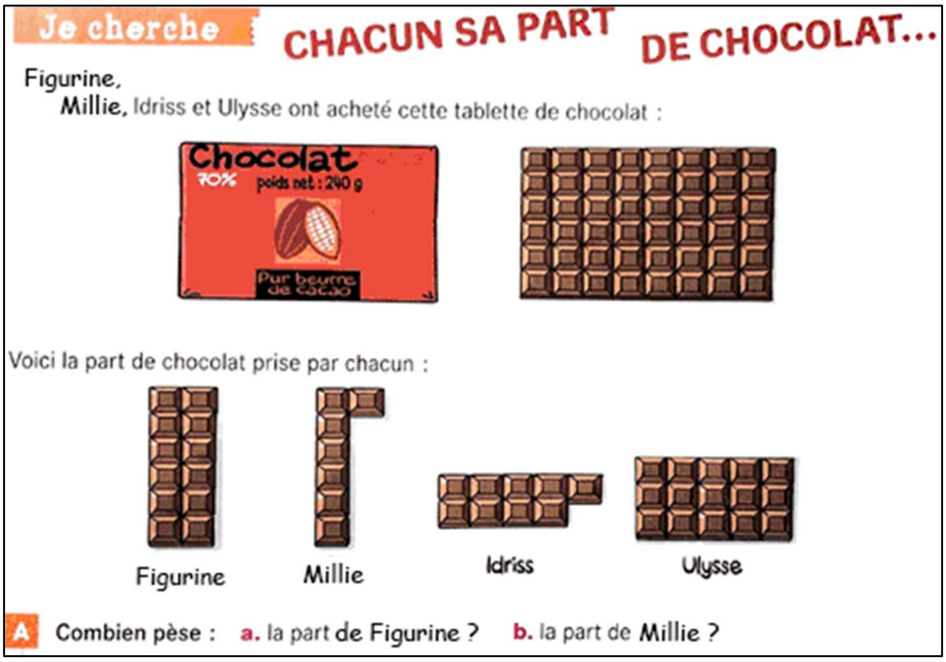
Exercice d'analyse de productions d'élèves sur la proportionnalité

Nos propositions générales pour évaluer des connaissances mathématiques à partir d'un travail d'analyse de productions d'élève, mises en lien avec les questions du sujet proposé.

- *Résoudre un problème en mobilisant ses propres connaissances mathématiques -> **4.b, 6.a***
  *Analyse a priori du problème proposé aux élèves pour prévoir des procédures possibles, identifier les savoirs en jeu, pour interroger le modèle mathématique pour le résoudre, proposer d'autres procédures possibles que celles qui sont présentées (au même niveau d'enseignement et/ou à un autre niveau) et les connaissances qu'elles mobilisent, etc. **-> 1.a, 1.b, 1.c, 6.b***
- *Analyser des erreurs d'élèves en faisant une hypothèse sur l'origine (conceptions erronées, interprétation erronée d'une formulation de l'énoncé, ...) ou analyser un résultat obtenu par un élève et en proposer une interprétation correcte **-> 2, 4.a***
- *Analyser une procédure correcte en mettant en avant la procédure, le raisonnement ... utilisés et les connaissances, propriétés mathématiques implicitement mobilisées **-> 3.a, 3.b, 3.c, 3.d, 3.e, 5.a, 5.b,***
- *Sur les variables didactiques de la situation : analyser l'effet possible d'une modification d'une valeur d'une variable sur une procédure, choisir une valeur d'une variable pour rendre possible une procédure ou au contraire pour la bloquer **-> 5.c***
- *Faire des liens entre des procédures mises en œuvre (et les propriétés mathématiques mobilisées) dans des problèmes de même nature (même "catégorie", comme recherche d'une quatrième proportionnelle) mais posés dans des contextes différents **-> 6.c***

Sujet

Le problème suivant est extrait du manuel Cap Maths CM2 (Hatier, 2017). Il a été donné dans une classe de CM2.



