Collection Les outils du formateur

Document-cadre pour la formation des professeurs des écoles à l'enseignement des mathématiques

Version 3 – 31/03/2023

Ce document-cadre présente les savoirs et compétences que la COPIRELEM considère actuellement comme incontournables pour enseigner les mathématiques à l'école primaire française, en prenant appui sur des travaux produits par les membres de la commission depuis de nombreuses années et sur des résultats de la recherche en didactique des mathématiques.

Ce document-cadre se présente comme un outil pour le formateur. Il vise à combler le vide entre les compétences explicitées dans le référentiel de compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (BO n°30 du 25 juillet 2013) et les mathématiques à enseigner exposées dans les programmes de l'école primaire en vigueur et les ressources institutionnelles qui leur sont rattachées. *Attention !* Ce document-cadre n'est ni le programme d'une préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles, ni celui de deux années de formation du master de l'enseignement, de l'éducation et de la formation.

Pierre EYSSERIC
PRAG, INSPE Université d'Aix-Marseille, COPIRELEM

Claire GUILLE-BIEL WINDER
MCF, INSPE Université d'Aix-Marseille, COPIRELEM, ADEF

Christine MANGIANTE-ORSOLA
MCF, INSPE académie de Lille Hauts-de-France, COPIRELEM, LML

Edith PETITFOUR
MCF, INSPE Université Rouen Normandie, COPIRELEM, LDAR

Arnaud SIMARD
MCF, INSPE de Besançon, COPIRELEM, LMB

Frédérick TEMPIER
MCF, INSPE de Versailles, COPIRELEM, LDAR

Sommaire

Page

Préambule 5

Quelles compétences professionnelles à acquérir en formation des professeurs des écoles ? 5

Quels objectifs d'une formation initiale des professeurs des écoles pour enseigner les mathématiques ? 5

Présentation du document-cadre 7

Enjeux généraux liés à l'enseignement des différents domaines mathématiques 9

Nombres et calculs 15

Organisation et gestion des données numériques 27

Grandeurs et mesures 31

Espace et géométrie 37

Logique et algorithmique 47

Préambule

La formation des futurs enseignants en mathématiques doit être totalement organisée et orientée par la finalité d'enseigner les mathématiques aux élèves de l'école : les contenus mathématiques doivent être revisités, approfondis, enrichis, consolidés et restructurés dans la perspective de leur enseignement et de leur apprentissage par les élèves. C'est, pour les professeurs des écoles en formation, un nouvel apprentissage des mathématiques qui ne peut se faire qu'en étroite relation avec des champs de connaissances didactiques, historiques, épistémologiques et psychologiques.

Quelles compétences professionnelles à acquérir en formation des professeurs des écoles ?

La formation des professeurs des écoles doit permettre d'acquérir des compétences professionnelles que nous avons identifiées dans des travaux antérieurs de la COPIRELEM. Ces compétences sont indissociables des contenus à enseigner. Nous les reprenons ci-dessous en les mettant en lien avec le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (BO n°30 du 25 juillet 2013). Nous utilisons la numérotation du référentiel, en notant CC les compétences communes à tous les professeurs et personnels d'éducation (compétences CC1 à CC14) et P celles communes à tous les professeurs (compétences P1 à P5).

- Connaître et comprendre l'architecture des programmes de mathématiques de l'école primaire au collège (CC2) ; insérer son enseignement dans une continuité des apprentissages (P1, P3, CC5).
- Connaître et utiliser à bon escient les différentes ressources pédagogiques : littérature professionnelle, manuels scolaires, banques d'exercices, matériel pédagogique, jeux, ressources internet, logiciels éducatifs (P1, P3, CC9).
- Connaître et utiliser des outils d'analyse des situations d'apprentissage (P1, P3).
- Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage, les adapter aux publics (P1, P3, P4, CC3, CC4, CC5, CC9).
- Savoir développer les capacités argumentatives ainsi que les prises d'initiative des élèves (CC6) en lien avec l'apprentissage de la résolution de problèmes (CC1 ; P2 ; P4, CC7)
- Savoir concevoir des assortiments d'exercices, prévoir et analyser les niveaux d'adaptation (P1, P3, CC3, CC4, CC9).
- Savoir concevoir et analyser des situations d'évaluation (P1, P5, CC4, CC5, CC6).
- Savoir concevoir, mettre en œuvre et analyser des situations de régulation, des expositions de connaissances (institutionnalisations) et élaborer des textes de savoir (P1, P2, P3, P4, CC7).
- Savoir analyser et adapter des progressions thématiques et temporelles (P1, P3, CC5).
- Savoir repérer et analyser des difficultés d'élèves, concevoir des aides adaptées (P3, P4, P5, CC3, CC4, CC9).

Quels objectifs d'une formation initiale des professeurs des écoles pour enseigner les mathématiques ?

Pour les professeurs des écoles, les *savoirs mathématiques* à maîtriser doivent leur permettre d'enseigner les mathématiques à l'école, c'est-à-dire de faire acquérir aux élèves les principaux éléments de mathématiques qui leur permettront d'être autonomes dans leur vie quotidienne, de développer une pensée rationnelle, d'entrer dans une culture commune, de comprendre les mathématiques en jeu dans les autres disciplines de l'école, de construire des outils de compréhension scientifique du monde. Contrairement à une opinion largement répandue, pour enseigner les mathématiques à un certain niveau, il ne suffit pas de maîtriser les connaissances

mathématiques du niveau immédiatement supérieur. Il s'agit de maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l'école primaire).

Ce bagage mathématique doit être structuré et organisé. Il dépasse la simple maîtrise du niveau supérieur et s'appuie sur l'épistémologie de la discipline. Dans cette perspective, la formation en mathématiques vise à :

- *changer l'image des mathématiques* : rassurer par rapport aux mathématiques et redonner de l'appétence pour la résolution de problèmes (autoriser à chercher, tâtonner ; apprendre à tirer parti des erreurs ; relativiser des exigences de rigueur parfois inhibantes issues de la scolarité antérieure).
- *revisiter, consolider et amener à prendre du recul* par rapport aux mathématiques à enseigner à travers la résolution de problèmes adaptés et des démarches de formation proches de celles qui peuvent être mises en œuvre en classe ;
- *prendre conscience de la complexité de notions naturalisées* (comme la numération) ;
- *cerner précisément les concepts mathématiques étudiés, acquérir un langage mathématique précis*, pour pouvoir s'autoriser ensuite une moindre rigueur à bon escient ;
- *développer les capacités d'argumentation et de raisonnement* (des exemples ne suffisent pas pour justifier une affirmation ; un contre-exemple suffit à la mettre en défaut ; …) ;
- *amener les étudiants à changer de posture*, pour passer de celle d'élève à celle d'enseignant : passer de « faire » à « faire faire », notamment en devenant capable d'envisager plusieurs procédures de résolution d'un même problème, d'avoir recours à des changements de registres adaptés, … ;
- *s'interroger sur l'utilité des mathématiques,* en particulier en développant la compétence « modéliser » pour ancrer les mathématiques dans le monde réel.

Les *savoirs didactiques* sont ceux qui permettent de « mettre en relation l'analyse du savoir mathématique, un développement possible de l'élève et une organisation possible du travail de l'élève pour apprendre, une organisation de l'étude »[1]. Les savoirs didactiques sont nourris par les recherches en didactique des mathématiques et plus particulièrement celles qui portent sur le primaire, il est transposé pour être rendu accessible en centre de formation[2]. Les savoirs didactiques sont en relation étroite avec des savoirs pédagogiques « mais s'en distinguent dans la mesure où ils doivent les intégrer pour les mettre en œuvre en relation avec le contenu à enseigner pour favoriser les conditions d'apprentissage de ce contenu » (Perrin-Glorian, 2010). Ces savoirs constituent donc des *outils didactiques* : il ne s'agit pas de les approfondir de façon théorique mais de savoir les utiliser pour enseigner.

[1] Perrin-Glorian, M.-J. (2010). Des savoirs disciplinaires à construire pour une formation professionnelle universitaire des maîtres. Spirale – *Revue de recherche en éducation, 46*, 43-61.

[2] Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note d'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

Présentation du document-cadre

- Des contenus de formation répartis en six grands domaines

- Un domaine présentant les enjeux généraux liés à l'enseignement des différents domaines mathématiques

- Cinq domaines repris des programmes de l'école ou spécifiques à la formation, présentant des thèmes organisés, dans la mesure du possible, selon une chronologie cohérente avec celle à suivre dans l'enseignement des notions. Pour chacun de ces domaines, une présentation en tableau[3] :

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques nécessaires pour enseigner les mathématiques à l'école*	*Commentaires*

Enjeux didactiques et savoirs mathématiques en relation inscrits l'un à côté de l'autre dans le tableau (lecture en ligne).

Indissociables des deux premières colonnes

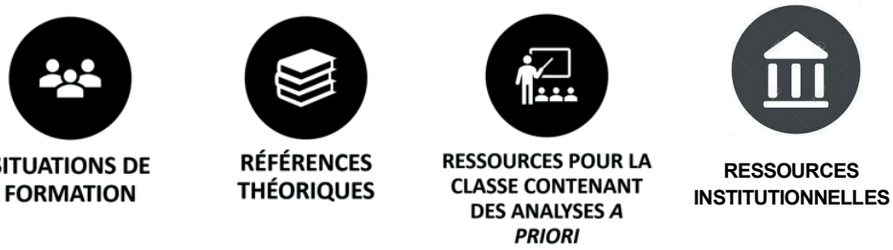
Eclairent les attendus et spécifient les limites des contenus mathématiques à aborder

[3] Certains savoirs sont énoncés à plusieurs endroits pour témoigner de l'articulation entre différents thèmes

- Une mise en évidence d'attendus différents

> Dans ce document-cadre, **aucune virtuosité n'est attendue pour les savoirs précédés d'un astérisque*.** Il ne s'agit pas de proposer un cours théorique concernant ces savoirs mais plutôt de les intégrer en tant qu'outils dans la pratique des mathématiques ou dans leur enseignement, en les reliant aux contextes où ils sont nécessaires ; certains seront notamment explicités en les contextualisant aux savoirs scolaires.

- Des références bibliographiques organisées en quatre catégories



Enjeux généraux liés à l'enseignement des différents domaines mathématiques

Organisation des apprentissages

• Prendre en compte l'ensemble des documents institutionnels (à un niveau donné, en amont et en aval), pour élaborer une programmation, une progression, une séquence, une séance.

• Reconnaître, concevoir et mettre en œuvre la découverte, l'évolution et la construction progressive d'une notion par les élèves.

• Identifier le découpage en paliers d'apprentissages, connaître certains « passages obligés » liés au développement cognitif de l'enfant.

• Prendre en compte l'histoire des mathématiques et l'histoire de la discipline scolaire dans son enseignement (par exemple structuration du temps et histoire, repérage et carte géographique, …).

• Etablir des liens entre les notions mathématiques étudiées à un ou plusieurs niveaux d'enseignement (par exemple : connaissance du carré du cycle 1 au cycle 3 ; problèmes de multiplication et proportionnalité …).

• Etudier le statut, la place et l'articulation des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d'automatismes, mémorisation, …).

• Prendre en compte l'adéquation tâche / objectif / modalité de travail dans la préparation et l'analyse des situations.

• Concevoir et mettre en œuvre des outils ou des situations pour évaluer les apprentissages des élèves.

• Identifier, analyser et traiter les procédures et les erreurs des élèves (techniques, raisonnement, connaissances mathématiques mobilisées, résultats).

Adaptation de l'enseignement des mathématiques à différents publics et dans différents contextes

• Savoir jouer sur les variables pédagogiques et didactiques pour différencier les situations d'apprentissage en les adaptant aux connaissances / besoins/ difficultés des élèves.

• Concevoir et mettre en œuvre des adaptations pédagogiques et didactiques favorisant la construction des concepts mathématiques pour les élèves en grande difficulté scolaire ou en situation de handicap.

• Prévoir des aides qui ne dénaturent pas une situation mais qui permettent aux élèves de comprendre les enjeux des situations et leur permettent d'entrer dans un processus de résolution.

• Prendre en compte dans son enseignement des mathématiques la spécificité des cycles d'enseignement (école maternelle / école élémentaire) et de différents contextes (ZEP/REP ; classes multi-niveaux ; classes « dédoublées » ou à faible effectif ; classes en co-intervention…).

Langage et verbalisation

• Comprendre l'influence du langage de l'enseignant dans les apprentissages des élèves : qualifier les nombres en jeu (grandeurs dans des problèmes de mesure, objets de l'énoncé dans des problèmes arithmétiques) ou dissocier l'objet géométrique de l'objet matériel ou graphique qui le représente, lèvent les ambiguïtés et participent à la conceptualisation.

• Formuler une consigne dans un langage compréhensible par les élèves. Identifier différents types de difficultés de compréhension posées par les énoncés.

• Être conscient que l'interférence entre langage courant et langage mathématique peut conduire à des obstacles. Prendre en compte la polysémie de certains termes mathématiques pour lever les malentendus.

• Formuler une technique ou une procédure en s'appuyant sur les formulations des élèves pour aller vers des formulations mathématiques. Mettre en mots (à l'oral et à l'écrit) des éléments de savoir mathématique issus d'une situation d'apprentissage. Construire une trace écrite mathématique conforme et adaptée au niveau d'apprentissage.

• Connaître et prendre en compte le statut des différents écrits des élèves (écrits privés, écrits intermédiaires, écrits

publics).

Résolution de problèmes

• Prendre en compte différentes classifications de problèmes (problèmes pour apprendre / s'entraîner / chercher ; problèmes ouverts / fermés …) pour analyser, concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage utilisant la résolution de problèmes dans les différents moments de l'étude : découverte, entraînement, approfondissement, évaluation.

• Prendre en compte le rôle de l'usage du matériel dans la résolution de problèmes : représenter, anticiper, valider.

• Prendre en compte le rôle de la schématisation dans la résolution de problèmes : représenter, modéliser.

