Ce sujet vise à évaluer des connaissances géométriques nécessaires à l'enseignement de la géométrie plane à l'école primaire. Il teste la capacité des futurs professeurs des écoles à :

- *résoudre des problèmes géométriques enseignés à l'école (reproduction, restauration, construction de figures) en se plaçant dans le paradigme de la géométrie dessinée[1] (G1 dans la suite);*
- *identifier et formuler des propriétés et relations géométriques, rédiger des programmes de construction, utiliser un langage géométrique à bon escient ;*
- *raisonner en se plaçant dans le paradigme de la géométrie abstraite[1] (G2 dans la suite) pour proposer des problèmes géométriques adaptés aux objectifs d'apprentissage visés.*

Sujet

Commentaires

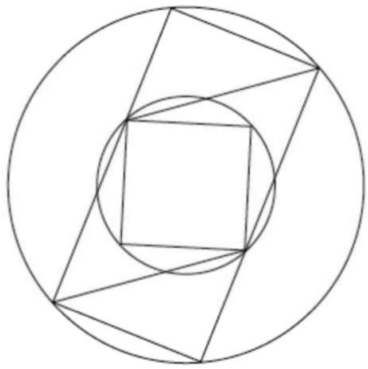
On s'intéresse à trois activités proposées par un enseignant de CM2 à partir du site compagnon de la collection *Opération Maths* (éditions Hatier, 2020)[2] et du manuel *Euromaths* CM2 (édition Hatier, 2009).

A. Activité 1[3]

Changer de regard sur une figure pour l'analyser et/ou la reproduire (analyser une surface selon différents aspects : surfaces, lignes, points).

Cette figure est composée d'un carré,
d'un losange, d'un rectangle
et de deux cercles concentriques.

Observe attentivement comment
elle est construite et reproduis-la
sur du papier uni en l'agrandissant :
pour le petit cercle, prends un rayon de 3 cm.



1. Première reproduction avec la contrainte de 3 cm pour le rayon du petit cercle

Réaliser l'activité élève (travail en G1)

   a) Réaliser la figure en suivant la consigne donnée.

Analyser une figure géométrique complexe :
- identifier des sous-figures usuelles (carré, losange, rectangle, cercles) et éléments caractéristiques non tracés (diagonale, diamètre, rayon, centre), des relations entre les figures, des propriétés et relations géométriques (alignement, égalités de longueurs, milieu, angle droit, perpendicularité, parallélisme)
-identifier des étapes et établir une chronologie pour reproduire la figure.
Utiliser des instruments de géométrie pour analyser une figure puis la reproduire

   b) Expliciter les propriétés et relations géométriques repérées et utilisées pour réaliser la reproduction.

Formuler des propriétés et des relations géométriques.

   c) Quel moyen l'enseignant peut-il envisager pour vérifier la validité des

Connaitre un moyen de validation du

---

[1] Houdement, C. et Rouquès, J.-P. (2016). *Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera « dessinée » et une qu'on appellera « abstraite »*. Cité dans *Espace et géométrie au cycle 3.* (2018). Ressources Eduscol.
[2] http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html, consulté en novembre 2020
[3] extrait du fichier CM2.GeométrieA, http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html, consulté en novembre 2020.

reproductions faites par les élèves ?	*dessin dans le paradigme géométrique G1 (calque).*

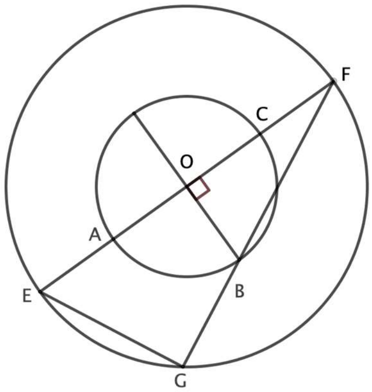
2. Deuxième reproduction

Dans un deuxième temps, l'enseignant souhaite proposer une reproduction de la figure dont la première étape de tracé serait la reproduction du rectangle.	*Questionnement sur des conditions nécessaires à l'existence d'une configuration géométrique (relève du paradigme géométrique G2).*

Lors de son travail de préparation, il s'interroge de façon théorique (c'est-à-dire en convoquant ses connaissances « expertes », sans se restreindre aux connaissances visées au cycle 3) sur les conditions que les dimensions du rectangle doivent respecter pour que la figure soit constructible.