Remarque : les prénoms des deux premiers élèves ont été modifiés pour des raisons liées à la conception de ce sujet.

1. Une situation de proportionnalité

1.a Quelles sont les grandeurs que l'on doit supposer proportionnelles pour résoudre le problème ?

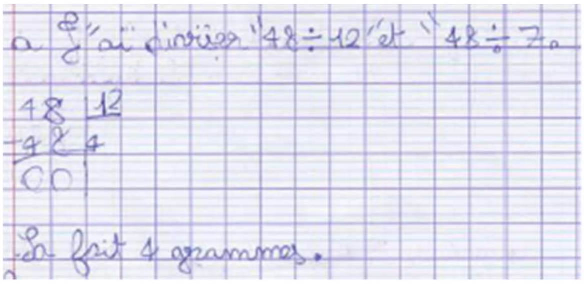
1.b Quelle est alors la valeur du coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs ?

1.c Citer une hypothèse, portant sur la tablette de chocolat, légitimant le recours au modèle proportionnel pour résoudre le problème.

Commentaires

Analyse a priori du problème pour identifier les savoirs en jeu, pour interroger le modèle mathématique pour le résoudre.

2. Analyse de la production de l'élève A


a. J'ai diviser 48 ÷ 12 et 48 ÷ 7.

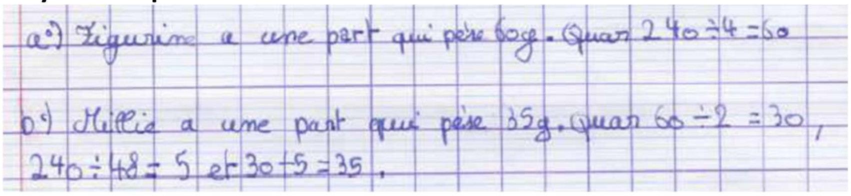
48 | 12
-48 | 4
00 |

Sa fait 4 grammes.

L'élève trouve une réponse erronée au problème posé par le calcul 48 ÷ 12. Quelle est la signification du nombre « 4 » dans le contexte de ce problème obtenu par le calcul « 48 ÷ 12 » ?

Analyser un résultat obtenu par un élève et en proposer une interprétation correcte

3. Analyse de la production de l'élève B


a°) Figurine a une part qui pèse 60g. Quar 240 ÷ 4 = 60

b°) Millie a une part qui pèse 35g. Quar 60 ÷ 2 = 30, 240 ÷ 48 = 5 et 30 + 5 = 35.

À propos de la question a)

3.a L'élève B effectue une division par 4. Quelle hypothèse peut-on faire sur la façon dont il a déterminé au préalable ce nombre « 4 », sachant qu'il n'a pas utilisé le même procédé que l'élève A ?

3.b Indiquer sur quelle propriété mathématique s'appuie le raisonnement de l'élève B. Justifier.

Analyser une procédure correcte en mettant en avant la procédure, le raisonnement ... utilisés et les connaissances, propriétés mathématiques implicitement mobilisées

À propos de la question b)

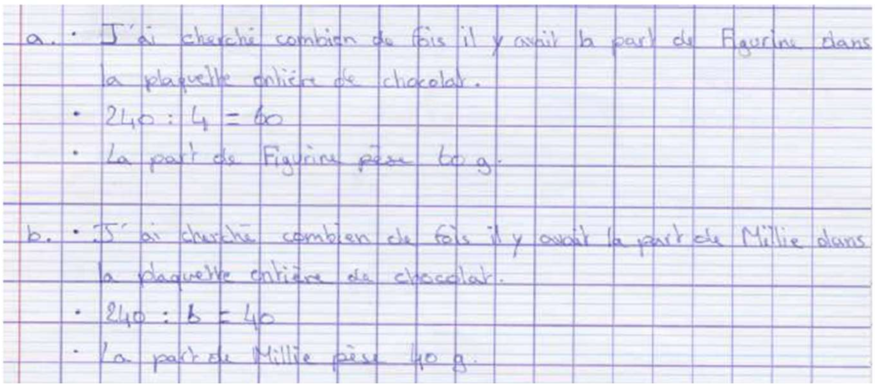
3.c Expliquer pourquoi l'élève B ne peut pas utiliser à la question b) la même procédure que celle déjà mise en œuvre en a).