• Prendre en compte la diversité possible des solutions des problèmes proposés (unique, multiple, aucune) ainsi que la diversité des procédures de résolution possibles, pour analyser, concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage utilisant la résolution de problèmes.

• Concevoir et mettre en œuvre des résolutions de problèmes développant les compétences présentes dans les programmes : calculer, chercher, modéliser, raisonner, représenter, communiquer. Mobiliser ces compétences dans l'analyse et la description de l'activité mathématique des élèves.

Outils didactiques *

L'étude théorique de ces notions n'est pas un attendu : il s'agit de savoir les utiliser pour enseigner.

• Situation didactique.

• Processus engagés (dévolution, régulation, institutionnalisation). Milieu, rétroaction, situation d'action, situation de formulation, situation de validation.

• Variables didactiques. Analyse préalable, analyse *a priori*, analyse *a posteriori*.

• Contrat didactique.

• Tâches et types de tâches, techniques (ou procédures), justifications d'une technique (technologies).

• Connaissance et savoir.

• Dialectique outil/objet.

• Changement de cadres. Registres sémiotiques.

• Obstacles liés à l'enseignement des différents concepts mathématiques.

• Aides aux apprentissages : aides à visée constructive et procédurale. Adaptations. Zone proximale de développement.

Ressources pour enseigner

• S'approprier l'ensemble des ressources institutionnelles.

• Savoir analyser des propositions de manuels scolaires ou de documents pédagogiques pour faire des choix éclairés.

• Prendre en compte l'intérêt et les limites du jeu dans les apprentissages mathématiques. Savoir analyser un jeu du point de vue des connaissances mathématiques qu'il convoque. Concevoir et mettre en œuvre des situations s'appuyant sur des jeux.

• Prendre en compte l'intérêt et les limites des ressources numériques (logiciels, exerciseurs, applications) dans les apprentissages mathématiques. Savoir analyser une ressource numérique du point de vue des connaissances mathématiques qu'elle convoque. Concevoir et mettre en œuvre des situations s'appuyant sur des ressources numériques.

• Dans l'élaboration et la mise en œuvre des situations d'enseignement mettant en jeu du matériel, savoir poser des contraintes sur la manipulation pour conduire à une résolution mathématique.

• Savoir utiliser à bon escient les différents supports d'enseignement dans la mise en œuvre de situations mathématiques : affichage collectif, tableau, tableau blanc interactif, vidéoprojecteur, ardoise, cahiers (de brouillon, de leçon, de faits numériques…).

Bibliographie

Situations de formation

Organisation des apprentissages

COPIRELEM (2022). Jeu de rôles : un exemple sur le processus d'institutionnalisation. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.2*. ARPEME. 90-110.

COPIRELEM (2019). Jeu de rôles : un exemple sur l'aide à un élève dans le champ des nombres décimaux. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 83-109.

Résolution de problèmes

COPIRELEM (2022). Analyse de pratique à partir d'une vidéo : Comment favoriser l'engagement des élèves dans la résolution d'un problème ? *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.2*. ARPEME. 42-61.

HOUDEMENT C., PELTIER M-L. et BUTLEN D. (2003). La boîte du pâtissier*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.3*. ARPEME.47-55. http://www.arpeme.fr/documents/4A2ADD3FB32E4620459.pdf

PÉAULT H. (2003). La vache et le paysan*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.3*. ARPEME. 57-62. http://www.arpeme.fr/documents/32E4620459209AE838F.pdf

Jeu

SOSSA L. (2007). De l'utilisation des jeux du commerce en formation initiale et continue. Actes du 33e colloque COPIRELEM.

Ressources pour enseigner

COPIRELEM (2019). Analyse comparative de manuels concernant les activités d'introduction d'une notion : un exemple avec la notion d'aire. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 37-60.

Références théoriques

Pratiques

BUTLEN D. (2018). Problèmes rencontrés par les enseignants d'école primaire dans l'enseignement des mathématiques. Perspective historique. [Conférence en ligne] https://public.weconext.eu/academie-sciences/2018-12-12/video_id_002/index.html

CNESCO (2023). L'évaluation en classe, au service de l'apprentissage des élèves. *Recommandations du jury.* CNESCO-CNAM. https://www.cnesco.fr/evaluation-en-classe/

Adaptation aux différents publics et dans différents contextes

BROUSSEAU G. et WARFIELD V. (1999). The case of Gaël. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 7-52. [Traduction en ligne] http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/12/Le-cas-de-Gaël.pdf

COPIRELEM (2003). Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques pour des élèves en difficulté. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 201-218. http://www.arpeme.fr/documents/6367F5BA41367ED446.pdf

GIRMENS Y. et ANDRÉ F. (2003). Quelles activités à caractère mathématique en maternelle ? *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 15-32. http://www.arpeme.fr/documents/1EC6C82F46BD0196E8C.pdf

GIROUX J. (2015). Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : les apports de la didactique. *MathEcole*, 224, 4-7. https://www.revue-mathematiques.ch/files/7714/6288/8472/MathEcole_224.pdf

MILLON-FAURÉ K. et GOMBERT A. (2021). Analyse d'une situation en mathématiques pour une élève dyscalculique. Méthodologie pour la conception d'adaptations pédagogiques et didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 41(*2), 143–176. https://revue-rdm.com/2021/analyse-dune-situation-en-mathematiques-pour-une-eleve-dyscalculique/

PIERRARD, A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle.* Collection Projets pour l'école. Sceren - CRDP de l'académie de Grenoble.

TRUCHET J. (1993-1994). Le problème ouvert en classe de mathématique dans un Institut Médico-Pédagogique. *Grand N,* 54, 71-81. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/54n7_1562922745163-pdf

- **Manipulation**

BRIAND J. (2019). Manipuler en mathématiques … oui mais. *Au fil des maths, 231*. APMEP. http://ddm.joel.briand.free.fr/publi2/briandmanip.pdf

EYSSERIC P. (2014). Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques,* 517, 48-49. https://www.cahiers-pedagogiques.com/No-517-Tout-commence-en-maternelle. Vidéo : https://www.cahiers-pedagogiques.com/la-manipulation-en-maths-oui-ou-non-vous-en-pensez-quoi/

- **Résolution de problèmes**

ARSAC G., GERMAIN G. et MANTE M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

ARSAC G. et MANTE M (1983). Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle. *Petit x,* 2, 5-33. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/2x1_1570715019524-pdf

ARTIGUE M. (2018). Démarche d'investigation, problèmes ouverts… recherche didactique : une perspective historique. [Conférence en ligne] https://public.weconext.eu/academie-sciences/2018-12-12/video_id_001/index.html

BROUSSEAU G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. [En ligne] http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/84-11-R%C3%B4le-du-Ma%C3%AEtre.pdf

CHARNAY R. (1992-1993). Problèmes ouverts. Problèmes pour chercher. *Grand N* 51, 77-83. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/51n7_1562933425541-pdf

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

DUVAL R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT* (Trad. en Portugais M. T. Moretti), 8(1), 1-45. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p1/25140

GIRMENS Y. et PAUVERT M. (2003). La résolution de problèmes : une activité qui fragilise l'enfant ? *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 95-100. http://www.arpeme.fr/documents/7927939BB15F074459A8.pdf

GRUGNETTI L. et JACQUET F. (1997-1998). La résolution de problèmes par classes. *Grand N*, 61, 61-69. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/61n6_1562329267866-pdf

JULO J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/69n4_1555591199676-pdf

HERSANT M. (dir., 2006). *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*. IREM des Pays de la Loire et de Nantes.

HOUDEMENT C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, 63, 59-76. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/63n7_1562263743283-pdf

HOUDEMENT C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, 7-23. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/71n2_1555579413441-pdf

HOUDEMENT C. (2016). Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes. *Actes du 42e colloque COPIRELEM (Besançon 2015).* http://www.arpeme.fr/documents/15A56DADF39A6616269.pdf

HOUDEMENT C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-75. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100n3_1572699310489-pdf

LEPINE L. (1996-1997). Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche. *Grand N,* 60, 43-55. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/60n5_1562757269716-pdf

PELTIER M-L. (2003). À propos de la résolution de problèmes*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 89-93. http://www.arpeme.fr/documents/47B62A20017927939BB1.pdf

SANDER E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : Le cadre A-S3. *Pré-actes du séminaire de didactique des mathématiques, 2-3 fev. 2018*. IREM de Paris. 119-138. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS19029/IPS19029.pdf

VERGNAUD G. (dir. 1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Nathan.

- **Aides à la résolution de problèmes**

FAGNANT A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018,* Pilet, J. & Vendeira, C. (Eds). IREM de Paris-Université de Paris-Diderot. 94-113. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS19027/IPS19027.pdf

JULO J. (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes.

NGUALA J-B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45-63. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/76n4_1554802001438-pdf

- **Outils didactiques**

BROUSSEAU G. (1990-1991). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N*, 47, 93-114. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/47n6_1563175965946-pdf

BROUSSEAU G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. [En ligne] http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

CHEVALLARD Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(3), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

DORIER J.-L., GUEUDET G., PELTIER M.-L., ROBERT A. et RODITI E. (coord.) (2018). *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage*. Editions Belin.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique

DOUADY R. (2003). Enseignement de la dialectique outil-objet des jeux de cadre en formation mathématique des professeurs d'école*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.3*. ARPEME. 189-200. http://www.arpeme.fr/documents/1AC69D2A243B0037BC.pdf

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

RODITI E. et SALLES F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formation*, 86.87, 236-267. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01157937/document

VERGNAUD G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (2/3), 133-170.

- **Jeux mathématiques**

BOLON J. (2003). Comment analyser un jeu mathématique ? *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 77-82. http://www.arpeme.fr/documents/47E6CB5A1C2455C28BB1.pdf

EYSSERIC P., SIMARD A. et WINDER C. (2012). Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques, *Actes Colloque EMF 2012.* Genève. https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02052826/document

HAYE T. et BRONNER A. (2020). Outils d'analyse pour l'utilisation de jeux visant les apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. *Grand N*, 105, 39-63.

PELTIER M-L. (2000-2001). Les jeux mathématiques sont-ils la panacée à la démotivation des élèves ? *Grand N*, 67, 33-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/67n4_1555675396812-pdf

TRUCHET J. (1993-1994). Le problème ouvert en classe de mathématique dans un Institut Médico-Pédagogique. *Grand N,* 54, 71-81. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/54n7_1562922745163-pdf

Ressources institutionnelles

Spécificités des cycles d'enseignement

MEN (2005). Vers les mathématiques : quel travail en maternelle ? *Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP. 20-31. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2005). Articulation école/collège*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP. 89-96. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

- **Résolution de problèmes**

MEN (2005). Problèmes pour chercher*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 7-14. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2005). Résolution de problèmes et apprentissages*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP. 15-19. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MENJS (2021). Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. Les guides fondamentaux pour enseigner.* Eduscol.

MENJS (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyens*. Les guides fondamentaux pour enseigner.* Eduscol. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN22001/MEN22001.pdf

- **Jeux mathématiques**

MENESR (2015). *Ressources en maternelle. Jouer et apprendre*. https://eduscol.education.fr/document/13528/download

MENESR (2016). Les mathématiques par les jeux. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN16013/MEN16013.pdf

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

- **Organisation des apprentissages**

HOUDEMENT C. et PELTIER M-L. (1996-97a). Petit guide pour « fiche de prep » : Éléments pour construire une séance de mathématiques et rédiger la fiche de préparation (cycles 2 et 3 - école élémentaire)*. Grand N,* 59*,* 77-84. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/59n9_1562759772763-pdf

HOUDEMENT C. et PELTIER M-L. (1996-97b). Petit guide pour « fiche de prep » : Éléments pour construire une séance à dominante mathématique et rédiger la fiche de préparation (cycle 1)*. Grand N,* 60*,* 57-65. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/60n6_1562757425612-pdf

- **Ecole maternelle**

BRISSIAUD R. (2007). *Premiers pas vers les maths.* Retz

CHARNAY R., DUSSUC M.-P. et CHALLÉAT R. (2015) *Cap Maths GS. Guide de l'enseignant*. Hatier.

FENICHEL M.et MAZOLLIER M.S. (2014) *Mon année de maths PS/MS*. Sed.

FENICHEL M. et PFAFF N. (2015). *Mon année de maths GS*. Sed.

HERSANT M. et THOMAS Y. (2019). *Maths à grands pas, PS/MS et GS.* Retz.

VALENTIN D. (2015). *Découvrir le monde avec les mathématiques PS, MS, GS* (3 tomes). Hatier.

PIERRARD, A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle.* Collection Projets pour l'école. Sceren - CRDP de l'académie de Grenoble.

- **Résolution de problèmes**

BREGEON J.-L., DOSSAT L., HUGUET F., MYX H., PEAULT H. et VERGNAUD G. (dir.) (2001). *Le moniteur de mathématiques. Résolution de problèmes.* Cycle 3. Nathan.

CAMENSISCH A. et PETIT S. (2005). Lire et écrire des énoncés de problèmes. *Bulletin Vert APMEP,* 456, 7-20.

COPIRELEM (2021). *Mallette maternelle La construction du nombre.* ARPEME. [Téléchargeable avec une vidéo de présentation de la mallette] https://www.arpeme.fr/wordpress/mallette-maternelle/

ERMEL (2005). *Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes numériques*. (GS-CP-CE1-CE2-CM1-CM2). HATIER.

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3.* HATIER.

EYSSERIC P. (2003). Vivre un Atelier de Recherche en Mathématique. *Carnets de route de la COPIRELEM.t. 1*, ARPEME. 159-168. http://www.arpeme.fr/documents/1428296A646E3938D5A.pdf

FAGNANT A. et DEMONTY I. (2016). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! (10/12 ans).* De Boeck.

FAGNANT A., DEMONTY I. et HYNDRYCKX G. (2013). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! (5/8 ans).* De Boeck.

FAGNANT A., DEMONTY I. et LEJONG M. (2013*). Résoudre des problèmes : pas de problème ! (8/10 ans)*. De Boeck.