Il réalise la figure de travail ci-dessous avec les hypothèses suivantes :

- les deux cercles ont le même centre O ;
- [EF] est un diamètre du grand cercle ; il coupe le petit cercle en A et C ;
- OF = 2 OC ;
- (OB) est perpendiculaire à (EF) en O et B appartient au petit cercle ;
- F, B, G sont alignés et G appartient au grand cercle.



a) Montrer que EFG est un triangle rectangle en G.	*Triangle rectangle inscrit dans un cercle*
b) Montrer que les triangles EFG et FBO sont semblables.	*Égalité des angles caractéristique des triangles semblables*
c) En déduire que FG = 2 EG.	*Propriété des rapports de longueurs pour des triangles semblables*
d) Conclure sur une condition à respecter sur les dimensions du rectangle pour que la figure à reproduire soit constructible.	*Retour au problème initial de reproduction : exploitation de l'analyse d'une sous-figure*
e) Rédiger un programme de construction conduisant à la reproduction de la figure en commençant par le tracé d'un rectangle de longueur 10 cm.	*Organiser et formuler les étapes de la construction. Mettre en application une règle énoncée.*

B. Activité 2[4]

L'enseignant demande aux élèves de restaurer la *Figure Modèle* ci-dessous à partir de la *Figure Amorce*.

[4] exercice 2, *Euromaths*, 2009, p.135.

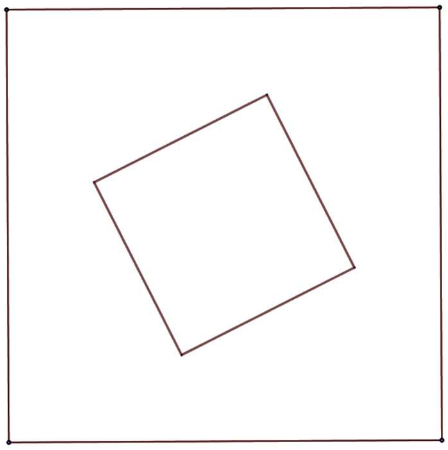


Figure Modèle

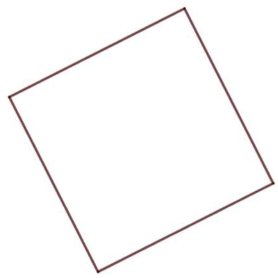


Figure Amorce

1. Reproduire la *Figure Modèle* à partir de la *Figure Amorce*, à la règle non graduée et au compas. *Laisser apparents les traits de construction. (La figure Amorce est en annexe 0, à rendre avec la copie).*

Réaliser l'activité élève (paradigme géométrique G1) : prolongement, report de longueur

2. Soit EFGH un carré et les points A, B, C et D tels que :

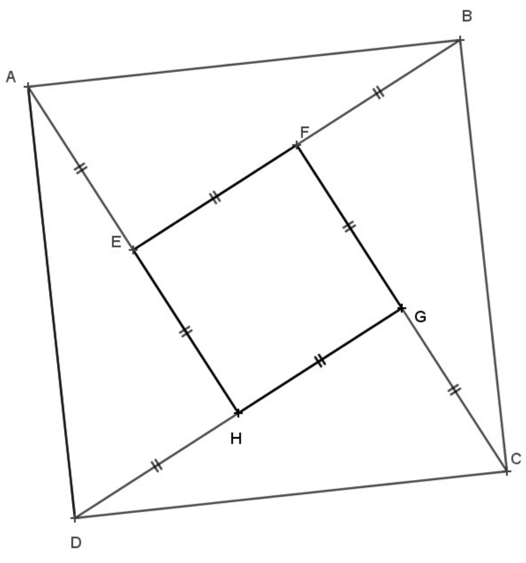
   A est le symétrique de H par rapport à E,

   B est le symétrique de E par rapport à F,

   C est le symétrique de F par rapport à G,

   et D est le symétrique de G par rapport à H.

Questionnement sur la validité des propriétés prélevées sur la figure dans le travail en géométrie dessinée de la question 1 et sur le choix des instruments à proposer aux élèves, porté par une analyse fine de la figure (paradigme géométrique G2)



3. Montrer que ABCD est un carré.

Propriétés de la symétrie centrale. Triangles isométriques. Angles complémentaires. Caractérisation d'un carré (losange avec un angle droit)

4. Montrer que la droite (AH) coupe [DC] en son milieu.

Parallélisme (double perpendicularité). Droite des milieux

5. Quels instruments pourrait-on mettre à disposition des élèves pour obtenir la *Figure Modèle* à partir du carré ABCD déjà construit ? Justifier.