3.d Expliquer à quoi correspondent les nombres 30 et 5 obtenus par le calcul.

3.e Indiquer sur quelles propriétés mathématiques se fonde la réponse obtenue. Justifier.

Analyser une procédure correcte en mettant en avant la procédure, le raisonnement ... utilisés et les connaissances, propriétés mathématiques implicitement mobilisées

4. Analyse de la production de l'élève C


a. • J'ai cherché combien de fois il y avait la part de Figurine dans la plaquette entière de chocolat.
• 240 : 4 = 60
• La part de Figurine pèse 60 g.

b. • J'ai cherché combien de fois il y avait la part de Millie dans la plaquette entière de chocolat.
• 240 : 6 = 40
• La part de Millie pèse 40 g.

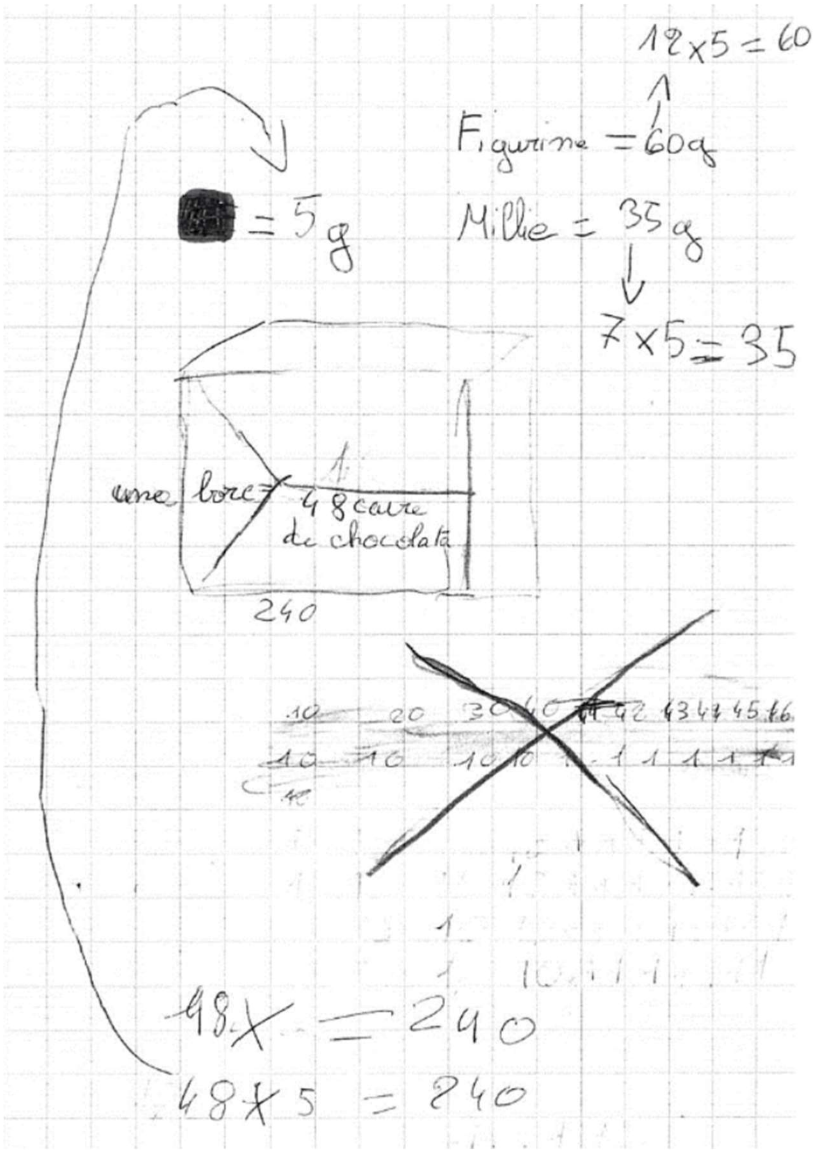
4.a L'élève C trouve une réponse correcte à la question a) mais erronée à la question b). Faire une hypothèse sur ce qui, dans le calcul de la part de Millie à la question b), a pu lui poser une difficulté.