FLOC'H M. et PFAFF N. (2005). Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2 : le cas des comparaisons de mesures. *Grand N*, 75, 19-30. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/75n3_1554803486439-pdf

GIRMENS Y. (2003). Dis, fais-moi un dessin ! *Carnets de route de la COPIRELEM. t.1*. ARPEME. 115-120. http://www.arpeme.fr/documents/8C64AF07735A95C7A.pdf

DE GRAEVE R. et RANVILLE H. (1996). Les couleurs du carré magique. *Grand N,* 60, 17-31. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/60n3_1562757036169-pdf

VALENTIN D. (2015). *Découvrir le monde avec les mathématiques PS, MS, GS* (3 tomes). Hatier.

- **Jeux mathématiques**

MARTIN F. (2003). *Jeux mathématiques à l'école*. Canopé.

PIERRARD, A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle.* Collection Projets pour l'école. Sceren - CRDP de l'académie de Grenoble.

Nombres et calculs

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Approche du nombre	***Construction du nombre entier***	
• En lien avec les programmes, comprendre la dialectique entre le nombre outil pour résoudre des problèmes et le nombre objet d'étude.		
• Comprendre les différentes fonctions du nombre pour élaborer et mettre en œuvre des situations associées à celles-ci. Fonctions du nombre : mémoriser une quantité ; mémoriser une position ; comparer, ranger, encadrer, intercaler ; calculer (réunion de collections, partage d'une collection, complément d'une collection, distribution d'une collection ; déplacement sur une bande numérique).	• Nombre cardinal, nombre ordinal.	
Connaître les principales variables des situations et savoir les adapter en fonction des objectifs visés.		
Variables didactiques : tailles des collections ; collections déplaçables ou pas, visibles ou pas ; type de communication (à soi ou à autrui ; écrit ou oral)…		
• Dans l'élaboration et la mise en œuvre des situations d'enseignement, penser la manipulation dans un contexte de résolution de problème : représentation, anticipation, validation.		
• Connaître différentes procédures non numériques et numériques pour résoudre des problèmes : correspondance terme à terme, perception visuelle immédiate de la quantité (« subitizing », constellations), utilisation de la comptine numérique, par décomposition de la collection…	• Correspondance terme à terme. Équipotence. Enumération.	L'équipotence est une relation d'équivalence entre deux collections. La correspondance terme à terme permet de vérifier cette relation.
• Connaître le rôle de l'énumération dans toutes ces procédures.		
• Différencier le dénombrement par comptage et le comptage-numérotage.		
• Comprendre que le concept de nombre passe par la mise en évidence de différents types de représentations (analogiques, symboliques et auditivo-verbales) et par la compréhension de leurs liens (en particulier dialectique oral-écrit).	• Représentation des nombres.	Représentations analogiques, symboliques et auditivo-verbales. *Ce travail pourra s'appuyer sur l'histoire de l'écriture des nombres*.
• Prendre en compte le lien entre nombre et calcul : en prenant « un de plus » on obtient le nombre suivant (principe d'itération de l'unité).		
• Connaître et comprendre l'acquisition de la suite numérique orale.		
• Concevoir, savoir mettre en œuvre et faire évoluer des situations ritualisées (comptines et « calculines », jeux de doigts, jeux, rituels de vie de classe …) pour l'apprentissage du nombre.		

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Numération parlée et numération écrite chiffrée	***Systèmes de numération***	
• Comprendre qu'une première approche de la suite numérique écrite chiffrée repose sur son aspect algorithmique.	• Règles de fonctionnement des différents systèmes de numération écrite et parlée (numération de position ; numération hybride ; numération additive). Notion d'unité de numération.	L'étude de systèmes de numération de types additif, hybride ou positionnels avec différentes bases et en lien avec l'histoire des numérations, permet de prendre du recul sur ces savoirs naturalisés. L'utilisation de matériel de numération en formation (matériel multi-base, abaque, boulier) peut constituer un point d'appui pour ce travail.
• Comprendre que l'apprentissage de notre numération écrite en chiffres repose sur la compréhension de son principe positionnel ainsi que de son principe décimal. Connaître les difficultés rencontrées par les élèves dans l'interprétation de l'écriture chiffrée. • Comprendre que le fonctionnement de notre numération parlée repose sur la compréhension de ses caractéristiques et la connaissance de ses spécificités par rapport à la numération écrite chiffrée, y compris dans le cas particulier des grands nombres. Connaître les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération parlée et dans le passage entre numération parlée et numération écrite chiffrée. • Dans le prolongement du travail en maternelle, élaborer et mettre en œuvre des situations associées aux différentes fonctions du nombre visant notamment l'appropriation des règles qui sous-tendent les systèmes de numération parlée et écrite chiffrée. Exemples de situations : comparaison et dénombrement de « grandes » collections qui amènent à mobiliser les groupements par dix ; commande d'objets par 10, par 100… Connaître les principales variables des situations et savoir les adapter en fonction des procédures et des objectifs visés. Variables didactiques : tailles des collections ; organisation des collections (groupées, partiellement groupées, non groupées) ; collections manipulables, représentées ou évoquées ; commande avec ou sans contraintes sur les unités ; supports. • Connaître différents supports, leurs intérêts et leurs limites pour l'apprentissage de la numération (aspects de la numération mobilisés ou non par ces supports). Supports : matériel de numération (abaques, matériel multi-base, monnaie, jetons…), compteurs, calculatrice, bandes numériques et tableaux de nombres, droites graduées et spirales des nombres, tableaux de numération. Savoir utiliser ces supports à bon escient.	• Écriture des nombres dans des bases de numération positionnelle* (dont la base dix : écriture décimale). • Principe de position et principe décimal de la numération écrite chiffrée usuelle.	Une certaine virtuosité dans le passage d'une base de numération à une base autre que dix n'est pas un attendu.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• S'appuyer sur les savoirs de numération (principe de position et principe décimal) pour justifier des techniques posées de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, et de techniques de calcul réfléchi (en ligne, mental). • Mettre en lien les savoirs de numération avec des situations relevant de différents domaines : conversions de mesures de grandeurs dans le système métrique (en appui possible sur le tableau de numération) ; résolution de problèmes du champ additif ou multiplicatif.	• Liens entre numération décimale, calcul et conversions de mesures.	L'étude d'algorithmes de calcul non conventionnels peut permettre de mettre en jeu ces connaissances.
Fractions et nombres décimaux	***Nombres rationnels et ensembles de nombres***	
• Connaître et savoir mettre en œuvre une progression pour découvrir les nouveaux nombres que sont les nombres rationnels et leurs écritures : les fractions simples permettent de résoudre des problèmes que les nombres entiers ne peuvent pas résoudre ; l'étude des fractions, et notamment des fractions décimales, donne du sens à l'écriture à virgule des nombres décimaux. Savoir que cette progression respecte l'ordre d'apparition historique.	• Nombre rationnel, nombre décimal. Structuration des ensembles de nombres réels* : nombres entiers ; nombres décimaux ; nombres rationnels ; nombres irrationnels*.	Un travail exhaustif sur les ensembles de nombres n'est pas un attendu. Situer les nombres rationnels et en particulier les nombres décimaux, par rapport aux nombres entiers et aux nombres irrationnels permet d'en souligner les caractéristiques. Les ensembles de nombres permettent également d'aborder les notions d'inclusion et d'appartenance et de travailler le raisonnement logique. *Exemple : Si un nombre est décimal, alors il est rationnel, mais la réciproque est fausse.*
• Savoir élaborer et mettre en œuvre des activités permettant d'articuler les différentes représentations graphiques (partages de surfaces par exemple), ainsi que les désignations orales et écrites des nombres rationnels. Savoir s'appuyer sur des supports adaptés (bandes de papier, surfaces, droites graduées…) pour donner du sens au concept.	• Différentes écritures fractionnaires d'un nombre rationnel et en particulier d'un nombre décimal. Fraction irréductible. Ecriture décimale d'un nombre décimal, d'un nombre rationnel.	
• Savoir que la compréhension du concept de fraction s'établit avec la confrontation progressive (jusqu'à la fin du collège) aux différents sens auxquels réfère cette notion : fraction-partie d'un tout, fraction-mesure, fraction-quotient, fraction-ratio, fraction-opérateur. Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu la fraction-partie d'un tout et la fraction-mesure (de grandeur).	• Significations de la fraction $\frac{a}{b}$: fraction-partie d'un tout, fraction-mesure, fraction-quotient, fraction-ratio, fraction-opérateur.	
• Savoir que le travail sur les fractions à l'école repose non pas sur des techniques de calcul mais sur des représentations graphiques ou langagières qui s'appuient principalement sur le sens de la fraction comme mesure de grandeur par fractionnement d'une unité. • Savoir organiser son enseignement pour articuler les différents cadres des fractions et des nombres décimaux en prenant en compte leurs spécificités : grandeur, mesure, graphique (repérage sur la droite graduée), numérique.	• Égalité, comparaison de fractions. • Calcul fractionnaire : somme, différence, produit, quotient de fractions ; simplification de fraction.	Le calcul fractionnaire est un outil dans la résolution de problèmes numériques, notamment dans les problèmes arithmétiques, et dans le calcul algébrique. Il s'agit de savoir gérer un calcul exact mettant en jeu les écritures fractionnaires.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître différents supports, leurs intérêts et leurs limites pour l'apprentissage des fractions et des nombres décimaux et savoir les utiliser à bon escient (bandes, surfaces, droites graduées, tableaux de numération, monnaie, matériel multi-base, …).		
• Connaître et prendre en compte les obstacles liés à l'enseignement des nombres décimaux. • Connaître et prendre en compte les continuités et les ruptures entre nombres entiers et décimaux. • Savoir élaborer et mettre en œuvre des activités permettant d'articuler les différentes représentations (orales, écrites et graphiques) des nombres décimaux. • Savoir élaborer et mettre en œuvre des activités permettant de réinvestir les connaissances sur les nombres décimaux, notamment avec l'expression de mesures de grandeurs.	• Fraction décimale. Nombre décimal ; statut de la virgule. Statut des différentes écritures.	L'introduction des nombres décimaux est à mettre en lien avec l'approche historique. Les nombres décimaux sont définis à partir des fractions décimales : l'écriture à virgule est une convention d'écriture qui s'appuie sur les règles de la numération décimale de position.
• Connaître et prendre en compte les difficultés spécifiques au calcul avec les nombres décimaux	• Comparaison et opérations sur les nombres décimaux.	La comparaison de nombres décimaux met en lumière les règles de fonctionnement de cette numération. Les opérations sur les nombres décimaux prolongent la connaissance des techniques de calcul.
	• Notion de valeur approchée* (par défaut, par excès), troncature, arrondi. Ordre de grandeur*.	Ces notions interviennent dans l'expression du résultat d'un mesurage ou d'un calcul.
Techniques de calcul		
• Connaître les différentes formes de calcul en fonction des types de fonctionnements cognitifs (raisonné / automatisé) et des moyens envisagés (écrit (papier-crayon) / « de tête » /instrumenté). En comprendre l'intérêt pour une prise de recul sur le sens des nombres, la numération, le sens des opérations et comme points d'appui dans la résolution de problème. • Connaître et prendre en compte le rôle de la mémoire dans la pratique du calcul : appui sur les résultats mémorisés, mémorisation de stratégies (mémoire à long terme) ; limites de la mémoire de travail dans la mise en œuvre de stratégies de calcul. • Concevoir et mettre en œuvre une progression permettant de dépasser les procédures relevant du comptage, de mémoriser des faits numériques ainsi que des stratégies de calcul.		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations de calcul mental de différents types (découverte, automatisation, réinvestissement ou évaluation d'une technique ; rituels ; jeux ; « petits » problèmes oraux ou écrits…), permettant aux élèves de s'approprier	• Techniques de calcul mental et en ligne pour les quatre opérations. • Définitions des opérations (addition, soustraction,	Mettre en œuvre et analyser, en lien avec les propriétés sous-jacentes, des techniques de calcul mental ou en ligne variées et adaptées aux nombres en jeu est un attendu.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
et/ou d'automatiser des procédures variées. Connaître des activités et savoir les mettre en œuvre en jouant sur les variables didactiques. Variables didactiques principales : choix des nombres (champ numérique, relations entre les nombres, …) ; modalités de travail (oral ou écrit) ; temps de réponse ; matériel éventuel. • Prendre en compte la diversité des procédures de calcul et savoir les exploiter. Reconnaître les propriétés utilisées en acte par les élèves. Amener les élèves à un usage adapté et rigoureux des parenthèses et du signe « = ».	multiplication, division) et leurs propriétés : éléments neutres, commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	L'expression des étapes du calcul en ligne permet de mettre en évidence les propriétés des opérations en jeu, celles liées à la numération décimale ainsi que les différents sens du signe « = » (équivalence entre deux écritures, expression du résultat d'un calcul). Elle s'appuie sur les règles d'usage des parenthèses.
• Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu du calcul approché. Faire émerger des stratégies de calcul approché.	• Calcul exact, calcul approché.	Le calcul approché s'appuie sur la détermination de l'ordre de grandeur d'un résultat et met en jeu des connaissances de numération. Il est utile pour anticiper et contrôler le résultat d'un calcul. Le placement approché de nombres sur la droite numérique constitue une aide pour apprécier l'ordre de grandeur des nombres et choisir les arrondis appropriés dans un calcul.
• Concevoir et mettre en œuvre, pour chacune des opérations, une progression permettant de comprendre le fonctionnement d'une technique de calcul posé et débouchant sur une automatisation de cette technique. • Connaître différentes techniques de calcul posée de la soustraction, de la multiplication et de la division, les connaissances sur lesquelles elles s'appuient, leurs intérêts et limites. • Connaître différents matériels de numération et de calcul (matériel multi-base, abaque, boulier…), leurs intérêts et leurs limites pour l'apprentissage des techniques opératoires.	• Techniques de calcul posé pour les quatre opérations avec différents algorithmes : addition en colonnes ; soustraction 'par compensation' (ajout simultané d'un même nombre aux deux termes) ou 'par emprunt' (changement d'écriture du premier terme) ; multiplication posée usuelle française et technique *'per gelosia'* ; division posée usuelle française ou par 'soustraction de multiples du diviseur'.	Connaître, savoir utiliser et justifier les techniques usuelles de calcul posé et des techniques variées de calcul mental et en ligne est un attendu. La numération décimale et les propriétés des opérations permettent la justification mathématique des algorithmes opératoires. La découverte et la justification de techniques opératoires non usuelles (anciennes ou étrangères) permettent de prendre du recul sur les techniques utilisées aujourd'hui en France *(par exemple la multiplication de l'Egypte ancienne ou 'à la russe' (en appui sur les puissances de 2), la multiplication 'à traits' (méthode graphique), la soustraction 'à la russe', …)*. La droite numérique peut servir de point d'appui pour le calcul et pour aborder les techniques de la soustraction (méthode par compensation ou translation).
	• Division : quotient exact et approché. Division euclidienne : diviseur, dividende, quotient, reste.	La division opère sur les nombres rationnels alors que la division euclidienne n'est pas une opération car elle associe à un couple d'entiers naturels un autre couple d'entiers naturels (quotient, reste).