Lien entre tâche, instrument à disposition et propriétés utilisées.

6. Comparaison de l'aire de ABCD et de l'aire de EFGH.
7. Justifier que le triangle AHD est rectangle en H.

Alignement, perpendicularité, angles

8. Comparer les aires du triangle AHD et du carré EFGH sans effectuer de calcul. Identifier la(les) propriété(s) des aires sur laquelle (lesquelles) s'appuie la comparaison.

Mise en évidence que les aires de AHD et de EFGH sont égales en passant par le fait que le triangle AHD est la moitié d'un rectangle décomposable en deux carrés identiques au carré EFGH (principe d'additivité des aires)

9. En déduire la mesure de l'aire du carré EFGH en choisissant l'aire du carré ABCD comme unité.

Principe d'additivité des aires. Utilisation des fractions pour mesurer une aire par rapport à une unité.

C. Activité 3 (Annexe 1)

1. L'analyse porte sur l'activité « *Encore une belle rosace à reproduire* » (Annexe 1).
2. L'enseignant décide de proposer, comme aides, sur papier quadrillé les figures 1 et 2 de l'annexe 3. Il prépare les figures suivantes :

Questionnement sur l'impact du support (papier quadrillé, papier blanc) dans une activité de reproduction de figure.

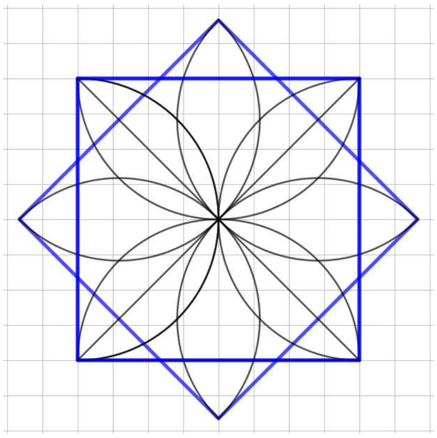


Figure 1

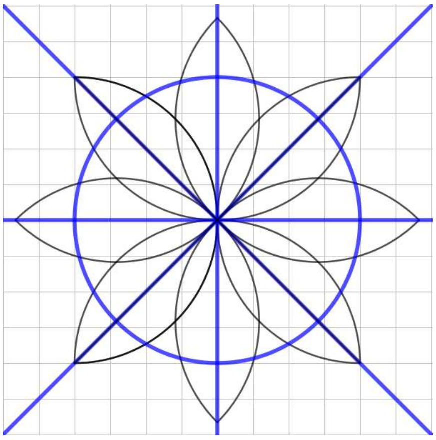


Figure 2

3. Donner les grandes étapes de deux stratégies de construction, avec règle et compas seulement, sur papier quadrillé, induites respectivement par ces deux aides.

Propriétés du cercle et du carré. Angles. Changement de regard sur une figure
Reconnaissance d'éléments caractéristiques d'un cercle (centre, rayon, diamètre)

4. Pour chacune des deux stratégies, en quoi l'usage d'un papier quadrillé est-il facilitateur par rapport à l'usage d'un papier uni ?

Impact du support sur l'analyse et sur la reproduction de la figure.