Analyser des erreurs d'élèves en faisant une hypothèse sur l'origine

4.b En utilisant la procédure mise en œuvre par l'élève C à la question a), effectuer le calcul permettant d'obtenir la réponse à la question b).

Résoudre un problème en mobilisant ses propres connaissances mathématiques

5. Analyse de la production de l'élève D



5.a Expliciter les deux principales étapes dans le raisonnement utilisé par l'élève D pour trouver la réponse au problème et indiquer sur quelle propriété mathématique de la proportionnalité il s'appuie.

Analyser une procédure correcte en mettant en avant la procédure, le raisonnement ... utilisés et les connaissances, propriétés mathématiques implicitement mobilisées

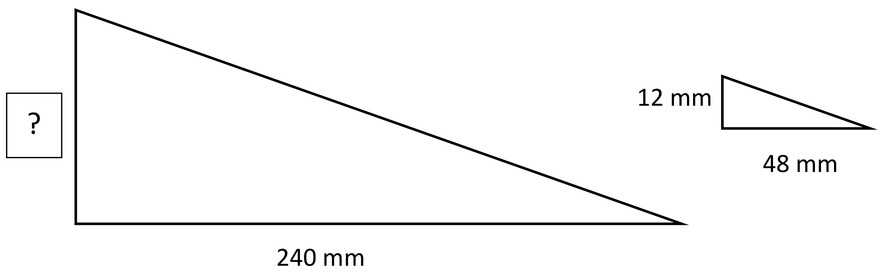
5.b Pour la question a. du problème, en conservant à l'identique le nombre de carreaux de Figurine et de la tablette entière de chocolat, déterminer une masse de la tablette de chocolat qui rendrait impossible, en cycle 3, l'utilisation de la procédure de l'élève D, mais permettrait d'obtenir la réponse en utilisant la procédure mise en œuvre par l'élève C. Justifier.

Sur les variables didactiques de la situation : choisir une valeur d'une variable pour rendre possible une procédure ou au contraire pour la bloquer

6. Dans un autre contexte.

Quelques semaines plus tard, l'enseignant de la classe propose ce problème à ses élèves.

Un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure 240 mm a été réduit de façon à obtenir le triangle rectangle à droite ci-dessous.
Quelle est la longueur du deuxième côté de l'angle droit du triangle rectangle de départ ?



Résoudre un problème en mobilisant ses propres connaissances mathématiques

6.a Résoudre le problème posé aux élèves.

Analyse a priori du problème proposé aux élèves (savoirs en jeu).

6.b Expliquer en quoi ce problème relève, comme le précédent, de la catégorie des problèmes de proportionnalité ?

Faire des liens entre des procédures mises en œuvre (et les propriétés mathématiques mobilisées) dans des problèmes de même "catégorie" mais posés dans des contextes différents

6.c Expliquer comment les procédures utilisées précédemment par les élèves C et D peuvent permettre de résoudre ce nouveau problème. Justifier.

Éléments de correction

1. a Les grandeurs à supposer proportionnelles dans ce problème.

Pour traiter ce problème avec le modèle de la proportionnalité, les deux grandeurs supposées proportionnelles dans ce problème sont la masse de chocolat et la quantité de carreaux de chocolat.

