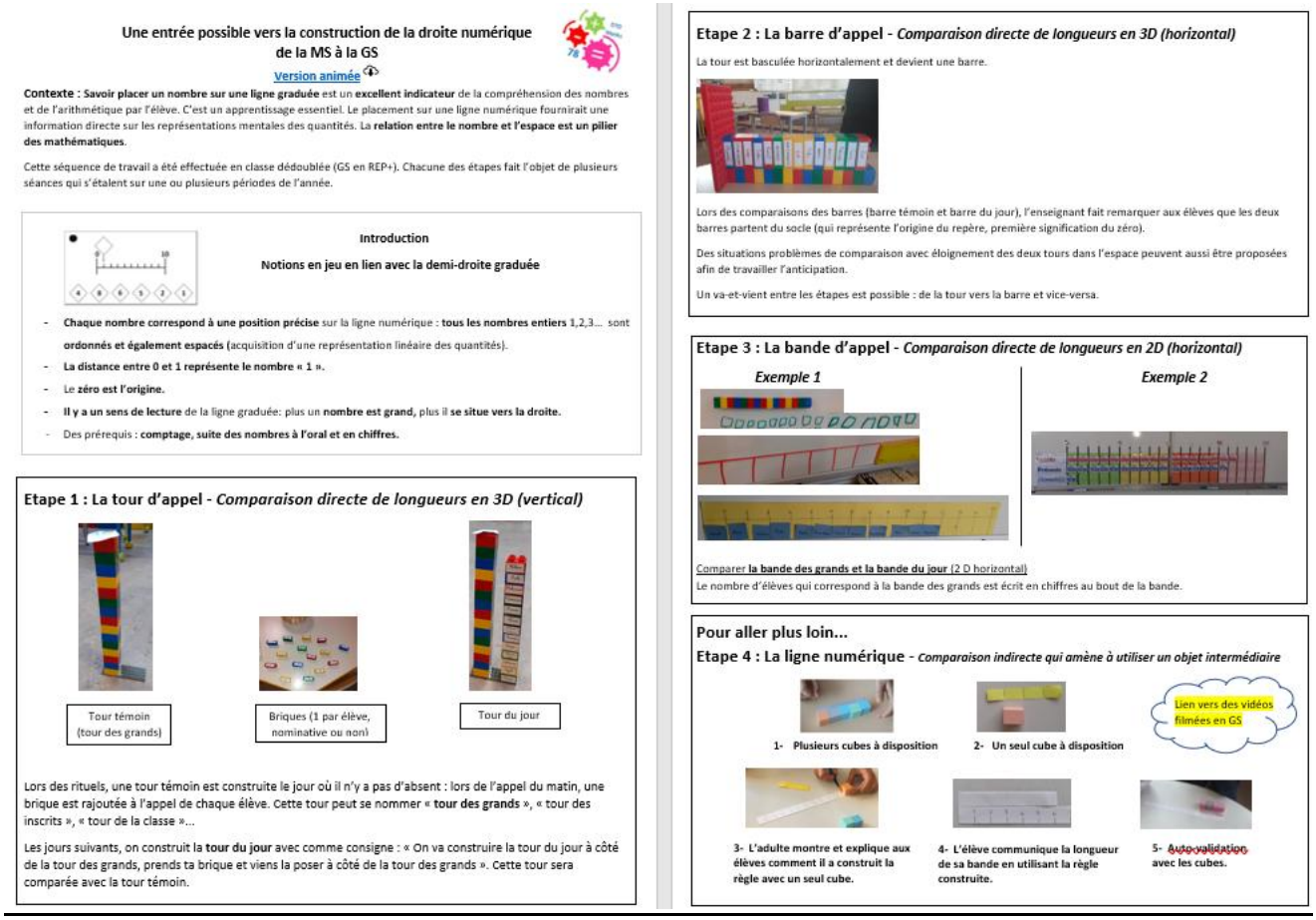
Tableau 5 - Résultats académiques pour l'exercice 15 de septembre 2022

Au niveau national, l'exercice 15 est réussi respectivement à 74 % au niveau national et à 72, 5 % au niveau académique. Au niveau national, 63 % des élèves de REP+ réussissent l'exercice. Les résultats académiques en REP⁺ ne sont pas disponibles.