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
		Pour un usage cohérent du signe « = », l'écriture du type a = b × q + r est donc à privilégier.
• Connaître des moyens de contrôle des résultats obtenus et amener les élèves à les utiliser (recherche d'un ordre de grandeur du résultat, contrôle du chiffre des unités, vérification par une addition dans le cas de la soustraction ou par celle de l'égalité a = b × q + r dans le cas de la division).		
	• Diviseurs ; multiples. Critères de divisibilité (par 2, par 3, par 4, par 5, par 9, par 10). Nombres premiers. Décomposition en produit de facteurs premiers. Notions de PPCM* et PCGD*.	Pour le calcul du plus grand diviseur commun (PGCD), l'apprentissage de l'algorithme d'Euclide n'est pas attendu, la décomposition en produit de facteurs premiers étant suffisante pour produire le PGCD et pour en comprendre le sens.
• Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations utilisant des machines à calculer selon différentes fonctions (calculer, résoudre des problèmes, mettre en évidence des propriétés des opérations, vérifier un résultat).	• Calcul instrumenté à l'aide de machines à calculer et d'outils numériques.	Les machines à calculer peuvent être manuelles (abaque / boulier…) ou mécaniques (« Pascaline », compteurs …) . Parmi les outils numériques on distingue : la calculatrice, des logiciels de calcul (dont le tableur), des simulateurs numériques de machines à calculer.
	Calcul algébrique, calcul littéral, équations et inéquations*	*Les éléments cités constituent des outils mathématiques de base du socle commun. La virtuosité dans les calculs n'est pas un attendu.*
	• Calcul avec les puissances*. • Ecriture scientifique*.	Le calcul avec les puissances se fait en lien avec la compréhension des propriétés de la multiplication. Il est à mettre également en relation avec les unités de mesures d'aire ou de volume (cm^2 ; m^3 ; …), mais aussi avec la décomposition en unités de numération (écriture décimale), le travail sur les grands nombres entiers, ainsi que sur l'écriture scientifique. Les écritures scientifiques mettent également en jeu les nombres décimaux.
	• Calcul avec les racines carrées*.	Le calcul avec les racines carrées est à mettre en relation avec le théorème de Pythagore et le calcul de longueurs.
	• Résolution arithmétique, résolution algébrique de problèmes. Différents sens du signe =.	Résoudre des problèmes de différentes manières permet de prendre conscience que la mise en équation n'est pas le seul moyen à

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
		disposition. Certains problèmes se résolvent très bien autrement (par exemple par essai-erreur, par fausse-position…).
	• Equation du premier degré à une inconnue* ; système d'équations du premier degré à deux ou trois inconnues*. • Inéquation du premier degré à une inconnue*. Représentation de l'ensemble des solutions sur la droite numérique*.	La résolution d'équations ou d'inéquations du premier degré est un outil de la résolution de problèmes. Une résolution graphique de systèmes de deux équations à deux inconnues peut être envisagée. La virtuosité dans la résolution de systèmes d'équations n'est pas un attendu : notamment l'emploi de la technique de résolution par substitution est suffisant.
Problèmes arithmétiques		
• Connaître et savoir identifier les différents types de problèmes (basiques, complexes, atypiques) pour concevoir une progression prenant en compte leur articulation. Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations de résolution de problèmes arithmétiques. • Savoir identifier les sous-problèmes basiques dans un problème complexe pour analyser les procédures des élèves et proposer des aides adaptées. • Savoir identifier les difficultés liées à la formulation d'énoncés de problèmes et les prendre en compte afin d'anticiper les obstacles ou d'en proposer des reformulations adaptées.	• Résolution de problèmes relevant des quatre opérations par des procédures arithmétiques.	Les problèmes arithmétiques rencontrés justifient le besoin de techniques de calculs. Ils conduisent également à réinvestir des techniques de calcul.
• Connaître, savoir identifier et prendre en compte le champ conceptuel dont relève un problème. • Connaître la typologie des problèmes basiques du champ additif abordés à l'école (composition de mesure, transformation d'états, comparaison d'états, composition de transformations), pour concevoir une progression prenant en compte l'articulation des différents types de problèmes.		Les problèmes arithmétiques contribuent à donner du sens aux opérations.
• Connaître la typologie des problèmes basiques du champ multiplicatif (proportionnalité simple (multiplication, division-partition, division-quotition), comparaison multiplicative, produit de mesures (produits cartésien, configurations rectangulaires)). Concevoir une progression prenant en compte l'articulation des différents types de problèmes. Connaître et prendre en compte les deux sens de la multiplication (addition itérée et configuration rectangulaire) dans le choix des problèmes de multiplication proposés aux élèves. • Connaître, pour chaque type de problèmes, les procédures possibles et savoir les identifier pour analyser les productions des élèves, les hiérarchiser et organiser une mise en commun.		Les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle sont évoqués dans la partie proportionnalité. Ils mettent en jeu au moins deux étapes de calcul. La droite numérique apporte une conception géométrique de la multiplication et permet aussi d'amorcer la division.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître, pour chaque type de problèmes, les difficultés envisageables pour les prendre en compte. • Concevoir et mettre en œuvre des situations avec des problèmes atypiques conduisant les élèves à utiliser des procédures personnelles, par exemple par essai-erreur.	• Mise en équation de problèmes arithmétiques élémentaires*.	La mise en équation est un attendu pour savoir résoudre des problèmes.

Bibliographie

Situations de formation

Construction du nombre

COPIRELEM (2016). *Formation de formateur : construction du nombre en maternelle*. [Parcours M@gistere] https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1811&section=1

Numération

COPIRELEM (2015). *Numération à l'école primaire – Un scénario de formation*. ARPEME

TEMPIER F. (2015). *Enrichir l'apprentissage des nombres entiers en fin de cycle 2 et en cycle 3.* [Parcours M@gistere]. https://magistere.education.fr/reseau-canope/course/view.php?id=717&section=1

Fractions et nombres décimaux

ANSELMO B., DESSERTINE S. et ZUCCHETTA H. (2019). Des entiers aux décimaux : manipuler pour comprendre les opérations au cycle 3 ? Cas de la multiplication. *Actes du 45ème colloque COPIRELEM (Blois 2018).* 378-407. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO19019/IWO19019.pdf

BRIAND J., EURIAT J., HUET M-L., LECOQ R. et PELTIER M-L.(2003). Étude de la Disme de Stevin de Bruges*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 277-314. http://www.arpeme.fr/documents/6C1E32763546FE0A63DB.pdf

COPIRELEM (2019). Jeu de rôle : un exemple sur l'aide à un élève dans le champ des nombres décimaux. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 83-109.

Calculs

BATTON A., CHAMBRIS C., MELON I., FREGUIS G., RADOVANOVIC A. (2020). Défi calcul : un dispositif de formation de formateurs, d'enseignants, d'élèves au calcul mental. *Actes du 46ème colloque de la COPIRELEM (Lausanne 2019).* 242-266. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO20019/IWO20019.pdf

COPIRELEM (2012). *Calcul mental à l'école primaire.* ARPEME.

MASSELOT P., BUTLEN D., LASSIR A. et VILLEMONTEIX F. (2018). Enseigner la soustraction. [Parcours M@gistere]. https://magistere.education.fr/local/magistere_offers/index.php?v=formation#offer=60

PÉAULT H. et BUTLEN D. (2003). La division en formation initiale*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 381-406. http://www.arpeme.fr/documents/4550F1F8545AFD6641A8.pdf

Problèmes arithmétiques

ALLARD C., BUTLEN D., MASSELOT P. (2018). Dispositif d'accompagnement en mathématiques des enseignants d'un réseau REP+ : présentation et première analyse. *Actes du 44ème colloque COPIRELEM (Épinal 2017).* ARPEME. 283- 299. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO18019/IWO18019.pdf

PÉAULT H. (2003). La vache et le paysan*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.3*. ARPEME. 57-62. http://www.arpeme.fr/documents/32E4620459209AE838F.pdf

Références théoriques

Généralités sur nombres et calculs

CHAMBRIS C., TEMPIER F. et ALLARD C. (2017) Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères-IREM,* 108, 63-91.

CHARNAY R. (2013). *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ?* Hatier.

CHAROTTE F., EMPRIN F. et RAJAIN C. (2001). *Nombres et calcul cycle 2*. Bordas Pédagogie.

CNESCO (2015). *Conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire ».* Textes et vidéos des interventions. http://www.cnesco.fr/fr/numeration/

Construction du nombre

BRIAND J. (2017). Outillage pour organiser la construction des premiers nombres à l'école maternelle. [Communication du 7 juillet 2017]. http://ddm.joel.briand.free.fr/publi2/albi2.pdf

BRISSIAUD R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Retz.

BRISSIAUD R. (2013). *Apprendre à calculer à l'école.* Retz.

DORIER J.L. (2021). *S'il te plait, compte-moi les moutons !* (Carnets des sciences de l'éducation). Université de Genève.

FAYOL M. (2012). *L'acquisition du nombre*. J'ai lu.

MARGOLINAS C. et WOZNIAK F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique.* De Boeck.

RODITI E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre. *Spirale, Revue de recherches en éducation*, 36, 37-52.

Apport des sciences cognitives

FAYOL M. (2007). La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations. *Actes du séminaire national L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. MEN-DGESCO. 49-58. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/13/0/actes_maths_primaire_110130.pdf

FAYOL M. (2012). *L'acquisition du nombre.* Que sais-je ? Presses Universitaires de France.

RIVIER C. et SANDER E. (2021). Trois formes d'analogie guidant la résolution de problèmes. *Au fil des maths*, 542, 65-72. APMEP.

Numération écrite chiffrée

CHAMBRIS C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N, 89*, 39-70. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/89n3_1554192554699-pdf

MOUNIER E. (2016). *Numération et calcul au CP. Comprendre le nombre pour mieux résoudre des problèmes*. Retz.

TEMPIER, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N,* 98, 67-90. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/98n4_1552555468468-pdf

TEMPIER, F. (2020). Des pistes pour enseigner les grands nombres au cycle 3. *Grand N,* 105, 75–99.

Fractions et nombres décimaux

COULANGE L. et TRAIN G. (2017). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? *Actes du colloque Mathématiques en cycle 3,* B. Lebot & F. Vandebrouck (Dir). IREM de Poitiers. 143-156. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02514487/document

COULANGE L. et TRAIN G. (2018). Enseigner les nombres décimaux et les fractions, transitions (ou ruptures ?) primaire-secondaire. *Actes du colloque EMF 2018*. http://emf.unige.ch/files/8715/7546/4404/SPE2_COULANGE_TRAIN-actes_EMF_2018.pdf

GUILLE-BIEL WINDER C. (2017). Un jeu sur les fractions au cycle 3. *Petit x*, 103, 57-82.

MARGOLINAS, C. (2020). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N*, 106, 5-30.

RODITI E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactiques et de sciences cognitives 12*, 55–81.

ROUCHE N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Ellipses, l'esprit des Sciences.

- **Calculs**

BOULE F. (1998). Etapes du calcul mental. *Grand N*, 62, 15-34. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/62n3_1562313474918-pdf

BUTLEN D. (2007). *Le calcul mental, entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.

BUTLEN D. et PÉZARD M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. *Grand N,* 79*,* 7-32. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/79n2_1554796874332-pdf

- **Résolution de problèmes arithmétiques**

BRISSIAUD R. (2016). Situations, interprétation, stratégies et conceptualisation. Le cas des opérations arithmétiques. *Bulletin de psychologie*, 546, 423-431.

HOUDEMENT C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N,* 100, 59-78. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100n3_1572699310489-pdf

JULO J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/69n4_1555591199676-pdf

SIMARD A. (2022). Les divisions au prisme de la proportionnalité. *Petit x, 116*, 107-114. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/116x5_1661435936572-pdf

VERGNAUD G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N,* 38, 21-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/38n2_1563257743078-pdf

Ressources institutionnelles

- **Spécificités par cycle**

MEN (2010). *Le nombre au cycle 2.* Scéren. https://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

MEN (2012). *Le nombre au cycle 3 – Apprentissages numériques.* Scéren. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf

- **Calculs**

MEN (2005). Le calcul mental à l'école élémentaire*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 32-49. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2005). Le calcul posé à l'école élémentaire*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 50-54. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2005). Utiliser les calculatrices en classe*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 55-65. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2016). *Le calcul au cycle 3.* Eduscol. https://eduscol.education.fr/document/16504/download

MEN (2016). *Le calcul en ligne au cycle 3.* Eduscol. https://eduscol.education.fr/document/16507/download

MENJS (2021). Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. Les guides fondamentaux pour enseigner.* Eduscol.