5. On s'intéresse aux deux figures ci-dessous, et on cherche à les reproduire à l'aide d'un logiciel de programmation.

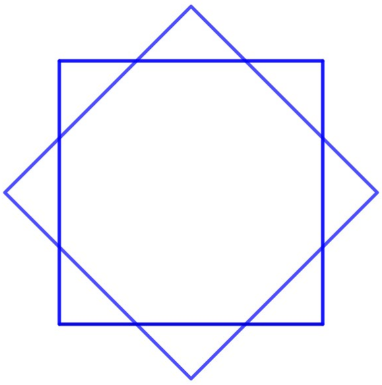


Figure A

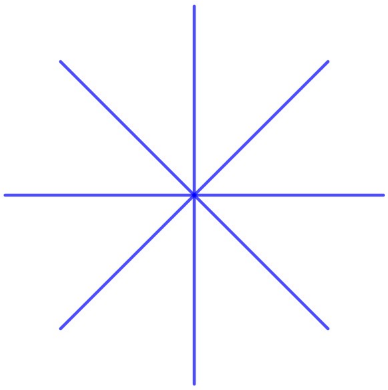
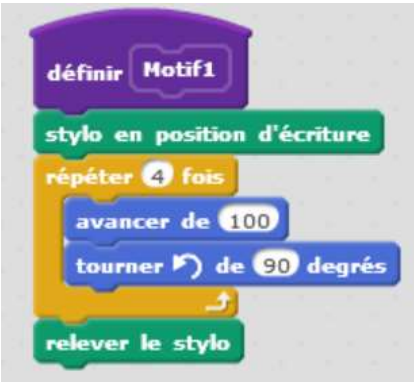


Figure B

a) On considère dans un premier temps les trois blocs d'instructions suivants.
Pour chacun des trois schémas, on désignera par D le point de départ, A le point d'arrivée, et on supposera qu'initialement, le « lutin » qui effectue le tracé est orienté vers le haut.



Pour chacun d'entre eux, tracer à main levée un schéma codé de la figure obtenue quand on les exécute.

Structuration de l'espace : Décodage d'une suite d'instructions décrivant les déplacements d'un personnage sur un écran

b) On considère maintenant le script ci-dessous.
On rappelle que « s'orienter à 0 » permet d'orienter le lutin vers le haut.

Algorithmique et programmation : interpréter une séquence d'instructions incluant une boucle.

c)

i. Par quelle instruction, parmi « Motif1 », « Motif2 » et « Motif3 » faut-il remplacer l'instruction « Motif » de ce script pour obtenir une figure semblable à la figure A ?

ii. Même question pour la figure B.

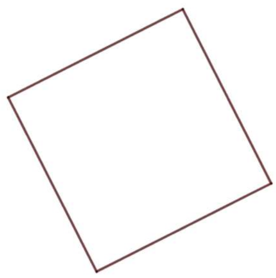
d) Tracer à main levée un schéma codé de la figure obtenue quand on remplace « Motif » par le bloc restant parmi « Motif1 », « Motif2 » et « Motif3 ».

Reconnaitre les effets d'une rotation sur une figure, et identifier les éléments caractéristiques d'une rotation.

Algorithmique : reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions (dans le cas d'une figure géométrique).

Annexe 0 (à rendre avec la copie)

Figure Amorce



Annexe 1 - Extrait du fichier *CM2.GeométrieD*

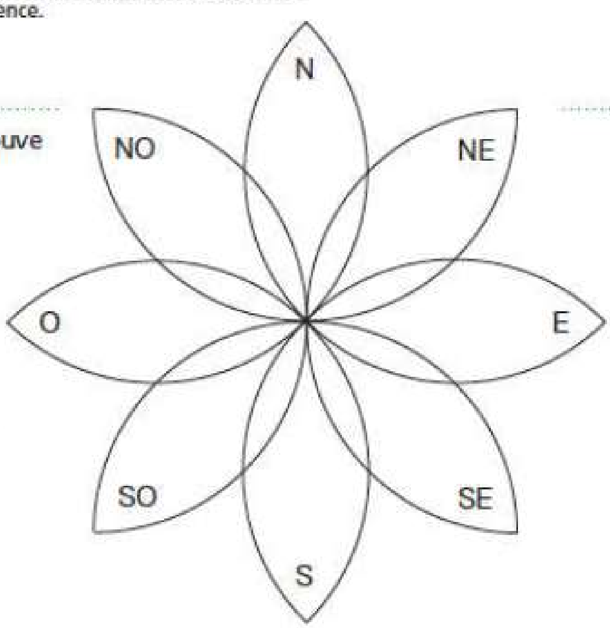
http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html

Encore une belle rosace à reproduire

Objectifs : chercher les propriétés d'une figure pour comprendre comment la reproduire. Faire des tracés supplémentaires pour les mettre en évidence.

DÉCOUVERTE

- Observe cette rose des vents que l'on trouve sur certaines boussoles.
- Cherche les propriétés de cette figure qui vont te permettre de la reproduire sans la décalquer.
- Reproduis-la sur du papier quadrillé, puis sur du papier uni. Explique comment tu as fait.
- Quelles propriétés as-tu repérées et utilisées pour reproduire cette figure ?



