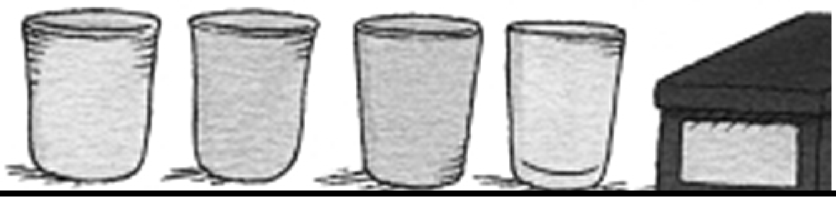
LES GOBELETS

Un enseignant a retrouvé un problème dans un cahier de l'élève de la collection ERMEL CP (*éd. HATIER 1996, p. 121*). Voir ci-dessous.
Il décide de l'étudier du point de vue des mathématiques pour être sûr que le problème ait toujours une solution avant de le proposer à ses élèves et pouvoir varier des données suivant les connaissances de ses élèves.

Les gobelets dessinés contiennent des jetons. Ils ne contiennent pas tous le même nombre de jetons. Des étiquettes sur chaque gobelet indiquent le nombre de jetons qu'ils contiennent.
Dans la boîte, il reste des jetons qu'on n'a pas eu le temps de mettre dans les gobelets. L'étiquette collée sur la boîte indique le nombre de jetons qu'elle contient.
Tu dois répartir tous les jetons que contient la boîte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet.
On doit comprendre ce que tu as fait en lisant ta feuille.

Écris les nombres que l'enseignant t'a donné, sur les gobelets et sur la boîte.



Dans la situation proposée, le nombre de jetons par gobelet et dans la boite est laissé au libre arbitre de l'enseignant. Il s'agit pour ce dernier de bien comprendre qu'il doit anticiper sa situation pour ne pas se retrouver devant une situation insoluble. Il s'agit donc de comprendre que certains choix de données numériques peuvent conduire à une absence de résultat.

Partie A : Exemples de situations

1. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 25, 14, 19 *et* 21 jetons. La boite contient 37 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
2. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 17, 11, 9 *et* 22 jetons. La boite contient 25 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
3. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 14, 12, 18 *et* 21 jetons. La boite contient 22 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
4. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 13, 17, 5 *et* 16 jetons. Donner deux quantités distinctes de jetons que l'enseignant peut mettre dans la boite et qui donnent des solutions au problème posé. Résoudre ces problèmes.

Question 1. Il s'agit de vérifier que le candidat a bien compris la situation en lui faisant résoudre un exemple.
Question 2. Premier problème, le nombre de jetons dans la boite n'est pas assez grand pour compléter les gobelets.
Question 3. Second problème, le nombre de jetons dans la boite ne permet pas un partage équitable.
Question 4. Il s'agit pour le candidat d'identifier que le nombre de jetons dans la boite qui donne une solution au problème n'est pas unique. Cela prépare à l'étude théorique de la situation (Partie B).

Partie B : Etude théorique de la situation

On appelle *a, b, c, d* les nombres respectifs de jetons dans les gobelets, et *A* le nombre de jetons dans la boîte.

1. On propose a=15, b=12, c=18 et d=11. Donner toutes les valeurs qu'il est possible de donner à *A* pour que le problème puisse être résolu. Justifier.

Dans cette partie, le candidat est amené à généraliser les résultats de la partie A. Cette étude permet également d'envisager des procédures de résolution qui seront abordées dans la partie suivante.

Question 1. Il s'agit de généraliser la

2. On suppose que a est le plus grand des nombres a, b, c, d. Donner toutes les valeurs possibles de A en fonction de a, b, c et d.
3. Le nombre total N de jetons peut-il être quelconque ? Justifier.
4. On suppose que la situation admet une solution. Le nombre écrit au début sur chacun des gobelets peut-il être quelconque par rapport à N ?
5. On suppose que la situation admet une solution. Quel est le nombre de jetons par gobelet après répartition en fonction de N ?
6. Exprimer, en fonction de N, a, b, c et d, le nombre de jetons à ajouter dans chaque gobelet.

question 4 de la partie A.
Question 2. Il s'agit d'exprimer de manière générale (algèbre) les valeurs admissibles de A, pour anticiper une procédure élève (voir question C.1 ***et C.****2).*
Question 3. Généralisation sur le nombre total de jetons pour que la situation admette une solution.
Question 4. Généralisation sur le nombre de jeton initial par gobelet.
*Question 5. Généralisation des situations admettant u****ne*** *solution. Cette question permet d'anticiper une procédure (voir, dans la partie C, les questions 1c et 2).*
Question 6. Encore une généralisation qui permet de donner de façon théorique une procédure.