- **Fractions et nombres décimaux**

MEN (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3.* Eduscol. https://eduscol.education.fr/document/16510/download

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

- **Construction du nombre**

BRIAND J., LACAVE LUCIANI M.J., HARVOUËT M., BEDERE D. et GOUA DE BAIX V. (1999). Enseigner l'énumération en MS, *Grand N*, 66, 7-22. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/66n2_1555676483474-pdf

BRIAND J., LOUBET M. et SALIN M.H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Hatier. [cédérom].

BRIAND C. et ROUX M.L (2021). La propriété d'addition dans la genèse du nombre. *Grand N*, 103, 41-56. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/103n2_1619032882347-pdf

BRISSIAUD R. et GRAEBLING E. (2015). *Album à compter PS, Album à calculer MS et GS*. Retz.

BUENO-RAVEL L. et LEPOCHE G. (2011). Situations de "référence" pour enseigner le numérique au cycle 2. *Actes du 38ème colloque COPIRELEM (Dijon 2011).* https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO12010/IWO12010.pdf

CHARNAY R., DUSSUC M.-P. et CHALLÉAT R. (2015) *Cap Maths GS. Guide de l'enseignant*. Hatier.

COPIRELEM (2021). *Mallette maternelle La construction du nombre.* ARPEME. [Téléchargeable avec une vidéo de présentation de la mallette] https://www.arpeme.fr/wordpress/mallette-maternelle/

ERMEL (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes GS*. Hatier.

FENICHEL M.et MAZOLLIER M.S. (2014) *Mon année de maths PS/MS*. Sed.

FENICHEL M. et PFAFF N. (2015). *Mon année de maths GS*, Sed.

HERSANT M. et THOMAS Y. (2019). *Maths à grands pas, PS/MS et GS.* Retz.

LAURENÇOT-SORGIUS I., VAULTRIN M. et BERGEAUT J.-F. (2008). *Évolution des compétences numériques en Grande Section. Autour du repérage des compétences dans les domaines mathématiques en cycle 1 et 2.* IUFM Midi-Pyrénées, Université de Toulouse, IREM de Toulouse. [DVD + livret d'accompagnement].

MARTIN F. (2003). *Jeux mathématiques à l'école*. Canopé.

PIERRARD, A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle.* Collection Projets pour l'école. Sceren - CRDP de l'académie de Grenoble.

VALENTIN D. (2015). *Découvrir le monde avec les mathématiques PS, MS, GS* (3 tomes). Hatier.

Site de J. BRIAND : http://ddm.joel.briand.free.fr

Site « Mathématiques en maternelle » (Briand C., Roux M.L., Briand J.) http://mathsenmaternelle.free.fr/

- **Numération**

BOILLEAUT C. et FENICHEL M. (2007). *La numération.* Bordas.

ERMEL (2016, 2019, 2021, 2022). *Les essentielles – Situations pour l'apprentissage de la numération et du calcul CP-CE1-CE2-CM1-CM2*. Hatier.

ERMEL (2005). *Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes numériques* GS-CP-CE1-CE2-CM1-CM2. Hatier.

Site de F. TEMPIER : http://numerationdecimale.fr

- **Fractions et nombres décimaux**

BAUDART F. et MAYENSON J.-B. (2018). *Numération et calculs, cycle 3. Comprendre les nombres pour mieux s'en servir.* Retz.

ANSELMO B. et ZUCCHETTA H. (dir.) (2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3. Fractions et décimaux*. Réseau Canopé, IREM.

ERMEL (2021, 2022). *Les essentielles – Situations pour l'apprentissage de la numération et du calcul-CM1-CM2*. Hatier.

GUILLE-BIEL WINDER C. (2019). *Le jeu des fractions*. ARPEME.

- **Calcul**

PELTIER M-L., AUBER P. et CLAVIÉ C. (2005). *Mosaïque - Calcul mental au cycle 2*. Hatier.

PELTIER M-L. et CLAVIÉ C. (2005). *Mosaïque - Calcul mental au cycle 3*. Hatier.

BONNET N. (2003). Multiplication en ZEP. Le jeu de Pythagore*. Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 227-244. http://www.arpeme.fr/documents/25BD0E1FFF476B39A35.pdf

MOUNIER E., GRAPIN N. et PFAFF N. (2020). Lire, écrire les nombres : quelle place dans l'apprentissage au cycle 2 ? *Grand N*, 106, 31-47.

- **Résolution de problèmes arithmétiques**

ALLARD C. et CAVELIER S. (2020). *Résoudre des problèmes, CM1/CM2*. Collection « Maths en ateliers ». Nathan.

GRANDCLEMENT M., ROUSSEL N., SIARD R. et XERCAVINS C. (2020). *Une démarche pour résoudre des problèmes arithmétiques au cycle 2.* Centre Alain Savary, IFE. http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/documents-smd/livret-demarche-pr-resoudre-des-pb-c2-4-rmc

PETIT S. et CAMENISCH A. (2016). *J'apprends à résoudre des problèmes cycle 2 et cycle 3* (2 tomes). Nathan.

VERGNAUD G. (1997). *Le moniteur de mathématiques, Résolution de problèmes cycle 2 et cycle 3* (2 tomes). Nathan.

Organisation et gestion des données numériques

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Dénombrement, statistiques et probabilités		
• Concevoir et mettre en œuvre des problèmes de recherche mettant en jeu du dénombrement.		Ces problèmes de dénombrement à l'école visent en particulier la maîtrise de l'énumération. Ils peuvent être mis en lien avec un sens de la multiplication.
	• Problèmes de dénombrement* ; représentations (arbre, tableau à double entrée) *.	Il s'agit avant tout d'arriver à donner du sens à la situation proposée et se donner les moyens pour organiser le dénombrement ainsi que pour communiquer avec clarté. Maîtriser les techniques de base du dénombrement s'avère indispensable pour dénombrer les cas possibles et les cas favorables dans les calculs de probabilités. En revanche ni les combinaisons, ni les arrangements, ni les permutations ne sont des attendus.
• Concevoir et mettre en œuvre des situations, en lien avec les autres disciplines, permettant de lire des tableaux, graphiques ou diagrammes, d'organiser et d'exploiter des données de nature variée à l'aide de ces outils.	• Diagrammes (en bâtons, circulaires, histogrammes)**.** Tableaux. Indicateurs statistiques (moyenne, médiane, fréquences)*.	***Il ne s'agit pas d'approfondir les éléments de statistique ou la théorie des probabilités mais de savoir manipuler quelques notions de base utiles pour enseigner.*** A mettre en lien avec les fractions et avec les pourcentages L'utilisation d'un tableur (comme outil professionnel) pour gérer des données, calculer des sommes, des moyennes, des médianes ou des fréquences, est un attendu. Le calcul d'écart-type n'est pas un attendu.
	• Approche du concept de hasard. Notions de probabilité élémentaire*. Arbre des possibles*, arbre pondéré*, tableau à double entrée.	A mettre en lien avec les fractions et les pourcentages. Le vocabulaire (expérience aléatoire, événement, issue ; probabilité d'un événement ; fréquence) pourra être introduit.
Proportionnalité et fonctions		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations permettant de distinguer les problèmes pouvant être modélisés ou non par la proportionnalité.		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu la proportionnalité dans différents cadres (géométrique, grandeurs, numérique) et différents contextes.	• Différents points de vue : fonctionnel, graphique, géométrique, numérique.	Exprimer un problème de proportionnalité en termes de fonction linéaire est un attendu. A mettre en lien avec les fractions.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître les procédures de résolution de situations de proportionnalité utilisables à l'école élémentaire. • Connaître et prendre en compte les obstacles liés à l'enseignement de la proportionnalité. • Concevoir et mettre en œuvre des situations illustrant ou réinvestissant le concept de proportionnalité dans d'autres disciplines.	• Maitrise des propriétés de linéarité (additivité, multiplicativité). Notion de coefficient de proportionnalité.	Justification des différentes procédures de résolution de problèmes de proportionnalité (propriétés additive et multiplicative, retour à l'unité, coefficient de proportionnalité) et expression en termes de fonctions linéaires.
	• Vitesse moyenne.	Concevoir la différence entre vitesse moyenne et vitesse constante. La vitesse est exprimée en km/h ou en m/s.
	• Prix massique, prix volumique, ou prix à la pièce.	Les problèmes de comparaison de prix massiques, volumiques ou de prix à la pièce fournissent l'occasion de nombreux problèmes concrets. Le prix massique est généralement exprimé en €/kg ou en €/g.
	• Pourcentage.	L'interprétation de pourcentages peut être mise en lien avec la représentation de données.
	• Échelle. Agrandissement et réduction de figures : propriétés de conservation (angles, rapport de mesure), effet sur les aires et les volumes.	Les notions géométriques d'agrandissement, réduction sont travaillées en lien avec le théorème de Thalès. E*xemple : construction et utilisation du guide-âne*.
	• Fonctions linéaires : propriétés* ; représentation graphique*.	L'étude théorique des fonctions linéaires n'est pas un attendu : les fonctions linéaires en jeu doivent être explicitées dans le contexte d'un problème de proportionnalité qu'elles modélisent. Par exemple, retrouver l'écriture de la fonction connaissant un point de passage sur une représentation graphique, n'est pas un attendu.
Représentations de données numériques		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu des représentations de données numériques (graphiques, diagrammes en bâtons, circulaires ou semi-circulaires, tableaux en deux ou plusieurs colonnes, à double entrée).		Les tableaux, comme les graphiques peuvent être utilisés pour représenter des situations modélisées par la proportionnalité ou non.
	• Recherche d'images et d'antécédents*. Maximum, minimum*. Croissance, décroissance*. • Vocabulaire : origine, abscisse, ordonnée.	La représentation graphique des fonctions peut être associée à des données produites sur un tableur. Elle met en jeu des compétences relatives au repérage.

Bibliographie

Situations de formation

- **Proportionnalité**

HOUDEMENT C. et PELTIER M-L. (2003). Etude du format A4. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 261-267. http://www.arpeme.fr/documents/317F70A5475CE024B4B.pdf

PÉAULT H. (2003). Proportionnalité. - *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 245-259. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO03054/IWO03054.pdf

Références théoriques

- **Proportionnalité**

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37–127. https://revue-rdm.com/1981/problemes-de-didactique-des/

PFAFF N. (2003). Différencier par les procédures : un exemple pour la proportionnalité au cycle 3. *Grand N*, 71, 49-59. IREM de Grenoble. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/71n4_1555579903457-pdf

SIMARD A. (2010). Partie 5 - Proportionnalité au cycle 3. *Le nombre au cycle 3*. Scéren-CRDP. 64-74.

SIMARD A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*, 89, 51-63. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/89x4_1560764826781-pdf

SIMARD A. (2012b). Le concept de proportionnalité dans la liaison CM2-Sixième. *Petit x*, 90, 35-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/90x2_1560764010382-pdf

SIMARD A. (2022). Les divisions au prisme de la proportionnalité. *Petit x, 116*, 107-114. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/116x5_1661435936572-pdf

VOISIN S. (2014). L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM, Université Paris 7. 200-218.

- **Probabilités et statistiques**

KUZNIAK A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères IREM,* 61, 19-35. https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/61_article_421.pdf

KUZNIAK A., TAVEAU C. (2009). Comment favoriser le développement du raisonnement statistique à l'école primaire ? *Actes du 36ème colloque COPIRELEM (Auch 2008)*. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO10027/IWO10027.pdf

PARSYSZ B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 127-147.

- **Représentation de données numériques**

BOLON J. (1998). Des graphiques en fin d'école primaire. *Grand N*, 64, 39-58. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/GN/IGR98016/IGR98016.pdf

Ressources institutionnelles

MEN (2016). *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3.* Eduscol. https://eduscol.education.fr/ressources-2016

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

- **Proportionnalité**

BONNET N. (2011). *La proportionnalité sans problème*. Canopé.

ERMEL (2010). Thème 4, module 2- problèmes de proportionnalité. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – CM1 Cycle 3*. Hatier. 199-231 et 260-287.

ERMEL (2010). Thème 3, module 2- problèmes de proportionnalité. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – CM2 Cycle 3*. Hatier. 217-239 et 281-345.

ERMEL (2021, 2022). *Les essentielles – Situations pour l'apprentissage de la numération et du calcul CM1-CM2*. Hatier.