1.b Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

La masse de 240g se répartit selon 48 carreaux. Le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs citées est donc de $\frac{240\ g}{48\ carreaux} = 5\ g/carreau$ (ou de $\frac{48\ carreaux}{240\ g} = 0{,}2\ carreau/g$ selon le sens de la relation choisie).

1.c Hypothèse, portant sur la tablette de chocolat, légitimant le recours au modèle de la proportionnalité pour résoudre ce problème

Le modèle de la proportionnalité est pertinent à condition que la tablette soit homogène dans sa composition, c'est-à-dire que la masse de chacun des carreaux soit toujours la même.

Avec une « vraie » tablette, il pourrait arriver par exemple que la tablette présente une irrégularité de volume ou encore que les carreaux ne soient pas découpés de manière strictement identique selon les lignes de partage, ce qui rendrait erronés les résultats obtenus par l'utilisation du modèle de la proportionnalité.

2. Analyse de la production de l'élève A, sens véritable du calcul « 48 ÷ 12 »

L'élève A a divisé le nombre total de carreaux par le nombre de carreaux de la part de chocolat de Figurine. Le sens de ce calcul est donc la relation entre le nombre de carreaux de la tablette entière et celui de la part de chocolat de Figurine, c'est-à-dire 4 fois moins.

3. Analyse de la production de l'élève B

3.a Hypothèse possible sur la façon dont l'élève B a déterminé ce nombre « 4 », sachant qu'il n'a pas utilisé le même procédé que l'élève A

Nous pouvons faire l'hypothèse que l'élève B a identifié que Figurine avait une part 4 fois plus petite que la tablette entière en s'appuyant sur le dessin de la tablette dans l'énoncé du problème (donc une aire 4 fois plus petite). Il a, en effet, pu constater que la part de Figurine pouvait se retrouver 4 fois dans la tablette entière.

3.b Propriété mathématique sur laquelle s'appuie le raisonnement de l'élève B.

L'élève B s'appuie sur le fait que Figurine a une part 4 fois plus petite que la tablette entière pour en déduire que la masse de la tablette sera 4 fois plus petite aussi. Il met donc en œuvre (implicitement) la propriété de linéarité multiplicative ou propriété d'homogénéité.

3.c Raison pour laquelle l'élève B ne peut pas utiliser à la question b) la même procédure que celle déjà mise en œuvre en a).

La procédure mise en œuvre par l'élève B à la question a) est rendue impossible (à ce niveau d'enseignement) par le fait que la relation entre le nombre de carreaux de la part de Millie et celui de la tablette entière n'est plus un nombre entier.

3.d Ce à quoi correspondent les nombres 30 et 5 obtenus par le calcul.

L'élève B considère la part de Millie selon deux parties.

Une première partie est constituée d'une colonne entière de carreaux (6 carreaux), qui pèse donc la moitié de la part de Figurine qui était constituée de deux colonnes (12 carreaux), soit 60*g* ÷ 2 = 30*g*.

Une deuxième partie est constituée d'un seul carreau. Pour trouver sa masse l'élève divise la masse totale de la tablette par le nombre total de carreaux, soit $240g \div 48 = 5g$.

L'élève en déduit alors la masse de la part de Millie en ajoutant les masses des deux parties ($30g + 5g = 35g$).

3.e Les propriétés mathématiques sur lesquelles se fonde la réponse obtenue.

Le raisonnement décrit à la question précédente s'appuie, d'une part, sur la propriété de linéarité multiplicative (ou propriété d'homogénéité) pour déterminer les masses de 30g (la moitié de la part de Figurine) et de 5g (le 48$^{\text{ème}}$ de la masse totale de la tablette) et, d'autre part, sur la propriété de linéarité additive pour déterminer la masse totale de la part de Millie comme somme des masses de deux parties considérées.