Pour t'aider, observe les figures 1 et 2. Chacune d'elles propose une méthode de construction de la rose des vents.

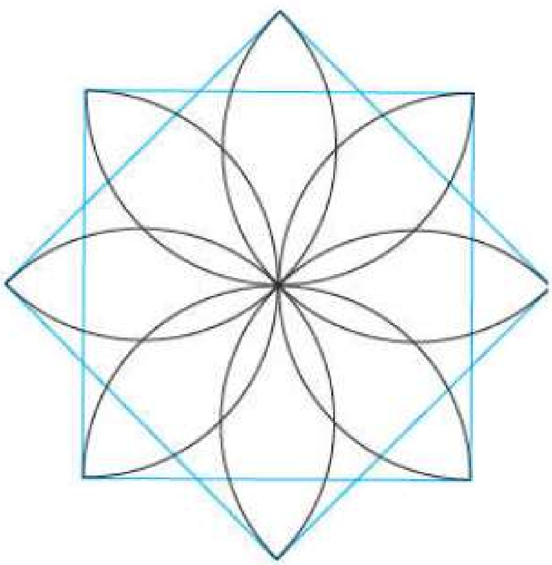


figure 1

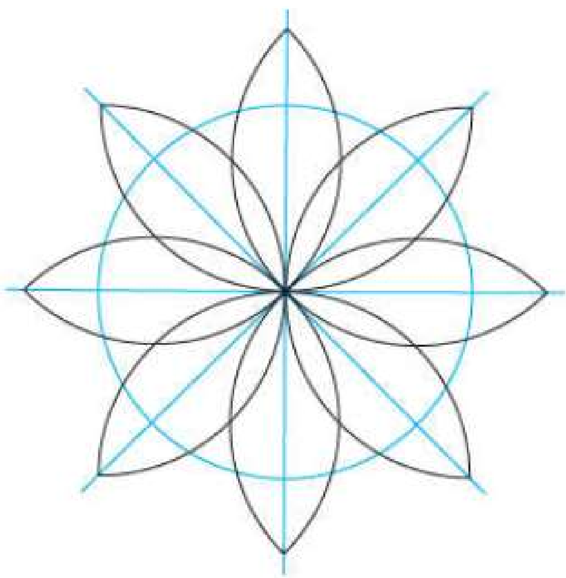
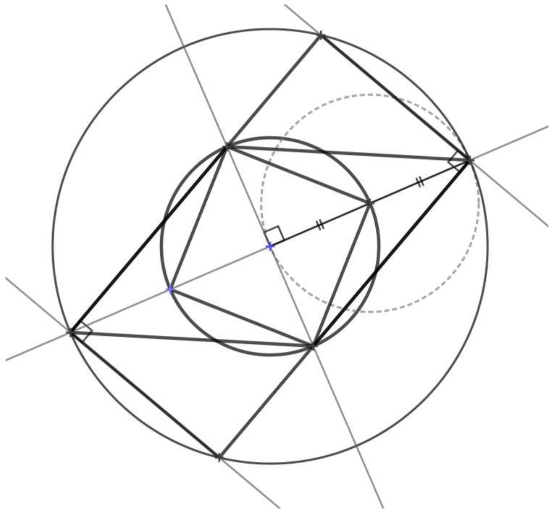


figure 2

Eléments de correction

Partie A

1.a)



b)

1. Pour la construction des deux cercles

- Le grand cercle a un rayon double de celui du petit ; les deux cercles ont le même centre.

2. Pour la construction du carré

- Les diagonales du carré sont deux diamètres du petit cercle qui sont perpendiculaires en son centre.

3. Pour la construction du losange

- Une diagonale du carré est aussi une diagonale du losange.
- L'autre diagonale du losange lui est perpendiculaire au centre du carré et est un diamètre du grand cercle.

4. Pour la construction du rectangle

- Deux sommets du rectangle sont communs avec des sommets du losange : la diagonale du losange qui est un diamètre du grand cercle est aussi une diagonale du rectangle.
- Les deux autres sommets du rectangle appartiennent aussi au grand cercle, et sont chacun alignés avec l'un des deux sommets déjà identifiés, et avec l'un des sommets communs au carré et au losange.