MORIN C. (1988). Le puzzle (d'après une idée de G. Brousseau). *Petit x,* 17, 49-56. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/17x4_1570446929057-pdf

Grandeurs et mesures

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Grandeurs fondamentales et leurs mesures		
• Comprendre que la construction du sens de chacune des grandeurs étudiées à l'école repose sur des activités de classement et de comparaison (directe puis indirecte) permettant de définir les relations « avoir même … que… », « être plus … que … », « être moins … que… » . Mettre en œuvre la transitivité des relations (relation d'équivalence ou relation d'ordre). • Comprendre l'importance, pour chaque grandeur, de premières activités indépendantes de la mesure. • Comprendre l'intérêt de travailler avec des unités non conventionnelles avant d'introduire le système international de mesures. • S'approprier et mettre en œuvre des problèmes prenant en compte la progressivité de l'apprentissage des notions de longueur, aire, masse, volume, angle, en jouant sur les variables didactiques. Variables liées à la mobilité des objets, au mode de communication, à l'objet-étalon, aux instruments de mesure.	• Compréhension du concept de grandeur* et de mesure* (relation d'équivalence* ; additivité ; relation d'ordre* ; transitivité*) ; grandeurs repérables* ; grandeurs mesurables*. Dissociation grandeur / mesure. Homogénéité des expressions d'égalité entre grandeurs.	Les différences (et les relations) entre les objets matériels ou géométriques, les grandeurs (classes d'équivalence d'objets) et les nombres (mesures de grandeurs) sont à mettre en évidence : - une grandeur est une caractéristique d'un objet et plusieurs grandeurs peuvent être associées à un même objet ; - une mesure (de la grandeur d'un objet) se définit comme le rapport de la grandeur de l'objet avec la grandeur d'un objet-étalon ; plusieurs mesures peuvent être associées à une même grandeur selon l'unité choisie. La prise de conscience des abus de langage *(Exemple : « Ce stylo mesure 15 cm » au lieu de « Ce stylo a pour longueur 15 cm »),* qui masquent parfois la distinction entre grandeur et mesure, est un attendu. L'expression des calculs avec les unités de mesures permet de lever toute ambigüité sur les grandeurs en jeu. La température et le repérage du temps fournissent des exemples de grandeurs repérables mais non mesurables.
• Comprendre l'importance de pratiques effectives et variées de mesurage pour s'approprier le concept de mesure (report de l'étalon, utilisation d'un instrument), ainsi que d'autres moyens d'obtention de la mesure (par estimation ou calcul) avec une unité adaptée. • Comprendre l'importance d'associer l'ordre de grandeur des unités usuelles à quelques objets familiers. • Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu les différentes grandeurs en lien avec d'autres disciplines (sciences, EPS…).		L'incertitude liée au mesurage conduit à faire la différence entre mesure théorique et mesure empirique.
• Comprendre l'importance de ne pas systématiser prématurément l'usage du tableau de conversion pour réaliser des conversions de mesure et de s'appuyer sur certaines relations de référence (comme 1 km = 1 000 m ou 1 L = 100 cL).	• Système métrique. Construction et utilisation d'un tableau de conversion.	Le travail sur des systèmes d'unités de mesure (anciens ou étrangers) en dehors du système métrique permet de conceptualiser la notion d'unité de mesure, de travailler les conversions et est à mettre en lien avec la proportionnalité.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Prendre en compte l'importance de mettre en relation les règles du système métrique (longueur, masse, aire, volume) avec le fonctionnement de la numération décimale de position .	• Notion de grandeur quotient.	L'étude de l'évolution de la définition du mètre au cours du temps peut permettre d'aborder les liens entre les différentes unités du système métrique. Le travail sur les grandeurs est relié au travail sur la proportionnalité, en particulier en ce qui concerne les grandeurs-quotient (problèmes de vitesse, de pourcentages, de prix massique ou volumique, de prix à la pièce)
Longueur		
• Savoir que la relation « avoir même longueur » s'introduit par des activités de comparaison (débutées en maternelle). • Connaître des instruments qui permettent de comparer (directement ou indirectement) ou de mesurer des longueurs (gabarit, mètre-ruban, pied à coulisse, laser, …). • Connaître et prendre en compte les difficultés liées à l'utilisation de la règle graduée (place du zéro, passage de la graduation à l'expression de la longueur).	• Longueur et mesure de longueur. • Principales unités de longueur et leurs relations (mm, cm, dm, m, dam, hm, km).	
• Savoir et prendre en compte que le travail sur le périmètre débute par des activités d'addition de longueurs, l'utilisation de formules venant bien après.	• Périmètre d'une figure géométrique. • Formules du périmètre du rectangle, du carré, du cercle.	Le périmètre est une longueur particulière mais ne constitue pas une grandeur mesurable (la somme des périmètres de deux surfaces n'est pas forcément le périmètre de l'assemblage de ces surfaces).
Aire		
• Savoir que la relation « avoir même aire» s'introduit par des activités de comparaison de surfaces : comparaisons directes (par découpage-recollement sans perte ni superposition, par inclusion/superposition) ou indirectes (à l'aide d'un gabarit ou de papier calque).	• Principe de conservation des aires. Principe d'additivité des aires.	Contrairement au langage usuel, en mathématiques on dissocie la surface (objet géométrique bidimensionnel) de l'aire (grandeur).
• Savoir et prendre en compte que chaque unité d'aire peut être associée à des étalons de diverses formes (par exemple 1 cm^2 est l'aire d'un carré de 1 cm de côté, ou d'un rectangle de 0,1 cm de largeur et 10 cm de longueur, ou encore d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont 2 cm et 1 cm, …). • Connaître et prendre en compte les aspects unidimensionnels et bidimensionnel de la grandeur aire : pavage d'une surface par un étalon-unité (aspect unidimensionnel), calcul d'aire comme produit de longueur (aspect bidimensionnel).	• Principales unités d'aire et leurs relations (mm^2, cm^2, dm^2, m^2, dam^2, hm^2, km^2) . • Principales unités agraires (are, hectare, centiare) et leurs relations avec les unités d'aires usuelles. • Calcul d'aires* ; connaissance de la formule de l'aire du carré, du rectangle, du triangle, du disque.	Les unités agraires sont en lien avec l'aspect unidimensionnel de la grandeur (1 ha = 100 a), alors que les unités usuelles sont associées à son aspect bidimensionnel (1 hm^2 = 100 m × 100 m). Les formules de l'aire du parallélogramme ou du trapèze ne sont pas un attendu mais doivent pouvoir être retrouvées par découpage-recollement sans perte ni chevauchement et à partir des propriétés de la grandeur aire.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître et prendre en compte la difficulté à isoler l'aire d'une surface, d'autres grandeurs relatives à celle-ci, notamment son périmètre.	• Dissociation aire/périmètre.	
Volume / Contenance		
• Savoir que la relation « contenir autant que » (contenance) s'appréhende par des activités de comparaison de récipients par transvasement. Savoir que la relation « avoir même volume » s'appréhende par des activités de comparaison de solides par immersion.	• Distinction volume / contenance (capacité).	
• Connaître des modalités de mesurage des volumes et des capacités (verre mesureur, remplissage à l'aide d'un objet étalon).	• Calcul de volumes* ; formules du volume du cube, du parallélépipède rectangle. • Principales unités de volume et leurs relations (mm^3, cm^3, dm^3, m^3). Principales unités de contenance et leurs relations (mL, cL, dL, L, daL, hL). • Lien entre L et dm^3. • Lien entre litre d'eau et kilogramme d'eau.	Connaître les formules génériques du type « $aire(base) \times hauteur$ » et « $\frac{1}{3} \times aire(base) \times hauteur$ » et savoir les appliquer à bon escient est un attendu. Les formules du volume de la boule ou de celui de chacun des autres solides ne sont pas des attendus. Les notions de volume et de contenance sont liées : 1 L est la contenance d'un cube de 1 dm de côté.
• Connaître et prendre en compte la difficulté à isoler le volume d'un solide, d'autres grandeurs relatives à celui-ci (notamment masse, longueur, aire).	• Dissociation volume/masse, volume/longueur, volume/aire.	
Masse		
• Savoir que la relation « avoir même masse » s'introduit par des activités de comparaison (débutées en maternelle). • Connaître des instruments qui permettent de comparer (directement ou indirectement) ou de mesurer des masses (balances Roberval, numérique…). • Connaître et prendre en compte la difficulté à dissocier la masse et le volume.	• Masse et mesure de masse. • Principales unités de masse et leurs relations (mg, cg, dg, g, dag, hg, kg, t).	
Structuration du temps : repérage du temps et durée		
• Connaître et prendre en compte les principaux aspects de la notion de temps : simultanéité – succession ; rythme- périodicité ; temps qui passe. Comprendre le rôle des activités rituelles dans la structuration du temps. • Connaître et prendre en compte les différents types de temps (micro-temps, méso-temps, macro-temps). • Connaître et prendre en compte la relation temps-espace : la représentation du temps prend appui sur des représentations spatiales.		

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître et prendre en compte les spécificités de la comparaison selon la relation « avoir même durée ». • Connaître une diversité d'outils associés au temps ainsi que leurs spécificités (sabliers, horloges, calendriers, clepsydre, cadrans solaires…). • Connaître et prendre en compte les difficultés liées à la lecture des différentes représentation du temps : frise chronologique ; représentations analogique et digitale pour la lecture de l'heure. • Connaître et prendre en compte les difficultés spécifiques liées aux conversions de durées dans des systèmes non décimaux.	• Grandeurs associées au temps ; unités conventionnelles de mesure de durée et leurs relations (h, min, s, jour, semaine, mois, an). • Calcul de mesures de durées.	La durée (différence entre deux instants) est une grandeur mesurable alors que le temps (repérage des instants) ne l'est pas. Le travail sur des instruments anciens ou sur la mesure du temps à travers l'histoire permet d'enrichir ces concepts. Le système des unités de mesure de durées (h, min, s) est sexagésimal. Il fournit l'occasion de travailler différentes écritures d'une même mesure (écriture complexe, écriture à virgule). *Exemple :* *1 h 30 min = 1,5 h*.
Angle		L'angle est une grandeur géométrique associée à un secteur angulaire (appelé aussi « angle » par abus de langage à l'école primaire). Le degré est la seule unité de mesure attendue. La connaissance de quelques mesures est attendue, en lien avec quelques polygones particuliers (rectangle, triangle équilatéral) ou la relation d'alignement (angle plat).
• Comprendre que la définition de la relation « avoir même angle » s'appuie sur des activités de comparaisons de secteurs angulaires : comparaisons directes (par superposition) ou indirectes (à l'aide d'un gabarit ou de papier calque).	• Angle et secteur angulaire*. Mesure d'angles*.	

Bibliographie

Situations de formation

FÉNICHEL M. et PFAFF N. (2005). *Donner du sens aux mathématiques. Tome 2. Nombres, opérations et grandeurs.* Bordas Pédagogie.

COPIRELEM (2019). Homologie-transposition : un exemple sur l'introduction de la notion d'aire. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 19-36.

COPIRELEM (2019). Analyse comparative de manuels concernant les activités d'introduction d'une notion : un exemple avec la notion d'aire. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 37-60.

LE BERRE M. et TAVEAU C. (2003) Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 209-221. http://www.arpeme.fr/documents/396B27C5F2546758FA4F.pdf

Références théoriques

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1994-1995). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N*, 56, 69-116. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR94030.htm

BERTY-RENE L. et MUNIER V. (2006). L'utilisation d'un problème spatial en astronomie peut-elle favoriser l'apprentissage du concept d'angle ? *Grand N*, *77*, 73-89. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR06010.htm

BOULE F. ET EBERHARD M. (2003). Histoires de mesures et système métrique. *Grand N*, 72, 75-82. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR03023.htm

BRIAND J., COLMEZ F. et BROUSSEAU G. (2003) Autour du thème de la mesure... *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 193-198. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWO03049.htm

BRISSIAUD R. (1994). La construction du temps chez l'enfant. *Livre du maître « J'apprends les maths GS »*. Retz.

CHESNAIS A. et MUNIER V. (2015). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. *Actes du séminaire national de l'ARDM.* https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAR/AAR16014/AAR16014.pdf

DE LIGT F. et *al.* (2018). 1793, la révolution du temps. *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3,* M. Moyon & D. Tournès (dir.). 148-171. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWH18023.htm

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 387-424.

IREM MONTPELLIER (2003). Équilibre et balance en CE2. *Grand N*, 43, 31-49. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR88011.htm

MOLVINGER K. (2014). L'enseignement du concept de volume en CM2. *Actes du 40e colloque COPIRELEM (Nantes 2013).* https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO14028/IWO14028.pdf

PIAGET J. et INHELDER B. (2004 réed.) *La psychologie de l'enfant.* Que Sais-je ? Presses universitaires de France.

ROUCHE N. (1992). *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels.* Didier Hatier.

ROUCHE N. (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères-IREM*, 15, 25-36. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWR97098.htm

TROUDET M. et *al.* (2018). Et si nous mesurions la cour de l'école ? Expériences d'arpentage. *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, M. Moyon & D. Tournès (dir.). 172-199. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWH18023.htm

TREINER, J. (2011). Variabilité, incertitude, erreur. *Actes des 18ème et 19ème colloques de la CORFEM*, M. Gandit et B. Grugeon-Allys (dir.). Université et IUFM de Franche-Comté. 103-108. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWF12020.htm

Ressources institutionnelles

MEN (2005). Grandeurs et mesures à l'école élémentaire. *Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 78-88. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 2*. SCEREN. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/69/5/RA16_C2_MATHS_grandeur_et_mesures_doc_maitre_587695.pdf

MEN (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 3*. SCEREN. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

COILLOT, J. (2019). *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les matériaux pour expérimenter* (fascicule 1 : CM1-CM2). IREM de Poitiers.

HENRY V. LAMBRECHT P. et VAN GEET P. (2012). Maths & Manips : introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages. *Actes du 38ème colloque COPIRELEM (Dijon 2011).* http://www.arpeme.fr/documents/1AEF722A562EB7AB4A67.pdf

IREM Poitiers (2018). *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les angles*. IREM de Poitiers. http://irem.univ-poitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=article&id=202&catid=53&Itemid=60.

SANDER T. (2002). Familiarisation avec les poids à l'école maternelle. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. CREM. 17-27.