Partie C : Différentes mises en situation

1. L'enseignant propose les valeurs suivantes : a=25, b=14, c=19, d=21 et A=37.

Dans un premier temps, les élèves peuvent manipuler effectivement les jetons de la boite A **sans pourtant pouvoir retirer ceux qui sont déjà présents dans les gobelets**.

a) Décrire une procédure attendue des élèves basée sur la manipulation.

b) Quels sont les moyens de validation dont dispose un élève pour s'assurer qu'il a réussi ?

Dans un second temps, les élèves n'ont plus recours à la manipulation effective, ils doivent simuler la situation.

c) Décrire une procédure attendue des élèves et la traduire en calcul.

2. Quelle connaissance mathématique permet de résoudre le problème avec les données suivantes : a=25, b=14, c=19, d=21 et A=1 337 ?
3. L'enseignant ajoute un gobelet vide en plus des quatre déjà partiellement remplis et il change la valeur de A en ajoutant ou enlevant des jetons à ceux qui sont déjà dans la boîte.

a) Quelle serait la valeur minimale de A pour que le problème admette une solution ?

b) Discuter le cas où l'enseignant ajouterait 100 jetons dans la boîte.

4. À l'aide des exemples étudiés, citer trois éléments de la situation qui peuvent avoir une influence sur les procédures mises en œuvre par les élèves.

Dans cette partie, le candidat est amené à réfléchir sur les procédures mathématiques pouvant être mises en œuvre par les élèves selon leurs connaissances.
Question 1a. La manipulation est une procédure intéressante car elle permet effectivement de trouver une solution et de créer une image mentale en vue d'abstraire le résultat compléter les gobelets pour avoir égalité puis répartir ce qu'il reste équitablement.
Question 1b Il est important que l'élève vise une autonomie en ayant des moyens de validation de ses résultats.
Question 1c. La manipulation n'est plus possible. Les élèves doivent anticiper le résultat par calcul. Quels langages ? Quels calculs ? cette question est en écho de la question 2 de la partie B.
Question 2. Il s'agit pour le candidat de reconnaitre que cette procédure correspond à l'étude théorique (partie B, question 5).
Question 3 : changement sur deux paramètres : nombre de gobelets et quantité dans la réserve, on retrouve un cas où il n'y a pas de solution (étude théorique partie B, questions 3, ' et 5)
Question 4 : bilan de la situation qui peut être proposé à différents niveaux de connaissances suivant les éléments choisis.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Partie A

1. 29 jetons dans chaque gobelet
2. Il n'y a pas de solution car les jetons contenus dans la boite ne sont pas suffisants pour compléter chaque gobelet à 22 jetons.
3. Il n'y a pas de solution car le nombre de jeton dans la boite ne permet pas une répartition équitable entre les 4 gobelets.
4. Si la boite contient 17 jetons, alors les gobelets contiendront tous 17 jetons. Si la boite en contient 21, alors chaque gobelet en contiendra 18.

Partie B

1. 7+6+3 = 16 qui est le nombre de jetons minimum dans la boite. Il suffit d'ajouter à ce nombre des multiples de 4. A=16+4n avec n un entier naturel.
2. A=(a-b)+(a-c)+(a-d)+4n = 3a-(b+c+d)+4n avec n un entier naturel.
3. N jetons doivent être répartis équitablement entre 4 gobelets, donc N doit être un multiple de 4. Si N=0 il n'y a pas d'intérêt à la situation.
4. Chaque gobelet contiendra N/4 jetons, donc initialement, le nombre de jetons dans chaque gobelet doit être inférieur à N/4.
5. N/4.
6. Quantités ajoutées dans chaque gobelet : premier gobelet : N/4 – a ; deuxième gobelet N/4 – b ; troisième gobelet N/4 – c ; quatrième gobelet N/4 – d

Partie C

1a) Il est nécessaire de bien comprendre que la seule action permise est de prendre des jetons de la boîte pour les déposer dans les gobelets. L'élève commence par compléter chaque gobelet pour que chacun contienne 25 jetons, il peut surcompter à partir du nombre de jetons déjà présents dans les gobelets jusqu'à 25. Puis il répartit les jetons qui restent dans la boite un par un (ou deux par deux…) dans les gobelets.

1b) Dans cette situation, il y a deux contraintes sur lesquelles vont porter la validation (« Tu dois répartir tous les jetons que contient la boîte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet »). A l'issue des manipulations, la question de la validation peut être posée à l'élève par l'enseignant (comment sais-tu que tu as réussi ?). La première condition à vérifier est celle de vérifier le contenu de la boîte qui doit être vide. Ensuite, l'élève est autorisé à vérifier la quantité de jetons dans chaque gobelet. Pour savoir s'il a réussi, il peut dénombrer et comparer chaque quantité des gobelets. Pour un élève de Grande Section, la comparaison pourrait se faire par correspondance terme à terme en particulier si les nombres sont plus petits.