ANNEXE 4 : RETOURS D'EXPÉRIENCE A DESTINATION DES ENSEIGNANTS – FEUILLE RECTO/VERS, VERSION ANIMÉE ET VIDÉOS

Lien feuille recto/verso avec vidéos : https://nuage02.apps.education.fr/index.php/s/a7KDoCWKjpJ9ixD

Lien version animée avec vidéos : https://view.genially.com/6499837520aa820011a9d17e/learning-experience-didactic-unit-construction-de-la-ligne-numerique



Une entrée possible vers la construction de la droite numérique de la MS à la GS

Version animée

Contexte : Savoir placer un nombre sur une ligne graduée est un **excellent indicateur** de la compréhension des nombres et de l'arithmétique par l'élève. C'est un apprentissage essentiel. Le placement sur une ligne numérique fournirait une information directe sur les représentations mentales des quantités. La **relation entre le nombre et l'espace est un pilier des mathématiques**.

Cette séquence de travail a été effectuée en classe dédoublée (GS en REP+). Chacune des étapes fait l'objet de plusieurs séances qui s'étalent sur une ou plusieurs périodes de l'année.

Introduction

Notions en jeu en lien avec la demi-droite graduée

- **Chaque nombre correspond à une position précise** sur la ligne numérique : **tous les nombres entiers** 1,2,3... sont **ordonnés et également espacés** (acquisition d'une représentation linéaire des quantités).
- **La distance entre 0 et 1 représente le nombre « 1 ».**
- Le **zéro est l'origine.**
- **Il y a un sens de lecture** de la ligne graduée: plus un **nombre est grand,** plus il **se situe vers la droite.**
- Des prérequis : **comptage, suite des nombres à l'oral et en chiffres.**

Etape 1 : La tour d'appel - *Comparaison directe de longueurs en 3D (vertical)*

Tour témoin (tour des grands) | Briques (1 par élève, nominative ou non) | Tour du jour

Lors des rituels, une tour témoin est construite le jour où il n'y a pas d'absent : lors de l'appel du matin, une brique est rajoutée à l'appel de chaque élève. Cette tour peut se nommer « **tour des grands** », « tour des inscrits », « tour de la classe »...

Les jours suivants, on construit la **tour du jour** avec comme consigne : « On va construire la tour du jour à côté de la tour des grands, prends ta brique et viens la poser à côté de la tour des grands ». Cette tour sera comparée avec la tour témoin.

Etape 2 : La barre d'appel - *Comparaison directe de longueurs en 3D (horizontal)*

La tour est basculée horizontalement et devient une barre.

Lors des comparaisons des barres (barre témoin et barre du jour), l'enseignant fait remarquer aux élèves que les deux barres partent du socle (qui représente l'origine du repère, première signification du zéro).

Des situations problèmes de comparaison avec éloignement des deux tours dans l'espace peuvent aussi être proposées afin de travailler l'anticipation.

Un va-et-vient entre les étapes est possible : de la tour vers la barre et vice-versa.

Etape 3 : La bande d'appel - *Comparaison directe de longueurs en 2D (horizontal)*

Exemple 1 *Exemple 2*

Comparer **la bande des grands et la bande du jour** (2 D horizontal)

Le nombre d'élèves qui correspond à la bande des grands est écrit en chiffres au bout de la bande.

Pour aller plus loin...

Etape 4 : La ligne numérique - *Comparaison indirecte qui amène à utiliser un objet intermédiaire*

1- **Plusieurs cubes à disposition** 2- **Un seul cube à disposition** Lien vers des vidéos filmées en GS

3- **L'adulte montre et explique aux élèves comment il a construit la règle avec un seul cube.**

4- **L'élève communique la longueur de sa bande en utilisant la règle construite.**

5- ~~Auto-validation~~ **avec les cubes.**

Titre : Actes du 50e Colloque de la COPIRELEM
Marseille les 4, 5 et 6 juin 2024

Mathématiques et diversité à l'école
Aider les élèves
Accompagner les enseignants

Auteurs : Conférencier-e-s, orateur-trice-s de communication et animateur-trice-s d'atelier du Colloque, COPIRELEM

Mots-Clefs : Formation des enseignants, didactique des mathématiques, dispositif de formation

Dépôt légal : Juin 2025

Nombre de pages : 606 pages A4

Editeur : ARPEME

ISBN : 978-2-917294-47-5

EAN : 9782917294475

Public Concerné : Formateurs de mathématiques chargés de la formation des professeurs des écoles

Résumé : Cette brochure contient les textes complets de la rétrospective COPIRELEM par les co-responsables Edith PETITFOUR, Anne BILGOT et Christophe BILLY, de la conférence de Nadine GRAPIN et Nathalie SAYAC, de la conférence d'Éric RODITI, ainsi que l'intégralité des textes des ateliers et communications du colloque.

Prix : 15 euros