Espace et géométrie

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Structuration de l'espace : repérage et déplacements		
• Concevoir et mettre en œuvre différents types de problèmes relatifs au repérage ou au déplacement dans l'espace (décrire, représenter, communiquer des positions ou des déplacements ; reproduire une organisation spatiale ou un déplacement ; réaliser un déplacement ou une organisation spatiale à partir d'une description ou d'une représentation), en s'appuyant sur des moyens de communication appropriés (instruction orale, écrite - texte, schéma, codage…).		
• Prendre en compte la relation temps-espace : la succession d'actions lors d'un déplacement est indissociable de la temporalité.		
• Connaître les différents types d'espace* (micro-espace, méso-espace, macro-espace) et leurs caractéristiques* et prendre compte leur articulation pour concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage relatives à l'espace.		
• Être conscient de l'importance de l'articulation entre action, langage et représentation et la prendre en compte pour concevoir et mettre en œuvre des situations d'apprentissage relatives à l'espace.		
• Prendre en compte le fait que l'apprentissage de l'espace passe à la fois par des situations vécues, des situations transposées (maquette, figurines, …) et des situations représentées (par le langage, des photos, des images, des plans…) ainsi que par le passage de l'une à l'autre.		
• Prendre en compte les différents types de repérage pour organiser une progression.		Les activités de repérage peuvent se baser sur l'utilisation d'instructions de déplacement notamment dans le cadre d'activités de programmation ou de situations d'informatique débranchée. Elles conduisent à articuler différents espaces (macro, méso, micro espaces) à l'aide de différents repères (absolus ou relatifs).
• Concevoir des situations d'apprentissage relatives à l'espace : - repérages relatifs avec repères subjectifs (par rapport à soi) ; - repérages relatifs avec repères objectifs (par rapport à un objet orienté ou non) ; - repérages absolus (indépendamment du sujet et des objets).		
• Prendre en compte les procédures spécifiques de repérage selon les différents types d'espace : micro / méso / macro-espaces (deux ou trois dimensions), espace de la feuille de papier (deux dimensions), ligne orientée (une dimension).	• Codage/coordonnées d'une case ou d'un point sur un quadrillage.	La lecture d'un tableau à double entrée, la reproduction d'une figure sur papier quadrillé, la construction d'une figure symétrique d'une autre par rapport à un axe, la lecture de graphiques, mettent en jeu des connaissances relatives au repérage sur quadrillage.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Connaître et prendre en compte différents moyens de communication de repérage, pour soi (mémorisation) ou pour autrui, à l'oral ou à l'écrit : liste de repères (devant l'école …) ; expression des localisations selon le repère choisi (devant toi, à gauche de la porte …) ; codage d'un déplacement par des mots à droite …) ou des signes écrits (flèches, …) ; coordonnées par rapport à un repère absolu. Prendre en compte le fait que le codage est une convention de repérage (établie en situation).	• Coordonnées d'un point dans un repère cartésien*.	Le travail sur les coordonnées d'un point dans un repère cartésien (orthonormé) se fait en lien avec la représentation graphique d'une fonction. Le vocabulaire abscisse, ordonnée, origine est le seul attendu.
• Savoir que la droite numérique se construit en faisant le lien entre un point et un nombre (l'abscisse du point est un nombre, mesure de la distance de ce point à l'origine). Savoir que le passage de la bande numérique à la droite numérique met en jeu le passage du discret au continu.	• Repérage sur la droite numérique.	La droite numérique peut servir de point d'appui pour le calcul et pour apprécier l'ordre de grandeur des nombres.
Géométrie des solides		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations conduisant à une première forme d'abstraction : passer des solides sociaux et des maquettes pour considérer les objets géométriques comme un ensemble de propriétés mathématiques (nombre et nature des faces, nombre d'arêtes, longueur des arêtes, nombre de sommets).	• Polyèdres*/non polyèdres*. Cube ; parallélépipède ; pyramide* ; prisme* ; cylindre droit* ; cône droit* ; boule*. Notions de face, arête, sommet.	Connaître les caractéristiques des prismes (dont parallélépipèdes et cubes), et pyramides, en termes de faces, arêtes, sommets est un attendu. Connaître la classification des principales familles de solides est un attendu. La notion de polyèdre régulier peut être abordée en évoquant les solides de Platon. La relation d'Euler peut être rencontrée mais sa connaissance n'est pas un attendu.
• Concevoir et mettre en œuvre différents types de problèmes en fonction des objectifs d'apprentissages géométriques visés : classer, décrire, reproduire, représenter, reconnaître, construire.		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations qui mettent en lien différents types de représentation des solides (empreintes, patrons, « squelettes » de solides, points de vue, perspective cavalière) dans différents environnements (espace sensible, environnement papier-crayon ou numérique).	• Problèmes de description, de reproduction, de construction, de représentations de configurations de l'espace * (perspective cavalière* ; patron* ; points de vue*). Patrons du cube, du parallélépipède rectangle, de la pyramide, du prisme droit.	Les problèmes de construction de polyèdres mettent en jeu des assemblages de faces (avec du matériel type Polydron©), d'arêtes (avec des pailles et du fil) ou d'arêtes et de sommets (avec des tiges et des boules de pâte à modeler ou du matériel type Géomag©).
• Connaître les principales variables des situations et savoir les adapter en fonction des objectifs visés. Variables didactiques : solide déplaçable ou pas, visible ou pas ; type de communication (à soi ou à autrui ; écrit ou oral) ; représentation donnée ou à réaliser ; matériel ; environnement de travail et/ou supports.		Reconnaître et réaliser un patron d'un cube, d'un parallélépipède rectangle, d'une pyramide ou d'un prisme droit à partir d'une représentation en perspective est un attendu. Connaître par cœur les onze patrons du cube n'est pas un attendu ; les retrouver constitue un exercice judicieux de combinatoire.
• Avoir conscience et prendre en compte la polysémie de certains termes (« face », « arête », « sommet ») et des difficultés liées au vocabulaire de la géométrie plane (« côtés » au lieu de « arêtes » ou « faces » ; « carré » au lieu de « cube »…).		Connaître les conventions de la perspective cavalière et être capable de les interpréter sont des attendus. Construire une représentation en perspective cavalière d'un solide n'est pas un attendu.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
	• Positions relatives de points, droites et plans *.	Associer différentes vues (de droite, de gauche, de dessus, de dessous, de face) à un assemblage de solides est un attendu. L'utilisation dans l'espace du théorème de Thalès n'est pas un attendu. Reconnaître et utiliser le parallélisme et l'orthogonalité de droites dans l'espace, l'orthogonalité d'une droite par rapport à plan, les notions de plan et de points coplanaires sont des attendus. Les relations d'inclusion et d'appartenance sont des outils permettant le travail sur les positions relatives des différents objets de l'espace. La définition de plans orthogonaux entre eux n'est pas un attendu. Ni les définitions vectorielles ni les équations cartésiennes d'un plan ou d'une droite ne sont des attendus.
Géométrie plane *Résoudre les problèmes géométriques nécessite de connaître les différents modes de validation liés aux paradigmes géométriques (géométrie instrumentée / géométrie hypothético-déductive) et d'identifier le paradigme dans lequel on se place.* *La plupart des objets et relations de la géométrie abordés, de même que les types de tâches restent identiques du cycle 1 au cycle 3. Seuls diffèrent les techniques et les matériels, supports et instruments. Ce jeu sur les variables didactiques des situations contribue à enrichir progressivement les conceptions, le regard des élèves sur les figures ainsi que les critères de reconnaissance des objets géométriques, de leurs propriétés et de leurs relations.*		
Caractérisation de figures planes élémentaires • Concevoir et mettre en œuvre des situations pour la maternelle (reconnaître, nommer et classer des formes simples), conduisant à un premier niveau d'abstraction : passer de l'objet matériel au concept de forme. • Concevoir et mettre en œuvre des situations conduisant à un deuxième niveau d'abstraction : passer des formes planes (objets matériels manipulables ou représentés) aux figures du plan (objets géométriques) et à leurs propriétés mathématiques (nombre de côtés, nombre de sommets, égalité de longueurs, égalité d'angles, relations de perpendicularité et de parallélisme, axe(s) de symétrie, alignement). Avoir conscience de l'intérêt d'un tracé à main levée dans la compréhension des objets géométriques et de leurs propriétés. • Avoir conscience et prendre en compte de l'existence d'une articulation entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.		Les connaissances sur les figures planes sont utilisées dans des problèmes de construction, de reproduction (dont ceux de restauration), de description ainsi que dans des démonstrations en une ou deux étapes. Ces problèmes mettent en jeu des figures complexes composées de figures élémentaires. Les problèmes de construction sont proposés dans différents environnements : - espace sensible : ils utilisent différents matériels (planches à clous, formes…) et techniques (juxtaposition ou superposition de formes, pliage, découpage…) ; - papier/crayon : ils mettent en jeu différents instruments (gabarits, équerre, règle graduée ou non, compas, papier calque, ficelle…) et divers supports (papier quadrillé, pointé, uni) ;

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Concevoir et mettre en œuvre différents types de problèmes en fonction des objectifs d'apprentissages géométriques visés : classer, décrire, reconnaître ; restaurer, reproduire, construire, représenter. Connaître, concevoir et mettre en œuvre des situations ne nécessitant pas le recours à la mesure. • Connaître les principales variables des situations et savoir les adapter en fonction des objectifs visés. Variables didactiques : forme/figure déplaçable ou pas, visible ou pas ; présence d'une amorce ou pas ; type de communication (à soi ou à autrui ; écrit ou oral) ; représentation donnée ou à réaliser ; matériel et/ou instruments disponibles ; type d'espace (micro ou méso espace) ; environnement de travail (formes manipulables, papier-crayon, logiciel de géométrie dynamique) et/ou supports (papier quadrillé, uni ou pointé ; papier à bords droits ou courbes ; pliable ou non ; planche à clous ; …) . • Connaître une variété d'instruments de géométrie (équerre, gabarit d'angle (dont gabarit d'angle droit) ; compas ; règle graduée, règle non graduée ; bandelette de papier, ficelle ; gabarit de forme, pochoir ; papier calque, …) et les différentes fonctions qu'ils peuvent avoir, en lien avec les connaissances géométriques. Pour chaque type de tâche, savoir anticiper ou analyser des procédures en fonction des instruments et/ou des supports. Etre conscient des difficultés que leur usage peut générer et notamment les difficultés liées à l'usage d'instruments multifonctionnels (règle et équerre graduées par exemple). Etre conscient de l'intérêt de l'utilisation d'instruments ne recourant pas à la mesure. Etre conscient de l'intérêt de l'utilisation d'instruments permettant de comparer et de reporter des grandeurs sans recours au mesurage. Savoir distinguer justesse des procédures et précision des tracés dans les constructions instrumentées. • Avoir conscience de l'intérêt de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. • Prendre en compte le fait qu'une figure peut être appréhendée de différentes manières : comme juxta-position et / ou superposition de surfaces (« vision surfaces »), comme réseau de lignes (« vision lignes »), comme configuration de points (« vision points »). Savoir et prendre en compte qu'une figure peut être appréhendée selon différentes modalités (perception visuelle, perception haptique). • Prendre en compte la polysémie de certains termes (« point », « côté », « sommet », « centre », « milieu », « diagonale », « droit », « rayon » …).		- numérique avec des logiciels de géométrie dynamique ou de programmation.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Être conscient de l'importance des représentations prototypiques des figures planes dans la reconnaissance de leurs propriétés (perpendicularité, parallélisme, symétrie) et prendre en compte la nécessité de s'en écarter pour dissocier propriétés spatiales et propriétés géométriques.	• Quadrilatères particuliers : trapèzes, parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés. Caractérisation par les côtés, par les angles, par les diagonales. • Triangles rectangles, triangles isocèles, triangles équilatéraux. Triangles semblables ; triangles isométriques. Propriétés des côtés, des angles. Somme des angles d'un triangle. Inégalité triangulaire. Droites particulières du triangle (hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices).	Connaître la classification des quadrilatères particuliers est un attendu. Les caractérisations des quadrilatères particuliers par des propriétés de symétrie ne sont pas des attendus. Connaître la classification des différentes familles de triangles est un attendu. Les relations trigonométriques ne sont pas des attendus.
• Prendre en compte les différentes conceptions de la notion de cercle pour analyser des procédures, concevoir des séances ou des progressions.	• Cercle, disque. Diamètre, corde, rayon, centre, arcs de cercle. Angle au centre ; angle inscrit ; théorème de l'angle inscrit. Cercle circonscrit au triangle. Triangle rectangle inscrit dans un cercle. Cercle inscrit dans un triangle. Polygones réguliers et cercle.	La compréhension du concept de cercle s'établit avec la prise de conscience des différentes conceptions auxquelles il réfère : ponctuelles (lorsque le cercle est vu comme un ensemble de points) ou globales (le cercle est vu comme une courbe, un « tout ») ; dynamiques (lorsqu'intervient une idée de mouvement) ou statiques.
Relations et propriétés		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu l'alignement dans les différents espaces (micro et méso espaces) et les articuler entre elles.	• Alignement.	La notion d'alignement est un outil à mobiliser dans la résolution de problèmes. Elle est à mettre en lien avec les notions de point, droite, segment, angle ainsi qu'avec les relations d'incidence et d'appartenance (prolongement).
• Prendre en compte les différentes conceptions de des notions de perpendicularité et de parallélisme pour analyser des procédures, concevoir des séances ou des progressions. Etre conscient et prendre en compte l'articulation entre angle droit et droites perpendiculaires. Etre conscient que la définition du parallélisme relative à l'incidence n'est pas valide dans l'espace. Connaître l'importance de la verticalité et de l'horizontalité dans la reconnaissance des relations de perpendicularité et de parallélisme, et prendre en compte la nécessité de s'en écarter pour dissocier propriétés spatiales et propriétés géométriques.	• Perpendicularité. Parallélisme.	La connaissance du concept de droites perpendiculaires / parallèles s'établit avec la prise de conscience des différentes significations auxquelles il réfère : en lien avec les conceptions de l'angle droit, avec la notion de distance, avec la notion de médiatrice, avec la symétrie axiale, avec la notion de pente, ou avec des quadrilatères particuliers pour la perpendicularité ; écart constant, même direction, double perpendicularité, translation, incidence, même pente, côtés de quadrilatères particuliers pour le parallélisme. Connaître différentes constructions de droites perpendiculaires / parallèles avec divers instruments géométriques (dont la règle non graduée et le compas) et les mettre en lien avec les significations sont des attendus.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
	• Notion de distance (entre deux points, entre un point et une droite, entre deux droites). Médiatrice ; bissectrice. Régionnement du plan*.	Les différentes constructions de la médiatrice d'un segment (à la règle non graduée et au compas, à l'équerre et à la règle graduée) mettent en jeu des propriétés différentes de la médiatrice. La construction de la bissectrice d'un angle à la règle non graduée et au compas est la seule attendue.
	• Théorème de Pythagore et sa réciproque*.	Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent de travailler le raisonnement et un lien entre géométrie, grandeur et mesure. Les applications gagnent à être contextualisées. *Exemple : construction, justification et utilisation de la corde à treize nœuds.*
	• Théorème de Thalès*. Théorème de la droite des milieux d'un triangle*.	Le théorème de Thalès est principalement rencontré dans la configuration des triangles emboîtés. Le théorème de la droite des milieux d'un triangle est un cas particulier du théorème de Thalès. Les applications gagnent à être contextualisées. *Exemple : construction, justification et utilisation du guide-âne.* Le théorème de Thalès est à mettre en lien avec les problèmes d'agrandissement/réduction.
	• Notion d'angle. Angle plat, angle droit, angle aigu*, angle obtus*. Relations entre les angles d'une figure plane ou d'une configuration de droites (angles correspondants*, angles supplémentaires*, angles complémentaires*, angles alternes internes*).	La caractérisation de ces différents angles, leur relation à l'angle droit et à l'angle plat, sont les seuls attendus. La démonstration d'alignements de points en s'appuyant sur les angles des figures est un attendu.
Transformations du plan*		
• Concevoir et mettre en œuvre des situations mettant en jeu des transformations *via* des manipulations de formes (tourner, retourner, glisser) dans un environnement matériel ou dynamique. • Savoir aménager le passage de la manipulation matérielle à la mise en fonctionnement de transformations mentales. • Prendre en compte les deux aspects de la symétrie axiale : propriété d'une figure, transformation d'une figure en une autre figure. • Prendre en compte la polysémie du terme symétrique (propriété d'une figure ; relation entre une figure et un axe, relation entre deux figures et un axe, relation entre deux figures).	• Symétrie axiale*, symétrie centrale*. Propriétés de conservation (longueur, angle, aire, alignement, parallélisme). Distinction symétrie axiale et symétrie centrale.	Symétrie centrale, rotation, homothétie ne sont pas des attendus du programme en tant qu'objets mathématiques. Il est néanmoins pertinent d'y faire référence en contexte (rotation en tant qu'outil, homothétie dans le contexte d'agrandissement ou de réduction). Différentes techniques de construction du symétrique d'une figure sont attendues : avec règle et compas ; avec règle graduée et équerre ; avec papier calque ; par pliage. La symétrie axiale est à mettre en relation avec la notion de médiatrice.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Concevoir et mettre en œuvre des situations de manipulation pour introduire la symétrie (superposition par pliage – superposition après retournement du calque) et être conscient des limites de ces manipulations dans la conceptualisation de la notion. Connaître l'importance de la verticalité et de l'horizontalité dans la reconnaissance de la symétrie axiale, et prendre en compte la nécessité de s'en écarter pour dissocier propriétés spatiales et propriétés géométriques. • Connaître les principales variables des situations et savoir les adapter en fonction des objectifs visés. Variables didactiques : support (quadrillé, uni, pointé), instruments à disposition, orientation de l'axe (horizontal, vertical, oblique), position de la figure par rapport à l'axe, complexité des figures.		