4.a Hypothèse sur ce qui, dans le calcul de la part de Millie à la question b), a pu poser une difficulté à l'élève C

Pour analyser l'erreur de l'élève C on peut s'appuyer sur le raisonnement qu'il a mis en œuvre pour la question a) où il divise 240 par 4 car la part de Figurine est contenue 4 fois dans la tablette entière. Pour la question b), Millie, l'élève C semble considérer que la part de Millie est 6 fois plus petite que la tablette en entier. L'élève a pu mobiliser un résultat erroné ($48=6\times7$).La difficulté rencontrée est donc liée au nombre de carreaux de la part de Millie car cette part ne peut pas être reportée un nombre entier de fois pour reconstituer la tablette entière.

4.b Calcul permettant obtenir la réponse à la question b)

En procédant comme l'élève C en a., on obtiendrait la masse de la part de Millie en effectuant :

$240\text{g} \div \left(\frac{48}{7}\right)$, soit $\frac{7}{48} \times 240\text{g}$,soit 35g.

5.a Les deux principales étapes dans le raisonnement utilisé par l'élève D

L'élève représente les données de l'énoncé sous forme d'un schéma, puis semble chercher une décomposition additive de 48. Puis :

Étape 1 : Il cherche la masse d'un carreau sous la forme du nombre qui multiplié par 48 permet d'obtenir 240 (multiplication à trou). Il trouve 5g

Étape 2 : il obtient les masses demandées en multipliant cette masse unitaire par le nombre de carreaux de chaque part (12×5 et 7×5).

L'élève mobilise donc la propriété de linéarité multiplicative ou propriété d'homogénéité pour déterminer la masse d'un carreau (comme étant 48 fois inférieure à la masse de 240g) et celle de la part de Millie (comme étant 7 fois supérieure à la masse d'un carreau).

5.b Détermination d'une masse

On cherche donc un nombre qui soit multiple de 4 mais non multiple de 48 : on peut choisir 244g par exemple.

L'équation $48 \times ? = 244$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

6.a Résolution du problème

Méthode 1 : Le rapport de réduction est égal à $\frac{48\text{ mm}}{240\text{ mm}}$ soit $\frac{1}{5}$. Le rapport d'agrandissement est donc égal à 5 et longueur du deuxième côté de l'angle droit du triangle rectangle de départ est donc égale à 5×12mm soit 60 mm.

Méthode 2 : 48 c'est 4 fois 12. Donc dans le « petit triangle », le « petit côté » est 4 fois plus petit que le « grand côté ». Dans le « grand triangle », le « grand côté » a pour longueur 240 mm, le petit a une longueur 4 fois plus petite, soit : 240 mm ÷ 4 = 60 mm.

Autre formulation de la méthode 2 : le rapport entre les longueurs des côtés du triangle réduit est égal au rapport des longueurs des côtés du triangle initial. On peut donc en déduire que $\frac{?}{240\text{ mm}} = \frac{12\text{ mm}}{48\text{ mm}}$. On en déduit que : $? = 240\text{mm} \times \frac{12\text{ mm}}{48\text{ mm}}$ soit ? = 60mm.

6.b Catégorisation

Les problèmes d'agrandissement réduction relèvent des problèmes de proportionnalité. Le coefficient d'agrandissement ou réduction est le coefficient de proportionnalité.

6.c Dans un autre contexte

L'élève C chercherait ici combien il y a de fois la longueur 12 mm dans la longueur 48 mm comme il a cherché le rapport entre 12 carreaux et 48 carreaux dans les tablettes de chocolat.

Il effectuerait ensuite 240 mm ÷ 4 et trouverait 60 mm.

L'élève D chercherait d'abord à quelle longueur initiale correspond un segment de 1 mm sur la figure réduite : 48 mm correspondent à 240 mm sur le triangle initial, donc 1mm correspond à 48 fois moins, soit 5 mm. Et ainsi 12 mm de la figure réduite correspond à 12×5 mm de la figure agrandie soit 60 mm