1c) Le plus grand des quatre nombres de jetons dans les gobelets est 25. L'élève commence par compléter le contenu des trois autres gobelets afin d'égaliser et donc de trouver l'écart entre 25 et les nombres correspondants aux autres gobelets. Il calcule donc ce qu'il faut ajouter :

11 jetons dans le gobelet contenant 14 jetons car 14+11=25 ;
6 jetons dans le gobelet contenant 19 jetons car 19+6=25 ;
4 jetons dans le gobelet contenant 21 jetons car 21+4=25.

Il effectue ces calculs soit à l'aide de soustractions, soit à l'aide d'additions à trous, soit éventuellement en surcomptant jusqu'à 25.
Il calcule ensuite le nombre total de jetons déjà ajoutés dans les gobelets et ceux restant dans la boîte, soit :

$$11+6+4 = 21 \text{ et } 37 – (11+6+4) = 16.$$

Il doit ensuite répartir équitablement 16 jetons dans 4 gobelets, mais, suivant les connaissances des élèves, les démarches peuvent être plus ou moins expertes. Il peut réaliser la division 16 : 4 = 4…s'il connait la division, ou s'il connait seulement la multiplication, il peut trouver le résultat de la multiplication à trou 4× ? = 16. Sinon, il peut trouver ce résultat par calcul successif correspondant à des manipulations mentales ou schématisées : j'en prends 4, un par gobelet, il m'en reste 12, j'en reprends 4, cela fera 2 par gobelet, il en reste 8 que je répartis en en mettant 2 supplémentaires par gobelet soit 4 par gobelet. Finalement chaque gobelet contiendra 25+4=29 jetons.
2) L'élève trouve le résultat final de chaque gobelet qui est N/4 comme vu en réponse à la question 5 de la Partie B. Le nombre de jetons à repartir est ici important et nécessite donc une connaissance plus experte : la division euclidienne.
N/4 = (25 +14 + 19 + 21 + 1337)/4 = 354
Le raisonnement repose sur le fait que la quantité totale de jetons est inchangée qu'elle soit répartie dans les 4 gobelets et la réserve ou dans les 4 gobelets de façon équitable. On imagine que les jetons qui sont dans les gobelets et dans la réserve sont mis dans un pot commun, puis répartis de façon équitable dans les 4 gobelets (la réserve étant vide).
3a) Méthode 1 : La valeur minimale de A correspond à la quantité totale pour que chacun des 4 gobelets incomplets soit complété à 25 (y compris le 5$^{\text{ème}}$ vide au départ) :
soit (25-14) + (25-19) + (25-21) + 25 = 46.
Méthode 2 : Tous les 5 gobelets devront contenir 25 jetons donc le total nécessaire de jetons est 5 × 25 = 125. Comme il y a déjà 79 (25+14+19+21) jetons déjà répartis, il en reste 46 dans la boîte réserve.
3b) On pourrait penser qu'en ajoutant 100 jetons dans la réserve, on aurait à répartir ces jetons dans 5 gobelets, soit 20 de plus que les 29 jetons déjà présents dans le cas des 4 gobelets. Mais ce serait oublier que le 5$^{\text{ème}}$ gobelet a été ajouté et est vide.
Il faut reprendre le nombre total de jetons et les répartir dans 5 gobelets : soit N/5 = (25 +14 + 19 + 21 + 1337)/5 = 283,2 ce qui n'est pas possible.
4) Dans les exemples étudiés, on peut dire que la situation peut être proposée de la grande section au cycle 3 (voire plus) en variant des éléments de cette situation :
Manipulation autorisée ou pas,
Taille des nombres en jeu dans chacun des gobelets,
Nombre de gobelets,
Nombre de jetons dans la boîte réserve,
Écarts entre les nombres en présence ...
La manipulation permet de résoudre le problème dans le cas de petites quantités et d'un nombre restreint de gobelets et elle devient inopérante pour des quantités plus grandes où le calcul (avec ou non une schématisation) va prendre le relais.
La taille des nombres influe les procédures de calcul mises en œuvre et l'organisation de ces calculs (soustractions privilégiées au

détriment d'additions à trous ou de surcomptage, division plutôt que multiplication à trou ou répartition pas à pas …)
En augmentant la quantité dans la réserve, les répartitions par calculs successifs deviennent plus problématiques et le recours à la division s'imposera comme l'opération permettant de résoudre le problème