Bibliographie

Situations de formation

Structuration de l'espace

MASSELOT P. et ZIN I. (2008) Exemple d'une situation de formation pour aborder la structuration de l'espace aux cycle 1 et 2. *Actes du 34e colloque COPIRELEM (Troyes, 2007).* https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO08007/IWO08007.pdf

Géométrie des solides

CHEVALIER M-C. (2003). Polyèdres réguliers. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 19-29. http://www.arpeme.fr/documents/122788C6792DACEC3FA5.pdf

COPIRELEM (2022). Homologie-transposition : un exemple sur la géométrie des solides. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.2*. ARPEME.62-89.

Géométrie plane

COPIRELEM (2019). Comparaison d'environnements ou d'artefacts : un exemple sur une tâche de reproduction de figures. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 61-82.

COPIRELEM (2022). Analyse de productions d'élèves : un exemple d'analyse d'erreurs dans la construction du symétrique d'une figure. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.2*. ARPEME. 17-41.

COPIRELEM (2022). Jeu de rôles : un exemple sur le processus d'institutionnalisation. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.2*. ARPEME. 91-111.

DUCEL Y. et PELTIER M-L. (1986). Losanges. *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*. IREM de Rouen. 37-45.

HOUDEMENT C. et PELTIER M-L. (2003). Assemblages de triangles équilatéraux. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 153-160. http://www.arpeme.fr/documents/1F2FEEDBF669EFD7FA5.pdf

PÉAULT H. (2003). Quadrilatères particuliers. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 141-151. http://www.arpeme.fr/documents/69A8C73B661F2FEEDBF.pdf

PELTIER M-L. (2003a). Le « napperon » : un problème pour travailler la symétrie axiale. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 161-172. http://www.arpeme.fr/documents/669EFD7FA5550E592437.pdf

PELTIER M-L. (2003b). La fleur. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 183-189. http://www.arpeme.fr/documents/13A6BE6CABDD9360A20.pdf

Références théoriques

Structuration de l'espace

BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-61. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-65-grand-n/numero-065-grand-n-1999--453235.kjsp?RH=1550438166894

BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Bordeaux : thèse de l'Université Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/414065/filename/these_Berthelot_Salin.pdf

BOULE F. (1994). *Manipuler, organiser, représenter. Prélude aux mathématiques*. 2ème édition. Armand Colin.

LEROYER L. (2005). S'approprier le vocabulaire spatial et temporel par « le faire et le dire ». *Grand N*, 75, 31-43. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/75n4_1554803722209-pdf

VAULTRIN M., LAURENÇOT-SORGIUS I., IMBERT J.-L., BILLY C. et BERGEAUT J.-F. (2016). *Autour du repérage des compétences dans des domaines mathématiques en cycle 1 et 2. Volume 2 « Géométrie ».* Deuxième édition, ESPÉ Toulouse Midi-Pyrénées, IRES de Toulouse.

VERGNAUD G. (2017) À propos de l'analyse statistique implicative : quelles interprétations possibles ? *Colloque ASI 9 de Belfort*. http://sites.univ-lyon2.fr/asi/9/lang/fr/conferencier/ASI9Conf_GV.pdf

Géométrie

BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/53n5_1562929910676-pdf

BLANQUART-HENRY S. (2020). Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant. Paris : Thèse de l'Université de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03242768

BROUSSEAU G. (1983). Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'information, université Joseph Fourier*. Grenoble.

GOBERT S. (2001). Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire. Paris : Thèse de l'Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01254805

HOUDEMENT C. et ROUQUÈS J.P. (2016). Deux géométries en jeu dans la géométrie plane. Contribution aux Ressources Éduscol sur la géométrie plane. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03214099v2

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1999). Réflexion sur l'enseignement de la géométrie. *Grand N*, 64, 65-78. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/64n6_1562246875463-pdf

HOUDEMENT C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69–84.

PETITFOUR E. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x,* 103, 5-31. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/103x1_1568365849363-pdf

RABARDEL P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument. *Les dossiers de l'Ingénierie éducative*, 19, 61-65. https://tecfalabs.unige.ch/mitic/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf

ROUCHE N. (2008). *Du quotidien aux mathématiques, Géométrie*. *Tome 2.* Ellipses.

Figures planes

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982). Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5–64.

BULF V. et CELI V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. *Grand N*, 97, 21-58. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/97n2_1552556028428-pdf

GIBEL P. et BLANQUART-HENRY S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso- espace. *Revue des sciences de l'éducation,* 43(1), 37-84.

PERRIN-GLORIAN M.-J. et GODIN M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* 222, 26-36.

- **Géométrie dynamique**

ASSUDE T., BONNET J.-F., GELIS J.-M. et RABATEL J.-P. (2007). La géométrie dynamique dans les classes de cycle 2 et 3. *Actes du 33e colloque COPIRELEM (Dourdan 2006).* https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO07043/IWO07043.pdf

LABORDE C. et CAPPONI B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(1.2), 165-210.

Ressources institutionnelles

MEN (2005). Espace et géométrie cycle 2*. Document d'accompagnement des programmes 2002.* CNDP, 66-77. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/MEN/MEN05002/MEN05002.pdf

MEN (2016). *Espace et géométrie au cycle3*. SCEREN. https://eduscol.education.fr/document/16516/download

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1994-1995). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N*, 56, 69-116. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n6_1562850413634-pdf

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3.* Hatier.

ERMEL (2020). *15 situations pour l'apprentissage de la géométrie et de l'espace (CP et CE1)*. Hatier.

GOSSET H. et TAVEAU C. (2010). *Activités géométriques autour des solides. Cycle 3*. Canopé éditions.

IREM de Lille (2000). *Travaux géométriques : apprendre à résoudre des problèmes.* Scéren-CRDP de Lille.

Logique et algorithmique

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
Eléments de logique		*Ces éléments sont à travailler en lien avec les autres parties du programme dans lesquelles ils interviennent. Il ne s'agit pas d'approfondir la théorie de la logique mais de savoir manipuler quelques notions de base utiles pour enseigner. L'utilisation des symboles mathématiques associés n'est pas un attendu.*
• Connaître la distinction entre trier, classer et ranger et la spécificité du lexique mathématique. • Comprendre l'importance des activités de tri, classement et rangement dans la construction des concepts mathématiques des différents domaines (et plus largement dans l'apprentissage à l'école) et les mettre en œuvre.	• Notion d'inclusion ; notion d'appartenance*.	Ces notions permettent de comprendre les relations entre les ensembles de nombres ainsi que la classification d'objets géométriques (quadrilatères, triangles, solides, polyèdres).
	• Notions de relation d'équivalence, de relation d'ordre*. Transitivité d'une relation*.	Les relations d'équivalence et d'ordre permettent de comprendre les concepts de classement et de rangement. Elles sont à mettre en lien avec le travail sur les grandeurs mais aussi sur les nombres (cardinal, ordinal) et en géométrie (relation de parallélisme).
	• Notions d'implication et de réciproque*.	Les raisonnements géométriques s'appuient sur la maîtrise de la notion d'implication. La formalisation des notions d'équivalence de deux assertions ou de contraposée n'est pas un attendu.
• Comprendre l'importance de l'apprentissage du raisonnement dès l'école élémentaire et le mettre en œuvre dans différents domaines des mathématiques dans l'action, dans des formulations orales puis à l'écrit.	• Utilisation de différentes formes de raisonnement : hypothético-déductif, par contre-exemple, par essai-erreur, par exhaustion de cas, par l'absurde*. Notion de conjecture*.	L'argumentation en mathématiques est travaillée dès l'école primaire en lien avec le français (utilisation du vocabulaire de déduction « donc », « car »). A l'école primaire beaucoup de notions/de propriétés sont découvertes à partir d'exemples (par induction).
Algorithmique et programmation		
• Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations portant sur des suites organisées (construction ou identification du principe d'organisation d'un algorithme).		Les techniques de calcul posé des quatre opérations constituent des formes d'algorithmes.

Enjeux didactiques de l'enseignement des savoirs mathématiques de l'école	*Savoirs mathématiques et épistémologiques*	*Commentaires*
• Savoir concevoir et mettre en œuvre des situations de programmation de déplacements.	• Notions de programme*, de séquence d'instruction*, de boucles*, d'instruction conditionnelle*, d'événement*, de capteur*, d'actionneur*. Notion de variable informatique*. Notion d'algorithme*.	La notion de programme peut être travaillée en lien avec le repérage et les déplacements d'un robot dans l'espace ou d'un personnage à l'écran. Écrire, mettre au point, tester, corriger, anticiper l'effet de l'exécution d'un programme en réponse à un problème donné. On peut s'appuyer sur l'utilisation d'un logiciel de programmation (comme Scratch, Scratch-JR), un robot pédagogique (Bee-bot, Blue-bot, Thymio®). Le travail sur les boucles peut se réaliser dans le cadre de constructions de figures ayant un motif qui se répète. Les instructions conditionnelles sont à mettre en lien avec la notion d'implication.

Bibliographie

Situations de formation

Argumentation

PÉAULT H. (2003). La vache et le paysan. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.3*. ARPEME. 57-62. http://www.arpeme.fr/documents/32E4620459209AE838F.pdf

Algorithmique

BERROUILLER C. ET EYSSERIC P. (2019) Beebots et Bluebots en classe : analyse de pratiques professionnelles. *Actes du 45ème colloque COPIRELEM (Blois 2018)*. ARPEME. 57-75. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO19006/IWO19006.pdf

COPIRELEM (2019). Comparaison d'environnements ou d'artefacts : un exemple sur une tâche de reproduction de figures. *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire t.1*. ARPEME. 61-82.

PÉAULT H. et BUTLEN D. (2003). La division en formation initiale. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.2*. ARPEME. 381-406. http://www.arpeme.fr/documents/4550F1F8545AFD6641A8.pdf

Références théoriques

Logique

BARTH B.M. (2001). *L'apprentissage de l'abstraction.* Retz.

BOULE F. (1985). *Manipuler, organiser, représenter. Prélude aux mathématiques.* Armand Colin.

BRIAND J., LACAVE LUCIANI M.-J., HARVOUËT M. et BEDÈRE D. (2003). Enseigner l'énumération en moyenne section de maternelle. *Concertum – Carnets de route de la COPIRELEM t.1*. ARPEME. 33-52. http://www.arpeme.fr/documents/36FAC8B491EC6C82F4.pdf

Site de J. BRIAND : http://ddm.joel.briand.free.fr

Argumentation

ERMEL (1999). *Vrai ? faux ? on en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques en cycle 3.* INRP.

- **Algorithmique**

RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Ressources institutionnelles

- **Algorithmique**

MEN (2016). *Initiation à la programmation aux cycles 2 et 3*. Scéren. https://eduscol.education.fr/document/15409/download

Ressources pour la classe comportant des analyses a priori

- **Logique**

BRIAND J. (1999 / 2000). Trier en petite section*. Grand N Spécial maternelle*, 115-122.

LOUBET M. et SALIN M.H. (2000). Elaboration et lecture de listes. *Grand N Spécial maternelle*, 71-92.

- **Argumentation**

DOUAIRE J. et HUBERT C. (2001). Mises en commun et argumentation en mathématiques. *Grand N,* 68, 29-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/68n4_1555658516822-pdf

ERMEL (1999). *Vrai ? faux ? on en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques en cycle 3.* INRP.

ERMEL (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1, CM2*. Hatier.

- **Algorithmique**

ORNA (2016). Fiche: Blue-Bot. INSHEA. https://inshea.fr/sites/default/files/fichier-orna/EG_Blue-Bot_0.pdf