Ou

- Un côté du rectangle a pour extrémité l'un des sommets déjà identifiés et passe par l'un des sommets communs au carré et au losange ; son autre extrémité appartient au grand cercle. Deux côtés adjacents du rectangle sont perpendiculaires.

e) Le papier calque

2.

a) EFG est inscrit dans le cercle de diamètre [EF].

b) EFG et FBO sont rectangles respectivement en G et O. $\widehat{EFG} = \widehat{OFB}$. Les angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{FEG}$ sont complémentaires de même que $\widehat{OFB}$ et $\widehat{OBF}$, donc $\widehat{FEG} = \widehat{OBF}$.

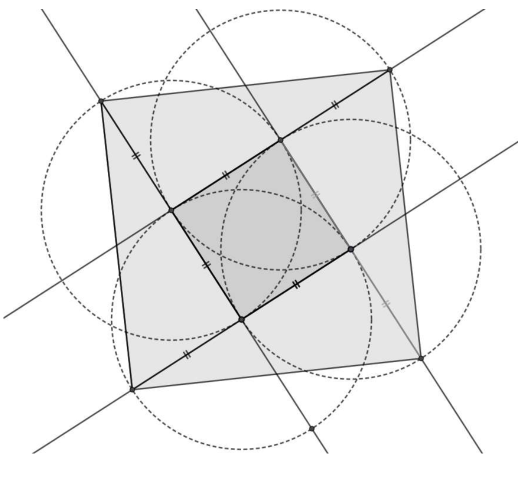
c) Les triangles EFG et FBO sont semblables donc $\frac{FO}{FG} = \frac{BO}{EG}$. De plus, FO = 2BO.

d) Il faut que la longueur du rectangle soit le double de sa largeur.

e) Tracer un segment [GF] de longueur 10 cm. Tracer le segment [EG] perpendiculaire à (GF) et de longueur 5cm. Construire le rectangle EGFH. Tracer O le point d'intersection des diagonales de EGFH. Tracer le cercle de diamètre [EF] (et de centre O). Tracer la droite perpendiculaire à (EF) en O. Elle coupe (FG) en B. Tracer le cercle de centre O et de rayon [OB]. Ce cercle coupe [EF] en A et C et (OB) en B et D. Tracer ABCD et BEDF.

Partie B

1.



2. a) Propriétés de la symétrie centrale, triangles isométriques, angles complémentaires. Caractérisation d'un carré (losange avec un angle droit).

b) Parallélisme (double perpendicularité) et droite des milieux.

c) Bande de papier avec un bord droit (ou règle graduée) pour identifier les milieux des côtés du carré ABCD, puis règle pour tracer les droites joignant chaque sommet au milieu du côté opposé.

3. a) EFGH est un carré donc $\widehat{EHG}$ = 90° ; A symétrique de H par rapport à E donc A, E et H sont alignés ; D symétrique de G par rapport à H donc G, H et D sont alignés. On en déduit que $\widehat{EHG}$ = 90° et donc AHD rectangle en H.

b) Le triangle AHD est la moitié d'un rectangle qui peut être décomposé en deux carrés identiques au carré EFGH (principe d'additivité des aires).

c) Aire EFHG = 1/5 x aire ABCD

Partie C

1. Stratégie 1 : Tracer un carré (à partir de ses côtés). Tracer ses diagonales. Construire les sommets du deuxième carré en reportant sur les médianes du premier carré (le long des lignes du quadrillage) à partir du centre du premier carré, la distance entre le centre et un sommet du premier carré. Tracer les demi-cercles de centres les intersections des diagonales de chaque carré avec les côtés de l'autre.

Stratégie 2 : Tracer quatre droites sécantes en même point et partageant le plan en huit secteurs angulaires superposables en s'aidant du quadrillage. Tracer un cercle de centre le point d'intersection de ces droites, puis huit demi-cercles de même rayon que le précédent et de centre l'un des points d'intersection des droites et du cercle.

2. a) Pour motif 1, on obtient un carré de côté 100 avec point de départ = point d'arrivée sur sommet en bas à droite. Pour motif 2, on obtient le même carré, point de départ = point d'arrivée sur centre du carré. Pour motif 3, on obtient une croix (deux médianes d'un carré de côté 200), point de départ = point d'arrivée au centre de la croix.

   b) i. Motif 2, car rotation d'un carré de centre le centre du carré
      ii. Motif 3, car rotation d'une « croix » de centre le centre de la croix.
      iii. On obtient la rotation du carré de centre un de ses sommets, d'angle 45°.